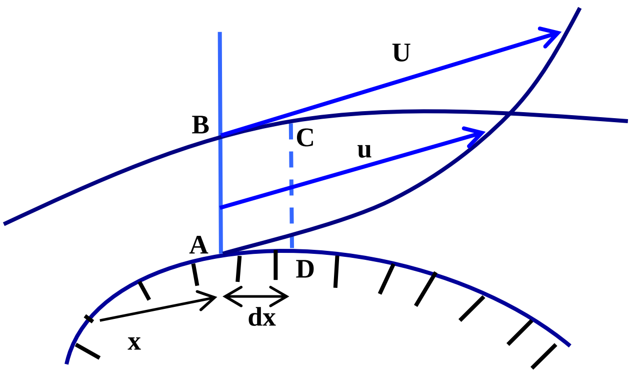
METICHE MEHDI
Maître Assistant
Chargé de cours

MECANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIE

ECOULEMENTS VISQUEUX, TURBULENCE, COUCHE LIMITE ET ECOULEMENTS TRANSITOIRES

EXERCICES RESOLUS



Centre Universitaire de Béchar
Octobre 2004

MECANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIE

ECOULEMENTS VISQUEUX, TURBULENCE, COUCHE LIMITE ET ECOULEMENTS TRANSITOIRES

EXERCICES RESOLUS

METICHE MEHDI
Maître Assistant
Chargé de cours
Centre Universitaire de Béchar (Algérie)

A

Amira …..

Signe de reconnaissance ;

Une autre fois encore.

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

Le présent manuel intitulé « Mécanique des Fluides Approfondie : Exercices Résolus » ; est réalisé suivant le programme du module TEC058, portant le titre de l'Hydraulique Avancée' appartenant au cursus de formation de l'Ingénieur Hydraulicien.

Le travail est le fruit d'enseignement du module pendant quatre ans au niveau de l'Institut d'Architecture, de Génie Civil et d'Hydraulique, au niveau du Centre Universitaire de Béchar. Il comporte alors aussi, les examens résolus du module.

Son utilité apparaît sur son contexte de présenter des exercices résolus pour des sujets dont de tels sont un peu rares. En plus des ingénieurs hydrauliciens, il peut servir aussi à la formation des ingénieurs mécaniciens, chimistes et physiciens, comme il forme un outil intéressant pour les étudiants de poste graduation des différentes spécialités précitées, vu le manque flagrant des ouvrages de ce genre.

Quatre sujets fondamentaux y sont traités : les écoulements visqueux, la turbulence, la couche limite, et les écoulements transitoires, dont plus de soixante (60) exercices sont présentés, exposés, traités et résolus d'une manière détaillée et exhaustive.

ECOULEMENTS VISQUEUX

Exercice 1 :

Donner l'équation de mouvement d'un écoulement permanent, irrotationnel, pour un fluide incompressible pour :
- un fluide réel ?
- un fluide parfait ?

Solution :

Pour un fluide réel, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + rot\vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{grad}\, p \ = -\overrightarrow{grad}\, p + \rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{V}$$

Pour un écoulement permanent, nous avons : $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Pour un écoulement irrotationnel, nous avons : $rot\vec{V}$ =0

Avec $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{V}) - div(\overrightarrow{grad}\vec{V})$

On admet que la force de pesanteur dérive d'un potentiel U : $\vec{g} = \overrightarrow{grad}U$

$$\rho(\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}V^2) = -\overrightarrow{grad}\, p + \rho\overrightarrow{grad}U + \mu\Delta\vec{V}$$

$$\rho(-\overrightarrow{grad}U + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, p + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}V^2) = \mu.\Delta\vec{V}$$

$$\rho.\overrightarrow{grad}(-U + \frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}V^2) = \mu.\Delta\vec{V}$$

On a : U = -g.z $\qquad \rho.\overrightarrow{grad}(gz + \frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}V^2) = \mu.\Delta\vec{V}$

Pour un fluide parfait, nous avons : $\mu = 0$

$$\rho.\overrightarrow{grad}(gz + \frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}V^2) = 0$$

$$gz + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} V^2 = Constante$$

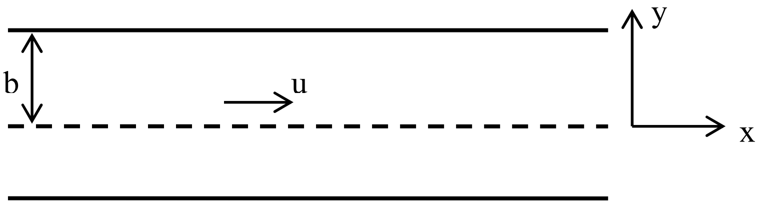
Divisant les deux termes de l'équation par g ; nous aurons :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{1}{2g} V^2 = Cte$$

Cette dernière n'est autre que l'équation de Bernoulli.

Exercice 2 :

Etablir l'équation de mouvement d'un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible se produit entre deux plaques planes lisses parallèles ?
(Ecoulement monodimensionnel suivant x)



Solution :

L'équation d'Euler s'écrit :

Suivant x : $\rho.(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{-\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u$

Suivant y : $\rho.(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) = \frac{-\partial p}{\partial y} + \mu\Delta v$

Suivant z : $\rho.(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) = \frac{-\partial p}{\partial z} + \mu\Delta w$

On a aussi écoulement monodimensionnel :

$$v = w = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Et puisque c'est incompressible et permanent, on peut écrire de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Les trois équations d'Euler deviennent : $\frac{-\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, et $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

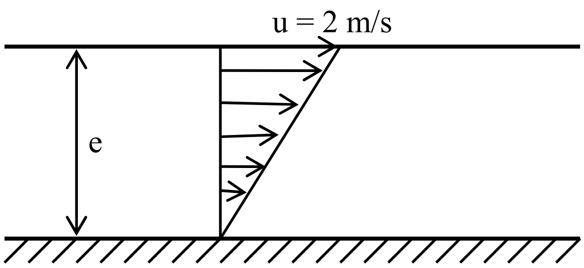
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Qui démontre que c'est un écoulement de Couette.

Exercice 3 :

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 2.10^{-2}$ N.s/m^2, sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



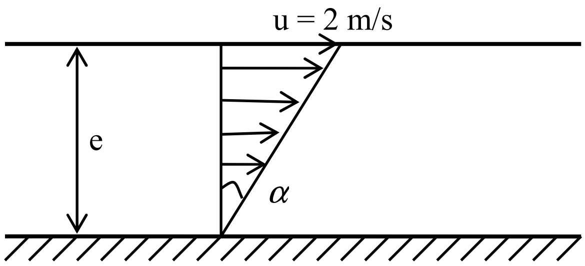
si l'épaisseur de l'écoulement est e = 5 cm, déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :
a- à la paroi ?
b- à une distance de 2 cm de la paroi ?
c- à une distance e de la paroi ?

Solution :

Nous avons :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Et d'après le profil, on a : $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{u_{\max}}{e} = \frac{u}{y} \Rightarrow u = \frac{u_{\max}}{e}.y = \frac{2}{0,05}.y = 40y$



$$\frac{du}{dy} = 40$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu .40 = 2.10^{-2}.40 = 0,8 \text{ N/m}^2$$

Puisque $\frac{du}{dy}$ est constante, la valeur de la tension de cisaillement est constante à n'importe quel point de l'écoulement est égale à 0,8 N/m^2.

Exercice 4 :

La distribution de vitesses pour un écoulement permanent incompressible bidimensionnel est donnée par :

$$u = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

a- montrer que cette distribution satisfait l'équation de continuité ?
b- montrer que l'écoulement vérifie l'équation de Laplace si le champ de vitesse dérive d'un potentiel ?

Solution :

a- l'équation de continuité pour un écoulement incompressible bidimensionnel est donnée par :

divV = 0 $\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Et nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{divV} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2}{x^2+y^2} + \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{divV} = \frac{-2}{x^2+y^2} + \frac{+2}{x^2+y^2} = 0$$

Donc divV = 0 : l'écoulement est continu.

b- nous avons : $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$

Si le champ de vitesse dérive d'un potentiel, on peut écrire :

$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$\vec{V} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \overrightarrow{grad}\phi$$

Nous avons aussi : divV = 0 div($\overrightarrow{grad}\phi$)= 0 $\Delta\phi = 0$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$; cette dernière est bien évident, l'équation de Laplace

Exercice 5 :

Le profil de vitesse pour un écoulement plan d'un liquide, est donné par :

$V(y) = 3.y^3 + 2.y^2$.

Si la viscosité dynamique du liquide est $\mu = 3{,}5.10^{-2}$ N.s/m^2.
Calculer la valeur de la tension de cisaillement à la paroi et à 30 cm de celle-ci ?

Solution :

On a :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Avec $V = 3.y^3 + 2.y^2$.

$$\frac{dV}{dy} = 9.y^2 + 4.y$$

A la paroi : $\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = 3{,}5.10^{-2}.(9.0 + 4.0) = 0$

A 30 cm de la paroi : $\tau_{0,3} = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0,3}$ = 3,5.10^{-2}.(9.0,3 + 4.0,3) = 7,035.10^{-2} N/m2

Exercice 6 :

Soit un écoulement plan d'un liquide de viscosité cinématique ν = 5.10^{-4} m^2/s et de masse volumique ρ = 10^3 kg/m^3 sur une plaque plane.
Le profil de vitesse est donné par :

V(y) = $\frac{1}{2}$y^3 .
Déterminer la valeur de la tension de cisaillement :
- à la paroi ?
- à 7 cm de la paroi ?

Solution :

On a :
$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

Avec $\mu = \nu.\rho = 5.10^{-4}.10^{3} = 5.10^{-1} kg/m = 5N.s/m^2$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{3}{2} y^2$$

$$\tau_{y=0} = \mu \frac{dV}{dy}\Big|_{y=0} = 0$$

$\tau_{y=0,7} = \mu \frac{dV}{dy}\Big|_{y=0,7}$ = 5.(3/2.0,07^2) = 3,67.10^{-2} N.m2

Exercice 7 :

Soit un écoulement dont le potentiel des vitesses est donné par :

Φ = x^2 -2.y –y^2 avec v = gradΦ

Démontrer que l'écoulement est :
- bidimensionnel
- permanent
- continu (vérifiant l'équation de continuité) ?

Solution :

- Nous avons : V(u,v,w)

Avec :

$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2.x$

$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2.y-2$

$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$

Il est évidant, que la vitesse ne dépend pas de z : l'écoulement est donc bidimensionnel.

- D'autre part, nous avons : $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial grad\phi}{\partial t} = 0$

Il est évident, que la vitesse ne dépend pas du temps : l'écoulement est donc permanent.

- on a aussi : $divV = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$

L'équation de continuité est vérifiée, donc l'écoulement est continu.

Exercice 8 :

Supposant que les composantes du vecteur vitesse sont :

$u = x^2 + z^2$
$v = x^2 + y^2$

Déterminer les composantes du vecteur vitesse suivant la direction z, qui satisfont l'équation de continuité ?

Solution :

Pour satisfaire l'équation de continuité, divV = 0.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

Nous avons :

$u = x^2 + z^2$
$v = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2.x \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2.y$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -(x + y) \qquad w = -2(x + y).z$$

Exercice 9 :

Le profil de vitesses pour un écoulement plan sur une plaque plane fixe, d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 10^{-2}$ N.S/m^2, est donné par :

$V(y) = y^3 + 2.y^2 + 5.y$

Déterminer la valeur de la tension de cisaillement à 10 cm de la paroi ?

Solution :

On a :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

Et nous avons : $V(y) = y^3 + 2.y^2 + 5.y$

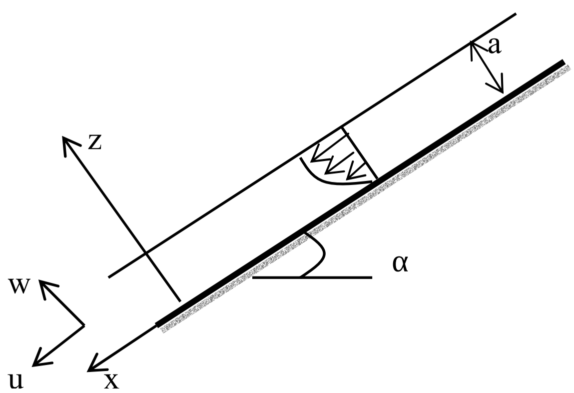
$$\frac{dV}{dy} = 3.y^2 + 4.y + 5$$

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = 2.10^{-2}.[3.0,1^2 + 4.0,1 + 5] = 2.10^{-2}.[0,03 + 0,4 + 5] = 10,86.\ 10^{-2}\ \text{N/m}^2.$$

$\tau = 10,86.\ 10^{-2}$ N/m^2.

Exercice 10 :

Sur une plaque plane lisse, faisant avec l'horizontal un angle α, en mouvement permanent bidimensionnel établi et sous une épaisseur a, coule sous l'effet de la pesanteur, un liquide de viscosité ν.
Déterminer le débit par unité de largeur et la vitesse débitante (moyenne) ?



Solution :

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent à 2 dimensions :

Suivant x : $\rho.(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{-\partial p_g}{\partial x}+\mu.(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$

Suivant z : $\rho.(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z})=\frac{-\partial p_g}{\partial z}+\mu.(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})$

De l'équation de continuité, on écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

L'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t}=0$

L'écoulement est établi : $\frac{\partial}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0$

w est nul et u ne dépend que de z, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial p_g}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$\frac{\partial p_g}{\partial z}=0$ avec $P_g = p + \rho.g.h$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\rho.g.\frac{\partial h}{\partial z}=0 \quad \text{soit : } \frac{\partial p}{\partial z}+\rho.g.Cos\alpha=0$$

Après intégration de cette 'équation, nous obtenons :

$p = \rho.g.z.Cos\alpha + f(x)$

Puisque la pression est constante sur la surface libre : z = a f(x) = 0.

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial x}+\rho.g.\frac{\partial h}{\partial x}=0 - \rho.g.Sin\alpha$$

En intégrant, nous trouvons :

$$\mu\frac{\partial u}{\partial z}= \rho.g.z.Sin\alpha + A$$

$$\mu.u = - \rho.g.\frac{z^2}{2}.Sin\alpha + A.z + B$$

Sur la paroi nous avons : z = 0, u = 0 B = 0

A la surface libre, la contrainte est nulle : z = a : $\mu\frac{\partial u}{\partial z}=0$ A = $\rho.g.a.Sin\alpha$

u = $\rho.g.\dfrac{Sin\alpha}{u}.(a.z-\dfrac{z^2}{2})$

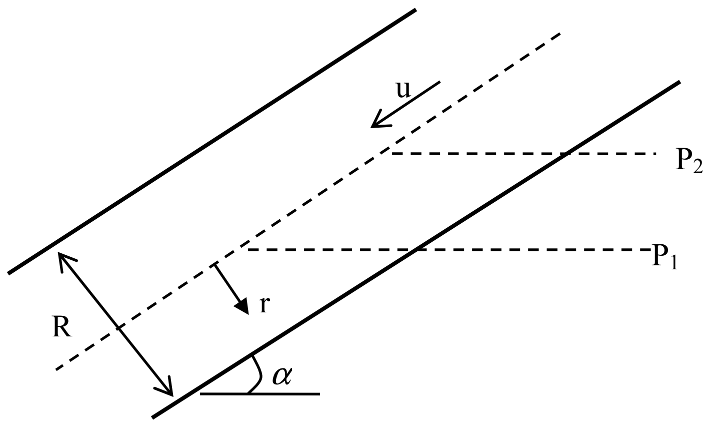
Le débit par unité de largeur : $q_v = \int_0^a u.dz = \rho.g.\dfrac{a^3}{3\mu}.Sin\alpha = \dfrac{a^3.g}{3\nu}.Sin\alpha$

Et la vitesse débitante (moyenne) sera :

$U_m = q_v / a = \dfrac{a^2.g}{3\nu}.Sin\alpha$

Exercice 11 :

Un écoulement de Poiseuille (régime laminaire, u = $-\dfrac{-1}{4\mu}.\dfrac{dP}{dx}(R^2-r^2)$, d'une huile dans un tube de 12 mm de diamètre, de longueur L, incliné d'un angle α dont Sinα = 0,0445.
Si la pression statique à l'intérieure est constante tout le long du tube, et le débit mesuré égal à 20 l/h, déterminer la viscosité cinématique de cette huile ?



Solution :

Si P_2 est référence des pressions, on écrit :

$P_2 = p_2$, et : $P_1 = p_1 + \rho.g.L.Sin\alpha$

$\Delta P = P_1 - P_2 = p_1 + \rho.g.L.Sin\alpha - p_2$

A pression statique constante : $p_1 = p_2$

$\Delta P = \rho.g.L.Sin\alpha \qquad \dfrac{\Delta P}{L} = \rho.g.Sin\alpha$

Puisque le régime est laminaire : $dQ_v = u.\,2.\pi.r.dr$

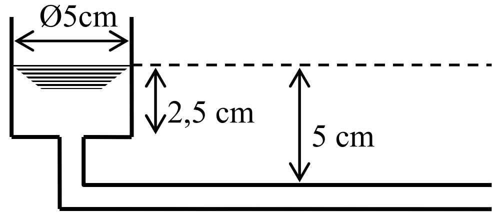
$$Q_v = \int_0^R \frac{-1}{4u}.\frac{dp}{dx}.(R^2-r^2).2\pi.r.dr = \int_0^R \frac{-1}{4\mu}.\rho.g.Sin\alpha.(R^2-r^2).2\pi.rdr = \frac{\pi}{128\mu}.\rho.g.Sin\alpha.D^4$$

On a aussi : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ avec $\mu = \frac{\pi}{128.Q_V}.\rho.g.Sin\alpha.D^4$

$$\nu = \frac{\pi}{128.Q_V}.g.Sin\alpha.D^4 = 4.10^{-5}\ m^2/s\ .$$

Exercice 12 :

Un récipient cylindrique de 5 cm de diamètre, laisse écouler un liquide visqueux qu'il contient par un tube horizontal de diamètre 1 mm et de longueur 40 cm. Sachant qu'il a fallu 75 minutes pour que la charge en amont du tube passe de 5 à 2,5 cm, déterminer la viscosité cinématique du liquide (on négligera les effets dus aux extrémités du tube ; l'écoulement dans le tube est permanent de type Poiseuille : $q_v = \frac{\pi}{128}.\frac{\Delta P}{L.\mu}d^4$?



Solution :

Pour un écoulement permanent, on écrit :

$\Delta P = \rho.g.h$

$$q_v = \frac{\pi}{128}.\frac{g.h}{L.\nu}d^4$$

De l'équation de continuité, on écrit :

$$q_v = -S\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\pi.d^2}{4}.\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\pi.5^2}{4}.\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\pi}{128}.\frac{g.h}{L.\nu}d^4$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\pi}{128}.\frac{g}{L.\nu}d^4.\frac{4}{\pi.5^2}.h = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{d^4}{800}.\frac{g}{L.\nu}.h = 0$$

Ou bien : $\frac{\partial h}{h} = \frac{d^4}{800}.\frac{g}{L.\nu}.dt$

L'intégration de cette équation, donne :

$$\ln\frac{h_1}{h_2} = \frac{d^4}{800}.\frac{g}{L.\nu}.T$$

$$\nu = \frac{d^4}{800}.\frac{g}{L}.\frac{T}{\ln\frac{h_1}{h_2}} = \frac{(10^{-3})^4}{800}.\frac{10}{40.10^{-2}}.\frac{75.60}{\ln\frac{5}{2,5}} = 2.10^{-6}\ m^2/s$$

$\nu = 2.10^{-6}$ m^2/s = 2.10^{-2} Stokes

Exercice 13 :

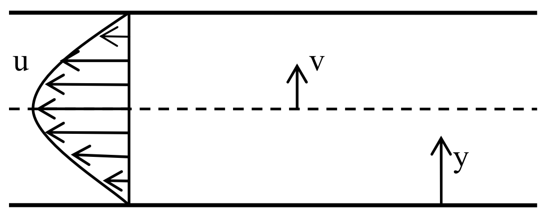
Soit un tube cylindrique de 3 km de long, de 10 cm de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique $\mu = 0,4$ Poise.

On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique $u = 10.(y - y^2)$ en unité CGS.

u étant la vitesse à la distance y de la paroi ?

Calculer :

- la force de frottement visqueux par unité de surface contre la paroi ?
- la force de frottement visqueux par unité de surface à 2 cm de la paroi ?
- la force totale de frottement s'exerçant sur le tube ?



Solution :

1- $\tau = \mu\frac{du}{dy} = \mu.(10 - 20.y)$

A la paroi, nous avons :
y = 0 ; u = 0
y = 10 cm ; u = 0.

$\tau = \mu.10 = 0,4.10 = 4$ dynes/cm^2.

2- pour y = 2 cm :

$\frac{du}{dy} = 10 - 20.0,2 = 10 - 4 = 6$.

$\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ = 0,4.6 = 2,4 dynes/cm^2.

3- la surface totale du tube :

S = $\pi.D.L = 3.\pi.10^6$

La force de frottement sera :

F = $\tau_0.S$ = $\mu \dfrac{du}{dy_{y=0}}.\pi.D.L$ = 4.3 π .10^6 = 3,77. 10^7 dunes = 377 Newtons

Exercice 14 :

Un réfrigérant est composé d'un groupe de 100 tubes cylindriques parallèles, de diamètre D = 1 cm et de longueur L = 4 m. A la vitesse V = 2 m/s, on y fait circuler de l'huile (ρ =900 Kg/cm^3, μ_1 = 3.10^{-2} Poiseuille à l'entrée et varie jusqu'à la sortie, à cause de refroidissement, pour atteindre μ_2 = 10^{-1} Pl).

1- montrer que l'écoulement est laminaire ?

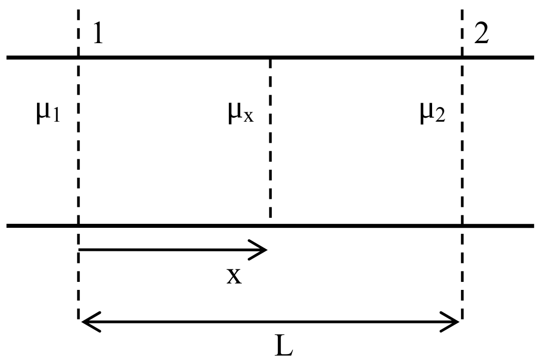
2- donner -pour un tube- la relation $\mu(x): f(\mu_1, \mu_2, L, x)$ avec x la variable longueur entre l'entrée et la sortie du tube ?

3- l'écoulement est de type Poiseuille dont $\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{32.V}{D^2}.\dfrac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}.L$, calculer la variation de pression entre l'entrée et la sortie d'un tube ?

4- en déduire la puissance nécessaire W, pour faire couler l'huile dans un tube, ensuite pour l'ensemble du groupe ?

5- donner la fonction W de n tubes sans tenir compte du diamètre D ?

Solution :



1- on a $\Re_{Dmax} = \dfrac{\rho.V.D}{\mu} = \dfrac{9.10^2.2.10^{-2}}{3.10^{-2}}$ = 600 < 2000

le régime est laminaire.

2- $\mu(x) = \frac{x}{L}.(\mu_1 - \mu_2) + \mu_1$.

3- $\Delta P = \frac{dP}{dx} = \frac{32.V}{D^2}.\frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}.L = \frac{32.2}{0{,}01^2}.\frac{(3.10^{-2}.10^{-5}+10^{-1}.10^{-5})}{2}.4 = 1{,}66$ bars

4- $W = Q_v.\left|\Delta P\right| = \frac{\pi}{4}.(10^{-2})^2.2.1{,}66.10^5 = 2610$ Wat.

5- $W = n.\ \Delta P.\ Q_v = n.32.\frac{V}{D^2}.\frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}.L.\frac{\pi D^2}{4}.V = 4\pi.L.V^2.(\mu_1+\mu_2).n$

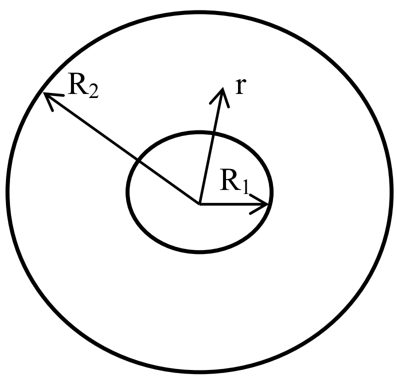
$W = 4\pi.L.V^2.(\mu_1+\mu_2).n$

Exercice 15 :

Soit la figure ci-après, représentant un cylindre plein de rayon R_1 à l'intérieur d'un cylindre creux de rayon intérieur R_2 et entre lesquels existe un écoulement laminaire.
1- l'écoulement est de type Couette dont la distribution de vitesse est donnée par

$$u = -\frac{\Delta P}{4\mu.L}.r^2 + C_{1.}\ln(r) + C_2$$

Avec
$u = 0, pour : r = R_1$
$u = 0, pou : r = R_2$,
$et : \Delta P = P_1 - P_2$



Etablir la relation donnant le rayon pour lequel la vitesse est maximale ?
2- trouver la loi du débit volumique de cet écoulement annulaire et en déduire la vitesse moyenne de débit ?

Solution :

1- Nous posons : $K = \frac{\Delta P}{4\mu.L} = \frac{P_1 - P_2}{4\mu.L}$

$C_1.\ln R_1 + C_2 - K.R_1^2 = 0$

Et $C_1.\ln R_2 + C_2 - K.R_2^2 = 0$

Ce qui donne : $C_1 = K.\dfrac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \dfrac{R_1}{R_2}}$ et $C_2 = K.R_1^2 - \dfrac{(R_1^2 - R_2^2).\ln R_1}{\ln \dfrac{R_1}{R_2}}$

$$u = \frac{P_1 - P_2}{4.\mu.L}\ (R_2^2 - r^2) - (R_2^2 - R_1^2).\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}$$

Le rayon pour lequel, la vitesse est maximale : $\dfrac{du}{dr} = 0$

$$-2.R_{max} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} / R_{max} = 0 \qquad R_{max} = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2.\ln(R_1/R_2)}}$$

2- le débit volumique s'écrit comme :

$$Q_v = \int_{R_1}^{R_2} u.dA = \int_{R_1}^{R_2} u.2\pi.rdr$$

$$Q_v = \int_{R_1}^{R_2} \frac{P_1 - P_2}{4.\mu.L}\ (R_2^2 - r^2) - (R_2^2 - R_1^2).\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}\ .2\pi.rdr$$

$$Q_v = \frac{\pi.(P_1 - P_2)}{8.\mu.L}.\ (R_2^2 - R_1^2).[R_2^2 - R_1^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln(R_2/R_1)}]$$

La vitesse moyenne sera :

$$V = \frac{Q_V}{A} = \frac{Q_V}{\pi.(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{(P_1 - P_2)}{8.\mu.L}.\ R_2^2 - R_1^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln(R_2/R_1)}$$

Exercice 16 :

Un viscosimètre à cylindres coaxiaux a les dimensions représentées sur la figure en ci-dessous.
On se propose de calculer la viscosité dynamique μ du liquida existant entre les deux cylindres, sachant que le couple mesuré C vaut 9.10^3 dynes = 9.10^{-4} N.

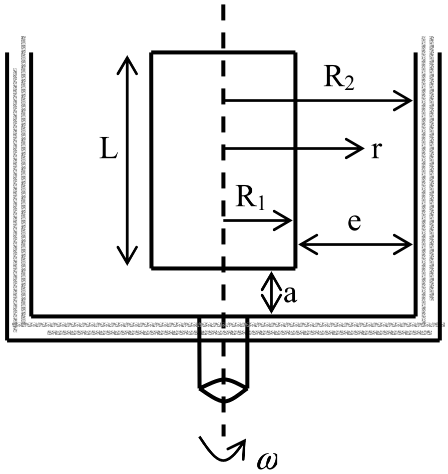
On donne :

R1 = 77 mm, R2 = 80 mm, e = 3 mm.

L = 200 mm, a = 4 mm, f = $\frac{1}{30} Tours/\sec onde = \frac{2\pi}{30}(1/s)$

La vitesse de Couette est donnée par :

$$V = \frac{1}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}.[r.(f.R_2^{\,2}) - \frac{R_1^{\,2}.R_2^{\,2}}{r}.f]$$



Solution :

Le couple C_1 crée par les surfaces latérales est donné par :

$C_1 = F.R_2 = \tau.S.R_2 = \tau.2\pi.R_2.R_2 = \mu.\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=R_2}.2\pi.R_2^{\,2}$

Avec V = R_2.f

$$C_1 = 4\pi.\mu.L.f.\frac{R_2^{\,2}.R_1^{\,2}}{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}$$

Pour le couple C_2 du au fond du cylindre, il est donné par :

$dC_2 = r.Df = r.\tau.Ds$

où τ : contrainte tangentielle au fond du cylindre et dS = 2π.rdr

$$dC_2 = r.\tau.2\pi.rdr = r.\mu.\frac{\partial V}{\partial r}.2\pi.r.dr$$

avec $\tau = \mu.\frac{\partial V}{\partial r} = \mu.\frac{V}{a} = \mu.\frac{r.f}{a}$ car : V = r.f

$$dC_2 = r.\mu.\frac{r.f}{a}.2\pi.r.dr = \frac{2.\pi.\mu.f}{a}.r^3 dr$$

$$C_2 = \int_0^{R_1} \frac{2.\pi.\mu.f}{a}.r^3 dr = \frac{2.\pi.\mu.f}{a}.\frac{R_1^{\ 4}}{4}$$

Le couple total mesuré sera :

$C = C_1 + C_2$

$$C = 4\pi.\mu.L.f.\frac{R_2^{\ 2}.R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2}} + \frac{2.\pi.\mu.f}{a}.\frac{R_1^{\ 4}}{4} = 2\pi.\mu.f.[\frac{2.L.R_2^{\ 2}.R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2}} + \frac{R_1^{\ 4}}{4a}]$$

$$\mu = C \ / \ 2\pi.f.[\frac{2.L.R_2^{\ 2}.R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2}} + \frac{R_1^{\ 4}}{4a}] = 0{,}199 \text{ Poise.}$$

LA TURBULENCE

Exercice 1 :

Démontrer, pour un écoulement turbulent que :

a- $\overline{U.V} = \overline{U}.\overline{V} + \overline{U'.V'}$

b- $\overline{U(t)} = \overline{U}$

c- $\overline{U.V.W} = \overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}.\overline{V'.W'} + \overline{V}.\overline{U'.W'} + \overline{W}.\overline{U'.V'} + \overline{U'.V'.W'}$

Solution :

a- $\overline{U.V} = \overline{(\overline{U}+U').(\overline{V}+V')} = \overline{\overline{U}.\overline{V} + \overline{U}.V' + U'.\overline{V} + U'.V'} = \overline{\overline{U}}.\overline{\overline{V}} + \overline{\overline{U}.V'} + \overline{U'.\overline{V}} + \overline{U'.V'}$

$= \overline{U}.\overline{V} + \overline{U}.\overline{V'} + \overline{U'}.\overline{V} + \overline{U'}.\overline{V'}$

Et puisque $\overline{U}.\overline{V'} = \overline{U'}.\overline{V} = 0$

$\overline{U.V} = \overline{U}.\overline{V} + \overline{U'.V'}$

b- $\overline{U(t)} = \overline{\overline{U} + U'} = \overline{\overline{U}} + \overline{U'} = \overline{U} + \overline{U'}$

Et puisque $\overline{U'} = 0$ $\quad \overline{U(t)} = \overline{U}$

c- $\overline{U.V.W} = \overline{(\overline{U}+U').(\overline{V}+V').(\overline{W}+W')}$

$$= \overline{\overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}.V'.\overline{W} + U'.\overline{V}.\overline{W} + U'.V'.\overline{W} + \overline{U}.\overline{V}.W' + \overline{U}.V'.W' + U'.\overline{V}.W' + U'.V'.W'}$$

$$= \overline{\overline{U}.\overline{V}.\overline{W}} + \overline{\overline{U}.V'.\overline{W}} + \overline{U'.\overline{V}.\overline{W}} + \overline{U'.V'.\overline{W}} + \overline{\overline{U}.\overline{V}.W'} + \overline{\overline{U}.V'.W'} + \overline{U'.\overline{V}.W'} + \overline{U'.V'.W'}$$

Et puisque $\overline{\overline{U}.V'.\overline{W}} = \overline{U'.\overline{V}.\overline{W}} = \overline{\overline{U}.\overline{V}.W'} = 0$

$\overline{U.V.W} = \overline{U}.\overline{V}.\overline{W} + \overline{U}.\overline{V'.W'} + \overline{V}.\overline{U'.W'} + \overline{W}.\overline{U'.V'} + \overline{U'.V'.W'}$

Exercice 2 :

Montrer pour un écoulement de l'eau à 15 °C dans une conduite circulaire de diamètre D, que la condition de la turbulence du régime d'écoulement est conditionnée par :
V > $\frac{0,0026}{D}$, tout en considérant que le nombre de Reynolds critique est de 2300 ?
Montrer que pour un diamètre de l'ordre de 1 cm, le régime turbulent est assuré pour des vitesses V > 0,3 m/s ?

Solution :

On a : $\nu = \frac{0,0178}{1+0,0337.t+0,000221.t^2}$

A 15 °C : ν = 1,14.10^{-6} m^2/s

Et on a : $\Re = \frac{V.D}{\nu} > 2300$: condition de la turbulence.

$$V > \frac{2300.\nu}{D} = \frac{2300.1{,}14.10^{-6}}{D} = \frac{0,0026}{D}$$

$$V > \frac{0,0026}{D}$$

Pour D = 1 cm V > 0,26 m/s
Pour V > 0,3 m/s : le régime turbulent est suffisamment assuré.

Exercice 3 :

Démontrer pour un écoulement turbulent d'un fluide incompressible, que l'équation de continuité s'écrit :

$\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + \frac{\partial v^{'}}{\partial y} + \frac{\partial w^{'}}{\partial z} = 0$?

Solution :

Pour un fluide incompressible : divV = 0,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Exercice 4 :

Démontrer que pour un écoulement turbulent :

1- $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = 0$

2- $\overline{\frac{v \partial u}{\partial y}} = \bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$

3- $\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}$

Solution :

1- $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t}$

Et puisque $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = 0$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = 0$$

2- $\overline{\frac{v \partial u}{\partial y}} = \overline{(\bar{v} + v').\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y}} = \overline{\bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \overline{v'.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \overline{\bar{v}.\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$

$$= \bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v}'.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v}.\frac{\partial \overline{u'}}{\partial y} + \overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$$

Et puisque $\bar{v}' = \frac{\partial \overline{u'}}{\partial y} = 0$

$$\overline{\frac{v \partial u}{\partial y}} = \bar{v}.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v'.\frac{\partial u'}{\partial y}}$$

3- $\overline{u.v} = \overline{(\bar{u} + u').(\bar{u} + u')} = \overline{\bar{u}^2} + \overline{u'^2} + 2\overline{\bar{u}.u'}$

Et puisque $\overline{\bar{u}.u'} = \bar{u}.\overline{u'} = 0$

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}$$

Exercice 5 :

Comparer entre le tenseur des tensions visqueuses d'un écoulement laminaire, et un écoulement turbulent pour un fluide incompressible ?

Solution :

Pour un fluide incompressible, nous avons : div(V) = 0.

Le tenseur des tensions s'exprime comme :

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Vmatrix}$$

Pour un écoulement laminaire, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\sigma_{xx} = -p_x - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial u}{\partial x} = -p_x + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\sigma_{yy} = -p_y - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial v}{\partial y} = -p_y + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\sigma_{zz} = -p_z - \frac{2}{3}.\mu.divV + 2\mu.\frac{\partial w}{\partial z} = -p_z + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu.(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})$$

Pour un écoulement turbulent, les éléments du tenseur s'écrivent comme :

$$\sigma_{xx} = -p_x + 2\mu.\frac{\partial u}{\partial x} + -\rho.\overline{u'^2}$$
$$\sigma_{yy} = -p_y + 2\mu.\frac{\partial v}{\partial y} + -\rho.\overline{v'^2}$$
$$\sigma_{zz} = -p_z + 2\mu.\frac{\partial w}{\partial z} + -\rho.\overline{w'^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + -\rho.\overline{u'.v'}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu.(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) + -\rho.\overline{u'.w'}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu.(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) + -\rho.\overline{v'.w'}$$

Le tenseur des tensions visqueuses d'un écoulement turbulent comme est présenté, est la somme du tenseur d'un écoulement laminaire et le tenseur de Reynolds.

Car le tenseur de Reynolds s'écrit comme :

$$\sigma_{xx} = -\rho.\overline{u'^2}$$
$$\sigma_{yy} = -\rho.\overline{v'^2}$$
$$\sigma_{zz} = -\rho.\overline{w'^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho.\overline{u'.v'}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho.\overline{u'.w'}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho.\overline{v'.w'}$$

LA COUCHE LIMITE

Exercice 1 :

Une plaque plane de 3 cm de longueur, et de 30 cm de long est remorquée parallèlement à elle-même dans le sens de sa longueur dans l'eau à la vitesse de 6 m/s.
Déterminer la force de frottement s'exerçant sur l'une des faces de la plaque, et la force s'exerçant sur les trois premiers mètres de la plaque ?
On donne $\nu = 10^{-6} m^2 / s$.

Solution :

Nous avons : $\Re_L = \dfrac{U.L}{\nu} = \dfrac{6.30}{10^{-6}}$ = 1,8.10^8

Le coefficient de frottement moyen est :

Pour $\Re > 10^7$ on admet que pour une plaque plane lisse parallèle à U de longueur L :

C_x = 0,455. $(\log_{10} \Re_L)^{-2,58}$

$$C_x = \frac{0,455}{231,8} = 1,965.10^{-3}$$

Et nous avons l'air d'une face de la plaque : S = 3.30 = 90 m^2.

La force s'exerçant sur une face :

$F = C_x.\rho.S.\dfrac{U^2}{2}$ = 1,965.10^{-3}.90.1000.36/2 = 3183 N.

Si le nombre critique de transition correspond à $\Re = 5.10^5$
La position de la ligne de transition est située à la distance x du bord d'attaque :

$$5.10^5 = \frac{U.x}{\nu} = \frac{6.x}{10^6} \qquad x = 0,083 \text{ m.}$$

En négligeant l'influence du frottement dans la couche limite laminaire (x = 0,083 m)

C_x sur les 3 m de la plaque : C_x = 0,455. $(\log_{10} \Re_L)^{-2,58}$

Avec $\Re_L = \dfrac{U.L}{\nu} = \dfrac{6.30}{10^{-6}}$ = 1,8.10^8

C_x = 2,74.10^{-3}.

La force de frottement sur S' :

S' = 3.3 = 9 m^2

$F_x = C_x.\rho.S.\frac{U^2}{2}$ = 2,74.10^{-3}.9.1000.36/2 = 444 N.

Exercice 2 :

Dans l'écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque mince et plate, on admet que la distribution des vitesses dans la couche limite répond à l'équation :

$$\frac{u}{U} = Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})$$

Avec :
U : vitesse du fluide libre (écoulement)
u : vitesse à la distance y de la paroi
δ : épaisseur de la couche limite.

1- calculer latéralement : $\delta_x, \theta_x, \delta_{lx}, H, C_{fx}, C_F, et \tau_{local\ x}$?

2- on donne :
U = 15 m/s
L = 4.10^{-2} m.
ν = 10^{-6} m^2 /s
ρ = 1,2 kg/m^3.
$\int Sin^2 x dx = \frac{1}{2}.(x - Sinx.Cosx)$

Solution :
1-
a- $\tau = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mu.U.\frac{\pi}{2\delta}.Cos(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})\Big|_{y=0} = \mu.U.\frac{\pi}{2\pi}$

$$\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta 1 - Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})\ .dy = \delta + \frac{2\delta}{\pi}.Cos(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})\Big|_0^\delta$$

$$\delta^* = \delta + \frac{2\delta}{\pi}.(Cos\frac{\pi}{2} - Cos 0) = \delta - \frac{2\delta}{\pi} = 0,363.\ \delta$$

b- $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).[1 - Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})].dy = \int_0^\delta Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).dy - \int_0^\delta Sin^2(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).dy$

On a aussi : $\int Sin^2 x dx = \frac{1}{2}.(x - Sinx.Cosx)$

$$\int Sin^2 u du = \frac{1}{2}.(u - Sinu.Cosu)$$

$$\theta = -\frac{2\delta}{\pi}.\ Cos\frac{\pi}{2} - Cos0\ \ -\frac{2\delta}{\pi}.\ \frac{1}{2}.(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta} - Sin\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}.Cos\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})\ \Big|_0^\delta =$$

$$= \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{\pi}.\ (\frac{\pi}{2} - 0) - (0-0)\ \ = \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{2} = \delta.(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}) = 0{,}137.\delta$$

$$\theta = 0{,}137.\delta$$

c- $\tau_{local} = \rho.U^2.\frac{d\theta}{dx} = \rho.U^2.0{,}137.\frac{d\delta}{dx} = \mu.\mathrm{U}.\frac{\pi}{2.\delta}$

$$\tau_{local} = 2\delta.\frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{U}.\frac{\pi}{0{,}137} \qquad \frac{d(\delta^2)}{dx} = 22{,}931.\frac{\nu}{U}$$

$\delta^2 = 22{,}931.\frac{\nu.x}{U}$, multipliant le deuxième terme de cette équation par x/x, nous obtenons :

$$\delta^2 = 22{,}931.\frac{\nu.x^2}{U.x} = \frac{22{,}931}{\Re_x}.x^2 \qquad \delta = \frac{x}{\sqrt{\Re_x}}.4{,}789$$

$$\theta = 0{,}137.\frac{x}{\sqrt{\Re_x}}.4{,}789 = 0{,}656.\frac{x}{\sqrt{\Re_x}}$$

Et δ^* devient : $\delta^* = 1{,}738.\frac{x}{\sqrt{\Re_x}}$

d- H = $\frac{\delta^*}{\theta} = 2{,}649$

e- C_f = $2.\frac{d\theta}{dx} = \frac{0{,}656}{\sqrt{\Re_x}}$

f- C_F = $\frac{2.\theta}{L} = \frac{1{,}312}{\sqrt{\Re_L}}$

Et τ_{local} devient :

$$\tau_{local} = \mu.U.\frac{\pi}{2.\delta} = \frac{\rho.\nu.U.\pi}{2\delta} = 0{,}328.\nu.U.\sqrt{\Re_x}\ /\ x$$

2- application numérique :
$\Re_L = 6.10^5$; $\delta_L = 0{,}247mm$; $\delta_L^* = 0{,}0897mm$
$\theta_L = 0{,}0338mm$; $C_F = 1{,}694.10^{-3}$; $C_f = 8{,}468.10^{-4}$.

Exercice 3 :

Un filtre à nid d'abeilles, placé en avant du collecteur d'une soufflerie, est constitué de mailles carrées dont le coté est de 3 m, la profondeur des lamelles dans le sens de la vitesse est de 4 cm. On suppose que chaque lamelle se comporte comme une plaque plane à la vitesse U = 15 m/s.
Les caractéristiques de l'air sont : ρ = 1,2 kg/m^3 et ν = 15.10^{-2} St.
a- montrer que la couche limite n'est pas en régime totalement turbulent ($\Re_{eL}$ < 5.10^5) ?
b- calculer l'épaisseur δ de la couche limite ?
c- en déduire les valeurs de δ_l , θ, C_f, C_F, τ_{local} ?
d- calculer la somme des forces de frottement sur les quatre faces d'une maille ?
e- quelle est la chute de pression, à la traversée du filtre, pour une maille ?
f- en déduire le coefficient de perte de charge singulière ξ pour ce filtre ?

Solution :

a- $\Re_{eL} = \dfrac{U.L}{\nu} = \dfrac{15.4.10^{-2}}{15.10^{-6}} = 4.10^4 > 5.10^5$

b- $\delta = \dfrac{4{,}646.L}{\sqrt{\Re_{eL}}} = \dfrac{4{,}646.4.10^{-2}}{2.10^2} = 0{,}928mm$

c- $\delta_1 = 0{,}375.\delta = 0{,}348mm$

$\theta = 0{,}139.\delta = 0{,}129mm$

Cf = $\dfrac{0{,}646}{\sqrt{\Re_{eL}}} = \dfrac{0{,}646}{2.10^2} = 3{,}23.10^{-3}$

C_F = $\dfrac{1{,}292}{\sqrt{\Re_{eL}}} = 6{,}46.10^{-3} = 2.C_f$

$\tau_{local} = \dfrac{3\mu.U}{2.\delta} = \dfrac{3.15.10^{-6}.15.1{,}2}{2.0{,}928.10^{-3}} = 0{,}436\,\text{Pa}$

d- si la surface de frottement à la paroi est S :

F_v = $\tau_p.S = \dfrac{1}{2}.C_F.\rho.U^2.S = \dfrac{1}{2}6{,}46.10^{-3}.1{,}2.15^2.12.10^{-4} = 1{,}046.10^{-3}\,\text{N}$

4. F_v = 4.1,046.10^{-3} = 4,186.10^{-3} N

e- si A est la section de passage : A = 3^2.10^{-4}.

Δ P = $\dfrac{4.F_V}{A} = \dfrac{4{,}186.10^{-3}}{3^2.10^{-4}} = 4{,}65\,\text{Pa}$

f- $h_p = \xi.\frac{U^2}{2g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$

$$\xi = \frac{2.\Delta P}{\rho.U^2} = \frac{2.4{,}65}{1{,}2.15^2} = 0{,}034$$

Exercice 4 :

Dans un écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque mince et plate, on admet que le profil des vitesses dans la couche limite répond à l'équation :

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}.\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}.\ \frac{y}{\delta}^{\ 3}$$

Avec :
U : vitesse d'écoulement libre.
u : vitesse à la distance y de la paroi.
δ : épaisseur de la couche limite.

a- pour un calcul latéral appliqué à une unité de largeur, montrer que l'épaisseur de la couche limite à la sortie de la plaque est donnée par :

$$\delta = 4{,}646.\ \frac{L}{\Re_{eI}}^{\ 1/2}$$

Sachant que :

$\tau_P = \tau_{local} = \mu.\frac{du}{dy}_{y=0}$ et où L : est la largeur de la plaque.

b- en déduire les épaisseurs de quantité de mouvement θ, de déplacement δ^*, les coefficients de frottement local C_f et moyen C_F ainsi que le facteur de forme H ?

Solution :

a- on a $\tau_{local} = \mu.\frac{du}{dy}_{y=0}$ avec : $\frac{u}{U} = \frac{3}{2}.\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}.\ \frac{y}{\delta}^{\ 3}$

$$\tau_{local} = \frac{3}{2}.u(\frac{U}{\delta}) - \frac{3}{2}.u.\frac{U}{\delta}.\ \frac{y}{\delta}^{\ 3} = \frac{3}{2}.\mu.\frac{U}{\delta}$$

D'autre part : $\tau_{local} = \rho.U^2.\frac{d\theta}{dx}$

Avec $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy$ $\quad \theta = \int_0^\delta [\frac{3}{2}.\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3].[1-\frac{3}{2}.\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}.(\frac{y}{\delta})^3]dy$

$$\theta = \frac{3}{10}.\delta - \frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{28} = 0{,}139.\delta$$

$$\tau_{local} = \rho.U^2.0{,}139.\frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2}.\mu.\frac{U}{\delta}$$

$$2.\delta.\frac{d\delta}{dx} = \frac{d(\delta^2)}{dx} = 21{,}583.\frac{\gamma}{U}$$

On a : à x = 0 : $\delta = 0$ $\quad \delta^2 = 21{,}583.\frac{\gamma.x}{U} = 21{,}583.\frac{x^2}{\Re_{ex}}$

Pour la longueur L : $\delta = \sqrt{21{,}583.\frac{L^2}{\Re_{el}}}$

b-

- l'épaisseur de quantité de mouvement sera :

$$\theta = 0{,}139.\delta = 0{,}646.\frac{L}{\sqrt{\Re_{eL}}}$$

- l'épaisseur de déplacement sera :

$$\delta^* = \delta_l = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta [1-\frac{3}{2}.\frac{y}{\delta}+\frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3].dy$$

Par intégration, on obtient :

$$\delta^* = \frac{3}{8}.\delta = 0{,}375.\delta$$

Pour la longueur L : $\delta^* = \delta_l = 1{,}742.\frac{L}{\sqrt{\Re_{eL}}}$

- $C_f = 2.\frac{d\theta}{dx} = 2.0{,}139.\frac{d\delta}{dx}$ $\quad$ avec $\frac{d\delta}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{(4{,}646.x)^{1/2}}{(\frac{U}{\gamma})^{1/2}} = \frac{1}{2}.\frac{4{,}646}{\sqrt{\Re_{ex}}}$

et Cf = $2.0{,}139.\frac{1}{2}.\frac{4{,}646}{\sqrt{\Re_{ex}}} = \frac{0{,}646}{\sqrt{\Re_{ex}}}$

- $C_F = 2.\dfrac{\theta}{L} = 2.\dfrac{0{,}646}{\sqrt{\Re_{eL}}} = \dfrac{1{,}292}{\sqrt{\Re_{eL}}}$

- $H = \dfrac{\delta_l}{\theta} = \dfrac{1{,}742}{0{,}646} = 2{,}7$

Exercice 5 :

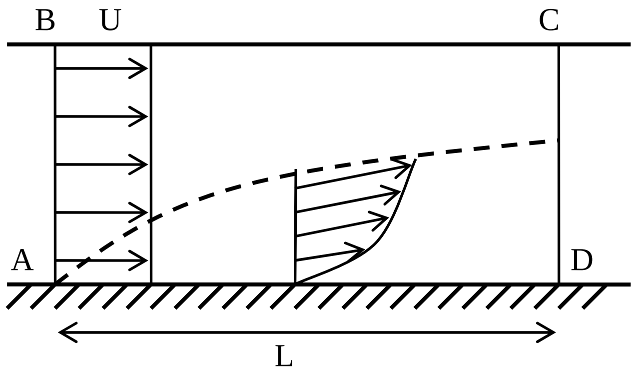
Si l'expression de la distribution de la vitesse d'un écoulement laminaire sur une plaque plane est donnée par :

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{u}{U_E} = \frac{u}{U_l} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

Avec $\eta = \dfrac{y}{\delta}$

1- donner l'expression du frottement pariétal ?
2- calculer les épaisseurs de déplacement δ^*, et de quantité de mouvement θ ?
3- en déduire l'épaisseur de la couche limite, pour une plaque de longueur L, en fonction du nombre de Reynolds local $\Re_L$?

Solution :



Section	Bilan de masse	Bilan quantité de mouvement
AD	0	0
AB	$-\rho.\int_0^h U.dy$	$-\rho.L.\int_0^h U^2.dy$
CD	$\rho.\int_0^h u.dy$	$-\rho.L.\int_0^h u^2.dy$
BC	$\rho.\int_0^h (U-u).dy$	$\rho.L.\int_0^h U.(U-u).dy$
ΣS	0	$\rho.L\int_0^h u.(u-U).dy$

$$-\int \tau_p.dx = -\rho.\int_0^\delta u.(U-u).dy$$

$$\tau_p(x) = \rho.\frac{d(U^2.\theta)}{dx} \quad \text{avec } \theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy$$

- l'épaisseur de déplacement est : $\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U}).dy = \frac{3}{10}.\delta$

- l'épaisseur de déplacement est : $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy = \frac{37}{315}.\delta$

En la comparant avec l'expression de τ_p :

$$\tau_p(x) = \mu.\frac{d(U^2.\theta)}{dx}$$

et on a : $\tau_p = \mu.\frac{du}{dy_{y=0}} = \mu.\frac{2}{\delta}.U$

$$\mu.\frac{2}{\delta}.U = \rho.\frac{d(U^2.\theta)}{dx}$$

Et d'autre part, on a : $\delta.d\delta = \frac{\nu}{U}dx \qquad \frac{\delta^2}{2} = \frac{\nu}{U}.x = \frac{\nu.x^2}{U.x}$

Et comme $\Re_x = \frac{U.x}{\nu} \qquad \frac{\delta^2}{2} = \frac{x^2}{\Re_x}$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}.x}{\sqrt{\Re_x}}$$

- le coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}.\rho.U^2} = \frac{\mu.\frac{2}{\delta}.U}{\frac{1}{2}.\rho.U^2} = \frac{4.\nu}{\delta.U} = \frac{4.\nu}{\frac{\sqrt{2}.x}{\sqrt{\Re_x}}.U}$$

$$C_f = \frac{2.\sqrt{2}.\nu.\sqrt{\Re_x}}{x.U} = \frac{2.\sqrt{2}.\sqrt{\Re_x}}{\Re_x}$$

$$C_f = \frac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{\Re_x}}$$

- le coefficient de frottement global :

$$C_F = \int_0^L C_f.dx = \frac{2.\sqrt{2}.L}{\sqrt{\Re_L}}$$

Exercice 6 :

Un sous marin a une longueur L = 84 m et une surface totale de coque de 1800 m^2.
Calculer la résistance due aux forces de frottement visqueux s'exerçant sur la coque, quand en plongée, le sous marin a une vitesse V = 5 m/s ? Pour faire ce calcul, on admettra qu'à la valeur C_x du coefficient moyen de frottement établi pour une plaque plane est applicable ici.
On a d'ailleurs :

$C_x = 0{,}455.(\lg_{10}\Re_L)^{-2,58}$ pour $\Re_L = \dfrac{V.L}{\nu} > 10^7$.

Et on a :

$\rho = 1025$ kg/m^3, $\nu = 1{,}2.10^{-6}$ m^2/s.

Solution :

On a

$$\Re_L = \frac{V.L}{\nu} = \frac{5.84}{1{,}2.10^{-6}} = 3{,}5.10^8 > 10^7$$

$$C_x = 0{,}455.[\log_{10}\Re_L]^{-2,58} = 1{,}79.10^{-3}$$

La force de frottement sera :

Fx = $C_x \,.\, \rho.\frac{V^2}{2}.S = 1{,}79.10^{-3}.1025.\frac{5^2}{2}.1800 \approx 41280$ N.

Exercice 7 :

Soit un écoulement laminaire permanent, bidimensionnel d'un fluide incompressible le long d'une paroi quelconque dont le rayon de courbure est très supérieur à l'épaisseur δ de la couche limite, de sorte que les équations de Prandtl soient valables :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Et $p + \rho\frac{U^2}{2} = Cte$ pour y = δ

Avec $U \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$

1- calculer le débit en masse à travers la couche limite en fonction de δ et δ^* ?
2- calculer le débit de quantité de mouvement en fonction de δ, δ^* et θ ?
3- utiliser ces relations et le théorème des quantités de mouvement appliqué à un élément ABCD, d'épaisseur dx, pour établir l'équation :

$$\frac{U}{2\nu}.\frac{d(\theta^2)}{dx} = -\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}.(2+\frac{\delta^*}{\theta}) + \frac{\tau_0}{\mu}.\frac{\theta}{U} \qquad \text{(A)}$$

4- si le profil des vitesses est donné par :

$$\frac{u}{U} = L.\frac{y}{\theta} + \frac{m}{2}.\;\frac{y}{\theta}^{\;2} \; : \; 0 \le y \le \delta \qquad \text{(B)}$$

$\frac{u}{U}$ = 1 : y > δ

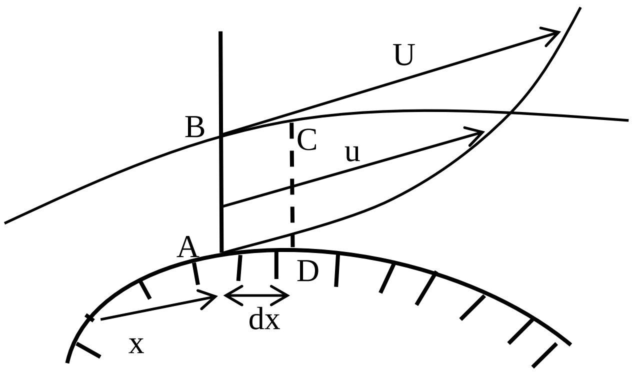
Avec L et m : paramètres ne dépendant que de x.

a- calculer θ et montrer que L et m sont liés par une relation de type : L = $\varphi(m)$?
b- calculer $\frac{\delta^*}{\theta}$ et montrer qu'on peut avoir une relation de la forme : $\frac{\delta^*}{\theta}$ = $\psi(m)$?
c- en utilisant les équations de Prandtl et les conditions à la paroi, montrer que :

m = - $\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}$?

d- vérifier que le 2eme membre de l'équation (A) ne dépend que de m ?
e- ce 2eme membre est approximativement égal à $\frac{0{,}45+6m}{2}$. Donner dans ces conditions, une formule permettant de calculer θ en fonction de U ?

Calculer θ, et m lorsque U = U_0.Sin(kx) où U_0 = constante et $0 \leq k.x \leq \pi$?



Solution :

1- nous avons :

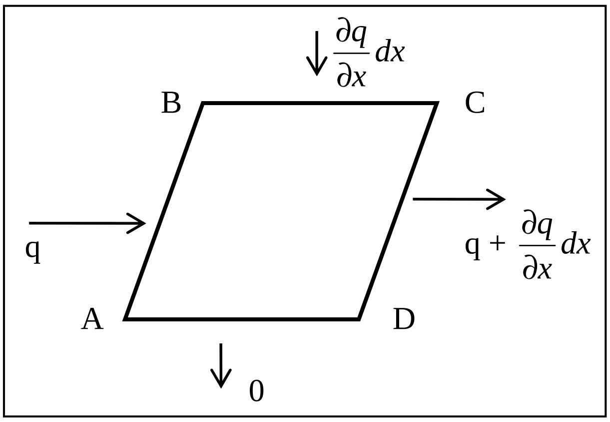
$$\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U})dy = \int_0^\delta dy - \int_0^\delta \frac{u}{U}dy = \delta - \int_0^\delta \frac{u}{U}dy$$

Par conséquent : q = $\int_0^\delta \rho.u.dy = \rho$ .U.(δ^* - δ)

2- $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta \frac{u}{U}.dy - \int_0^\delta \frac{u^2}{U^2}.dy = \delta - \delta^* - \int_0^\delta \frac{u^2}{U^2}.dy$

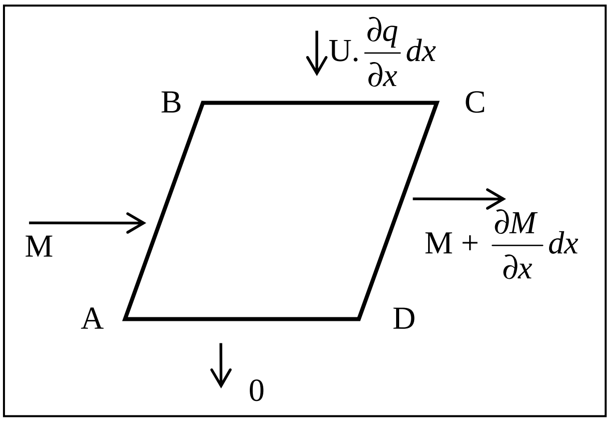
Par conséquent : le débit de quantité de mouvement : M = $\int_0^\delta \rho.u^2.dy = \rho.U^2.(\delta - \delta^* - \theta)$

3- considérant le volume élémentaire ABCD, d'épaisseur unitaire :
Le débit entrant par AB est : q
Le débit sortant CD est : q + $\frac{\partial q}{\partial x}dx$
Le débit entrant par BC est : $\frac{\partial q}{\partial x}dx$ à la vitesse C
Le débit sortant par AD est : 0



En projection parallèle à la paroi ; les débits de quantité de mouvement seront :

Par AB entre le débit : M,
Par CD sort le débit : M + $\frac{\partial M}{\partial x} dx$
Par BC entre le débit : U.$\frac{\partial q}{\partial x} dx$
Par AD c'est 0



L'application du théorème des quantité de mouvement donne :

$$- M + (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) - U.\frac{\partial q}{\partial x} dx = p.\delta - (p+\frac{\partial p}{\partial x} dx).(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x}.dx) + p.\frac{\partial \delta}{\partial x} dx - \tau_0.dx$$

Soit : $\frac{\partial M}{\partial x} - U.\frac{\partial q}{\partial x} = -\delta.\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0$

En utilisant les valeurs de M et q calculées précédemment :

$$-\rho.U^2.\frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho.U.\frac{\partial U}{\partial x}.(\delta - \delta^* - 2\theta) = -\delta.\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0$$

Et puisque p + $\rho.\frac{U^2}{2}$ = Cte $\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho.U.\frac{\partial U}{\partial x}$

$$U^2.\frac{\partial\theta}{dx}+U.\frac{dU}{dx}.(\delta^*+2.\theta)=\frac{\tau_0}{\rho}$$

Multipliant les deux termes maintenant par $\frac{\theta}{\nu.U}$; on obtient :

$$\frac{U}{2\nu}.\frac{\partial\theta^2}{dx}=-\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}.(2+\frac{\delta^*}{\theta})+\frac{\tau_0}{\mu}.\frac{\theta}{U}$$

4-
a- nous avons :

$$\theta\ =\ \int_0^{\delta}\frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy=\ \theta.\int_0^{\delta/\theta}\frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).d(\frac{y}{\theta})$$

$$1=\int_0^{\delta/\theta}\ L.\frac{y}{\theta}+\frac{m}{2}.(\frac{y}{\theta})^2\ \ .\ 1-L.\frac{y}{\theta}-\frac{m}{2}.(\frac{y}{\theta})^2\ \ .d(\frac{y}{\theta})$$

$$1=\frac{L}{2}.(\frac{\delta}{\theta})^2+\frac{1}{3}.(\frac{m}{2}-L^2).(\frac{\delta}{\theta})^3-\frac{L.m}{4}.(\frac{\delta}{\theta})^4-\frac{m^3}{20}.(\frac{\delta}{\theta})^5 \qquad \text{(C)}$$

En faisant y = δ , le profil des vitesses nous donne :

$$1=\mathrm{L}.\frac{\delta}{\theta}+\frac{m}{2}.(\frac{\delta}{\theta})^2 \qquad \text{(D)}$$

$$1=\mathrm{L}.\frac{\delta}{\theta}+\frac{m}{2}.(\frac{\delta}{\theta})^2\ =1=\ \frac{L}{2}.(\frac{\delta}{\theta})^2+\frac{1}{3}.(\frac{m}{2}-L^2).(\frac{\delta}{\theta})^3-\frac{L.m}{4}.(\frac{\delta}{\theta})^4-\frac{m^3}{20}.(\frac{\delta}{\theta})^5$$

Posant maintenant : $\frac{\delta}{\theta}=\alpha$

$$-L+\frac{1}{2}.(L-m).\alpha+\frac{1}{3}(\frac{m}{2}-L^2).\alpha^2-\frac{L.m}{4}.\alpha^3-\frac{m^3}{20}.\alpha^4\ =0$$

Ce qui montre que L ne dépend que de m :   L = $\varphi(m)$

b- on a :

$$\delta^*=\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U})dy=\theta.\int_0^{\delta/\theta}(1-\frac{u}{U})d(\frac{y}{\theta})=\ \theta.\int_0^{\delta/\theta}(1-L.\frac{y}{\theta}-\frac{m}{2}.[\frac{y}{\theta}]^2)d(\frac{y}{\theta})$$

$$\frac{\delta^*}{\theta}=\frac{\delta}{\theta}-\frac{L}{2}.(\frac{\delta}{\theta})^2-\frac{m}{6}.(\frac{\delta}{\theta})^3 \qquad \text{(E)}$$

Entre les équations (C), (D) et (E) ; on peut éliminer $\dfrac{\delta^*}{\theta}$: ce qui implique que $\dfrac{\delta^*}{\theta}$ ne dépend que de m $\dfrac{\delta^*}{\theta} = \psi(m)$

c- sur la paroi : y = 0, on a u = v = 0,

Les équations de Prandtl donneront donc :

$$-\frac{1}{\rho}.\frac{dp}{dx} + \nu.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho.U.\frac{dU}{dx}$$

L'équation (B) donnera : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{m.U}{\theta^2}$

$$U.\frac{dU}{dx} + \nu.m.\frac{U}{\theta^2} = 0 \qquad \mathrm{m} = -\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}$$

d- nous avons :

$$\tau_0 = \mu.\frac{du}{dy_{y=0}} = \mu.\frac{U.L}{\theta} \qquad \frac{\tau_0.\theta}{\mu.U} = L = \varphi(m)$$

L'équation (A) peut s'écrire donc :

$$\frac{U}{2\nu}.\frac{d(\theta^2)}{dx} = -m.[2 + \psi(m)] + \varphi(m)$$

Il est évident que le deuxième terme ne dépend que de m.

e- l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{U}{2\nu}.\frac{d(\theta^2)}{dx} = \frac{0{,}45 + 6m}{2} \qquad \frac{U}{\nu}.\frac{d(\theta^2)}{dx} = 0{,}45 + 6m = 0{,}45 - 6.\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{U}{\nu}.\frac{d(\theta^2)}{dx} + 6.\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx} = 0{,}45.\nu$$

En multipliant les deux termes par U^5 ; nous obtenons :

$$\frac{d}{dx}(U^6.\theta^2) = 0{,}45.\nu.U^5$$

$$\theta^2 = \frac{0,45.\nu}{U^6}.\int_0^x U^5 dx$$

Posons z = k.x

Si U = U_0.Sin(kx) $\quad \int_0^x U_0{}^5.Sin^5(kx)dx = \frac{U_0{}^5}{k}.\int_0^{kx} Sin^5(kx)d(kx) = - \frac{U_0{}^5}{k}.\int_0^z Sin^4 z.d(Cosz)$

$$= -\frac{U_0{}^5}{k}.(Cosz + \frac{Cos^5 z}{5} - \frac{2}{3}.Cos^3 z)$$

$$\theta^2 = \frac{0,45.\nu}{k.U_0.Sin^6(kx)}.(\frac{2}{3}.Cos^3(kx) - Cos(kx) - \frac{Cos^5(kx)}{5}$$

De même, on a : m = $-\frac{\theta^2}{\nu}.\frac{dU}{dx}$ avec $\frac{dU}{dx} = U_0.k.Cos(kx)$

$$m = \frac{0,45.\nu}{Sin^6(kx)}.[Cos^2(kx) + \frac{Cos^6(kx)}{5} - \frac{2}{3}.Cos^4(kx)]$$

Exercice 8 :

Exprimer le coefficient de frottement en fonction de δ^*, θ et U et cela à l'aide de l'équation de Von Karman ?

Solution :

L'équation de Von-Karman s'écrit :

$$(\delta^* + 2\theta).\frac{1}{U}.\frac{dU}{dx} + \frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho.U^2}$$

Et puisque $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}.\rho.U^2}$ $\quad \frac{\tau_p}{\rho.U^2} = \frac{1}{2}C_f$

$$C_f = 2.\ (\delta^* + 2.\theta).\frac{1}{U}.\frac{dU}{dx} + \frac{d\theta}{dx}$$

Exercice 9 :

Une couche limite se développant sur une plaque plane en écoulement uniforme de vitesse u dont le profil de vitesse est :

$$\frac{u(x,y)}{U} = \mathrm{F}(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

où η : constante.

1- montrer que les quantités $\frac{\delta^*}{\delta}$, $\frac{\theta}{\delta}$ et $\tau_p.\delta$ sont des constantes dont on donnera les valeurs ?

2- déduire de l'intégration de l'équation de Von Karman, la loi de variation de l'épaisseur de la couche limite δ(x) ?

3- donner les expressions de δ(x)/x, δ^*(x)/x et θ(x)/x ainsi que le coefficient de frottement τ_p(x)/ ρU^2 en fonction du seul nombre de Reynolds local $\Re_x = \frac{U.x}{\nu}$?

Solution :

1- $\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} = \int_0^1 [1 - f(\eta)]d\eta = \frac{3}{10} - \frac{A}{120}$

Avec : A = $\frac{\delta^2(x)}{\nu}.\frac{dU}{dx}$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 [1 - f(\eta)].f(\eta).d\eta = \frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} = \frac{37}{315}$$

$$\tau_p.\delta = \mu.\frac{U(x)}{\delta(x)}.(2 + \frac{A}{6}).\delta = 2\mu.U$$

Qui sont bien des constantes.

2- l'équation de Von-Karman se réduit à : $\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho.U^2}$

Après substitution des expressions précédentes, on trouve :

$$\delta.d\delta = \frac{630}{37}.\frac{\nu}{U}.dx$$

En imposant la condition $\delta(0) = 0$;

L'intégration de cette équation différentielle conduit à :

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1260}{37}}.\sqrt{\frac{\nu.x}{U}} \approx 5{,}84.\sqrt{\frac{\nu.x}{U}}$$

En divisant membre à membre l'expression ci-dessus par x, il vient immédiatement :

$$\frac{\delta(x)}{x} \approx \frac{5{,}84}{\sqrt{\Re_x}}$$

$$\frac{\delta^*(x)}{x} \approx \frac{1{,}75}{\sqrt{\Re_x}}$$

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{0{,}69}{\sqrt{\Re_x}}$$

Et $\frac{\tau_p}{\rho.U^2} = \frac{2}{5{,}84}.\frac{\nu}{U}.\sqrt{\frac{U}{\nu.x}} \approx \frac{0{,}34}{\sqrt{\Re_x}}$

Exercice 10 :

Soit un écoulement caractérisé par le profil de vitesses suivant :

$$\frac{u(x,y)}{U} = a.Cos(\alpha\eta) + b.Sin(\beta\eta)$$

où $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$ et a, b, α et β sont quatre paramètres à priori fonctions de la seule variable x.

1- donner les valeurs de a, b, α et β compatibles avec les conditions aux limites de l'écoulement ?

2- exprimer les valeurs de $\frac{\delta^*}{\delta}$, $\frac{\theta}{\delta}$ et $\tau_p.\delta$? vérifier qu'il s'agit bien toujours de constantes pour cet écoulement ?

3- calculer la loi d'épaisseur de la couche limite δ (x) ?

4- comparer les valeurs adimensionnelles δ (x)/x, δ^* (x)/x, θ (x)/x et τ_p (x)/ ρU^2 avec celles obtenues par le profil de vitesses suivant (exercice précédant) :

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{u}{U_E} = \frac{u}{U_l} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \text{ ?}$$

5- calculer les épaisseurs en bout d'une plaque de longueur L = 2 m placée dans un écoulement de vitesse U = 20 m/s d'un fluide de viscosité cinématique ν = 1,4.10^{-5} m^2/s ?

Solution :

1- on imposera :

u(x,0) = 0, V(x,0), u(x, δ) = U, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta}$ =0

La première condition amène à a = 0 $\dfrac{u(x,y)}{U} = b.Sin(\beta.\eta)$

Les deux dernières conditions donnent alors : $b.Sin\beta = 1$ et $b.\beta.Cos\beta = 0$

La seule solution non triviale (banale) correspond à :

$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ et b = 1

le profil de vitesses de la forme prescrite compatible avec trois conditions aux limites, s'écrit :

$$\frac{u(x,y)}{U} = f(\eta) = Sin(\frac{\pi}{2}\eta)$$

2- avec cette expression, on obtient :

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 1 - Sin(\frac{\pi}{2}.\eta)\ .d\eta = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Et $\dfrac{\theta}{\delta} = \displaystyle\int_0^1 1 - Sin(\frac{\pi}{2}.\eta)\ .Sin(\frac{\pi}{2}.\eta).d\eta = \frac{4-\pi}{2.\pi}$

Le domaine de variation physiquement admissible de cette fonction est de 0 à 1 : $[0,1]$ au lieu de la variation de 0 à ∞.

Et $\tau_p = \mu.\dfrac{du}{dy}_{y=0} = \mu.\dfrac{U}{\delta}.f'(0) = \dfrac{\pi}{2}.\mu.\dfrac{U}{\delta}$

3- en substituant maintenant dans l'équation intégrale, on aura :

$$\delta.d\delta = \frac{\pi^2}{4-\pi}.\frac{\nu}{U}.dx$$

Qui avec la même condition d'intégration : $\delta(0) = 0$, donne :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \pi.\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}.\frac{1}{\sqrt{\Re_x}} \approx \frac{4{,}8}{\sqrt{\Re_x}}$$

4- la comparaison des résultats obtenus avec les deux formulations est présentée dans le tableau suivant, en référence aux valeurs de la solution exacte de Blasius :

Paramètres / Profil	$\frac{\delta(x)}{x}.\sqrt{\Re_x}$	$\frac{\delta^*(x)}{x}.\sqrt{\Re_x}$	$\frac{\theta(x)}{x}.\sqrt{\Re_x}$	$\frac{\tau_p(x)}{\rho.U^2}.\sqrt{\Re_x}$	H
$Sin(\frac{\pi}{2}\eta)$	4,8	1,74	0,66	0,33	2,64
$2.\eta - 2.\eta^3 + \eta^4$	5,84	1,75	0,69	0,33	2,54
Blasius	4,92	1,72	0,66	0,33	

5- avec les valeurs indiquées, on trouve :

$$\delta(L) = 5{,}7mm$$
$$\delta^*(L) = 2{,}1mm$$
$$\theta(L) = 0{,}8mm$$

Exercice 11 :

Calculer les valeurs des épaisseurs adimensionnelles $\frac{\delta^*}{\delta}$, $\frac{\delta^{**}}{\delta}$ ainsi que le rapport de forme H pour le profil de vitesse linéaire :

$$\frac{u(x,y)}{U(x,y)} = \frac{y}{\delta} \ ?$$

Solution :

On a :

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$$

- $\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{\int_0^\delta (1-\frac{y}{\delta}).dy}{\delta} = \frac{(y - \frac{1}{2}.\frac{y^2}{\delta}\Big|_0^\delta}{\delta} = \frac{\delta - \frac{1}{2}\delta}{\delta} = \frac{1}{2}$

- $\frac{\delta^{**}}{\delta}$:

Nous avons :

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho.u}{\rho.U}.(1-\frac{u^2}{U^2}).dy = \int_0^\delta \frac{y}{\delta}.(1-\frac{y^2}{\delta^2}).dy = \int_0^\delta (\frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3}).dy$$

$$= (\frac{y^2}{2\delta} - \frac{1}{4}.\frac{y^4}{\delta^3})\Big|_0^\delta = \frac{\delta^2}{2\delta} - \frac{1}{4}.\frac{\delta^4}{\delta^3} = \frac{1}{4}\delta$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{4}\delta / \delta = \frac{1}{4}$$

- H = $\dfrac{\delta^*}{\theta}$

Avec $\delta^* = \dfrac{\delta^*}{\delta}.\delta = \dfrac{1}{2}.\delta$

Et $\theta = \int_0^\delta \frac{\rho.u}{\rho.U}(1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta \frac{y}{\delta}.(1-\frac{y}{\delta}).dy = \int_0^\delta (\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}).dy = (\frac{1}{2}.\frac{y^2}{\delta} - \frac{1}{3}.\frac{y^3}{\delta^2})\Big|_0^\delta = \frac{1}{6}\delta$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{6}\delta} = 3$$

Exercice 12 :

Soit un écoulement caractérisé par le profil de vitesses :

$$\frac{u(x,y)}{U} = \text{Sin}(\frac{\pi}{2}.\eta)$$

Où $\eta = \dfrac{y}{\delta(x)}$

- exprimer les valeurs de $\dfrac{\delta^*}{\delta}$, θ / δ et $\tau_p . \delta$? Vérifier qu'ils s'agit bien toujours de constantes pour cet écoulement ?
- calculer la loi d'épaisseur de la couche limite δ (x) ?

Solution :

a- on a :

$\dfrac{u}{U} = \text{Sin}(\dfrac{\pi}{2}.\eta)$ avec $\eta = \dfrac{y}{\delta}$

$$\frac{u}{U} = \text{Sin}(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})$$

- $\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U})dy = \int_0^\delta 1 - Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}) .dy = \quad y + \frac{2\delta}{\pi}.Cos(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}) \Big|_0^\delta =$

$\delta + \dfrac{2\delta}{\pi}.Cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2.\delta}{\pi} = \delta - \dfrac{2\delta}{\pi}$

$$\delta^* / \delta = 1 - \frac{2}{\pi} = 0{,}363 \ \text{: constante.}$$

- $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^\delta Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).[1-Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})].dy = \int_0^\delta Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).dy - \int_0^\delta Sin^2(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}).dy$

Et on a : $\int Sin^2 x dx = \frac{1}{2}.(x - Sinx.Cosx)$

$$\int Sin^2 u du = \frac{1}{2}.(u - Sinu.Cosu)$$

$$\theta = -\frac{2\delta}{\pi}.\ Cos\frac{\pi}{2} - Cos0\ \ -\frac{2\delta}{\pi}.\ \frac{1}{2}.(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta} - Sin\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta}.Cos\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})\ \Big|_0^\delta =$$

$$= \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{\pi}.\ (\frac{\pi}{2} - 0) - (0-0)\ = \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{2} = \delta.(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2})$$

$$\theta / \delta = \delta.(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}) / \delta = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0{,}137 \ \text{: constante}$$

- $\tau_P = \mu.\frac{du}{dy_{y=0}} = \mu \frac{\partial(U.Sin(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = \mu.U.\frac{\pi}{2\delta}.Cos(\frac{\pi}{2}.\frac{y}{\delta})_{y=0} = \mu.U.\frac{\pi}{2\delta}.Cos0$

$$\tau_P = \mu.U.\frac{\pi}{2.\delta}$$

$$\tau_P.\delta = \mu.\frac{\pi}{2}.U \ \text{: constante.}$$

D’après l’équation de Von-Karman :

$$(\delta^* + 2\theta).\frac{1}{U}.\frac{dU}{dx} + \frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho.U^2}$$

Et puisque U : constante $\quad \frac{dU}{dx} = 0$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho.U^2} \quad \text{avec } \theta/\delta = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$\theta = (\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}).\delta \qquad d\theta = \frac{\tau_p}{\rho.U^2}.dx$$

Avec $\tau_P = \mu.U.\frac{\pi}{2.\delta}$ $\quad d\ (\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}).\delta = \frac{\mu.\frac{\pi.U}{2\delta}}{\rho.U^2}.dx$

$$(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}).d\delta = \frac{\mu}{\rho}.\frac{\pi}{2}.\frac{dx}{U.\delta} = \frac{\pi.\nu}{2.U.\delta}.dx$$

$$(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}).\delta.d\delta = \frac{\mu}{\rho}.\frac{\pi}{2}.\frac{dx}{U.\delta} = \frac{\pi.\nu}{2.U}.dx$$

$$\int \delta.d\delta = \frac{\pi}{2.(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2})}.\frac{\nu}{U}.dx = \int \frac{\pi^2}{4-\pi}.\frac{\nu}{U}.dx$$

$$\frac{1}{2}.\delta^2 = \frac{\pi^2}{4-\pi}.\frac{\nu}{U}.x \qquad \delta^2 = \frac{2.\pi^2}{4-\pi}.\frac{\nu}{U}.x$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2.\pi^2}{4-\pi}}.\sqrt{\frac{\nu}{U}.x} \qquad \delta(x) = 4{,}79.\sqrt{\frac{\nu}{U}.x}$$

Ou bien $\delta(x) = 4{,}79.\sqrt{\frac{1}{\Re_x}}.x$

Exercice 13 :

Calculer les valeurs de $\frac{\delta^*}{\delta}$, $\frac{\delta^{**}}{\delta}$, H et $\frac{\theta}{\delta}$ pour un profil de vitesses linéaire :

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

Solution :

On a : $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$

a- $\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U})dy = \int_0^\delta (1-(\frac{y}{\delta})^{1/7}).dy = \left. y-(\frac{1}{\delta})^{1/7}.\frac{7}{8}.y^{8/7}\ \right|_0^\delta = \delta - \frac{7}{8}\delta = \frac{1}{8}\delta$

$$\Rightarrow \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}$$

b- $\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U}.(1-\frac{u^2}{U^2}).dy = \int_0^{\delta}(\frac{u}{U}-(\frac{u}{U})^3).dy = \int_0^{\delta}[(\frac{y}{\delta})^{1/7}-(\frac{y}{\delta})^{3/7}].dy$

$$= \left.(\frac{1}{\delta})^{1/7}.\frac{7}{8}.y^{8/7}-(\frac{1}{\delta})^{3/7}.\frac{7}{10}.y^{10/7}\right|_0^{\delta} = \left.(\frac{1}{\delta})^{1/7}.\frac{7}{8}.\delta^{8/7}-(\frac{1}{\delta})^{3/7}.\frac{7}{10}.\delta^{10/7}\right|_0^{\delta}$$

$$= \frac{7}{8}.\delta-\frac{7}{10}.\delta = \frac{7}{40}.\delta$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{7}{40}$$

c- H = $\frac{\delta^{*}}{\theta}$

Avec $\theta = \int_0^{\delta}\frac{u}{U}(1-\frac{u}{U}).dy = \int_0^{\delta}[\frac{u}{U}-(\frac{u}{U})^2].dy = \int_0^{\delta}[(\frac{y}{\delta})^{1/7}-(\frac{y}{\delta})^{2/7}].dy$

$$= \left.(\frac{1}{\delta})^{1/7}.\frac{7}{8}.y^{8/7}-(\frac{1}{\delta})^{2/7}.\frac{7}{9}.y^{9/7}\right|_0^{\delta} = \delta.\ \frac{7}{8}.(\frac{\delta}{\delta})^{1/7}-\frac{7}{9}.(\frac{\delta}{\delta})^{2/7} = \delta.\ \frac{7}{8}-\frac{7}{9}$$

$$= \delta[\frac{63-56}{72}] = \frac{7}{72}\delta$$

$$\text{H} = \frac{\delta^{*}}{\theta} = \frac{\frac{1}{8}\delta}{\frac{7}{72}\delta} = \frac{72}{56} = \frac{36}{28} = \frac{9}{7}$$

d- $\frac{\theta}{\delta} = \frac{\frac{7}{72}\delta}{\delta} = \frac{7}{72}$

Exercice 14 :

Une plaque plane de longueur L est placée parallèlement à un écoulement uniforme de vitesse U à l'infini.

1- en utilisant les résultats de la solution de Blasius, établir l'expression de la traînée de la plaque par unité d'envergure en fonction du nombre de Reynolds U.L/ν ?

2- en application du théorème d'Euler à un domaine de fluide que l'on précisera, établir l'expression de cette même traînée en fonction de l'épaisseur de quantité de mouvement. Retrouver alors le résultat de la première question ?

3- donner l'expression du champ de vitesse longitudinale dans la zone de sillage des couches limites an aval de la plaque ?

ECOULEMENTS TRANSITOIRES

Exercice 1 :

Donner la célérité de l'onde de pression provoquée par la fermeture rapide d'une vanne dans une conduite, tout en supposant que la paroi de la conduite est rigide ?

Solution :

L'énergie cinétique de l'eau qui va être transformée en énergie élastique est :

$$M.\frac{V_1^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}.\omega.\frac{S.L}{g}.\frac{V_1^{\,2}}{2}$$

Où L : longueur de la conduite
M : masse de l'eau
V_1 : vitesse initiale
$\omega = \rho$ .g
Le module d'élasticité cubique de l'eau est :

$$\varepsilon = \frac{-\Delta p}{\Delta volume / volume.initial} = \frac{-\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

Avec $\Delta V = \dfrac{V.\Delta p}{\varepsilon} = \dfrac{S.L.\rho.g.h}{\varepsilon}$
Le travail de compression est :

$$\frac{1}{2}.\rho.S.L.V_1^{\,2} = \frac{1}{2}.\rho.g.h.S.L.\rho.g.h / \varepsilon$$

$$h^2 = \frac{V_1^{\,2}.\varepsilon}{g^2.\rho} \qquad (1)$$

En négligeant les frottements, la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$M.V_1 - \sum(F_X.dt) = M.V_2$$

Avec F_x : la force qui produit la variation de quantité de mouvement.

$$-\rho.g.h.S = \rho.Q.(0 - V_1) \qquad \rho.g.h.S = \rho.S.a.V_1$$

h = a.V_1/g

En remplaçant dans l'équation (1), nous trouvons :

$$\frac{a^2.V_1^{\,2}}{g^2} = \frac{V_1^{\,2}.\varepsilon}{g^2.\rho}$$

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

Exercice 2 :

Calculer l'augmentation de pression produite par la fermeture instantanée d'une vanne sur une conduite ?

Solution :

Soit P' est la variation de pression due à la fermeture de la vanne.
D'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement :
La variation de la quantité de mouvement dans la direction x est :

Fx = $\frac{\varpi.Q}{g}.(V_2 - V_1)$ avec $\varpi = \rho$ .g
Si on néglige les frottements : la force qui produit la variation de la quantité de mouvement est : P'.S

$$- P'.S = \frac{\varpi.Q}{g}.(0 - V_1) = \rho.S.a.(0 - V_1)$$

P' = $\rho.a.V_1$ et puisque P' = $\rho.g.h'$

Avec h' : la hauteur de pression

P' = $\rho.g.h'$ = $\rho.a.V_1$ h' = $\frac{a.V_1}{g}$

Exercice 3 :

Comparer les vitesses des ondes de pression circulant le long d'un tuyau rigide contenant :
- de l'eau à 15 °C de module cubique ε_B = 2,16.10^9 Pa. ?
- de l'huile de densité 0,8 et de module cubique 1,38.10^9 Pa ?

Solution :

Pour l'eau : a = $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}16.10^9}{1000}} = 1470$ m/s

Pour l'huile : a = $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho}}$ = $\sqrt{\dfrac{1{,}38.10^9}{0{,}8.1000}} = 1310$ m/s

Exercice 4 :

Calculer la célérité de propagation de l'onde de pression, dans une conduite en acier normal ($E = 2{,}1.10^{11}$ N/m^2), où s'écoule de l'eau à 20 °C. (ρ = 998 kg/m^3, $\varepsilon = 21{,}39.10^8$ N/m^2) ?
Le diamètre de la conduite est de 0,5 m, et l'épaisseur de 6 mm.

Solution :

Nous avons :

$$a = \frac{\rho}{\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{E}.\dfrac{D}{e}}}$$

$$a = 998.\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{21{,}39.10^8} + \dfrac{1}{2{,}1.10^{11}}.\dfrac{500}{6}}} = 1077 \text{ m/s}$$

Exercice 5 :

Même exercice précédant pour une conduite rigide en PVC ($E = 2{,}5.10^{10}$ Pa), de diamètre D = 40 cm, et d'épaisseur 2 mm ?

Exercice 6 :

Quelle est l'augmentation de pression produite par l'arrêt brutal de la circulation de l'huile, de densité 0,85 et de module d'élasticité $\varepsilon = 1{,}7.10^9$ Pa, à raison de 0,57 m^3/s dans un tuyau d'acier de 60 cm de diamètre supposé rigide ?

Solution :

Nous avons :
$\Delta P = \rho .a.\ \Delta u = \rho .a.u_0$

avec a = $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho}}$ = $\sqrt{\dfrac{1{,}7.10^9}{0{,}85.1000}} = 1414{,}2$ m/s

$u_0 = Q/S = Q/[\pi .D^2/4] = 0{,}57/\ [\pi .0{,}6^2/4] = 2{,}02$ m/s

$\Delta P = \rho .a.u_0 = 0{,}85.1000.1414{,}2.2{,}02 = 2428{,}2.10^3$ Pa

Exercice 7 :

On ferme une vanne brusquement dans un tuyau de 75 mm de diamètre transportant de l'huile de densité 0,8 et de module d'élasticité ε = 1,38.10^9 Pa.
Si l'augmentation de la pression est de 600 kPa, quel est le débit probable ? Le tuyau est supposé rigide.

Solution :

On a :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1{,}38.10^9}{0{,}8.1000}} = 1310 \text{ m/s}$$

$$\Delta P = \rho .a. \Delta u = \rho .a.u_0 = 0{,}8.1000.1310.u_0 .$$

$$u_0 = \frac{600.10^3}{0{,}8.1000.1310} = 0{,}572 \text{ m/s.}$$

$$Q = u_0.\pi.D^2 / 4 = 5{,}22.10^{-3} \text{ m}^3\text{/s.}$$

Exercice 8 :

Si un tuyau d'acier de 60 cm de diamètre et de 2440 m de long, a été conçu pour résister à une pression de 103 MPa sous une charge statique maximale de 330 m d'eau, de combien la pression dur les parois du tuyau va-t-elle augmenter quand une vanne à fermeture rapide arrête le débit de 0,85 m^3/s ?
On donne le module d'élasticité de l'acier E = 2.10^9 Pa.
En supposant que le tuyau est rigide.

Solution :

Nous avons :

$$\Delta P = \rho .a. \Delta u$$

$$\text{Avec } a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^9}{1000}} = 1{,}41.10^3 \text{ m/s}$$

Et $\Delta u = u_0 - u_1 = u_0 - 0 = u_0 = Q/S = Q/[\pi .D^2/4] = 0{,}85/ [\pi .0{,}6^2/4] = 3$ m/s

$$\Delta P = 1000.1{,}41.10^3.3 = 4{,}23.10^6 \text{ Pa} = 4{,}23 \text{ MPa}$$

Et $P = P_0 + \Delta P$

Avec $P_0 = \rho .g.h = 1000.9{,}81.330 = 3{,}24$ MPa

P = 4,23 + 3,24 = 7,47 MPa

Exercice 9 :

Un tuyau d'acier de 1,2 m de diamètre et de 10 mm d'épaisseur, transporte de l'eau à 16 °C (ε = 2,16.10^9 Pa) à une vitesse de 1,8 m/s. si le tuyau a une longueur de 3000 m, et si la vanne coté sortie est fermée en 2,50 s, à quelle augmentation de pression dans les parois du tuyau doit-on s'attendre ?
On donne pour l'acier E = 207.10^9 Pa.

Solution :

La célérité de l'onde est :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho\left(1+\frac{\varepsilon}{E}.\frac{D}{e}\right)}} = \sqrt{\frac{2{,}16.10^9}{10^3\left(1+\frac{2{,}16.10^9}{207.10^9}.\frac{1200}{10}\right)}} = 980 \text{ m/s}$$

Le temps d'aller et retour de l'onde est :

T_0 = 2L/a = 2.3000/980 = 6,1 s

Puisque T = 2,5 s < T_0 = 6,1 s : il s'agit donc d'un coup de bélier direct

$$\Delta P = \rho.a.\,\Delta u = \rho.a.u_0 = 1000.980.1{,}8 = 1{,}764.10^6 \text{ Pa} = 1764 \text{ kPa}$$

Exercice 10 :

Déterminer la vitesse de propagation de l'onde de coup de bélier et la surélévation de la pression en cas d'une fermeture instantanée d'une conduite d'acier de diamètre D = 450 mm, l'épaisseur des parois e = 8 mm et la vitesse initiale de l'eau V_0 = 1,8 m/s ?
On donne pour l'acier $\frac{\varepsilon}{E}$ = 0,01, et E = 207.10^8 kgf.

Solution :

On a :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon.D}{E.e}}} \quad \text{avec } a_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}07.10^8}{102}} = 1425 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1+\frac{450}{8}.0,01}} = 1137 \text{ m/s}$$

Et nous avons : $\Delta P = \rho.a.\Delta h = \rho.g.\frac{a}{g}.u_0$ car $\Delta h = \left|\frac{a}{g}.(u-u_0)\right|$

$\Delta P = 1000.1137.1,8 = 2,05.10^6$ Pa = 2050 kPa

Exercice 11 :

Déterminer l'élévation de la pression à une fermeture instantanée d'une tuyauterie d'acier de diamètre D = 500 mm, à parois d'une épaisseur e = 9 mm ?
La vitesse initiale de l'eau étant V_0 = 1,47 m/s.

Solution :

Nous avons : $a_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = 1425$ m/s

Et $a = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon.D}{E.e}}} = \frac{1425}{\sqrt{1+\frac{500}{9}.0,01}} = 1142,74$ m/s

$\Delta P = \rho.a.u_0 = 1000.1142,74.1,47 = 1,68.10^3$ kPa

Exercice 12 :

Déterminer l'élévation de la pression lors de fermeture instantanée d'une conduite de diamètre D = 600 mm, et d'épaisseur des parois e = 5 mm, véhiculant un débit de 200 m^3/h ?
On donne :
$E = 18.10^{10}$ N/m^2.
$\varepsilon = 21.10^8$ N/m^2.

Solution :

Nous avons :

$\Delta P = \rho.a.\Delta u$

Avec :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho\ 1+\frac{\varepsilon}{E}.\frac{D}{e}}} = \sqrt{\frac{21.10^8}{10^3\ 1+\frac{21.10^8}{18.10^{10}}.\frac{0,6}{0,005}}} = 935,41 \text{ m/s}$$

D'autre part, nous avons : $Q = 200\ m^3/h$

$v = Q/[\pi.D^2/4] = (200/3600)/[\pi.0,6^2/4] = 0,196$ m/s

$\Delta P = 1000.935,41.\ 0,196 = 183,34$ kPa.

Ou bien : $\Delta P = \frac{\Delta u.a}{g} = \frac{0,196.935,41}{9,81} = 18,69$ m.

Exercice 13 :

De l'huile circule dans un tuyau en acier de 2440 m de long à raison de 0,57 m^3/s, combien faut-il de temps pour fermer la vanne pour éviter la valeur de coup de bélier maximale ?
On donne :
La densité de l'huile est 0,85 et son module d'élasticité $\varepsilon = 1,7.10^9$ Pa.
Le tuyau est supposé rigide de 60 cm de diamètre.

Solution :

Nous avons : $T_0 = 2L/a$

Avec $a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,7.10^9}{0,85.1000}} = 1414,2$ m/s

Pour éviter le coup de bélier maximum $\quad T > T_0$

$T_0 = 2L/a = 2.2440/1414,2 = 3,45$ s

Pour éviter le coup de bélier maximum, le temps de fermeture de la vanne T doit être supérieure à 3,45 s

$T > 3,45$ s.

Exercice 14 :

La longueur d'une tuyauterie d'acier entre le réservoir et la vanne est L = 1800 m, le diamètre D = 450 mm, l'épaisseur e = 6 mm. Le débit circulant est Q = 127 l/s.
Déterminer l'élévation maximale de la pression $\Delta Pmax$ prés de la vanne à sa fermeture progressive durant T = 3 s et à la loi linéaire de la variation de la vitesse ?

Solution :

On a : $T_0 = 2L/a$

Avec $a_0 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho}} = 1425$ m/s

$$a = \frac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1+\dfrac{\varepsilon.D}{E.e}}} = \frac{1425}{\sqrt{1+\dfrac{450}{6}.0,01}} = 1077,18 \text{ m/s}$$

$T_0 = 2L/a = 2.1800/1077,18 = 3,34$ s > T = 3 s

Il s'agit d'un coup de bélier direct.

$\Delta P_{max} = \rho.a.\,u_0$

Avec : $u_0 = Q/S = Q/[\pi.D^2/4]$

$\Delta P_{max} = \rho.a.Q/[\pi.D^2/4] = 1000.1077,18.0,127/(\pi.0,45^2/4) = 860,6$ kPa

Exercice 15 :

Une conduite de 460 m de long et de 1,2 m de diamètre, véhiculant de l'eau à une vitesse de 0,6 m/s, et la célérité de l'onde qui la traverse est de 1143 m/s.
Calculer la valeur maximale de coup de bélier sur la vanne et à 152 m et à 304 m de la vanne :
- si la vanne est brusquement et complètement fermée ?
- si la vanne est brusquement et partiellement fermée réduisant la vitesse à 0,18 m/s ?

Exercice 16 :

Une conduite de 300 m de long, où l'eau s'écoule à 0,8 m/s dont la célérité de l'onde est de 1000 m/s.
Calculer la valeur maximale du coup de bélier sur la vanne, et à 100 m et à 200 m de la vanne :
- si la vanne est fermée complètement et ?
- si la vanne est brusquement et partiellement fermée permettant la réduction de la vitesse à 0,2 m/s ?

Exercice 17 :

De l'eau s'écoule à une vitesse de 3,048 m/s dans une conduite de 122 m de long, de 0,2 m de diamètre et de 6 mm d'épaisseur.

Calculer le temps d'un aller et retour de l'onde de pression et la valeur maximale de la surpression produite par la fermeture brusque de la vanne pour :
- une fermeture complète ?
- une réduction de la vitesse à 1,83 m/s ?

Exercice 18 :

Nous supposons que la célérité de l'onde dans une conduite est de 975 m/s. si cette conduite est de 610 m de long, et de 1,2 m de diamètre, calculer la valeur maximale du coup de bélier sur la vanne, et à 910 m du réservoir pour :
- la vanne est partiellement fermée en 4 s permettant le débit de passer de 0,85 m^3/s à 0,28 m^3/s ?
- le débit initial est de 0,42 m^3/s et la vanne est complètement fermée en 1 s ?

Exercice 19 :

Une conduite en acier de diamètre D = 300 mm, d'épaisseur e = 5 mm, de longueur L = 3 km et comportant une vanne à son extrémité, et véhiculant de l'eau à un débit de 200 l/s.
Si on ferme la vanne partiellement en 3 s permettant de réduire la vitesse à 50% de sa valeur initiale, déterminer l'augmentation maximale de la pression dans la conduite ?
On donne :
Le module d'élasticité volumique de l'eau $\varepsilon = 21.10^8$ N/m^2.
Le module d'élasticité longitudinale de l'acier $E = 2.10^{11}$ N/m^2.

Solution :

Nous avons :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho\left(1+\frac{\varepsilon}{E}.\frac{D}{e}\right)}} = \sqrt{\frac{21.10^8}{10^3\left(1+\frac{21.10^8}{2.10^{11}}.\frac{0,3}{0,005}\right)}} = 1135,05 \text{ m/s}$$

Le temps d'aller et retour de l'onde est :

$T_0 = 2L/a = 2.3000/1135,05 = 5,286$ s

Donc $T_0 = 5,286$ s > T = 3 s
Il s'agit d'un coup de bélier direct.

$$\Delta P_{max} = \rho.a.\Delta u = \rho.a.(v_0 - v) = 1000.1135,05.(v_0 - v_0/2) = 1000.1135,05.v_0/2$$

Avec $v_0 = Q_0/[\pi.D^2/4]$

$$\Delta P_{max} = 1000.1135,05.(Q_0/2)/[\pi.D^2/4] = 1000.1135,05.(0,2/2)/[\pi.0,3^2/4] = 1606,58 \text{ kPa}$$

$\Delta P_{max} = 1606,58$ kPa

Ou bien $\Delta h_{max} = \dfrac{\Delta u.a}{g} = \dfrac{a.\frac{1}{2}Q_0 / S}{g} = \dfrac{a.Q_0}{2g.S} = \dfrac{1135{,}05.0{,}2}{2.9{,}81.\pi.\frac{0{,}3^2}{4}}$ = 163,77 m

Exercice 20 :

Une conduite en acier de longueur L = 2 km, et de diamètre D = 300 mm, reliant un réservoir et une vanne, et véhiculant un débit Q = 100 l/s.
Déterminer l'élévation maximale de la pression sur la vanne, si elle se ferme progressivement pendant 4 s ?
Sachant que la loi de variation de la vitesse est linéaire.
On prend :
e = 5 mm.
$\varepsilon = 21.10^8$ N/m^2.
E = 2.10^{11} N/m^2.

Solution :

Nous avons :

$$a = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho\ 1+\dfrac{\varepsilon}{E}.\dfrac{D}{e}}} = \sqrt{\dfrac{21.10^8}{10^3\ 1+\dfrac{21.10^8}{2.10^{11}}.\dfrac{0{,}3}{0{,}005}}} = 1135{,}05 \text{ m/s}$$

T_0 = 2.2000/1135,05 = 3,52 s
Donc T_0 = 3,52 s < T = 4 s.
Il s'agit donc d'un coup de bélier indirect.

$$\Delta P_{max} = 2.\rho.L.u_0/T = 2.\rho.(L/T).(Q_0/S) = \dfrac{2.10^3.2.10^3}{4}.\dfrac{0{,}1}{\pi.\frac{0{,}3^2}{4}} = 1415{,}43 \text{ kPa}$$

ΔP_{max} = 1415,43 kPa

Ou bien :

$$\Delta h_{max} = \dfrac{2L.u_0}{g.T} = \dfrac{2L.Q_0/S}{g.T} = \dfrac{2.2.10^3.0{,}1}{9{,}81.4.\pi.\frac{0{,}3^2}{4}} = 144{,}28 \text{ m}$$

Exercice 21 :

Calculer l'augmentation de pression produite par le fermeture partielle d'une vanne montée sur une conduite en acier de module d'élasticité E = 205.10^9 Pa, d'épaisseur e = 2 mm, de diamètre D = 70 cm et de longueur L = 2 km, véhiculant de l'eau à 20 °C de module d'élasticité $\varepsilon = 21{,}39.10^8$ Pa à un débit Q0 = 0,8 m^3/s, sachant que la fermeture partielle de la vanne conduit à une réduction de 50% de la vitesse pendant 4 s ; et cela pour les deux cas :

a- la conduite est rigide ?
b- la conduite est élastique ?

Solution :

a- conduite régide :
La célérité de l'onde est :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{21{,}39.10^8}{1000}} = 1{,}46.10^3 = 1462{,}5 \text{ m/s}$$

Le temps de l'aller et le retour de l'onde sera :

$T_0 = 2.L/a = 2.2.10^3 /1462{,}5 = 2{,}73$ s

Le temps de fermeture est T = 4 s

Donc : $T_0 = 2{,}73 \text{ s} < T = 4$ s
Il s'agit d'un coup de bélier indirect

$$\Delta P_{max} = \frac{2.L}{g.T}.(u-u_0) = \frac{2L}{g.T}.\frac{1}{2}.u_0 = \frac{2L}{g.T}.\frac{1}{2}.\frac{Q_0}{S} = \frac{2.10^3.0{,}8}{9{,}81.4.\frac{\pi.0{,}7^2}{4}} = 106 \text{ m}$$

$\Delta P_{max} = 106 \text{ m} \approx 1{,}06 \text{ MPa} \approx 10{,}6$ bars

b- conduite élastique :
La célérité de l'onde :

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho \; 1+\frac{\varepsilon}{E}.\frac{D}{e}}} = \sqrt{\frac{21{,}39.10^8}{10^3 \; 1+\frac{21{,}39.10^8}{205.10^9}.\frac{700}{2}}} = 678{,}2 \text{ m/s}$$

Le temps de l'aller et le retour de l'onde sera :

$T_0 = 2L/a = 2.2.10^3/278{,}2 = 5{,}9$ s

Nous avons $T_0 = 5{,}9 \text{ s} > T = 4$ s

Il s'agit d'un coup de bélier direct :

$$\Delta P_{max} = a.(u - u_0)/g = \frac{a.\frac{1}{2}.\frac{Q_0}{S}}{g} = \frac{a.Q_0}{2g.\pi.\frac{D^2}{4}} = \frac{678{,}2.0{,}8}{2.9{,}81.\pi.\frac{0{,}7^2}{4}} = 71{,}89 \text{ m}$$

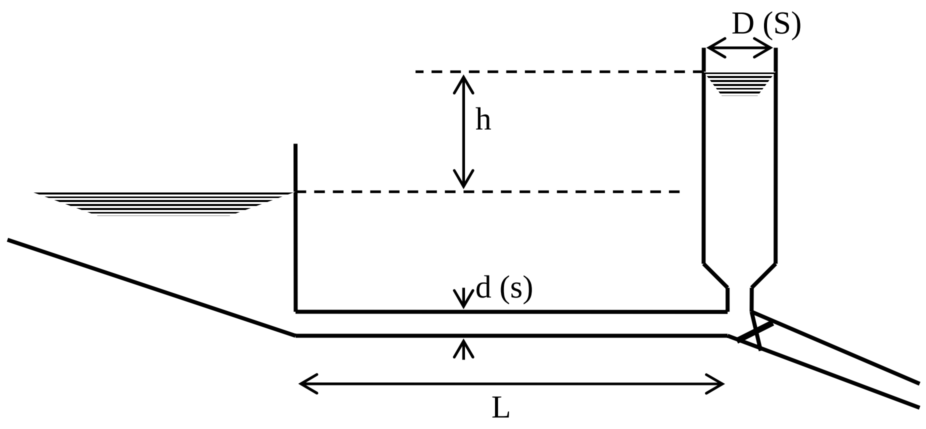
$\Delta P_{max} = 71{,}89 \text{ m} \approx 0{,}72 \text{ MPa} \approx 7{,}19$ bars

Exercice 22 :

Une conduite élévatoire de longueur L = 500 m et de section s = 1 m^2, où s'écoule un débit Q_0 = 1 m^3/s, est protégée dans sa partie initiale par une cheminée de section constante Ω = 5 m^2. Calculer l'oscillation dans la cheminée, dans le cas d'un arrêt brusque des pompes, et compte tenu de la perte de charge dans la conduite qu'est de ΔH = 4,5 m ?

Exercice 23 :

Une galerie d'aménagement hydroélectrique de longueur L et de section s, relie une retenue de superficie assez grande dont les variations de niveau sont négligeables ; à une cheminée d'équilibre verticale cylindrique de diamètre D.
En négligeant les pertes de charge, trouver l'expression de la période des petites oscillations de l'ensemble ?



On donne $\quad L = 16km$, $\quad s = 16m^2$, $\quad D = 16m$

Solution :

La masse de l'eau dans la galerie est : m = ρ.s.L (1)

Les forces d'inertie aux quelles soumise cette masse : $-m.\dfrac{dV}{dt} = -\rho.s.L.\dfrac{dV}{dt}$ (2)

Les forces de pression : S.ρ.g.h

L'équation de continuité : s.V = S.$\dfrac{dh}{dt}$

Avec :
S : section de la cheminée

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S}{s}.\frac{d^2h}{dt^2} \qquad (3)$$

En remplaçant (1) dans (2), et faisant égalité des forces de pression aux forces d'inertie, on trouve :

$$-\rho.s.L.\frac{dV}{dt} = S.\rho.g.h \qquad (4)$$

Remplaçant maintenant (3) dans (4) pour retrouver :

$$\frac{L.S}{g.s}.\frac{d^2h}{dt^2} + h = 0$$

La solution oscillante non amortie de cette équation différentielle est de type :

$$h = h_0.\mathrm{Sin}(2.\pi\frac{t}{T})$$

Où la période est : $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{L.S}{g.s}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{16.10^3.\pi.16^2}{10.4.16}} = 891$ s

$$h0 = \mp Q_0.\sqrt{\frac{L}{s.g.S}} = \mp v_0.\sqrt{\frac{L.s}{g.S}}$$

Exercice 24 :

On suppose que la galerie de l'exercice précédant débite Q = 48 m^3/s.
1- si l'on ferme rapidement la conduite immédiatement en aval de la cheminée d'équilibre, à quelle hauteur l'eau montrait-elle dans la cheminée d'équilibre ? (en négligeant les frottements).
2- si la hauteur de la cheminée d'équilibre est égale à 20 m, quel sera le volume d'eau déversé ?

Solution :

1- D'après le même raisonnement précédant, nous avons :

$$\frac{L.S}{g.s}.\frac{d^2h}{dt^2} + h = 0 \qquad (1)$$

Dont l'intégration de cette équation, donne :

$$h = h_0.\mathrm{Sin}(2.\pi\frac{t}{T})$$

Avec $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{L.S}{g.s}}$

La valeur de h_0 qui correspond au maximum de hauteur dans la cheminée, sera obtenue en considérant les conditions initiales.

On a : $s.V_0 = S.\frac{dh}{dt}$ $\quad \frac{s}{S}.V_0 = \frac{dh}{dt} = \frac{2\pi}{T}.h_0.Cos(2\pi.\frac{t}{T})$

Pour $t_0 = 0$ $\quad Cos(\frac{2\pi}{T}.0) = 1$ $\quad \frac{s}{S}V_0 = \frac{2\pi}{T}h_0$

$$h_0 = V_0.\sqrt{\frac{L.s}{g.S}} = 3.\sqrt{\frac{16.10^3.16}{10.\frac{\pi.16^2}{4}}} = 33{,}9m$$

2- l'équation précédente (n°1) n'est valable que pour des niveaux ne dépassant pas la hauteur de la cheminée (20 m), si non ; on considère que la force de pression reste constante :

$$\rho.S.L.\frac{dV}{dt} + \rho.g.S.h_1 = 0 \qquad \frac{L}{g}.\frac{dV}{dt} + h_1 = 0$$

Avec h_1 = 20 m.

$$V = V_1 - \frac{g.h_1.t}{L} \qquad (2)$$

Où V_1 : vitesse dans la conduite à l'instant où h atteint 20 m dans la cheminée, le tant étant compté maintenant à partir de cet instant.

Le volume déversé $U = \int_0^{T_1} s.V.dt = s.V_1.T_1 - \frac{s.g.h_1}{2L}T_1^2$

Où T_1 est le temps nécessaire pour annuler la vitesse dans la galerie.

D'après (2) : $T_1 = \frac{V_1.L}{g.h_1}$

$$U = \frac{s.V_1^2.L}{g.h_1} - \frac{s.g.h_1}{2L}.\frac{V_1^2.L}{g^2.h_1^2} = \frac{s.V_1^2.L}{2g.h_1}$$

La vitesse dans la première phase de l'écoulement est :

$$V = \frac{S}{s}.\frac{dh}{dt} = \frac{S}{s}.h_0.\frac{2\pi}{T}Cos(\frac{2\pi.t}{T}) = V_0.Cos(\frac{2\pi.t_1}{T})$$

Où t_1 : temps écoulé entre la fermeture et le début de déversement :

on a : $\text{Sin}(2.\pi\frac{t_1}{T})$ = h_1/h_0 = 20/33,9 = 0,59

t_1 = 98,48 s

$V_1 = v_0.0,807$ = 2,42 m/s

U = 3740 m^3.

T_1 = 194 s.

Avec bien sure : $\begin{array}{l} V_0 = 3m/s \\ T = 981s \end{array}$

Exercice 25 :

On désire fermer un orifice de section s_0, situé à l'extrémité avale d'une conduite longue, de section S, de telle sorte que le débit décroisse linéairement en fonction du temps.
1- déterminer la loi de pression devant l'orifice pendant la fermeture, en supposant que le coefficient de débit m est constant ?
2- quelle doit être la loi de fermeture de l'orifice en fonction du temps : $\frac{s}{s_0}$?
On admettra que la durée T de fermeture est inférieure au temps que mettent les ondes de pression émises depuis l'orifice, pour y revenir après réflexion sur l'extrémité amont de la conduite ?

Solution :

Le débit traversant l'orifice à chaque instant :

$q_v = m.s.\sqrt{2g.h}$

Avec h : charge devant l'orifice
La variation temporelle de ce débit est :

$q_v = q_{v0} - q_{v0}.t/T \qquad dq_v = -\, q_{v0}.dt/T$

La surpression devant l'orifice est:

$$dh = -\frac{a}{g}du = -\frac{a}{g.S}dq_v$$

$$dh = \frac{a}{g.S.T}.q_{v0}.dt \qquad \int_{h_0}^{h} dh = \int_0^t \frac{a}{g.S}.\frac{q_{v0}}{T}.dt$$

h = $\frac{a.q_{v0}}{g.S.T}.t + h_0$

Où h_0 : charge initiale devant l'orifice.

En fin de fermeture : t = T $h_1 = \frac{a.q_{v0}}{g.S} + h_0 = \frac{a.u_0}{g} + h_0$

Où u_0 : vitesse initiale dans la conduite.
La surpression totale produite par la fermeture est :

$$\Delta h = h_1 - h_0 = \frac{a.u_0}{g} = \frac{a.q_{v0}}{g.S}$$

2- Nous avons :

q_v = m.s.$\sqrt{2g.h}$

$$h = \frac{q_v^{\ 2}}{m^2.s^2.2g} = \frac{q_{v0}^{\ 2}}{2g.m^2.s^2}.(1 - \frac{t}{T})^2$$

Avec h = h_0 + $\frac{a.q_{v0}}{g.S}.\frac{t}{T}$

$$h_0 + \frac{a.q_{v0}}{g.S}.\frac{t}{T} = \frac{q_{v0}^{\ 2}}{2g.m^2.s^2}.(1 - \frac{t}{T})^2$$

A t = 0, nous avons : q_{v0} = m.s_0.$\sqrt{2g.h_0}$ et $h_0 = \frac{q_{v0}^{\ 2}}{2g.m^2.s^2}$

$$\frac{a.q_{v0}.t}{g.S.T} = \frac{q_{v0}^{\ 2}}{2g.m^2}.\ \frac{(1 - \frac{t}{T})^2}{s^2} - \frac{1}{s_0^{\ 2}}$$

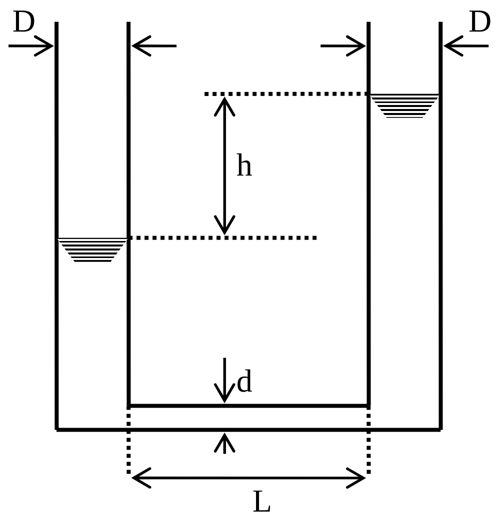
La loi de fermeture est donnée par : $\frac{s}{s_0} = \frac{1 - \frac{t}{T}}{\sqrt{1 + \frac{2.a.m^2.s_0^{\ 2}}{q_{v0}.S}.\frac{t}{T}}}$

On peut écrire aussi :

$$\frac{s}{s_0} = \frac{1 - \frac{t}{T}}{\sqrt{1 + \frac{a.u_0}{g.h_0}.\frac{t}{T}}} = \frac{1 - \frac{t}{T}}{\sqrt{1 + \frac{\Delta h}{h_0}.\frac{t}{T}}}$$

Exercice 26 :

Un manomètre est constitué par deux tubes verticaux de diamètre D, reliés par un tube plus fin de longueur L et de diamètre d.
En admettant que les pertes de charge dans ce dernier tube sont à chaque instant, égales à celles d'un écoulement laminaire permanent, calculer la condition pour laquelle, la viscosité du liquide réalise l'amortissement critique ?



Solution :

La masse du fluide contenue dans le tube horizontal est :

m = $\rho.L.\frac{\pi.d^2}{4}$

Sa force d'inertie à chaque instant t est :

$$-m.\frac{dV}{dt} = -\rho.L.\pi.\frac{d^2}{4}.\frac{dV}{dt}$$

Cette force est équilibrée par des forces de pression et de frottement.
- les forces de pression sont : $\frac{\pi.d^2}{4}.\rho.g.h$
- les forces de frottement sont : $\Delta P.\frac{\pi.d^2}{4}$ avec $\Delta P = f.\frac{L}{d}.\rho.\frac{V^2}{2}$
En écoulement laminaire f = $\frac{64}{\Re} = \frac{64.\nu}{V.d}$

$$\Delta P.\frac{\pi.d^2}{4} = 8\pi.\rho.L.\nu.V$$

En équilibre ; la somme des forces est nulle :

$$\rho.L.\frac{\pi.d^2}{4}.\frac{dV}{dt}+\rho.g.\frac{\pi.d^2}{4}.h+8\pi.\rho.L.\nu.V=0 \qquad (1)$$

D'autre part, l'équation de continuité des volumes fluides est :

$$\text{V}.\frac{\pi.d^2}{4}=\frac{1}{2}.\pi.\frac{D^2}{4}.\frac{dh}{dt}\Rightarrow V=\frac{D^2}{2.d^2}.\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{D^2}{2d^2}.\frac{d^2h}{dt^2} \qquad (2)$$

On remplace (2) dans (1), et on simplifie, nous trouvons :

$$\frac{1}{2g}.\frac{D^2}{d^2}.\frac{d^2h}{dt^2}+16.\frac{L.\nu.D^2}{g.d^4}.\frac{dh}{dt}+h=0$$

Cette dernière, est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, de type :

$$A.\frac{d^2h}{dt^2}+B.\frac{dh}{dt}+C.h=0$$

Où l'amortissement critique est obtenu avec : $B^2 = 4.A.C$

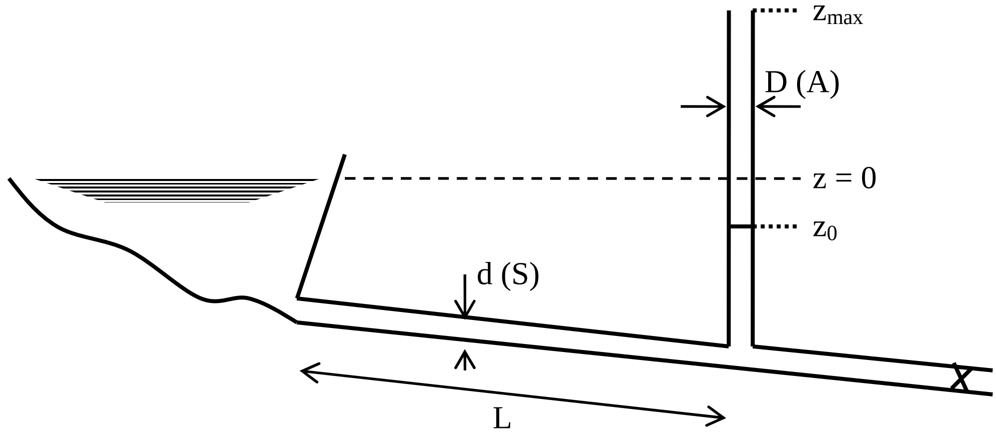
$$128.\frac{L.\nu^2.D^2}{g.d^6}=1$$

Et le système sera oscillatoire si $128.\frac{L.\nu^2.D^2}{g.d^6}<1$

Application numérique : avec g = 9,81 m/s^2.
$\nu = 10^{-6}$ m^2/s , d = D = 0,01 m   L = 780 m.
$\nu = 10^{-6}$ m^2/s , L = 10 m   d = D = 3,4 m.
$\nu = 10^{-6}$ m^2/s , D = 0,01 m , d = 0,032 m   L = 0,84 m.

Exercice 27 :

On opte pour une cheminée d'équilibre pour protéger une conduite en fonte de 800 m de long, et de 1,5 m de diamètre, contre le coup de bélier. La cheminée est placée sur la conduite à 35 m au dessous de la surface libre du château d'eau.
Pour un débit de 12 m^3/s dans la conduite, quel est le diamètre minimal à donner au cheminée pour éviter de dépasser 18,5 m au dessus de la surface libre du château d'eau ?
On donne le coefficient de perte de charge dans la conduite C = 11,1 ; et on néglige les effets de l'inertie et les pertes dans la cheminée.



Solution :

Normalement le niveau dans la cheminée se stabilise à z = 0 (même niveau que celui dans le château d'eau) mais à cause des pertes de charge dans la conduite, le niveau se stabilise à z_0 (inférieur à z).
Nous avons :

$-z_0 = C.\frac{V_0^{\ 2}}{2g}$ avec C : coefficient de perte de charge.

Pour une vitesse V donnée (pendant une fermeture d'une vanne) :
La cote d'eau dans la cheminée sera :
Faisant forces d'inertie égales aux forces de pression :

$$-m.\frac{dV}{dt} = S.\rho.g.z + S.\rho.g.\Delta z$$

Et puisque $m = \rho.S.L$ et $\Delta z = z - z_0 = 0 - -C.\frac{V_0^{\ 2}}{2g} = C.\frac{V_0^{\ 2}}{2g}$

Nous remplaçons et nous simplifions, nous trouvons :

$$-\rho.S.L.\frac{dV}{dt} = S.\rho.g.z + S.\rho.g.C.\frac{V^2}{2g}$$

$$z + C.\frac{V_0^{\ 2}}{2g} = -\frac{L}{g}.\frac{dV}{dt}$$

Si on donne
S : section de la conduite
A : section de la cheminée

De l'équation de continuité, on écrit :

S.V = A.$\frac{dz}{dt}$ V = $\frac{A}{S}.\frac{dz}{dt}$

-z = $C.\frac{V_0{}^2}{2g}$ + $\frac{L}{g}.\frac{S}{A}.V.\frac{dV}{dz}$

z + $C.\frac{V_0{}^2}{2g}$ = - $\frac{L}{g}.\frac{A}{S}.\frac{d^2z}{dt^2}$

$\frac{L}{g}.\frac{A}{S}.\frac{d^2z}{dt^2}$ + z = - $C.\frac{V_0{}^2}{2g}$ = - $\frac{C}{2g}.\frac{A^2}{S^2}.\ \frac{dz}{dt}\ ^2$

Ou bien –z = $C.\frac{V_0{}^2}{2g}$ + $\frac{L}{g}.\frac{S}{A}.V.\frac{dV}{dz}$

L'intégration de cette équation donne :

$$V^2 = \frac{2g}{C}.\ \frac{L.S}{C.A} - z\ \ - C_1.e^{\frac{-C.A}{L.S}.z} \qquad (1)$$

Avec C_1 : coefficient d'intégration.
Pour les conditions aux limites, nous avons :
$t = t_0$: $V = V_0$ et $z = z_0$.

$$V^2 = \frac{2g}{C}.\ \frac{L.S}{C.A} - z_0\ \ - C_1.e^{\frac{-C.A}{L.S}.z_0} = \frac{2g}{C}.\ \frac{L.S}{C.A} + C.\frac{V_0{}^2}{2g}\ \ - C_1.e^{\frac{C.A}{L.S}.C.\frac{V_0{}^2}{2g}}$$

$$\frac{2g.L.S}{C^2.A} = C_1.e^{\frac{C^2.A}{2g.L.S}.V_0{}^2} \qquad (2)$$

Et pour $z = z_{max}$: $V = V_0$.

En remplaçant dans l'équation (1) :

$$0 = \frac{2g}{C}.\ \frac{L.S}{C.A} - z_{\max}\ \ - C_1.e^{\frac{-C.A}{L.S}.z_{\max}}$$

$$\frac{2g}{C}.\ \frac{L.S}{C.A} - z_{\max}\ \ = C_1.e^{\frac{-C.A}{L.S}.z_{\max}}$$

$$\frac{2g}{C^2}.\frac{L.S}{A} - \frac{2g}{C}.z_{\max} = C_1.e^{\frac{-C.A}{L.S}.z_{\max}} \qquad (3)$$

De l'équation (2), on tire :

$C_1 = \dfrac{2g}{C^2}.\dfrac{L.S}{A}.e^{-\frac{C^2.A}{2g.L.S}.V_0^2}$

Nous remplaçons maintenant dans (3) :

$$\frac{2g}{C^2}.\frac{L.S}{A} - \frac{2g}{C}.z_{\max} = \frac{2g}{C^2}.\frac{L.S}{A}.e^{-\frac{C^2.A}{2g.L.S}.V_0^2 - \frac{C.A}{L.S}.z_{\max}}$$

$$1-\frac{C.A}{L.S}.z_{\max} = e^{-\frac{C.A}{L.S}.(C.\frac{V_0^2}{2g}+z_{\max})} \qquad (4)$$

Et puisque le 2eme terme est toujours positif :

$$\frac{C.A}{L.S}.z_{\max} < 1$$

Application numérique :

$V_0 = Q_0/S = \dfrac{12}{\pi.1{,}5^2/4} = 6{,}79$ m/s

$z0 = -C.\dfrac{V^2}{2g} = -11{,}1.\dfrac{6{,}79^2}{2.9{,}81} = -26{,}09$ m : $|-26{,}09| < 35$

$z_{\max} = 18{,}5$ m

On a $\dfrac{C.A}{L.S}.z_{\max} < 1$ A < $\dfrac{L.S}{C.z_{\max}} = \dfrac{800.\pi.1{,}5^2/4}{11{,}1.18{,}5} = 6{,}88$

Résolvant maintenant l'équation (4) par itérations successives :

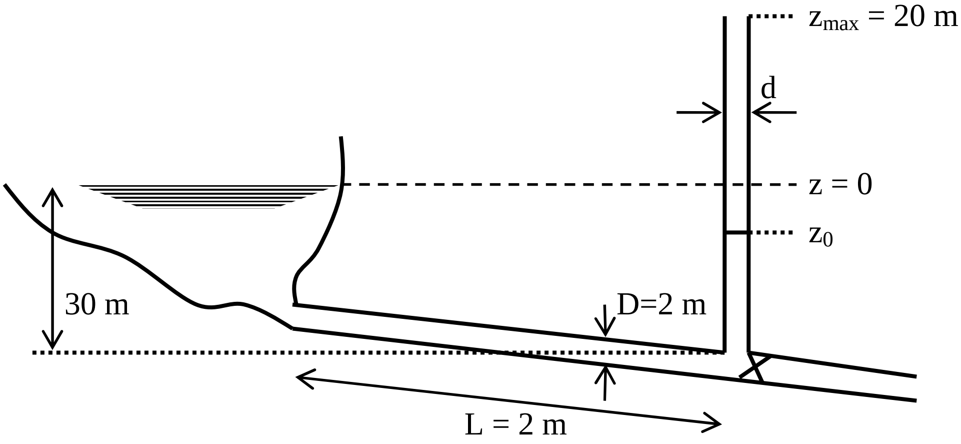
A	$1-\frac{C.A}{L.S}.z_{\max}$	$e^{-\frac{C.A}{L.S}.(C.\frac{V_0^2}{2g}+z_{\max})}$
6,88	0,00064	0,08994
6,80	0,01226	0,09249
6,00	0,12847	0,12239
6,06	0,11975	0,11985

A $\approx 6{,}06$ m^2 d = 2,78 m.

Exercice 28 :

Une conduite d'adduction d'eau de longueur L = 2 km et de diamètre D = 2 m, est protégée contre les phénomènes transitoires par une cheminée d'équilibre, placée à 30 m sous le niveau de la surface libre du réservoir (voir le schéma en dessous).

Trouver le diamètre minimal à donner au cheminée pour éviter que l'eau ne dépasse pas les 20 m au dessus de la surface libre du réservoir ?
On donne le coefficient des pertes de charge dans la conduite C = 10,2 ; et en négligeant les effets de l'inertie, et les pertes de charge dans la cheminée.
Le débit véhiculé par la conduite est $Q = 15\ m^3/s$.



Solution :

Nous avons :

$$1-\frac{C.A}{L.S}.z_{\max} = e^{\frac{-C.A}{L.S}.(C.\frac{v_0^2}{2g}+z_{\max})}$$

$$1 > \frac{C.A}{L.s}.z_{\max}$$

Avec $v_0 = Q_0/s = \dfrac{15}{\pi.2^2/4} = 4{,}78$ m/s

$z_o = -C.v^2/2g = -10{,}2.4{,}78^2/2.9{,}81 = -11{,}88$ m

Où $|-11{,}88| < 20$ m

Et $1 > \dfrac{C.A}{L.s}.z_{\max}$ A < $1 > \dfrac{L.S}{C.z_{\max}} = \dfrac{2000.\pi.\frac{2^2}{4}}{10{,}2.20} = 30{,}78\ m^2$.

$$1-0{,}0325.A = e^{-0{,}0518.A}$$

C'est une équation transcendante, pour la résoudre, on utilise les itérations successives :

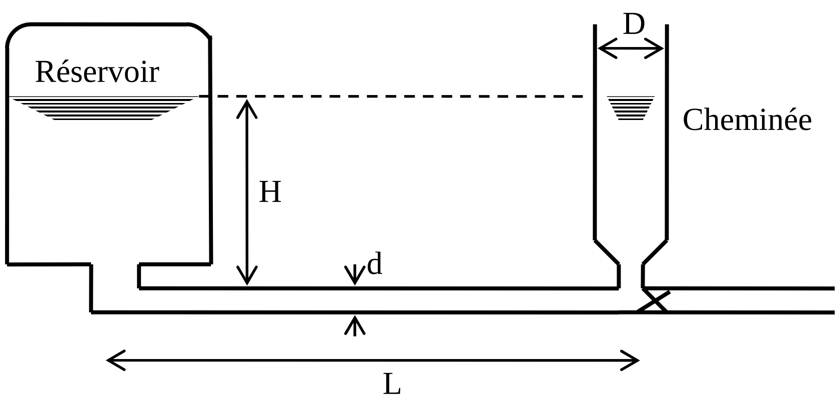
A	1-0,0325.A	$e^{-0,0518.A}$
30,78	-0,00035	0,203
30	0,025	0,2114
20	0,35	0,3548
19,8	0,3565	0,3585
19,7	0,35975	0,3604
19,6	0,363	0,3623
19,65	0,36137	0,36136

Donc A = 19,65 $m^2 = \pi.d^2 / 4$

$$d = \sqrt{\frac{4.19,65}{\pi}} = 5,0032 \approx 5 \text{ m.}$$

Exercice 29 :

Une cheminée d'équilibre de forme cylindrique, de diamètre D = 5 m, est choisie comme moyen de protection anti-bélier d'une conduite d'adduction reliée à un château d'eau.
1- si la conduite est de diamètre d = 1,5 m et de longueur L = 12 km, véhiculant un débit Q_0 = 1 m3/s, en négligeant les pertes de charge, calculer l'augmentation du niveau d'eau dans la cheminée après une fermeture rapide de la conduite ?
2- si le niveau d'eau dans le réservoir est H = 10 m, donner la hauteur totale de la cheminée ?



Solution :

Il s'agit d'une oscillation en masse de la masse d'eau existante dans la conduite, entre le réservoir et la cheminée.
- La masse d'eau dans la conduite est : m = ρ.s.L
- les forces d'inertie aux quelles est soumise cette masse :

$$-m.\frac{dV}{dt} = -\rho.s.L.\frac{dV}{dt}$$

- les forces de pression exercées sur cette masse :

$$s.\rho.g.h$$

$$s.\rho.g.h = -\rho.s.L.\frac{dV}{dt} \qquad (1)$$

D'après l'équation de continuité :

$$s.V = S.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{S}{s}.\frac{d^2h}{dt^2}$$

$$\frac{L.S}{g.s}.\frac{d^2h}{dt^2} + h = 0$$

Et l'équation (1) devient :

$$s.\rho.g.h = -\rho.s.L.\frac{S}{s}.\frac{d^2h}{dt^2}$$

Pour que la masse oscille entre la cheminée et le réservoir, la solution de la dernière équation est de type :

$$h = h_0.\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Où la période des oscillations est T = $2\pi.\sqrt{\frac{L}{g}.\frac{S}{s}}$

Et leur amplitude est $h_0 = \mp Q_0.\sqrt{\frac{L}{s.g.S}} = \mp Q_0.\sqrt{\frac{L}{\frac{\pi^2}{4^2}.g.d^2.D^2}}$

$$h_0 = \mp 1.\sqrt{\frac{12.10^3}{\frac{\pi^2}{4^2}.9{,}81.1{,}5^2.5^2}} = 5{,}94 \text{ m}$$

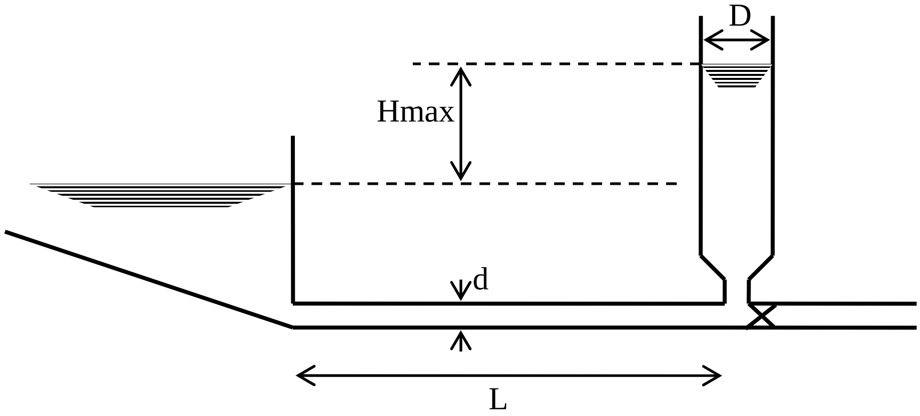
Δh = 5,94 m.

La hauteur totale de la cheminée est h = H + Δh = 10 + 5,94 = 15,94 $\approx$ 16 m.

Exercice 30 :

Une conduite de diamètre D = 2 m et de longueur L = 20 km, véhiculant un débit Q = 3 m^3/s, reliant un réservoir de grande section et une cheminée d'équilibre verticale de diamètre d = 0,5 m.

Si on ferme rapidement la vanne qui se trouve juste après la cheminée, en négligeant les pertes de charge :
- calculer la période des petites oscillations de l'ensemble ?
- calculer l'élévation maximale de l'eau dans la cheminée ?



Solution :

Nous avons :

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{L.S}{g.s}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{20.10^3.\pi.0,5^2/4}{9,81.\pi.2^2/4}} = 70,89 \text{ s}$$

$$H_0 = \mp Q_0\sqrt{\frac{L}{s.g.S}} = \mp 3\sqrt{\frac{20.10^3}{\pi.\frac{2^2}{4}.9,81.\pi.\frac{0,5^2}{4}}} = \mp 172,56 \text{ m}$$

Ou bien $h_0 = \mp v_0.\sqrt{\frac{L.s}{g.S}} = \mp 172,56$ m

Références bibliographiques

1 *P.Chassaing, Mécanique des fluides : éléments d'un premier parcours, Edition Cépadués, Toulouse 1997.*
2 *J.Coirier, Mécanique des milieux continus : concepts de base, Edition Dunod, Paris 1997.*
3 *S.Candel, Problèmes résolus de mécanique des fluides, Edition Dunod, Paris 1995.*
4 *J.Bouttes, Mécanique des fluides, Edition Marketing, Paris 1988.*
5 *L.Landau et E.Lifchitz, Physique théorique : mécanique des fluides, Edition Mir, Moscou, 1994.*
6 *M.Damou, Mécanique des fluides, Edition OPU, Alger 1994.*
7 *C.Grossetete, Mécanique des fluides, Edition Ellipses, Paris 1991.*
8 *M.A.Morel et J.P.Laborde, Exercices de mécanique des fluides : tome 1 et 2, Edition Eyrolles, Paris 1994.*
9 *R.Comolet, Mécanique expérimentale des fluides: tome 1,2,et 3, Edition Masson, Paris 1994.*
10 *Researche & education association, Problem solvers: fluid mecanics, USA 1996.*
11 *I.L.Ryhming, Dynamique des fluides, Presses polytechniques modernes, Lausanne 1985.*
12 *J.Padet, Fluides en écoulement, Edition Masson, Paris 1991.*
13 *R.K.Zeytounian, Modélisation asymptotique en mécanique des fluides Newtoniens, Edition Springer-Verlag, Villeneuve d'Ascq (France) 1994.*
14 *L.Debnath et D.N.Riahi, Nonlinear instability, chaos and turbulence, Edition WIT press, Canada 1998.*
15 *L.Loukarfi, Exercices resoles de mécanique des fluides, Edition El-Oumma, Alger 1999.*
16 *N.Midoux, Mécanique et rhéologie des fluides, Edition Lavoisier, Paris 1985.*
17 *J.B.Franzini et E.J.Finnemore, Fluid mecanics, Edition McGraw-Hill companies, USA 1997.*
18 *B.N.Chetverushkin and al., Experimentation, modelling and computation in flow, turbulence and combustion: tome 2, Edition John wiley & sons Lrd. Chichester (England) 1996.*
19 *A.Pemenov et Kh.Tagui-zade, Hydraulique générale, Edition OPU, Alger 1993.*
20 *L.W.Mays, Hydraulic design handbook, Edition McGraw-Hill companies, USA 1999.*
21 *H.Lumbroso, Mécanique des fluides, Edition Dunod, Paris 1996.*
22 *Edmond A.Brun, André Martinot-Lagarde et Jean Mathieu, Mécanique des fluides, Edition Dunod, Paris 1970.*