



N° d'ordre : UTMB/FSE/PP/

Filière : Physique

Spécialité : 2ème Année Licence SM-ST

Module : Analyse complexe.

Fonction de La Variable Complexe

Cours avec exercices d'applications

LAMMARI Khelifa

Expertisé par :

DR . EL HENDI Hichem
DR . EL FARISSI Abdallah

Année Universitaire :2020/2021

Sommaire

Sommaire	<i>i</i>
Liste des figures	<i>iv</i>
Préface	1

Chapitre 0

Généralités sur les nombres complexes

0.1. Introduction	3
0.2. Définition d'un nombre complexe	3
0.3. Arithmétique complexe	3
0.3.1. Opérations de base	3
0.3.2. Eléments neutre dans $\mathbb{C}$	4
0.3.3. Inverse d'un nombre complexe	5
0.4. Quelques propriétés	5
0.4.1. Commutativité	5
0.4.2. Distributivité	5
0.4.3. Existence d'un symétrique (opposé)	5
0.5. Lois des exposants	5
0.6. Théorème du binôme	6
0.7. Module et conjugué d'un nombre complexe	6
0.7.1. Certaines remarques concernant le module d'un nombre complexe	6
0.8. Inégalité triangulaire	9
0.9. Plan complexe (Représentation graphique d'un nombre complexe)	10
0.10. Forme polaire (trigonométrique) et formule d'Euler des nombres complexes	11
0.10.1. Formule d'Euler	13
0.10.2. Propriétés de $e^{(i\theta)}$	14
0.10.3. Formule de Moivre	16
0.10.4. Opérations sur la forme polaire des nombres complexes	17
0.11. Racines n-ième d'un nombre complexe	18
0.11.1. Recherche des racines d'un nombre complexe	18
0.11.2. Les racines n-ième de l'unité	19
0.12. Lieux, ensembles et régions géométriques dans le plan complexe	20
0.13. Exemples d'ensembles de points dans le plan complexe	24
0.13.1. Courbe	24
0.13.2. Segment de droite	24
0.13.3. Disque ouvert	25
0.13.4. Disque fermé	25

0.13.5. L'anneau	25
0.13.6. La bande	25
0.13.7. Secteur	26

Chapitre 1

Fonctions holomorphes d'une variable complexe

1.1. Introduction	27
1.2. Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes	27
1.3. La fonction uniforme	28
1.4. La fonction multiforme	28
1.5. Transformation (Développement en partie réelle et partie imaginaire)	28
1.6. Limites	29
1.6.1. Quelques propriétés	31
1.7. Continuité	33
1.8. Fonction holomorphe (analytique)	34
1.8.1. Dérivation	34
1.8.2. Les règles de dérivation	36
1.8.3. Equations de Cauchy-Riemann	36
1.8.4. Conditions suffisantes pour la différentiabilité	40
1.8.5. Équations de Cauchy - Riemann sous forme polaire	41
1.8.6. Règle de L'hôpital	42
1.9. Fonctions harmoniques	48
1.10. Primitive d'une fonction holomorphe	49

Chapitre 2

Fonctions élémentaires dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

2.1. Introduction	51
2.2. Fonctions homographiques	51
2.3. La fonction exponentielle	52
2.4. La fonction logarithme complexe et ses branches	54
2.4.1. Branches de $\log(z)$	55
2.5. Fonction puissance complexes	60
2.6. Fonctions trigonométriques	63
2.6.1. Propriétés	63
2.6.2. Tangente et cotangente, sécante et cosécante	66
2.6.3. Fonctions hyperboliques	67
2.6.4. Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses:	69

Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

3.1. Introduction	72
3.2. Contours (Courbe ou chemin)	72
3.2.1. Longueur d'un arc	73
3.3. Exemples de courbes	74
3.4. Intégration le long d'un chemin (Contour)	75
3.5. Primitives	80
3.5.1. Théorème fondamental pour l'intégration complexe	81

3.6. Théorème de Cauchy	81
3.6.1. Domaines simplement et multiplement connexes	82
3.7. Formule de l'intégrale de Cauchy	85
3.8. Dérivées des fonctions holomorphes	87
3.9. Séries entières	88
3.9.1. Séries de Taylor	89
3.9.2. Séries de Laurent	90
3.9.2.1. Zéros des fonctions holomorphes	91
3.9.2.2. Points singuliers	92
3.9.2.3. Types de points singuliers isolés	92
3.10. Prolongement analytique	95

Chapitre 4

Théorèmes des résidus et applications aux calculs d'intégrales

4.1. Introduction	97
4.2. Théorème des résidus	97
4.3. Résidus aux pôles	98
4.3.1. Cas de fonctions rationnelles	100
4.4. Théorème des résidus de Cauchy	100
4.5. Résidu à l'infini	104
4.6. Lemmes de Jordan	105
4.7. Application du théorème des résidus au calcul intégral	105
4.7.1. Intégrales trigonométriques	105
4.7.2. Intégrales de fractions rationnelles de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	108
4.7.3. Intégrales de fonctions multiformes	112
4.8. Formule des compléments	113

Chapitre 5

Applications

5.1. Introduction	116
5.2. Equivalence entre holomorphie et analyticité	116
5.3. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne	117
5.4. Théorème du Maximum	118
5.5. Principe du module maximum	118
5.5.1. Principe du module maximum (Première version)	119
5.5.2. Principe du module maximum (Première version)	119
5.6. Théorème de Liouville	120
5.7. Théorème fondamental de l'algèbre	121
5.8. Fonctions méromorphes	122
5.9. Enoncé du théorème de Rouché	124
5.10. Calcul d'intégrales par la méthode des Résidus	126
5.10.1. Intégrale sur des contours particuliers	126
5.10.2. Intégrales impropres contenant une exponentielle	127

Liste des figures

Figure 0.1	: Module d'un nombre complexe	6
Figure 0.2	: Conjugué d'un nombre complexe	8
Figure 0.3	: Représentation graphique d'un nombre complexe $z = x + yi$	11
Figure 0.4	: Somme de nombres complexes	11
Figure 0.5	: Représentation polaire d'un nombre complexe	12
Figure 0.6	: Un ε -voisinage d'un point z_0	20
Figure 0.7	: Un ε -voisinage d'un point z_0 privé de z_0	20
Figure 0.8	: Points intérieur, extérieur et frontière d'un ensemble S	21
Figure 0.9	: Dessin de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 1\}$	21
Figure 0.10	: Dessin de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : z - i \geq 1\}$	22
Figure 0.11	: Ensemble S connexe	22
Figure 0.12	: Ensemble S non connexe	23
Figure 0.13	: Dessin de l'anneau $S_1 = \{z \in \mathbb{Z} : 1 < z < 2\}$	23
Figure 0.14	: Schéma d'une courbe	24
Figure 0.15	: Segment de droite joignant z_1 et z_2	24
Figure 0.16	: Schéma de l'anneau $A(z_0, r_1, r_2)$	25
Figure 0.17	: Exemples de bandes	25
Figure 0.18	: Le secteur	26
Figure 1.1	: Schéma de la transformation complexe	27
Figure 1.2	: Le voisinage $N_\varepsilon(1)$ du point $z = 1$	43
Figure 1.3	: Représentation de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$ et du point $z = 2$	44
Figure 1.4	: Représentation d'ensembles de points $ z - 1 \leq \frac{1}{2}$ et $ z - 1 < 1$	45
Figure 2.1	: Représentation des singularités de	56
Figure 2.2	: Représentation de la coupe de branche (La demi-ligne passant par $z = 0$)	56
Figure 2.3	: Domaine d'analyticité de $\text{Log}(z)$	57
Figure 3.1	: Tracé du chemin de l'exercice 3.2	73
Figure 3.2	: Tracé de la courbe défini par $z(t) = e^{-it}$ où $t \in [0, \pi]$	74
Figure 3.3	: Exemples de contours	74
Figure 3.4	: Tracé de la courbe de l'exercice 3.4	75
Figure 3.5	: Tracé de la droite défini par : $z(t) = 1 - t + it$ où $t \in [0, 1]$	76

Figure 3.6	: Contours C et $-C$	76
Figure 3.7	: Tracé du contour de l'exercice 3.8	79
Figure 3.8	: Domaines simplement et multiplement connexes	82
Figure 3.9	: Domaine D qui contient les contours fermés et simples C_1 et C_2 et la région se trouvant entre eux.	83
Figure 3.10	: Tracé du contour $C_1 : z(t) = 1 + e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$ et du rectangle décrit par $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$	84
Figure 3.11	: Tracé de la frontière du carré défini par $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$	85
Figure 3.12	: Tracé du carré orienté positivement défini par $-3 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 3$	87
Figure 3.13	: Tracé du cercle orienté positivement défini par $ z + 1 = 2$	88
Figure 4.1	: Illustration du domaine et contour pour le théorème des résidus de Cauchy	101
Figure 4.2	: Tracé du cercle orienté positivement défini par $ z = 2$ et des points singuliers $z = 0$, $z = -1$ (Exercice 4.5)	103
Figure 4.3	: Le changement des variables d'une intégrale définie sur $[0, 2\pi]$ à une intégrale de contour autour de Γ .	106
Figure 4.4	: Contour pour évaluer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	110
Figure 4.5	: Contour d'intégration "Trou de serrure"	112
Figure 5.1	: Tracé du contour du rectangle défini par $-R \leq x \leq R$ et $0 \leq y \leq 2\pi i$	126

Préface

L'analyse complexe, également appelée théorie des fonctions, est parmi les branches des mathématiques qui incluent des fonctions de nombres complexes. C'est un outil extrêmement important avec un nombre inattendu d'applications, y compris dans la théorie des nombres, les mathématiques appliquées, la physique, l'hydrodynamique, la thermodynamique et l'ingénierie électrique. La croissance rapide de la théorie de l'analyse complexe et de ses applications a suscité un intérêt continu pour son étude par des étudiants dans de nombreuses disciplines. Cela a donné à l'analyse complexe une place distincte dans les programmes de formation universitaire à travers le monde entier, et elle est maintenant enseignée à différents niveaux dans presque tous les établissements.

Le présent polycopié, intitulé : « Fonction de La Variable Complexe, cours avec exercices d'applications » est élaboré et présenté en conformité au canevas relatif à la formation Licence LMD-S3 dans le domaine Science de la matière (SM). L'objectif de ce cours est d'introduire les idées fondamentales des fonctions de variables complexes et de développer une compréhension claire des concepts fondamentaux de l'analyse complexe. Plus spécifiquement, à la fin du cours, l'étudiant sera en mesure de :

- Prouver le théorème de Cauchy-Riemann et sa réciproque et les utiliser pour décider si une fonction donnée est holomorphe;
- Utiliser des séries entières pour définir une fonction holomorphe;
- Effectuer des calculs avec des fonctions holomorphes élémentaires telles que le sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, exponentiel, logarithme et des fonctions définies par des séries entières;
- Définir l'intégrale complexe et utiliser diverses méthodes (le théorème fondamental de l'intégration des contours, le théorème de Cauchy, le théorème de Cauchy généralisé et le théorème des résidus de Cauchy) pour calculer l'intégrale complexe des fonctions données;

- Utiliser le théorème de Taylor et le théorème de Laurent pour développer une fonction holomorphe en termes de séries de puissance sur un disque et de séries de Laurent sur un anneau, respectivement;
- Identifier l'emplacement et la nature d'une singularité d'une fonction et, dans le cas des pôles, calculer l'ordre et le résidu;
- Appliquer des techniques d'analyse complexe pour déduire des résultats dans d'autres domaines des mathématiques, y compris la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre et le calcul d'intégrales réelles infinies, d'intégrales trigonométriques.

Généralités sur les nombres complexes

0.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons la configuration algébrique et géométrique du système de nombres complexes. En particulier, les nombres complexes, comme les nombres réels, auront les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ainsi que de division par tout nombre complexe sauf zéro. Ces opérations suivront toutes les lois auxquelles nous sommes habitués telles que les lois commutatives et distributives. Nous évoquons aussi les notions des lieux, ensembles et régions géométriques dans le plan complexe.

0.2. Définition d'un nombre complexe

Définition 0.1 (Nombres complexes)

Un nombre complexe est défini comme une expression de la forme :

$$z = x + iy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels.} \quad (0.1)$$

Ce type d'expression, $z = x + iy$, est appelé forme cartésienne. La partie réelle de $z = x + iy$ est le nombre réel x , qui est noté $Re(z)$, et la partie imaginaire de $z = x + iy$, le nombre réel y , qui est noté $Im(z)$, il s'ensuit donc que:

$$z = Re(z) + iIm(z) \quad (0.2)$$

Nous définissons l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ comme étant:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\} \quad (0.3)$$

0.3. Arithmétique complexe

0.3.1. Opérations de base

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes, alors nous pouvons avoir les opérations suivantes :

Définition 0.2 (Egalité de deux nombres complexes)

$$z_1 = z_2 \text{ si et seulement si } x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \text{ si et seulement si } x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2. \quad (0.4)$$

Définition 0.3 (Somme des nombres complexes)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (0.5)$$

Exercice 0.1

Calculer les nombres complexes suivants :

1. $(3 + i) + (1 - 4i)$.
2. $(1 + 5i) + (-11 + i)$.

Solution

1. $(3 + i) + (1 - 4i) = (3 + 1) + (1 - 4)i = 4 - 3i$.
2. $(1 + 5i) + (-11 + i) = (1 - 11) + (5 + 1)i = -10 + 6i$.

Définition 0.4 (Soustraction des nombres complexes)

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (0.6)$$

Exercice 0.2

Calculer $(3 + 4i) - (1 - 2i)$.

Solution

$$(3 + 4i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (4 + 2)i = 2 + 6i.$$

Définition 0.5 (Multiplication des nombres complexes)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2i^2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (0.7)$$

Exercice 0.3

Calculer $(3 + 4i) \cdot (1 - 2i)$.

Solution

$$(3 + 4i) \cdot (1 - 2i) = (3 + 8) + (-6 + 4)i = 11 - 2i.$$

Ou d'une autre façon :

$$(3 + 4i) \cdot (1 - 2i) = 3 \cdot (1 - 2i) + 4i(1 - 2i) = 3 - 6i + 4i + 8 = 11 - 2i.$$

Définition 0.6 (Division des nombres complexes)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1)}{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}. \quad (0.8)$$

Avec $z_2 \neq 0$.

Exercice 0.4

Calculer $\frac{1-i}{1+i}$ et $\frac{2i^{24}-i^{19}}{1+i}$.

Solution

- 1) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$.
- 2) $\frac{2i^{24}-i^{19}}{1+i} = \frac{2(i^2)^{12}-(i^2)^9 \cdot i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+1+i-2i}{2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

0.3.2. Eléments neutre dans $\mathbb{C}$

✚ On note $0 = 0 + 0i$ comme l'élément neutre pour la somme dans $\mathbb{C}$, puisque $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = 0 + z = z$ est satisfaite.

✚ On note $1 = 1 + 0i$ comme élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$, puisque $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ est satisfaite.

0.3.3. Inverse d'un nombre complexe

✚ Si $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ alors nous pouvons désigner l'inverse de z par z^{-1} .

Il est évident que : $z^{-1} = \frac{1}{x+iy}$. (0.9)

✚ Pour un $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ donné; il existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tel que : $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Remarque 0.1

D'un point de vue logique, il convient de définir un nombre complexe $z = x + iy$; comme une paire ordonnée (x, y) , sous réserve de certaines définitions qui s'avèrent être équivalentes aux précédentes comme ceci :

$$z_1 = z_2 \text{ si et seulement si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ si et seulement si } x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2. \quad (0.10)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \quad (0.11)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (0.12)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (0.13)$$

De ce qui précède, nous avons:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy \text{ en considérant que } (1, 0) = 1 \text{ et } (0, 1) = i.$$

0.4. Quelques propriétés

L'addition et la multiplication de deux nombres complexes est un nombre complexe, c'est-à-dire que si z_1 et z_2 sont des nombres complexes, alors $z_1 + z_2$ et $z_1 \cdot z_2$ sont des nombres complexes. Pour z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes, on a :

0.4.1. Commutativité

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1. \quad (0.14)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1. \quad (0.15)$$

0.4.2. Distributivité

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3). \quad (0.16)$$

0.4.3. Existence d'un élément symétrique

$$\text{Pour un } z \in \mathbb{C} \text{ donné; il existe } -z \in \mathbb{C} \text{ tel que : } z + (-z) = (-z) + z = 0. \quad (0.17)$$

Exercice 0.5

Calculer pour $z = 1 + 2i$ le nombre complexe $\frac{1}{z}$.

Solution

Pour $z = 1 + 2i$ on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1 \cdot (1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

0.5. Lois des exposants

$$\text{Pour un } z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \text{ donné on a : } z^0 = 1, z^1 = z \text{ et } z^n = z^{n-1} \cdot z. \quad (0.18)$$

Et pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a :

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}. \quad (0.19)$$

$$(z^n)^m = z^{n.m}. \quad (0.20)$$

$$(z_1 \cdot z_2)^n = (z_1)^n \cdot (z_2)^n. \quad (0.21)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} \text{ pour } z_2 \neq 0. \quad (0.22)$$

$$\frac{z_1^n}{z_1^m} = z_1^{n-m} \text{ pour } z_1 \neq 0. \quad (0.23)$$

0.6. Théorème du binôme

Pour les deux nombres complexes z et w on a:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \cdot w^k \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0.24)$$

Exercice 0.6

Calculer $(-\sqrt{3} - i)^3$.

Solution

Par l'application de la formule du binôme nous obtenons :

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} - i)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (-\sqrt{3})^{3-k} (-i)^k \\ &= (-\sqrt{3})^3 + 3(-\sqrt{3})^2(-i) + 3(-\sqrt{3})(-i)^2 + (-i)^3 \\ &= -8i. \end{aligned}$$

0.7. Module et conjugué d'un nombre complexe

Définition 0.7 (Module de z)

Le module ou valeur absolue d'un nombre complexe $z = x + iy$, est noté par $|z|$ et est défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (0.25)

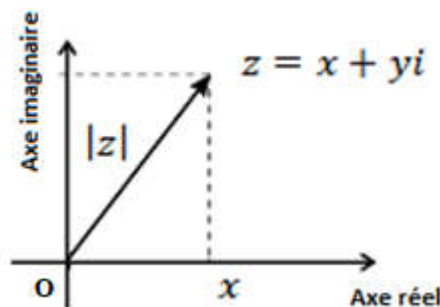


Figure 0.1 : Module d'un nombre complexe

0.7.1. Certaines remarques concernant le module d'un nombre complexe

1. Pour tout nombre complexe z on a : $|z| \in \mathbb{R}^+$ et $|z| \geq 0$.
2. Pour tout nombre complexe z on a : $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. Géométriquement $|z|$ désigne la longueur du vecteur représentant.
4. L'inégalité $z_1 < z_2$ n'a pas de sens sauf si z_1 et z_2 sont réels.
5. L'inégalité $|z_1| < |z_2|$ signifie que le point z_1 est plus proche à l'origine que le point z_2 .

6. La distance entre deux points $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ est $|z_1 - z_2|$. Cette distance est donnée par : $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (0.26)

Exemple 0.1

Puisque $|2 - 3i| = \sqrt{13}$ et $|4 + 2i| = \sqrt{20}$, le point $2 - 3i$ est plus proche de l'origine que le point $4 + 2i$.

Exercice 0.7

Que représente l'équation suivante $|z - 2 + i| = 2$?

Solution

L'équation $|z - 2 + i| = 2$ représente le cercle dont le centre est $z_0 = (2, -1)$ et dont le rayon est $R = 2$.

Exercice 0.8

Vérifier que $|(1 - 3i)(2 - i)| = |1 - 3i| \cdot |2 - i|$.

Solution

En effet : $|(1 - 3i)(2 - i)| = |2 - i - 6i - 3| = |-1 - 7i| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Et $|1 - 3i| \cdot |2 - i| = \sqrt{1 + 9} \cdot \sqrt{4 + 1} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Proposition 0.1 (Certaines propriétés du module d'un nombre complexe)

Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes, alors :

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$.
5. $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$ (Exercice).

Preuve

$$1. |z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})} = \sqrt{(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2})} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| |z_2| \text{ car } z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ (Voir propriété 0.30).}$$

$$4. |z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \text{ et } |z|^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2.$$

On peut remarquer que : $(Re(z))^2 \leq |z|^2$ ce qui implique que $|Re(z)| \leq |z|$ donc

$$Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|.$$

Définition 0.8 (Conjugué de z)

Le nombre complexe conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est défini comme étant le nombre complexe $x - iy$ et est noté $\bar{z}$.

On écrit $\bar{z} = x - iy$. (0.27)

Le nombre $\bar{z}$ est représenté par le point $(x, -y)$ qui est la réflexion dans l'axe réel du point (x, y) représentant z (Figure 0.2).

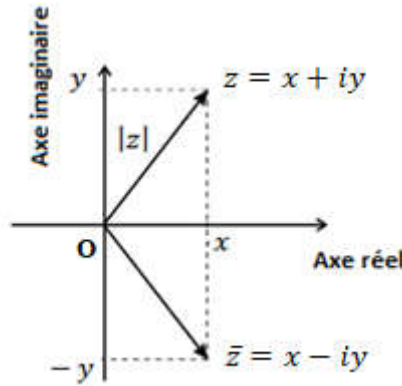


Figure 0.2 : Conjugué d'un nombre complexe

Exemple 0.2

Si $z = 2 + 5i$ alors : $\bar{z} = 2 - 5i$ où $Re(\bar{z}) = 2$ et $Im(\bar{z}) = -5$.

Si $z = 4 - 3i$ alors : $\bar{z} = 4 + 3i$ où $Re(\bar{z}) = 4$ et $Im(\bar{z}) = 3$.

Proposition 0.2 (Certaines propriétés du conjugué d'un nombre complexe)

Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes, alors :

$$1. \quad \bar{\bar{z}} = z. \quad (0.28)$$

$$2. \quad |\bar{z}| = |z|. \quad (0.29)$$

$$3. \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2. \quad (0.30)$$

$$4. \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2. \quad (0.31)$$

$$5. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \quad (0.32)$$

$$6. \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ où } z_2 \neq 0 \quad (0.33)$$

$$7. \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = x = Re(z). \quad (0.34)$$

$$8. \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = y = Im(z). \quad (0.35)$$

Preuve

Nous donnons ici la démonstration de quelques propriétés alors que les autres sont proposées comme étant des exercices.

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes.

$$3. \quad z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2) - (x)(iy) + (iy)(x) - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

$$4. \quad \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = \overline{z_1 + z_2}.$$

$$5. \quad \text{Pour : } z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$\text{On a } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}.$$

$$\text{Pour } \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{x_1 + iy_1} \cdot \overline{x_2 + iy_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$6. \quad \text{Pour } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \text{ on a } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 \bar{z}_2}}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_1 z_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ où } z_2 \neq 0.$$

$$7. \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(x + iy) + (x - iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = Re(z).$$

$$8. \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \text{Im}(z).$$

Exercice 0.9

Trouver sous sa forme cartésienne le nombre complexe suivant:

$$\frac{1-i}{3+i} + \frac{3-2i}{1+i}.$$

Solution

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{3+i} + \frac{3-2i}{1+i} &= \frac{(1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} + \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2-4i}{10} + \frac{1-5i}{2} \\ &= \frac{2-4i}{10} + \frac{5-25i}{10} \\ &= \frac{7}{10} - \frac{29i}{10}. \end{aligned}$$

Exercice 0.10

Montrer que l'équation $-x^2 + y^2 = 1$ peut être écrite sous la forme suivante : $z^2 + \bar{z}^2 = -2$.

Solution

$$\begin{aligned} \text{On sait que } x &= \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ et } y = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \\ -x^2 + y^2 = 1 &\Leftrightarrow -\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = 1. \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}\right) + \left(\frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{-4}\right) = 1. \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2)+(z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2)}{4}\right) = 1. \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2+z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}\right) = 1. \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{2z^2+2\bar{z}^2}{4}\right) = 1. \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{z^2+\bar{z}^2}{2}\right) = 1. \\ &\Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -2. \end{aligned}$$

0.8. Inégalité triangulaire

Proposition 0.3 (Inégalité triangulaire)

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes, alors :

$$1. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (0.36)$$

$$2. |z_1 + z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right| \geq |z_1| - |z_2|. \quad (0.37)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} 1. |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ \text{Donc } |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

Elle peut être facilement généralisée comme suit : $|\sum_{j=1}^{j=n} z_j| \leq \sum_{j=1}^{j=n} |z_j|$

2. $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$, ce qui donne $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

De la même manière, nous pouvons montrer que : $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$.

Du fait que $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$.

Après multiplication par (-1) on trouve $-(|z_2| - |z_1|) \geq -|z_1 + z_2|$.

Donc $|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 + z_2|$.

Ce qui montre que : $-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Donc on a montré que : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ et par la suite :

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Exercice 0.11

Montrer que $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Solution

Puisque $|-z_2| = |z_2|$, on peut remplacer z_2 par $-z_2$ dans l'inégalité $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ pour trouver le résultat sous la forme suivante :

$$|z_1 + (-z_2)| = |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |-z_2||.$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Exercice 0.12

Si z se trouve sur le cercle $|z| = 2$, alors montrez que : $3 \leq |z^2 - 1| \leq 5$

Solution

$$\text{On a } |z^2 - 1| \leq |z^2| + |-1| = 4 + 1 = 5.$$

$$\text{Et } |z^2 - 1| \geq ||z^2| - |-1|| = |4 - 1| = 3.$$

$$\text{Donc } 3 \leq |z^2 - 1| \leq 5.$$

Exercice 0.13

En utilisant l'inégalité $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, montrer que si z appartient au cercle d'équation $|z| = 3$, alors $|z^2 - 3z + 2| \geq 2$.

Solution

En décomposant l'expression $z^2 - 3z + 2$ en produit de deux facteurs on obtient :

$$|z^2 - 3z + 2| = |(z - 2)(z - 1)| = |z - 2||z - 1|.$$

$$\text{Et } |z - 2| \geq ||z| - |2|| = |3 - 2| = 1.$$

$$\text{Et } |z - 1| \geq ||z| - |1|| = |3 - 1| = 2.$$

$$\text{Alors } |z - 2||z - 1| \geq 2.$$

$$\text{Finalement } |z^2 - 3z + 2| \geq 2.$$

0.9. Plan complexe (Représentation graphique d'un nombre complexe)

Dans un nombre complexe $z = x + iy$, il y a deux nombres réels qui le caractérisent, sa partie réelle x et sa partie imaginaire y . Cela incite à représenter chaque nombre complexe $x + iy$ comme la paire (x, y) où la première composante x correspond à la partie réelle du nombre

complexe z et sera situé sur l'axe des x , que l'on appellera l'axe réel et la deuxième composante y représentera la partie imaginaire du nombre complexe z et sera situé sur l'axe y , qui sera appelé l'axe imaginaire. Puisque le nombre complexe $z = x + iy$ peut être considéré comme une paire ordonnée (x, y) , alors z peut être représenté par un point dans le plan xy , appelé plan complexe. Ainsi à chaque nombre complexe $z = x + iy$ correspond un et un seul point dans le plan complexe et réciproquement à chaque point du plan complexe correspond un et un seul nombre complexe (Figure 0.3).

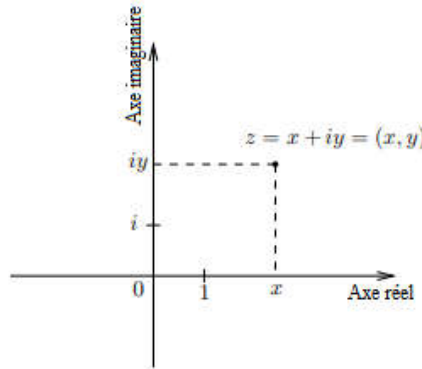


Figure 0.3 : Représentation graphique d'un nombre complexe $z = x + iy$

Une autre représentation possible de $z = x + iy$ est sous forme vectorielle, puisque z est considéré comme une ligne dirigée qui commence à l'origine et se termine au point (x, y) . Pour additionner les nombres z_1 et z_2 , c'est-à-dire $z_1 + z_2$, on procède comme indiqué sur la figure 0.4.

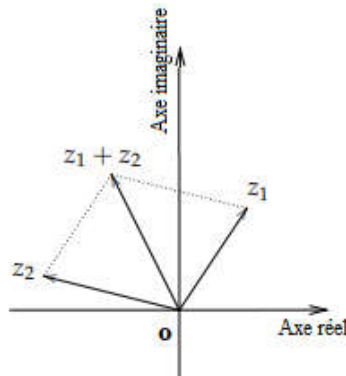


Figure 0.4 : Somme de nombres complexes

0.10. Forme polaire (trigonométrique) et formule d'Euler des nombres complexes

Souvent les points du plan sont définis en termes de coordonnées polaires, le nombre complexe $z = x + iy$ avec $z \neq 0$, est représenté par le point P dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y) ou dont les coordonnées polaires sont (r, θ) où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module de z noté $r = |z|$ et θ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe Ox positif.

Puisque $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, le nombre z peut être écrit sous forme polaire comme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. (0.38)

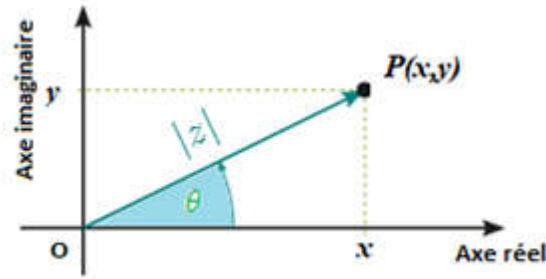


Figure 0.5 : Représentation polaire d'un nombre complexe

Définition 0.9

Les valeurs de θ peuvent être déterminées en spécifiant le quadrant contenant $z = x + iy$ et en utilisant l'une des trois équations suivantes:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}. \quad (0.39)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}. \quad (0.40)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}. \quad (0.41)$$

Définition 0.10

Soit z un nombre complexe $z (z \neq 0)$, alors :

1. Chaque valeur de θ telle que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle un argument de z .
2. L'ensemble de tous les arguments de z est noté $\arg(z)$.

Remarques 0.2

1. Si $z = 0$, alors θ n'est pas défini et on ne peut donc pas écrire z sous forme polaire.
2. θ a un nombre infini de valeurs, positives et négatives, qui diffèrent par des multiples entiers de 2π .
3. Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'argument principal, noté par $\text{Arg}(z)$.
On a : $\theta = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. Pour $z = x + iy \neq 0$ on détermine $\text{Arg}(z)$ par :

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \quad (0.42)$$

Exercice 0.14

Ecrire le nombre complexe $z = -1 - i$ sous sa forme polaire.

Solution

Pour $z = -1 - i$ on a $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$$tg(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ qui représente l'argument principal.

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Exercice 0.15

Trouver $Arg(5)$, $Arg(-5)$, $Arg(2i)$, $Arg(-7i)$.

Solution

$$Arg(5) = \arctg\left(\frac{0}{5}\right) = \arctg(0) = 0.$$

$$Arg(-5) = \arctg\left(\frac{0}{-5}\right) + \pi = \arctg(0) + \pi = \pi.$$

$$Arg(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$Arg(-7i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 0.16

Trouver $arg(z)$ pour $z = 1 - i$.

Solution

$$Arg(1 - i) = \arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctg(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

Et

$$arg(z) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 0.17

Trouver l'argument principal $Arg(z)$ pour $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Solution

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } Arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right) &= \arctg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right) + \pi = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi. \\ &= -\arctg(\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

0.10.1. Formule d'Euler

L'expression $\cos\theta + i\sin\theta$ peut être simplifiée en remplaçant les fonctions trigonométriques cosinus et sinus par leurs représentations en séries entières et en utilisant la relation $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} \cos\theta + i\sin\theta &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (i)^{2n} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{n=\infty} (i)^{2n} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(i\theta)^n}{(n)!} \\ &= e^{i\theta}. \end{aligned} \tag{0.43}$$

Ce résultat est connu sous le nom de formule d'Euler.

0.10.2. Propriétés de $e^{i\theta}$

1. $\frac{d}{dt}(e^{it}) = i(e^{it}).$ (0.44)

En effet cela découle directement de la définition:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{it}) &= \frac{d}{dt}(\cos(t) + i\sin(t)). \\ &= -\sin(t) + i\cos(t). \\ &= i^2\sin(t) + i\cos(t). \\ &= i(\cos(t) + i\sin(t)). \\ &= i(e^{it}).\end{aligned}$$

2. $e^{i0} = 1.$ (0.45)

En effet : $e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

3. $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}.$ (0.46)

En effet cela repose sur les formules d'addition du cosinus et du sinus.

$$\begin{aligned}e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a)).(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))) \\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)}.\end{aligned}$$
 (0.47)

4. On voit aussi plus généralement que, pour $z = a + ib$, e^z peut être réduit à :
 $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos(b) + i\sin(b)).$ (0.48)

5. $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$ (0.49)

En effet on a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \frac{2\cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta).\end{aligned}$$

6. $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$ (0.50)

En effet on a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2i} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} = \frac{2i\sin(\theta)}{2i} \\ &= \sin(\theta).\end{aligned}$$

7. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$ (0.51)

En effet on a :

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\theta}} &= \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta).\end{aligned}$$

$$= e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}.$$

Exercice 0.18

Ecrire $z_1 = -1$ et $z_2 = 1 + i$ sous la forme polaire.

Solution

On devrait écrire z_1 et z_2 sous la forme $z = re^{i\theta}$.

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1.$$

$$\theta_1 = \text{Arg}(z_1) = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) + \pi = 0 + \pi = \pi.$$

$$\text{Donc } z_1 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}.$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\theta_2 = \text{Arg}(z_2) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc } z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 0.19

Ecrire $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ sous la forme $x + iy$.

Solution

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Proposition 0.4

Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes alors :

$z_1 = z_2$ si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve (Exercice)

Remarque 0.3

$$z = z_0 + Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (0.52)$$

Est une représentation paramétrique du cercle dont l'équation est :

$$|z - z_0| = R. \quad (0.53)$$

Proposition 0.5

Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ deux nombres complexes alors :

$$1. \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (0.54)$$

$$2. \quad z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1} \text{ où } z_1 \neq 0 \quad (0.55)$$

$$3. \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \text{ où } z_2 \neq 0 \quad (0.56)$$

Preuve (Exercice)

Exercice 0.20

Calculer $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ en utilisant les formes polaires.

Solution

Pour calculer $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ nous pouvons écrire les nombres complexes sous forme polaire et diviser les modules et soustraire les arguments:

$$\frac{-2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\pi i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \left(\frac{2}{2}\right) e^{\pi i - \frac{\pi}{3}i} = e^{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Exercice 0.21

Étant donné $z_1 = 8i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, calculez $\frac{z_1}{z_2}$ en utilisant les formes polaires.

Solution

Les formes polaires représentatives de ces nombres sont :

$$z_1 = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \text{ et } z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

D'où :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)i} = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

0.10.3. Formule de Moivre

Proposition 0.6

Si $z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors : $z^n = r^n e^{in\theta}$ pour tout nombre complexe z . (0.57)

Preuve

Une preuve très simple peut être donnée, en exprimant z sous sa forme polaire et en utilisant la formule d'Euler, nous avons:

Ce qui est prouvé par récurrence mathématique : En effet si $n = 0$ alors :

$$z^0 = r^0 e^{i \cdot 0 \cdot \theta} \text{ ce qui est vraie puisque } 1 = 1.$$

Nous la supposons vraie pour n , c'est-à-dire $z^n = r^n e^{in\theta}$.

Et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$$\text{On a } z^{n+1} = z^n \cdot z.$$

$$= r^n e^{in\theta} \cdot r e^{i\theta}.$$

$$= r^n r e^{in\theta} e^{i\theta}.$$

$$= r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}.$$

Donc $z^n = r^n e^{in\theta}$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Remarque 0.4

Pour $n \in \mathbb{Z}^-$ on a :

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} = (r^{-1})^{-n} (e^{-i\theta})^{-n} = r^n e^{in\theta}. \quad (0.58)$$

Remarque 0.5

Pour $r = 1$ la formule $z^n = r^n e^{in\theta}$ devient $z^n = e^{in\theta}$, donc on peut écrire $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Cela donne la formule utile de Moivre suivante :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \quad (0.59)$$

Exercice 0.22

Mettez le nombre complexe suivant $(\sqrt{3} + i)^7$ sous la forme cartésienne $x + iy$.

Solution

Pour mettre $(\sqrt{3} + i)^7$ sous forme cartésienne, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^7 &= \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^7 \\ &= \left(2^6 e^{\frac{i6\pi}{6}}\right) \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right) \\ &= (2^6 e^{i\pi}) \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right) \\ &= 64(\cos(\pi) + i\sin(\pi))(\sqrt{3} + i) \\ &= -64(\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

Exercice 0.23

Montrer que :

$$\cos(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 \text{ et } \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Solution

La formule de Moivre est utilisée pour déduire par exemple ces identités trigonométriques.

En effet

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta).$$

$$\text{Et } (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = (\cos(\theta))^2 + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) + i^2(\sin(\theta))^2.$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 + 2i\cos(\theta)\sin(\theta).$$

$$\text{Alors : } \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 + 2i\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Par identification on trouve :

$$\cos(2\theta) = (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 \text{ et } \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

0.10.4. Opérations sur la forme polaire des nombres complexes

Proposition 0.7

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls alors :

$$(1) \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Preuve (Exercice)

Exercice 0.24

Soient $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 + 3i$ deux nombres complexes non nuls, montrer que :

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Solution

Après calcul on trouve les résultats suivants :

$$z_1 z_2 = -6 + 6i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$$

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Et } \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi = \frac{3\pi}{4} + 2(k_1 + k_2)\pi.$$

Alors on observe que : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ pour $n = k_1 + k_2$.

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Et } \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi - \frac{\pi}{4} - 2k_2\pi = \frac{\pi}{4} + 2(k_1 - k_2)\pi.$$

Alors on observe que : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ pour $k = k_1 - k_2$.

0.11. Racines n-ième d'un nombre complexe

Définition 0.11

Soit z_0 un nombre complexe non nul.

On appelle racine n-ième de z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = z_0$.

0.11.1. Recherche des racines n-ième d'un nombre complexe

Puisque $z_0 \neq 0$, il a une forme polaire tel que $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. De la même manière pour $z \neq 0$ nous pouvons écrire $z = r e^{i\theta}$.

A partir de $z^n = z_0$ nous aurons : $(r e^{i\theta})^n = r_0 e^{i\theta_0}$ ce qui entraîne $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$ ce qui donne par identification $r^n = r_0$ et $e^{in\theta} = e^{i\theta_0}$.

Donc $r = \sqrt[n]{r_0}$ et $\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Notons que $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ pour toute racine n-ième z de z_0 .

Par conséquent, toute racine n-ième de z_0 prend la forme suivante :

$$z = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, nous trouvons n valeurs différentes de la racine n-ième de z_0 , ces racines sont notées par : $c_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)}$ où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ou par :

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right) \text{ où } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Remarque 0.6

Si on prend $\theta_0 = \arg(z_0)$ et $r_0 = |z_0|$. Alors les racines n-ième de $z_0 = r_0 e^{i\arg(z_0)}$ peuvent prendre la forme suivante :

$$c_k = \sqrt[n]{|z_0|} e^{i\left(\frac{\text{Arg}(z_0) + 2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{\text{Arg}(z_0)}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{\text{Arg}(z_0)}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = c_0 \cdot w_n^k.$$

Où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ et $w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Géométriquement, les racines n -ième $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt[n]{|z_0|}$. De plus, ils sont espacés tous les $\frac{2\pi}{n}$ radians.

Exercice 0.25

Trouvez les racines quatrièmes du nombre complexe $z_0 = -2\sqrt{3} - 2i$.

Solution

En effet : comme

$$z_0 = -2\sqrt{3} - 2i \text{ alors, } |z_0| = |-2\sqrt{3} - 2i| = 4.$$

$$\text{Et } \theta_0 = \text{Arg}(-2\sqrt{3} - 2i) = \arctg\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right) - \pi = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

$$c_k = (-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} e^{i\left(\frac{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)} \text{ avec } k = 0, 1, 2, 3.$$

c_0, c_1, c_2 et c_3 sont les racines quatrièmes du nombre complexe $-2\sqrt{3} - 2i$.

Exercice 0.26

$$\text{Calculer } (-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$$

Solution

$$\text{Pour } z_0 = -8 - 8\sqrt{3}i \text{ on a } |z_0| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16.$$

$$\text{Et } \text{Arg}(z_0) = \text{Arg}(-8 - 8\sqrt{3}i) = \arctg\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right) - \pi = \arctg(\sqrt{3}) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Les racines quatrièmes du nombre complexe $z_0 = -8 - 8\sqrt{3}i$ sont données par les relations :

$$c_k = c_0 \cdot w_4^k \text{ où } c_0 = \sqrt[4]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{\text{Arg}(z_0)}{4}} = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}} = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, w_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \text{ et } k = 0, 1, 2, 3.$$

Donc les racines quatrièmes de $-8 - 8\sqrt{3}i$ sont :

$$c_0 = \sqrt{3} - i, c_1 = c_0 i, c_2 = c_0 i^2 \text{ et } c_3 = c_0 i^3.$$

Finalement on trouve :

$$c_0 = \sqrt{3} - i, c_1 = 1 + i\sqrt{3}, c_2 = -\sqrt{3} + i \text{ et } c_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

0.11.2. Les racines n -ième de l'unité

Un cas particulier de recherche de racines est lorsque nous prenons la n -ième racine de l'unité, c'est-à-dire : $z^n = 1$.

Les racines n -ième de l'unité sont données par $c_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$ où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$\text{Posons } w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

$$\text{Alors : } c_k = (w_n)^k.$$

Donc les racines n -ième de l'unité seront :

$c_0 = w_n^0 = 1, c_1 = w_n^1, c_2 = w_n^2, \dots, c_{n-1} = w_n^{n-1}$ où $w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

0.12. Lieux, ensembles et régions géométriques dans le plan complexe

Définition 0.12

1. Un ε -voisinage d'un point z_0 est l'ensemble $N_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < \varepsilon\}$ constitué de tous les points situés à l'intérieur du cercle $|z - z_0| < \varepsilon$.
2. Un ε -voisinage privé du point z_0 est un ε -voisinage d'un point z_0 privé de z_0 lui-même. Il s'agit de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.

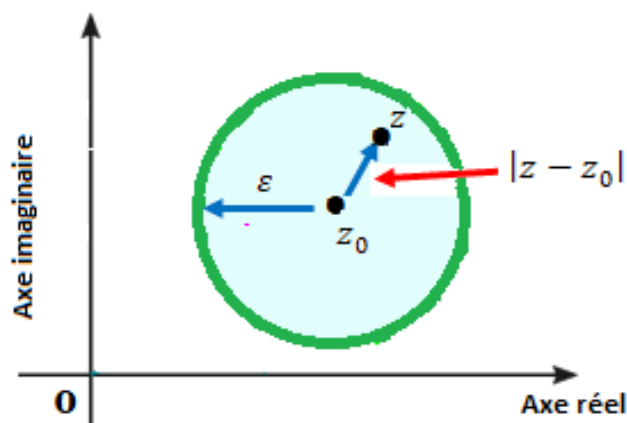


Figure 0.6 : Un ε -voisinage d'un point z_0

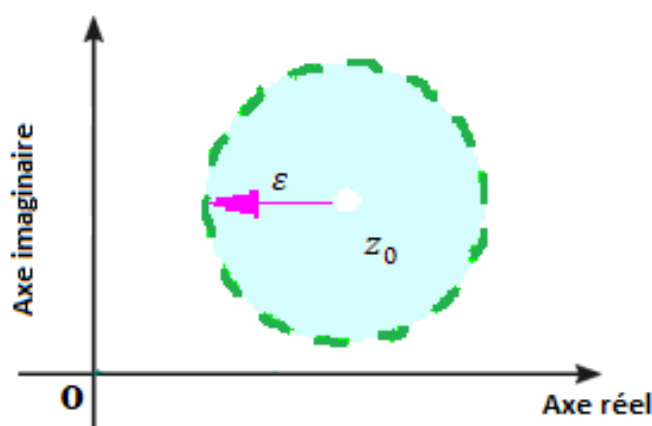


Figure 0.7 : Un ε -voisinage d'un point z_0 privé de z_0

Exemple 0.3

Les ensembles de solutions des inégalités $|z| < 1$, $|z - i| < 2$, et $|z + 1 + 2i| < 3$ sont des voisinages des points 0 , i et $-1 - 2i$, de rayons 1 , 2 et 3 , respectivement. Ils sont également exprimés par $N_1(0)$, $N_2(i)$ et $N_3(-1 - 2i)$.

Définition 0.13

1. On dit qu'un point z_0 est un point intérieur d'un ensemble S de nombres complexes s'il existe un ε -voisinage $N_\varepsilon(z_0)$ de z_0 tel que $N_\varepsilon(z_0) \subseteq S$.
2. Un point z_0 est un point extérieur d'un ensemble S de nombres complexes s'il existe un ε -voisinage $N_\varepsilon(z_0)$ de z_0 tel que $N_\varepsilon(z_0) \cap S = \emptyset$.

Définition 0.14

1. Un point z_0 est un point de frontière d'un ensemble S de nombres complexes s'il n'est ni un point intérieur ni un point extérieur.
2. L'ensemble de tous les points de frontière d'un ensemble S est appelé la frontière de S .

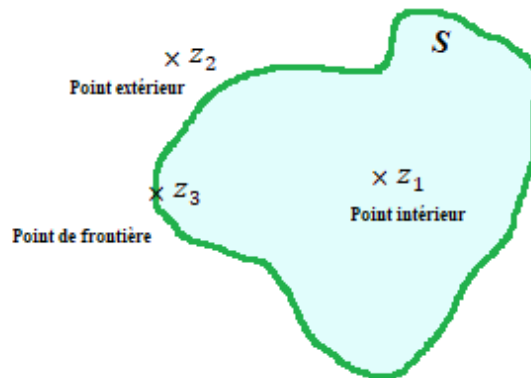


Figure 0.8 : Points intérieur, extérieur et frontière d'un ensemble S

Définition 0.15

Soit S un ensemble de nombres complexes.

1. Un ensemble est ouvert si tous ses points sont des points intérieurs.
2. Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points limites.
3. La fermeture de S est l'ensemble fermé constitué de tous les points de S avec la limite (frontière) de S .

Exercice 0.27

Dessiner l'ensemble S défini par $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 1\}$.

Solution

L'ensemble S est ouvert.

Et l'ensemble $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 1\}$ est fermé.

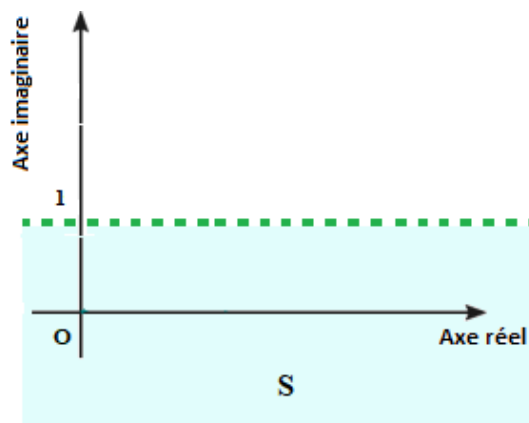


Figure 0.9 : Dessin de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 1\}$

Exercice 0.28

Dessiner l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1\}$ des points du plan complexe satisfaisant l'inégalité donnée. Déterminez si l'ensemble est ouvert ou fermé.

Solution

L'équation $|z - i| = 1$ décrit un cercle de centre $z_0 = i$ et de rayon $r = 1$.

L'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1\}$ est fermé et est constitué des points du plan complexe se trouvant sur la circonférence du cercle d'équation $|z - i| = 1$ et des points se trouvant à l'extérieur de ce dernier cercle.

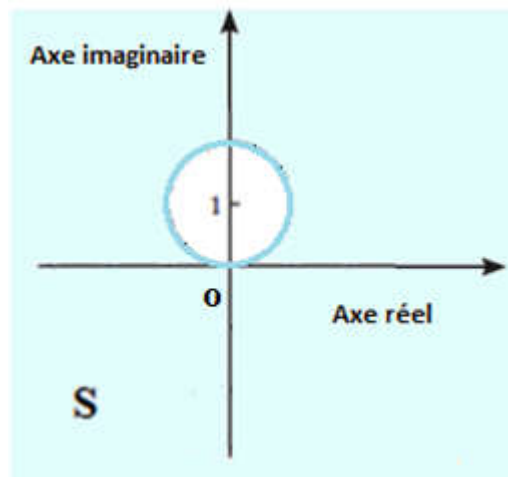


Figure 0.10 : Dessin de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1\}$

Définition 0.16

1. Un ensemble ouvert S est connexe si chaque paire de points z_1 et z_2 qu'il contient peuvent être connectés par une ligne polygonale, constituée d'un nombre fini de segments de droites joignant les deux extrémités, et qui se situent entièrement dans S .
2. Un domaine dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.
3. Un domaine avec tout ou une partie de ses points de frontières constitue une région.

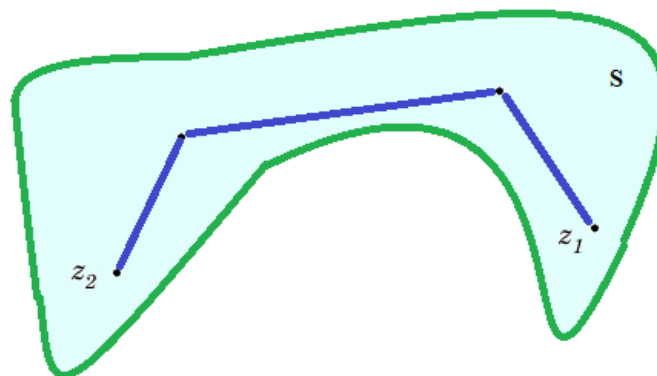


Figure 0.11 : Ensemble S connexe

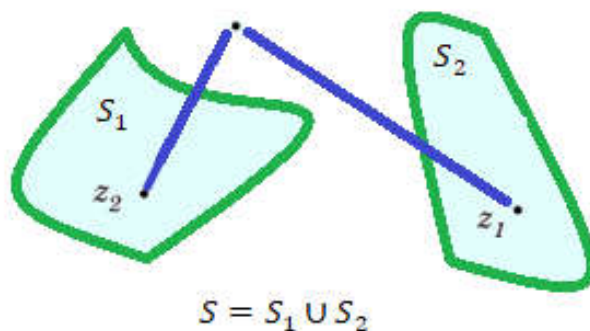


Figure 0.12 : Ensemble S non connexe

Exemple 0.4

L'anneau $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ est ouvert, et il est aussi connexe car deux points quelconques de S_1 peuvent être joints par une ligne polygonale, constituée de deux segments de droites joignant les deux extrémités qui se trouve entièrement dans S_1 , comme le montre la figure ci-dessous.

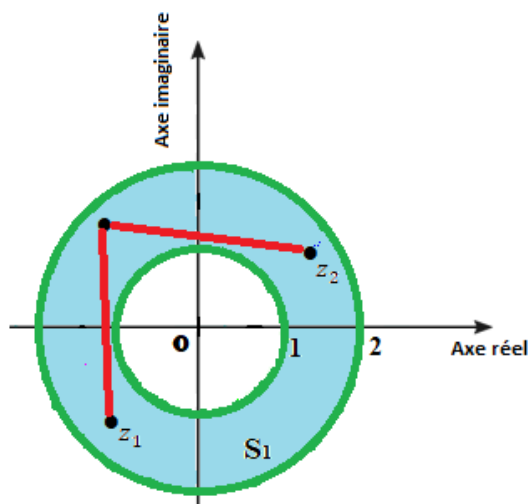


Figure 0.13 : Dessin de l'anneau $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

Définition 0.17

1. Un ensemble S est dit borné s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $|z| \leq M$, pour tous les points z de l'ensemble S .
2. Un point z_0 est appelé point d'accumulation d'un ensemble S si chaque voisinage pointé de z_0 contient au moins un point de S .

Exercice 0.29

Soit $S = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{i}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ un ensemble de nombres complexes.

Trouver les points d'accumulation de S .

Solution

Il n'y a qu'un seul point d'accumulation de S , à savoir, le point $z = 0$.

0.13. Exemples d'ensembles de points dans le plan complexe

0.13.1. Courbe

Nous définissons une courbe comme étant une fonction continue à valeurs complexes $z(t)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$. Autrement dit, une courbe $\mathcal{C}$ est la plage d'une fonction donnée par $z(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$ pour $a \leq t \leq b$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues à valeur réelle.

$z(t)$ est une paramétrisation pour la courbe $\mathcal{C}$. Notons qu'avec cette paramétrisation, nous spécifions une direction de la courbe $\mathcal{C}$, et nous disons que $\mathcal{C}$ est une courbe qui commence du point initial $z_1 = z(a)$ au point final $z_2 = z(b)$.

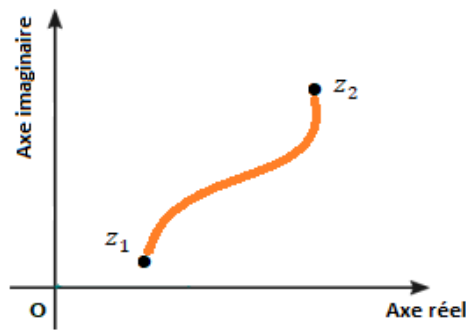


Figure 0.14 : Schéma d'une courbe

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont tous deux différentiables, on dit que la courbe est lisse. Une courbe pour laquelle $x(t)$ et $y(t)$ sont différentiables sauf pour un nombre fini de points est appelée lisse par morceaux.

Si nous avons une autre fonction dont l'intervalle était le même ensemble de points que $z(t)$ mais dont les points initial et final étaient inversés, nous indiquerions la courbe de cette fonction par $-\mathcal{C}$.

0.13.2. Segment de droite

Pour des nombres complexes donnés $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, le segment de droite avec les extrémités z_1 et z_2 est l'ensemble suivant:

$$[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = (1-t)z_1 + tz_2, 0 \leq t \leq 1\}. \quad (0.60)$$

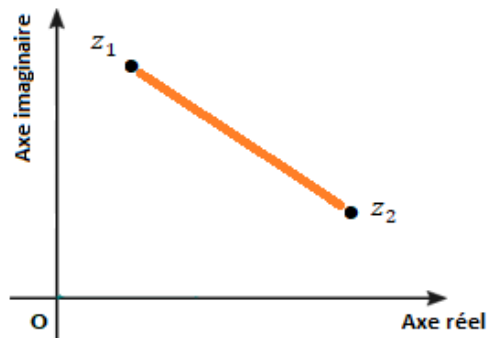


Figure 0.15 : Segment de droite joignant z_1 et z_2

0.13.3. Disque ouvert

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, nous définissons le disque ouvert $D_r(z_0)$ de rayon r centré en z_0 comme l'ensemble de tous les nombres complexes qui sont au module strictement inférieure à r de z_0 . En d'autres termes on écrit :

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}. \quad (0.61)$$

0.13.4. Disque fermé

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le disque fermé $\overline{D}_r(z_0)$ de rayon r centré en z_0 est l'ensemble de tous les nombres complexes définit par :

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}. \quad (0.62)$$

0.13.5. L'anneau

L'anneau $A(z_0, r_1, r_2)$ de centre en z_0 et de rayons $0 < r_1 < r_2$ est l'ensemble de tous les points z qui satisfait l'inégalité suivante :

$$r_1 < |z - z_0| < r_2.$$

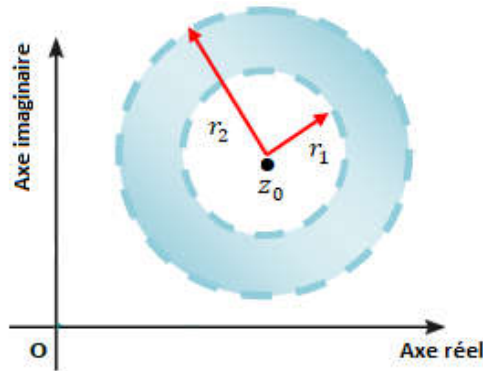


Figure 0.16 : Schéma de l'anneau $A(z_0, r_1, r_2)$

0.13.6. La bande

La bande de largeur $2r$ dans le sens de l'axe x ou l'axe y est l'ensemble des points qui satisfont l'inégalité suivante :

$$-r < \text{Im}(z) < r \text{ ou } -r < \text{Re}(z) < r. \quad (0.63)$$

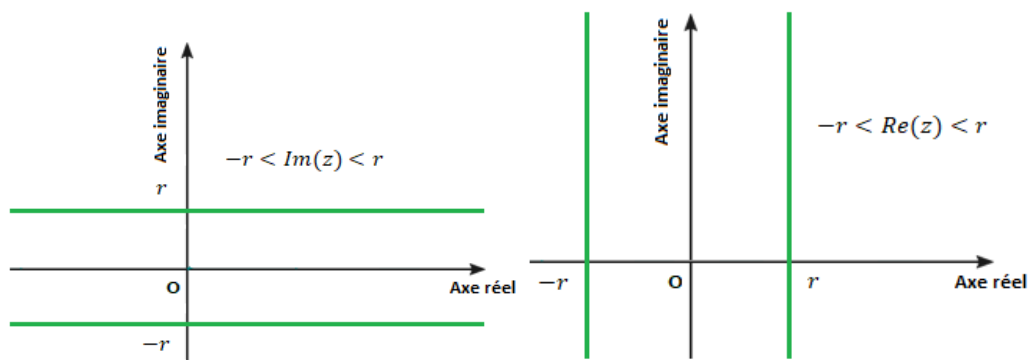


Figure 0.17 : Exemples de bandes

0.13.7. Secteur

Le secteur avec l'angle entre α et β est l'ensemble de tous les points z qui satisfont l'inégalité suivante:

$$\alpha < \text{Arg}(z) < \beta. \quad (0.64)$$

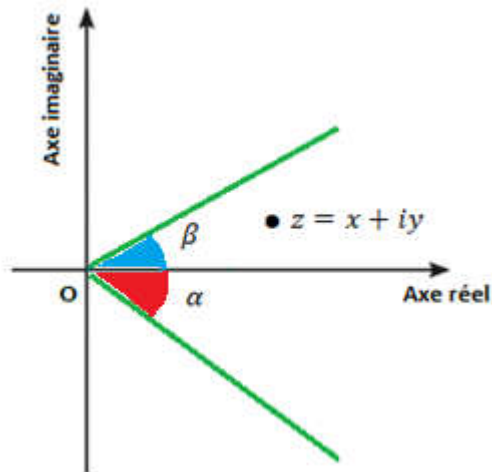


Figure 0.18 : Le secteur

Fonctions holomorphes d'une variable complexe

1.1. Introduction

Les fonctions de la variable complexe jouent un rôle important dans la physique mathématique. C'est une partie extrêmement utile des mathématiques et constitue la base de nombreuses techniques employées dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique. Elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes d'électromagnétisme, de mécanique des fluides, de physique des particules de manière extrêmement rapide et puissante.

Ce chapitre est une initiation aux fonctions à variable complexe, il découvre la notion d'une fonction multiforme et uniforme et la notion d'holomorphic (dérivabilité) de ces fonctions. Nous développerons les propriétés élémentaires de base de ces fonctions. Nous montrons que les polynômes sont holomorphes dans tout le plan complexe et que l'holomorphic peut être caractérisée par deux équations aux dérivées partielles appelées équations de Cauchy-Riemann.

1.2. Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes

Définition 1.1

Soient S et R deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur z de S , il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in R$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$.

L'ensemble S est appelé le domaine de définition de f et R est l'image de la région S par la fonction f (Figure 1.1).

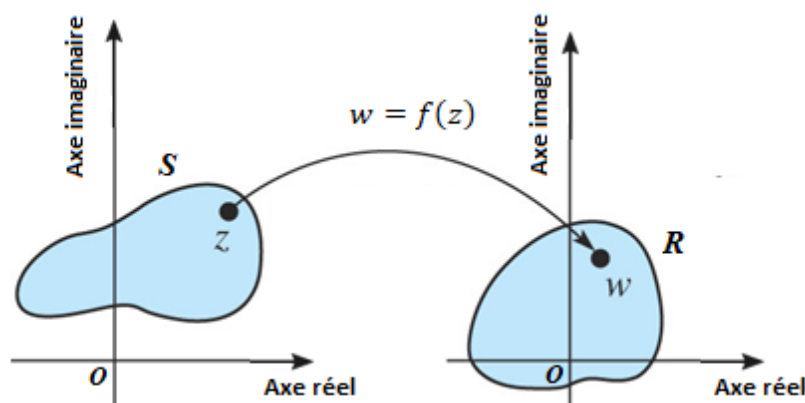


Figure 1.1 : Schéma de la transformation complexe

Exemple 1.1

Soit la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

La fonction à valeur complexe f est définie sur l'ensemble $D = \mathbb{C} - \{0, i, -i\}$.

1.3. La fonction uniforme

Définition 1.2

La fonction f est dite uniforme dans $S \subset \mathbb{C}$ si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ possède une valeur unique bien définie.

Exemple 1.2

La fonction polynôme $w = f(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$.

Où $a_n, \dots, a_2, a_1, a_0$ et z appartiennent à $\mathbb{C}$.

La fonction exponentielle $w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

1.4. La fonction multiforme

Définition 1.3

La fonction f est dite multiforme dans $S \subset \mathbb{C}$ si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ possède plusieurs valeurs.

Exemple 1.3

La fonction $w = f(z) = \sqrt[6]{z} = z^{\frac{1}{6}}$ est multiforme puisque à chaque valeur de z correspondent six valeurs de w .

Remarque 1.1

Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction.

1.5. Transformation (Développement en partie réelle et partie imaginaire)

Tout comme z peut être exprimé par ses parties réelle et imaginaire, $z = x + iy$, nous écrivons : $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$. (1.1)

$u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de w .

Comme u et v dépendent de x et y , ils peuvent être considérés comme des fonctions à valeur réelle des variables réelles x et y ; c'est-à-dire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$.

D'une manière similaire, si $z = re^{i\theta}$, alors $f(z)$ peut être écrite de la façon suivante :

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \quad (1.2)$$

Exercice 1.1

Ecrire $f(z) = z^2 - 2z + 3$ sous la forme $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$ et sous la forme $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Solution

Posons $z = x + iy$

$$\text{Alors } f(z) = z^2 - 2z + 3 = (x + iy)^2 - 2(x + iy) + 3.$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy + 3.$$

$$= (x^2 - y^2 - 2x + 3) + i(2xy - 2y).$$

$f(z)$ est sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ où :

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 3 \text{ et } v(x, y) = 2xy - 2y.$$

Maintenant on pose $z = re^{i\theta}$

$$\text{Alors } f(z) = z^2 - 2z + 3 = (re^{i\theta})^2 - 2(re^{i\theta}) + 3.$$

$$= r^2 e^{2i\theta} - 2re^{i\theta} + 3.$$

$$= r^2 (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) - 2r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + 3.$$

$$= (r^2 \cos(2\theta) - 2r \cos(\theta) + 3) + i(r^2 \sin(2\theta) - 2r \sin(\theta)).$$

$f(z)$ est sous la forme $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ où :

$$u(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta) - 2r \cos(\theta) + 3 \text{ et } v(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta) - 2r \sin(\theta). \quad (1.3)$$

1.6. Limites

Définition 1.4 (Limite d'une fonction)

Soit f une fonction uniforme définie dans un voisinage pointé du point z_0 . On dit que la limite de $f(z)$ lorsque z tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$ est un nombre complexe l . Et on écrit $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(z) - l| < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Nous pouvons écrire la définition en termes de quantifications logiques comme suit:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon \quad (1.4)$$

Exercice 1.2

En utilisant la définition montrer que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{2(z^2+1)}{3(z-i)} = \frac{4}{3}i$.

Solution

Notons qu'en $z_0 = i$, la fonction $f(z) = \frac{2(z^2+1)}{3(z-i)}$ n'est pas définie, cependant $f(z)$ a la limite $l = \frac{4}{3}i$. En effet, on considère $\varepsilon > 0$ pour lequel on a :

$$|f(z) - l| = \left| \frac{2(z^2+1)}{3(z-i)} - \frac{4i}{3} \right| = \left| \frac{2}{3}(z+i) - \frac{4i}{3} \right| = \left| \frac{2z+2i-4i}{3} \right| = \left| \frac{2z-2i}{3} \right| = \frac{2}{3}|z-i| < \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$|z-i| < \delta = \frac{3}{2}\varepsilon.$$

$$\text{Donc } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2(z^2+1)}{3(z-i)} = \frac{4}{3}i.$$

Remarques 1.2

1. La définition de la limite nécessite que f soit définie dans un voisinage pointé du point z_0 . Un tel voisinage pointé existe toujours lorsque z_0 est un point intérieur d'un domaine de f .
2. On peut étendre la définition de limite au cas où z_0 est un point frontière du domaine de f . Dans ce cas, nous avons besoin de l'inégalité $|f(z) - l| < \varepsilon$, seulement pour z se trouvant à la fois dans le domaine de f et de $0 < |z - z_0| < \delta$.

3. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ existe alors elle est unique.
4. Ainsi, le symbole $z \rightarrow z_0$ signifie que z tend vers z_0 suivant plusieurs directions. Ainsi, si la limite prend des valeurs différentes pour deux directions différentes, alors la limite n'existe pas.

Exercice 1.3

Montrer que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{2z}$ n'existe pas.

Solution

Posons $f(z) = \frac{\bar{z}}{2z}$ et cherchons $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ pour deux directions différentes.

Soit $z = x + iy$.

1. Lorsque $z = x$ alors $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{2z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.
2. Lorsque $z = iy$ alors $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{2z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{2iy} = -\frac{1}{2}$.

On remarque que pour ces deux directions choisies, la fonction f ne tend pas vers la même limite, ce qui prouve que f n'admet pas de limite lorsque z tend vers 0.

Proposition 1.1

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $l = \alpha + i\beta$. Alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta$.

Preuve

On supposant que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ est vraie, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$|f(z) - l| < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |z - z_0| < \delta$, ce qui nous laisse écrire :

$$|(u(x, y) + iv(x, y)) - (\alpha + i\beta)| < \varepsilon \text{ chaque fois que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Ou encore :

$$|(u(x, y) - \alpha) - i(v(x, y) - \beta)| < \varepsilon \text{ chaque fois que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Or on sait que : $|Im(f(z) - l)| \leq |f(z) - l|$ et $|Re(f(z) - l)| \leq |f(z) - l|$.

A partir de ceci on trouve :

$$|u(x, y) - \alpha| < \varepsilon \text{ et } |v(x, y) - \beta| < \varepsilon \text{ chaque fois que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Et on se basant sur la définition de la limite on trouve :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta.$$

De l'autre côté supposons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta$.

Cela veut dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta_1 > 0$ et un $\delta_2 > 0$ tel que $|f(z) - l| < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |z - z_0| < \delta$, ce qui nous laisse écrire :

$$|u(x, y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ chaque fois que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2.$$

$$\text{Et } |v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ chaque fois que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2.$$

Donc $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$.

Selon la définition de l'inégalité triangulaire on trouve :

$$|(u(x, y) - \alpha) - i(v(x, y) - \beta)| \leq |u(x, y) - \alpha| + |v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui donne :

$$|(u(x, y) - \alpha) - i(v(x, y) - \beta)| < \varepsilon \text{ chaque fois que } \max(\delta_1, \delta_2) = \delta, 0 < |z - z_0| < \delta$$

Donc cela veut dire que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$.

Exercice 1.4

Trouver $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ sachant que $f(z) = z^2 - z + i$ et $z_0 = 0$.

Solution

Pour $z = x + iy$ on a $f(z) = (x + iy)^2 - (x + iy) + i = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y + 1)$.

Où $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$ et $v(x, y) = 2xy - y + 1$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x, y) = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2 - x) = 0$$

$$\beta = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2xy - y + 1) = 1$$

Donc $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 + 1i = i$.

1.6.1. Quelques propriétés

Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = m$ alors :

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = l + m. \quad (1.5)$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = l \cdot m. \quad (1.6)$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{l}{m} \text{ à condition que } m \neq 0. \quad (1.7)$$

$$4. \lim_{z \rightarrow z_0} c = c \text{ où } c \text{ est un nombre complexe.} \quad (1.8)$$

$$5. \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0 \text{ où } z_0 \text{ est un nombre complexe.} \quad (1.9)$$

$$6. \lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n \text{ où } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Remarque 1.3

Soit $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes complexes. Il est facile de voir à partir de la définition de la limite que :

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0). \quad (1.11)$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \text{ à condition que } Q(z_0) \neq 0. \quad (1.12)$$

Exercice 1.5

Trouver $\lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - 1 + i}{2z + 1} \right)$.

Solution

$$\lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - 1 + i}{2z + 1} \right) = \frac{\lim_{z \rightarrow i} (z^2 - 1 + i)}{\lim_{z \rightarrow i} (2z + 1)} = \frac{\lim_{z \rightarrow i} (z^2) + \lim_{z \rightarrow i} (-1 + i)}{\lim_{z \rightarrow i} (2z) + \lim_{z \rightarrow i} (1)} = \frac{i^2 - 1 + i}{2i + 1} = \frac{-2 + i}{1 + 2i} = \frac{i(1 + 2i)}{1 + 2i} = i.$$

Proposition 1.2

Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ alors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |l|$ mais la réciproque est fausse.

Preuve (Exercice)

Définition 1.5

a) On dit que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

b) On dit que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l$ si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall z: |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

c) On dit que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall z: |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Proposition 1.3

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.
2. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l$ si et seulement si $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = l$.
3. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si et seulement si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$.

Preuve (Exercice)

Exercice 1.6

Montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ sachant que $f(z) = \frac{z^2 + 2}{z - i}$ et $z_0 = i$.

Solution

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{z - i}.$$

Il faut montrer que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{f(z)} = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{\frac{z^2 + 2}{z - i}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Donc $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+2}{z-i} = \infty$.

Exercice 1.7

Montrer que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z+1} = 1$.

Solution

Soit $f(z) = \frac{z+i}{z+1}$.

Posons $w = \frac{1}{z}$ donc lorsque z tend vers ∞ , w va tendre vers 0.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{w}+i}{\frac{1}{w}+1} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1+iw}{1+w} = 1.$$

Exercice 1.8

Montrer que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2iz^3-2z}{z^2+3-i} = \infty$.

Solution

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2iz^3-2z}{z^2+3-i} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3(2i-2\frac{1}{z^2})}{z^2(1+\frac{3-i}{z})} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(2i-2\frac{1}{z^2})}{(1+\frac{3-i}{z})} = \infty.$$

1.7. Continuité

Définition 1.6

Soit f une fonction complexe uniforme de la variable complexe z qui est défini pour toutes les valeurs de z dans un voisinage de z_0 . On dit que f est continue en z_0 si trois conditions sont satisfaites:

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
2. $f(z_0)$ existe.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Remarque 1.4

Nous pouvons écrire cette définition en termes de quantificateurs logiques comme suit:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Définition 1.7

Une fonction d'une variable complexe z est dite continue dans une région $D \subseteq \mathbb{C}$ si elle est continue en chaque point de D .

Proposition 1.4

Soient f et g deux fonctions complexes de la variable z . Si f et g sont continues au point z_0 , alors les fonctions suivantes sont continues en z_0 .

1. $f(z) \pm g(z)$.
2. $f(z).g(z)$.
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ avec $g(z_0) \neq 0$.

4. $g(f(z))$ à condition que $g(z)$ soit continue dans un voisinage du point $f(z_0)$.

Preuve (Exercice)

Les propriétés de continuité d'une fonction complexe sont similaires à celles d'une fonction d'une variable réelle.

Proposition 1.5

Si une fonction f est continue en un point z_0 et $f(z_0) \neq 0$, alors $f(z) \neq 0$, pour tout z dans un voisinage de z_0 .

Preuve (Exercice)

Remarque 1.5

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction définie dans un voisinage de z_0 . Alors $f(z)$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues en (x_0, y_0) .

Exemple 1.4

La fonction $f(z) = x^2 + iy$ est continue car les fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{C}$ pour chaque point $z_0 = (x_0, y_0)$ dans $\mathbb{C}$.

Par contre la fonction $g(z) = \frac{x}{y+1} + i \frac{y}{x-1}$ est continue sur l'ensemble $\mathbb{C} - \{(1, -1)\}$.

Exemple 1.5

La fonction f tel que $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ est continue partout dans le plan complexe puisque $u(x, y) = e^x \cos(y)$ et $v(x, y) = e^x \sin(y)$ sont continues pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 1.6

La fonction f définie par : $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i}, & z \neq 2i \\ 3+4i & z = 2i \end{cases}$. N'est pas continue en $z = 2i$ parce que

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z+2i) = 4i \neq f(2i) = 3+4i$$

Proposition 1.6

Si une fonction f est continue dans une région fermée et bornée R , alors il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tous les points z de R et $|f(z)| = M$ pour au moins un z dans R .

Preuve (Exercice)

1.8. Fonction holomorphe (analytique)

1.8.1. Dérivation

Définition 1.8

Soit f une fonction complexe et soit z_0 un point intérieur du domaine de f . La dérivée de f en z_0 , notée $f'(z_0)$, est définie par l'équation:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

A condition que cette limite existe et est finie.

Remarques 1.6

1. On dit que la fonction f est dérivable en z_0 lorsque sa dérivée en z_0 existe.
2. Si nous posons $\Delta z = z - z_0$, la définition précédente de la dérivée de f en z_0 peut être exprimée en : $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$.
3. On peut écrire la définition précédente de la dérivation de f en z_0 en termes de quantificateurs logiques de la manière suivante :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Exercice 1.9

Trouver $f'(z)$ sachant que $f(z) = z^2 + 1$.

Solution

Cherchons la dérivée de f en z_0 .

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z^2 + 1) - (z_0^2 + 1)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0. \end{aligned}$$

Donc la fonction est dérivable sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$.

Exercice 1.10

Prouver que la fonction $g(z) = \bar{z} + 3$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$.

Solution

Sachant que $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ il vient :

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x - i\Delta y.$$

$$\text{Et } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\overline{z_0 + \Delta z} + 3) - (\bar{z}_0 + 3)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Si Δz tend vers 0 suivant l'axe des réels (Ox), alors : $\Delta z = \Delta x$ et $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Si Δz tend vers 0 suivant l'axe des imaginaires (Oy), alors :

$$\Delta z = i\Delta y \text{ et } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

La $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z}$ n'existe pas puisque elle varie suivant le changement des directions d'approchement de z de z_0 . Donc la fonction g n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1.7

Si une fonction f est dérivable en un point z_0 , alors f est continue en z_0 .

Preuve

Ceci vient du fait que :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) = 0. \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0). \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \end{aligned}$$

1.8.2. Les règles de dérivation

Supposons que f et g soient dérivables. Nous pouvons établir les règles suivantes, qui sont pratiquement identiques à ceux des fonctions à valeur réelle.

- a) $\frac{d}{dz}(c) = 0$ où c est une constante.
- b) $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$ où n est un entier positif.
- c) $\frac{d}{dz}(c \cdot f(z)) = c \cdot f'(z)$.
- d) $\frac{d}{dz}(f(z) \pm g(z)) = f'(z) \pm g'(z)$.
- e) $\frac{d}{dz}(f(z) \cdot g(z)) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.
- f) $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$ à condition que $g(z) \neq 0$.
- g) $\frac{d}{dz}(g(f(z))) = g'(f(z))f'(z)$.
- h) $\frac{d}{dz}((f(z))^n) = n(f(z))^{n-1}f'(z)$

Exercice 1.11

Trouver $f'(z)$ sachant que $f(z) = \frac{z^4 + 2iz}{z^3 + z + 1}$.

Solution

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(z^4 + 2iz)'(z^3 + z + 1) - (z^4 + 2iz)(z^3 + z + 1)'}{(z^3 + z + 1)^2} \\ &= \frac{(4z^3 + 2i)(z^3 + z + 1) - (z^4 + 2iz)(3z^2 + 1)}{(z^3 + z + 1)^2} \\ &= \frac{z^6 + 3z^4 + 4z^3 + i(4z^3 + 2)}{z^6 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1} \end{aligned}$$

1.8.3. Equations de Cauchy-Riemann

Proposition 1.8 (Conditions nécessaires à la différenciation)

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$. Alors les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y existent au point (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

En outre : $f'(z) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned}
 &= v_y(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0). \\
 &= u_x(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0). \\
 &= v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).
 \end{aligned}$$

Preuve

Nous écrivons les parties réelle et imaginaire de f tel que $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ et nous calculons $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ pour deux directions différentes :

Pour cela nous supposons que $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ existe.

1- Pour $\Delta z = \Delta x$:

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}. \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + i v(x_0 + \Delta x, y_0) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{\Delta x} \right]. \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)) + i (v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} \right]. \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0))}{\Delta x} \right] + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} \right].
 \end{aligned}$$

Donc $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$. $f'(z_0)$

2- Pour $\Delta z = i \Delta y$:

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i \Delta y) - f(z_0)}{i \Delta y}. \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + i v(x_0, y_0 + \Delta y) - (u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0))}{i \Delta y} \right]. \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{(u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)) + i (v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{i \Delta y} \right]. \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{(v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta y} \right] - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{(u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0))}{\Delta y} \right].
 \end{aligned}$$

Donc $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$.

Puisque $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ existe, alors elle est unique. D'après les résultats précédents on obtient : $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$.

Donc nous obtiendrons les conditions de **Cauchy – Riemann** suivante :

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ et } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Remarques 1.7

✚ On note parfois les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y par :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } v_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.13)$$

✚ Cette proposition ne s'applique pas pour montrer que $f'(z_0)$ existe. Mais elle peut s'appliquer pour démontrer le sens contraire.

✚ Les équations de Cauchy-Riemann étant des conditions nécessaires à l'existence de la dérivée d'une fonction f en un point z_0 , elles peuvent souvent être utilisées pour localiser des points sur lesquels f n'a pas de dérivée.

Exercice 1.12

Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en $z \neq 0$, sachant que $f(z) = |z|^2$.

Solution

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ne satisfait pas les équations de Cauchy Riemann en $(x, y) \neq (0, 0)$ car on a : $u(x, y) = x^2 + y^2$ et $v(x, y) = 0$.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ et } v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

On remarque bien que $u_x \neq v_y$ et $u_y \neq -v_x$

Notons que les conditions de Cauchy Riemann sont satisfaites en $x = 0$ et $y = 0$, et comme les dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$, il s'ensuit que f est dérivable en $(0, 0)$ et $f'(0, 0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0 + i0 = 0$. Donc les équations Cauchy Riemann ne sont pas satisfaites en $(x, y) \neq (0, 0)$ et par la suite $f'(z)$ n'existe pas pour tout $z \neq 0$.

Exercice 1.13

Montrer que $f(z) = \bar{z}$ n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{C}$.

Solution

Pour $z = x + iy$ on a $f(z) = x - iy$ et $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ et } v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Donc les équations Cauchy Riemann ne sont pas satisfaites pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et par conséquent $f'(z)$ n'existe pas pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.14

Montrer que $f(z) = e^z$ est dérivable sur tout $\mathbb{C}$.

Solution

Pour $z = x + iy$ on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) \\ &= u(x, y) + i v(x, y) \end{aligned}$$

Par identification on trouve $u(x, y) = e^x \cos(y)$ et $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

Et $u_x = e^x \cos(y)$, $u_y = -e^x \sin(y)$, $v_x = e^x \sin(y)$ et $v_y = e^x \cos(y)$.

Donc $f(z) = e^z$ est dérivable sur tout $\mathbb{C}$ car $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. Les dérivées partielles sont continues pour tout (x, y) et la dérivée de f est la suivante :

$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^z.$$

Exercice 1.15

Soit la fonction f définie par $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Montrer que les équations de Cauchy Riemann sont satisfaites en $(x, y) = (0, 0)$, mais $f'(0, 0)$ n'existe pas.

Solution

Calculons $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ pour deux directions différentes sachant que $z_0 = 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}^2 - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)^2.$$

1- si $\Delta z = \Delta x$ alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} \right)^2 = 1.$

2- si $\Delta z = \Delta x + i\Delta x$ alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta x + i\Delta x}}{\Delta x + i\Delta x} \right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x - i\Delta x}{\Delta x + i\Delta x} \right)^2$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-i)^2 = -1.$

Puisque les limites sont différentes, alors $f'(0)$ n'existe pas.

Maintenant essayons d'écrire les parties réelle et imaginaire de f tel que :

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et nous vérifions ensuite les conditions de Cauchy – Riemann.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{(x-iy)^2}{x+iy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{(x-iy)^3}{(x+iy)(x-iy)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3ix^2y - 3xy^2 + iy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Donc les parties réelle et imaginaire de f sont :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et } v(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculons maintenant $u_x(0,0)$, $u_y(0,0)$, $v_x(0,0)$ et $v_y(0,0)$.

$$u_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

$$u_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

$$v_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

$$v_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(0, \Delta y) - v(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y - 0}{\Delta y} = 1.$$

On remarque que les conditions de Cauchy – Riemann sont satisfaites $u_x(0,0) = v_y(0,0)$ et $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$ alors que $f'(0)$ n'existe pas.

1.8.4. Conditions suffisantes pour la différentiabilité

La satisfaction des équations de Cauchy – Riemann en un point $z_0 = x_0 + i y_0$ ne suffit pas pour assurer l'existence de la dérivée d'une fonction f en ce point. Nous avons besoin de certaines conditions supplémentaires pour que cela suffise.

Théorème 1.1 (Réciproque du théorème de Cauchy-Riemann)

Soit la fonction f tel que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ définie à travers un ε -voisinage $N_\varepsilon(z_0)$ d'un point $z_0 = x_0 + i y_0$. Supposons que les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y existent partout dans $N_\varepsilon(z_0)$ et ils sont continues au point (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ en z_0 . Alors $f'(z_0)$ existe.

Preuve (Exercice)

Exercice 1.16

Soit $f(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$. Montrer que $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donner la dérivée $f'(z)$.

Solution

La fonction f est de la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$ et $v(x, y) = \cos(x)\sinh(y)$.

Calculons les dérivées partielles $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$.

$$u_x(x, y) = \cos(x)\cosh(y).$$

$$u_y(x, y) = \sin(x)\sinh(y).$$

$$v_x(x, y) = -\sin(x)\sinh(y).$$

$$v_y(x, y) = \cos(x)\cosh(y).$$

Les fonctions $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$ existent et sont continues pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $u_x(x, y) = v_y(x, y)$, $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ et cela pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Donc d'après le théorème 1.1 $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ et la dérivée de f est donnée par la relation ci-dessous : $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.

1.8.5. Équations de Cauchy - Riemann sous forme polaire

Proposition 1.9

Soit f une fonction holomorphe en z_0 . Alors les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires s'écrivent sous la forme :

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \text{ et } u_\theta = -r v_r.$$

Preuve

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, nous avons $z_0 = r e^{i\theta}$ et par conséquent $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$.

Et $z = x + i y = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

Nous savons aussi que $x(r, \theta) = r \cos(\theta)$ et $y(r, \theta) = r \sin(\theta)$.

Nous avons les quatre équations suivantes:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos(\theta)}{r} = \cos(\theta).$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin(\theta)}{r} = \sin(\theta).$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial(\arctg(\frac{y}{x}))}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{-y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial(\arctg(\frac{y}{x}))}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos(\theta)}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}.$$

Donc, en appliquant la règle de chaîne, nous aurons:

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} = u_r \cos(\theta) - u_\theta \frac{\sin(\theta)}{r}$$

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} = u_r \sin(\theta) + u_\theta \frac{\cos(\theta)}{r}$$

$$\frac{\partial v(r, \theta)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta)}{r} = v_r \cos(\theta) - v_\theta \frac{\sin(\theta)}{r}$$

Et

$$\frac{\partial v(r, \theta)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} = v_r \sin(\theta) + v_\theta \frac{\cos(\theta)}{r}$$

Maintenant, à partir des équations de Cauchy - Riemann, nous avons:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_x - v_y = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(u_r \cos(\theta) - u_\theta \frac{\sin(\theta)}{r} \right) - \left(v_r \sin(\theta) - v_\theta \frac{\cos(\theta)}{r} \right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \left(u_r - v_\theta \frac{1}{r} \right) + \sin(\theta) \left(-v_r - u_\theta \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Et puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont linéairement indépendantes nous obtenons les résultats suivants :

$$u_r - v_\theta \frac{1}{r} = 0 \text{ et } -v_r - u_\theta \frac{1}{r} = 0.$$

Par conséquent, nous avons: $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ et $u_\theta = -r v_r$.

Remarque 1.8

Soit $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ une fonction continue définie dans un certain voisinage du point $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Si toutes les dérivées partielles u, v, u_r, u_θ, v_r et v_θ sont continues au point (r_0, θ_0) , et si les équations de Cauchy-Riemann $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ et $u_\theta = -rv_r$, sont satisfaites, alors f est différentiable en z_0 , et nous pouvons calculer la dérivée $f'(z_0)$ en utilisant :

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0} [u_r(r_0, \theta_0) + i v_r(r_0, \theta_0)], \text{ ou} \quad (1.14)$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0} [v_\theta(r_0, \theta_0) - i u_\theta(r_0, \theta_0)]. \quad (1.15)$$

Exercice 1.17

Montrer que $f(z) = \frac{1}{z}$ est différentiable pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Solution

En posant $z = r e^{i\theta}$ nous aurons :

$f'(z_0) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r} (\cos(\theta) - i \sin(\theta))$, on peut distinguer d'une manière plus claire que $u(r, \theta) = \frac{1}{r} \cos(\theta)$ et $v(r, \theta) = -\frac{1}{r} \sin(\theta)$.

$$u_r = -\frac{1}{r^2} \cos(\theta), u_\theta = -\frac{1}{r} \sin(\theta), v_r = \frac{1}{r^2} \sin(\theta) \text{ et } v_\theta = -\frac{1}{r} \cos(\theta).$$

Nous remarquons que :

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta = -\frac{1}{r^2} \cos(\theta) \text{ et } u_\theta = -r v_r = -\frac{1}{r} \sin(\theta).$$

Les dérivées partielles du premier ordre des fonctions u et v par rapport à r et θ existent partout dans un ε -voisinage du point $z_0 = x_0 + i y_0$. Ces dérivées partielles sont continues en (r_0, θ_0) et satisfont les équations de Cauchy – Riemann en forme polaire en (r_0, θ_0) .

Donc $f'(z)$ existe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et est égale à :

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta} [u_r(r, \theta) + i v_r(r, \theta)] = e^{-i\theta} \left[-\frac{1}{r^2} \cos(\theta) + i \frac{1}{r^2} \sin(\theta) \right] \\ &= -\frac{1}{r^2} e^{-i\theta} [\cos(\theta) - i \sin(\theta)] = -\frac{1}{r^2} e^{-i\theta} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] \\ &= -\frac{1}{r^2} e^{-i\theta} [e^{-i\theta}] = -\frac{1}{r^2} e^{-i2\theta} = -\frac{1}{r^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{(r e^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

1.8.6. Règle de L'hôpital

Cette règle est identique à celle utilisée, pour évaluer des formes indéterminées, pour les fonctions à variables réelles.

Si $g(z_0) = 0$ et $h(z_0) = 0$ et si $g(z)$ et $h(z)$ sont différentiables en z_0 avec $h'(z_0) \neq 0$.

$$\text{Par suite } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (1.16)$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{h(z) - h(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{g(z) - g(z_0)}{h(z) - h(z_0)} \right) \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} \right). \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Exercice 1.18

Calculer $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^4 - 16}{z - 2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{4z^3}{1} = -32i$.

Solution

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^4 - 16}{z - 2i}.$$

Définition 1.9

1. Une fonction f d'une variable complexe z est holomorphe (analytique ou régulière) en un point z_0 si f est dérivable dans un voisinage de $z_0 \in S$.
2. Une fonction f d'une variable complexe z est holomorphe sur un ensemble ouvert $S \subseteq \mathbb{C}$ si elle est dérivable en tout point de cet ensemble. On note par $H(S)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur S .

Exercice 1.19

Montrer que $f(z) = 1/z$ est holomorphe au point $z = 1$.

Solution

$f'(z)$ existe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et est égale à : $f'(z) = -1/z^2$. En particulier $f'(z)$ existe pour tout point $z \in N_{\frac{1}{2}}(1) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \frac{1}{2} \right\}$.

Donc la fonction f est holomorphe au point $z = 1$.

On peut choisir le voisinage du point $z = 1$, $N_\varepsilon(1)$, pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ou $\varepsilon = \frac{1}{8}, \dots$

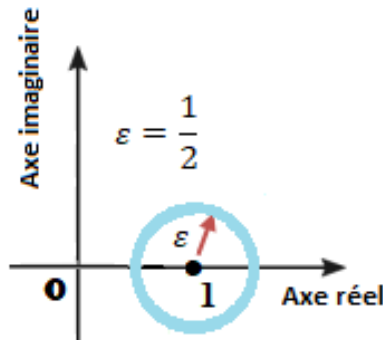


Figure 1.2 : Le voisinage $N_\varepsilon(1)$ du point $z = 1$

Exercice 1.20

Montrer que $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ est holomorphe sur l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Solution

La fonction f est définie par $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ et l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est ouvert. La fonction f est holomorphe sur S si et seulement si $f'(z)$ existe pour tout point $z \in S$. La dérivée est donnée par $f'(z) = -\frac{2}{(z-2)^3}$ cette dérivée existe pour tout $z \in \mathbb{C} - \{2\}$. Donc $f'(z)$ existe pour tout $z \in S$ et par la suite la fonction f est holomorphe sur S .

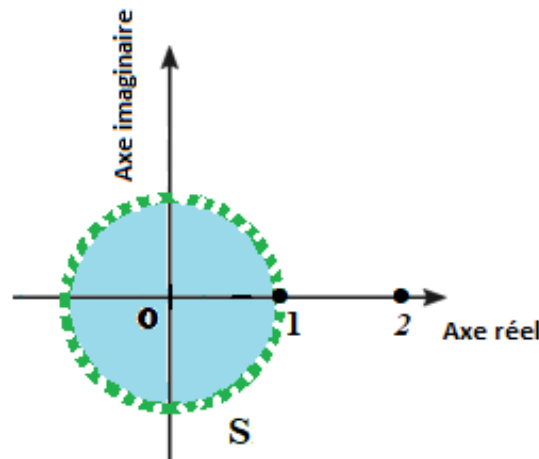


Figure 1.3 : Représentation de l'ensemble $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et du point $z = 2$

Exercice 1.21

Soit la fonction f définie par $f(z) = |z|^2$.

1. Montrer que $f'(0) = 0$.
2. Montrer que f n'est pas holomorphe au point $z = 0$.

Solution

1- En considérant que $z = x + iy$ nous aurons $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ où $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$, $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$ et $v_y = 0$.

Alors les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y existent pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et elles sont continues au point $(0, 0)$.

De plus les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites au point $(0, 0)$:

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) \text{ et } u_y(0, 0) = -v_x(0, 0).$$

Par conséquent $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$.

2- Puisque $f'(z)$ n'existe pour aucun point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, alors $f'(z)$ n'existe dans aucun ε -voisinage $N_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ du point $z = 0$. Car, d'après la définition 1.9, pour que la fonction f soit holomorphe en ce point $z = 0$ il faut qu'elle soit dérivable dans un ε -voisinage de $z = 0$ et donc f n'est pas holomorphe au point $z = 0$.

Définition 1.10

Si D est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$, la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur D s'il existe un ouvert S de $\mathbb{C}$ contenant D , sur le quel la fonction f est définie et elle est holomorphe.

Définition 1.11 (Fonction entière)

Une fonction f est dite entière, si elle est holomorphe en tout point $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 1.9

f holomorphe en un point z_0 implique f dérivable mais la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple de l'exercice 1.21.

Exemple 1.7

La fonction f définie par $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur l'ensemble fermé $A = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| \leq \frac{1}{2}\}$ puisqu'elle est holomorphe sur l'ensemble ouvert $S = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| < 1\}$ qui vérifie $A \subseteq S$.

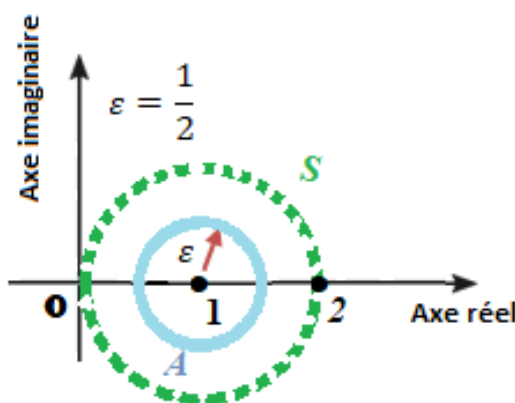


Figure 1.4 : Représentation d'ensembles de points $|z - 1| \leq \frac{1}{2}$ et $|z - 1| < 1$

Exercice 1.22

Montrer que la fonction f définie par $f(z) = 2z^2 - 1 + e^{-z}$ est une fonction entière.

Solution

Nous voulons montrer que $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour cela nous posons $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x + iy)^2 - 1 + e^{-(x+iy)} \\ &= 2(x^2 + 2ixy - y^2) - 1 + e^{-x}e^{-iy} \\ &= (2x^2 + 4ixy - 2y^2) - 1 + e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\ &= 2x^2 + 4ixy - 2y^2 - 1 + e^{-x}\cos(y) - ie^{-x}\sin(y) \\ &= (2x^2 - 2y^2 - 1 + e^{-x}\cos(y)) + i(4xy - e^{-x}\sin(y)) \end{aligned}$$

Nous distinguons $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 1 + e^{-x}\cos(y)$ et $v(x, y) = 4xy - e^{-x}\sin(y)$. Cherchons alors les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y .

$$\begin{aligned}u_x &= 4x - e^{-x}\cos(y), \\u_y &= -4y - e^{-x}\sin(y), \\v_x &= 4y + e^{-x}\sin(y), \\v_y &= 4x - e^{-x}\cos(y).\end{aligned}$$

Remarquons que les dérivées partielles u_x , u_y , v_x , v_y existent et elles sont continues pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De plus les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$u_x(x, y) = 4x - e^{-x}\cos(y) = v_y(x, y) \text{ et } u_y(x, y) = -4y - e^{-x}\sin(y) = -v_x(x, y).$$

Alors $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ et par conséquent la fonction f est une fonction entière.

Exercice 1.23

Montrer que $f(z) = e^y e^{2xi}$ n'est nulle part holomorphe.

Solution

Ecrivons f sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$f(z) = e^y e^{2xi} = e^y (\cos(2x) + i\sin(2x)) = e^y \cos(2x) + ie^y \sin(2x).$$

On a $u(x, y) = e^y \cos(2x)$ et $v(x, y) = e^y \sin(2x)$, les dérivées partielles sont les suivantes : $u_x(x, y) = -2e^y \sin(2x)$, $u_y(x, y) = e^y \cos(2x)$, $v_x(x, y) = 2e^y \sin(2x)$ et $v_y(x, y) = e^y \cos(2x)$.

$$\text{Pour } u_x(x, y) = v_y(x, y) \Rightarrow -2e^y \sin(2x) = e^y \sin(2x)$$

$$\Rightarrow 3\sin(2x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Pour } u_y(x, y) = -v_x(x, y) \Rightarrow e^y \cos(2x) = -2e^y \cos(2x)$$

$$\Rightarrow 3e^y \cos(2x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(n\pi) = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^n = 0, \text{ ce qui est impossible.}$$

Donc les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites, et par la suite $f'(z)$ n'existe pas pour tout point $z \in \mathbb{C}$. La fonction f n'est nulle part holomorphe.

Remarques 1.10

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine.

1. Si une fonction f est holomorphe sur D , alors f est continue sur D .
2. Si une fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur D , alors u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann
3. Si les fonctions réelles u_x , u_y , v_x , v_y sont continues sur D et $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ et $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$, alors f est holomorphe sur D .

4. Si les deux fonctions f et g sont holomorphes sur D , alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont holomorphes sur D .
5. Si les deux fonctions f et g sont holomorphes sur D , alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur D à conditions que g soit différente de 0 pour tout z de D .
6. Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe sur U et à valeurs dans V et g est holomorphe sur V alors la fonction composée $g \circ f$, donnée par $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ est holomorphe sur U et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ pour tout $z \in U$.
7. Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, alors les seuls points singuliers de f sont z tels que $Q(z) \neq 0$.

Proposition 1.10

Si f est holomorphe dans un domaine D et $f'(z) = 0$ pour chaque $z \in D$ alors f est constante.

Preuve

Supposons que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D$, ce qui entraîne $u_x + iv_x = 0$,
 $f'(z) = 0 \Rightarrow u_x + iv_x = 0$.

$$\Rightarrow u_x = 0 = v_x \text{ pour tout } (x, y) \in D.$$

Par ailleurs $u_x = v_y \Rightarrow v_y = 0$ pour tout $(x, y) \in D$.

Et $u_y = -v_x \Rightarrow u_y = 0$ pour tout $(x, y) \in D$.

$$u_x = 0 \Rightarrow u(x, y) = g(y) \text{ (Fonction en } y\text{)}.$$

$$u_y = 0 \Rightarrow g'(y) = 0$$

$$\Rightarrow g(y) = k_1 \text{ où } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Donc $u(x, y) = k_1$. De même on a :

$$v_x = 0 \Rightarrow v(x, y) = h(y) \text{ (Fonction en } y\text{)}.$$

$$v_y = 0 \Rightarrow h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = k_2 \text{ où } k_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc $v(x, y) = k_2$.

Par conséquent $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = k_1 + ik_2$ ce qui veut dire que la fonction f est constante dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.24

Montrer que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ sont tous les deux holomorphes dans un domaine D , alors la fonction f est constante.

Solution

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D , alors $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$.

Si $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ est holomorphe dans D , alors $u_x = (-v)_y$ et $u_y = -(-v)_x$.

On a $u_x = (-v)_y \Rightarrow u_x = -v_y$ et $u_y = -(-v)_x \Rightarrow u_y = v_x$.

Les équations $u_x = v_y$ et $u_x = -v_y$ donnent $v_y = 0$ et par la suite $u_x = 0$. Et les équations $u_y = -v_x$ et $u_y = v_x$ donnent $v_x = 0$. Donc $f'(z) = u_x + iv_x = 0$ ce qui prouve que f est constante.

1.9. Fonctions harmoniques

Définition 1.12

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction à valeur réelle des deux variables réelles x et y définies sur un domaine D (Rappelons qu'un domaine est un ensemble ouvert connexe). L'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$ est connue sous le nom « équation de Laplace ». Si $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ sont tous continus et si φ satisfait l'équation de Laplace, alors $\varphi(x, y)$ est appelé une fonction harmonique.

Remarque 1.11

1. L'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est appelé le Laplacien. (1.18)

2. L'équation de Laplace $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut être écrite sous la forme : $\Delta \varphi = u_{xx} + u_{yy} = 0$. (1.19)

Proposition 1.11

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, alors les deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques dans D .

En d'autres termes, les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

Preuve

En effet, comme f est holomorphe alors les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ satisfont les équations de Cauchy Riemann et les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et mixtes $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ sont continues.

Donc on aura :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ce qui donne : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

De la même manière on montre que : $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Définition 1.13

Si deux fonctions harmoniques $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, alors $u(x, y)$ est appelée une fonction harmonique conjuguée de $v(x, y)$ et $v(x, y)$ est appelée une fonction harmonique conjuguée de $u(x, y)$.

Remarque 1.12

Si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, harmoniques et conjuguées alors la fonction complexe définie par $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe.

Exercice 1.25

Vérifier que la fonction $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ est harmonique, et donner sa fonction harmonique conjuguée $v(x, y)$ (c'est-à-dire $v(x, y)$ telle que $u(x, y) + iv(x, y)$ soit holomorphe).

Solution

Si $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$, alors on a : $u_x = 6xy + 4x$ et $u_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y$.
Et par la suite on aura : $u_{xx} = 6y + 4$ et $u_{yy} = -6y - 4$.

Donc le Laplacien $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = (6y + 4) + (-6y - 4) = 0$. Par conséquent $u(x, y)$ est harmonique.

Le conjugué harmonique de $u(x, y)$ satisfera les équations de Cauchy-Riemann et aura des dérivées partielles continus de tous les ordres.

Par les équations de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$ et $v_x = -u_y$.

Nous aurons donc $v_y = 6xy + 4x$.

Alors: $v(x, y) = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + h(x)$, où h est une fonction de la variable x seul.

Donc $v_x = 3y^2 + 4y + h'(x)$.

Puisque $v_x = -u_y$ on aura :

$$3y^2 + 4y + h'(x) = -(3x^2 - 3y^2 - 4y).$$

Ce qui implique que $h'(x) = -3x^2$ et $h(x) = -x^3$.

Par conséquent, le conjugué harmonique est : $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3$.

1.10. Primitive d'une fonction holomorphe

Pour deux fonctions holomorphes f et F dans un domaine connexe D , on peut définir l'intégrale suivante :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (1.20)$$

La fonction $F(z)$ admet donc une dérivée que l'on peut calculer :

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \right]. \quad (1.21)$$

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z) dz - \int_{z_0}^z f(z) dz \right].$$

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\int_z^{z+\Delta z} f(z) dz \right].$$

Or f est continue en z puisqu'elle est holomorphe. Cette dernière limite vaut donc $f(z)$ et l'on a démontré que $F'(z) = f(z)$.

$F(z)$ est donc une primitive de $f(z)$, toutes les autres ne diffèrent de celle-ci que par addition d'une constante, comme en analyse réelle (à la nuance que la constante peut être complexe). Ainsi, $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$. Pour plus de détail voir le chapitre 3.

Chapitre 2

Fonctions élémentaires dans l'ensemble des nombres complexes

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous définirons une classe de fonctions qui présente le plus d'intérêt en analyse complexe et nous étudierons un certain nombre de fonctions holomorphes complexes élémentaires. Plus particulièrement nous étudierons la fonction complexe homographique, exponentielle, logarithmique, puissance, trigonométrique, hyperbolique, trigonométrique inverse et hyperbolique inverse. On montrera que toutes ces fonctions sont holomorphes dans un domaine approprié et que leurs dérivées s'accordent avec leurs contreparties réelles.

2.2. Fonctions homographiques

Notons que les fonctions polynomiales sont des fonctions entières, et les fonctions rationnelles sont holomorphes en dehors de leurs pôles. Parmi ces fonctions rationnelles, les fonctions homographiques jouent un rôle particulier.

Les fractions rationnelles sont définies par $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes.

Définition 2.1

Soient a, b, c et d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

La fonction f définie par : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est appelée transformation homographique.

Si $ad - bc = 0$, f dégénère en la fonction constante égale à $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Si de plus $c \neq 0$, cette fonction admet un pôle simple en $z_0 = -\frac{d}{c}$ et $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{bc-ad}{c^2}$. (2.1)

Où $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ représente le résidu de f en z_0 .

Cette fonction a la propriété remarquable de transformer tout cercle ou droite en un cercle ou droite.

Théorème 2.1

Si $ad - bc \neq 0$ et $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pour tout $z \neq z_0 := -\frac{d}{c}$. (2.2)

Alors :

- ✚ L'image par f d'un cercle ne passant pas par z_0 est un cercle.
- ✚ L'image par f d'une droite ne passant pas par z_0 est un cercle.
- ✚ Si C est un cercle passant par z_0 , $f(C \setminus \{z_0\})$ est une droite.
- ✚ Si D est une droite passant par z_0 , $f(D \setminus \{z_0\})$ est une droite.

Preuve

En effet, les applications de la forme $z \rightarrow az + b$ correspondent géométriquement à des composées de translations, rotations et homothéties, qui transforment toutes les droites en droites et les cercles en cercles. Le théorème repose donc sur le fait que l'inversion $z \rightarrow \frac{1}{z}$ transforme tout cercle ou droite en un cercle ou une droite, et plus précisément, tout cercle ou droite ne passant pas par 0 en un cercle, et tout cercle ou droite passant par 0 en une droite (plus un point "à l'infini").

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que n'importe quel cercle ou droite admet une équation cartésienne de la forme :

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0. \quad (2.3)$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta|^2 > \alpha\beta$, le cas $\alpha = 0$ correspondant aux droites, le cas $\gamma = 0$ correspondant aux cercles ou droites passant par 0. Le résultat est alors évident, puisque l'image par l'inversion $z \rightarrow \frac{1}{z}$ de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \alpha + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma z\bar{z} = 0\}$.

Ce résultat permet de transformer facilement des disques ou extérieurs de disques en demi-plans, et inversement, la réciproque d'une homographie étant aussi une homographie. En outre, les homographies préservent les angles, puisque c'est le cas des translations, rotations, homothéties, inversions et symétries orthogonales. Ce sont des cas particuliers de ce qu'on appelle des transformations conformes. Rappelons que par définition une transformation conforme est une transformation qui conserve les angles en grandeur et en sens.

2.3. La fonction exponentielle

Définition 2.2

On appelle fonction exponentielle de la variable complexe $z = x + iy$, la fonction définie par la relation suivante : $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. (2.4)

Remarque 2.1

1. Le domaine de définition de la fonction exponentielle de la variable complexe z est le plan complexe tout entier $\mathbb{C}$.
2. Nous utilisons parfois $\exp(z)$ pour définir e^z .
3. Pour $z = iy$ nous obtenons la formule d'Euler $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$. (2.5)

Exercice 2.1

Exprimer $f(z) = e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$ sous la forme $x + iy$.

Solution

$$f(z) = e^{-1+i\frac{\pi}{2}} = e^{-1} e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{i}{e}.$$

Exercice 2.2

Exprimer $f(z) = e^{-\pi i}$ sous la forme $x + iy$.

Solution

$$f(z) = e^{-\pi i} = e^0(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = 1.(-1 + i.0) = -1.$$

Proposition 2.1

Soit $z = x + iy$, alors nous avons les propriétés de e^z suivantes :

$$a) |e^z| = e^x. \quad (2.6)$$

$$b) \arg(e^z) = y + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

$$c) e^z \neq 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

$$d) e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \quad (2.9)$$

$$e) \frac{1}{e^z} = e^{-z}. \quad (2.10)$$

$$f) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}. \quad (2.11)$$

$$g) (e^z)^n = e^{nz} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

$$h) e^{z+2\pi i} = e^z \text{ (} e^z \text{ est une fonction périodique de période } 2\pi i \text{)}. \quad (2.13)$$

Preuve (Exercice)

Remarque 2.2

La fonction e^z est une fonction entière.

Exercice 2.3

Résoudre l'équation suivante $e^z = 1$.

Solution

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } e^z = 1 &\Rightarrow e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = 1. \\ &\Rightarrow e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = 1. \\ &\Rightarrow e^x \cos(y) = 1 \text{ et } e^x \sin(y) = 0. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} e^x \sin(y) = 0 &\Rightarrow \sin(y) = 0. \\ &\Rightarrow y = n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x \cos(y) = 1 &\Rightarrow e^x \cos(n\pi) = 1. \\ &\Rightarrow e^x (-1)^n = 1. \\ &\Rightarrow e^x = (-1)^n. \end{aligned}$$

Puisque $e^x > 0$, alors on prend $n = 2m$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Donc pour $n = 2m$ on trouve $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Par conséquent : $y = 2m\pi$

Et $z = 2m\pi i$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.4

Trouver toutes les valeurs de z tel que $e^{iz} = -2$ sachant que $z = x + iy$.

Solution

$$e^{iz} = -2 \Rightarrow e^{iz} = |-2| e^{i\text{Arg}(-2)}..$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{iz} &= 2 e^{i\pi}. \\ \Rightarrow e^{-y+ix} &= 2 e^{i\pi}. \\ \Rightarrow e^{-y} e^{ix} &= 2 e^{i\pi} \\ \Rightarrow e^{-y} &= 2 \text{ et } x = \pi + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ \Rightarrow y &= -\ln(2) \text{ et } x = \pi + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc on aura comme solution de l'équation $e^{iz} = -2$ les nombres complexes z décrits par la relation suivante : $z = (2n + 1)\pi - i \cdot \ln(2)$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2.4. La fonction logarithme complexe et ses branches

La définition de la fonction logarithmique est basée sur la résolution de l'équation $e^w = z$, où z est un nombre complexe non nul.

En posant $w = u + iv$ et $z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$, nous obtenons l'équation $e^u e^{iv} = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$ qui aura comme solutions : $w = \ln(|z|) + i(\text{Arg}(z) + 2n\pi)$ où $n \in \mathbb{Z}$. (2.14)

Définition 2.3

Nous définissons le logarithme d'un nombre complexe z non nul comme étant :

$$\log(z) = \ln(|z|) + i(\text{Arg}(z) + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

Ou

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\text{arg}(z) \text{ où } z \neq 0 \text{ et } \text{arg}(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

Remarques 2.3

- ✚ Il n'y a pas de logarithme pour le nombre $z = 0$ car l'équation $e^w = 0$ ne se réalise pas.
- ✚ La fonction logarithme $\log(z)$ est une fonction à plusieurs valeurs (selon les valeurs de n).

Exercice 2.5

Trouver $\log(-1)$ et $\log(1 + i)$.

Solution

- 1) $\log(-1) = \ln(|-1|) + i\text{arg}(-1)$.
 $= \ln(1) + i(\text{Arg}(-1) + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.
 $= 0 + i(\pi + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.
 $= (2n + 1)\pi i \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\log(1 + i) = \ln(|1 + i|) + i\text{arg}(1 + i)$.
 $= \ln(\sqrt{2}) + i(\text{Arg}(1 + i) + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.
 $= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.
 $= \ln(\sqrt{2}) + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i \text{ où } n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.6

Trouver $\log(e^z)$.

Solution

$$\begin{aligned}\log(e^z) &= \ln(|e^z|) + i \arg(e^z). \\ &= \ln(e^x) + i(\operatorname{Arg}(e^z) + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= \ln(e^x) + i(y + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= x + iy + 2n\pi i \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= z + 2n\pi i \text{ où } n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Remarque 2.4

$\log(z)$ n'est pas une fonction. Nous l'appellerons fonction logarithme complexe à valeurs multiples.

Définition 2.4

La valeur principale du logarithme ou détermination principale du logarithme d'un nombre complexe z différent de zéro, $\log(z)$, est définie comme étant $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$ où $|z| > 0$ et $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$.

Exercice 2.7

Calculer $\operatorname{Log}(z)$ pour $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Solution

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(-1 - \sqrt{3}i) &= \ln(|-1 - \sqrt{3}i|) + i \operatorname{Arg}(-1 - \sqrt{3}i) \\ &= \ln(2) + i \left(-\pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) \right). \\ &= \ln(2) + i \left(-\pi + \frac{\pi}{3} \right). \\ &= \ln(2) - i \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Remarque 2.5

- ✚ $\operatorname{Log}(z)$ représente une fonction.
- ✚ $\log(z) = \operatorname{Log}(z) + 2n\pi i$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2.4.1. Branches de $\log(z)$

Il a été mentionné ci-dessus que $\log(z)$ est une fonction à valeurs multiples. Ainsi, pour définir une fonction à valeur unique, nous restreignons le domaine et définissons les fonctions comme suit:

$$\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) \text{ où } \alpha < \arg(z) \leq \alpha + 2\pi \text{ et } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Cependant, ces fonctions ne sont pas continues dans leurs domaines. Pour voir cela, considérons $\operatorname{Log}(z)$.

Si nous approchons de -1 le long de la courbe $z = e^{(\pi-t)i}$, $0 \leq t \leq \pi$ alors :

$$\lim_{z \rightarrow -1} \text{Log}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} (\pi - t)i = \pi i.$$

Mais si on s'approche de -1 le long de la courbe $z = e^{-(\pi-t)i}$, $0 \leq t \leq \pi$ alors :

$$\lim_{z \rightarrow -1} \text{Log}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} -(\pi - t)i = -\pi i.$$

Ainsi $\lim_{z \rightarrow -1} \text{Log}(z)$ n'existe pas et donc $\text{Log}(z)$ n'est pas continue en -1.

Les mêmes arguments peuvent être utilisés pour montrer que $\text{Log}(z)$ n'est continu en aucun nombre réel négatif. En supprimant ces points du domaine de $\text{Log}(z)$, on obtient une fonction holomorphe $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ où $|z| > 0$ et $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$.

Définition 2.5

Soit f une fonction à valeurs multiples. Une fonction F à valeur unique est appelée une branche de f s'il existe un domaine D tel que :

1. $F(z) \in f(z)$ pour tout $z \in D$.
2. F est holomorphe sur D .

Exemple 2.1

$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ où $|z| > 0$ et $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$ est une branche de $\log(z)$. On l'appelle branche principale.

Proposition 2.2

Pour tout nombre réel α , $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ où $|z| > 0$ et $\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$ est une branche de $\log(z)$ et $\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}$, $|z| > 0$, $\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$. (2.17)

Preuve :

On a $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$.

Posons $z = re^{i\theta}$ où $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.

$$\log(z) = \ln(r) + i\theta = u + iv \text{ où } u = \ln(r) \text{ et } v = \theta.$$

Les dérivées partielles de ses parties réelles et imaginaires sont :

$$u_r = \frac{1}{r}, v_\theta = 1, u_\theta = 0 \text{ et } v_r = 0.$$

On remarque que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$(u_r = \frac{1}{r} v_\theta \text{ et } v_r = -\frac{1}{r} u_\theta).$$

$$\text{Et } \frac{d}{dz} \log(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi, $\text{Log}(z)$ est holomorphe dans le domaine $|z| > 0$ et $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$. Il est défini pour tout z différent de zéro, mais holomorphe uniquement dans le domaine précité. Les points sur l'axe réel négatif et $z = 0$ sont des singularités de $\text{Log}(z)$, mais ce ne sont pas des singularités isolées (Figure 2.1).

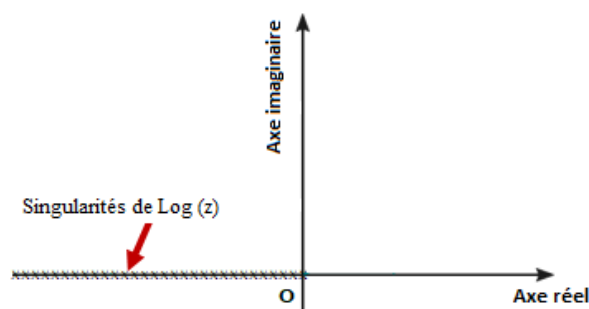


Figure 2.1 : Représentation des singularités de $\text{Log}(z)$

La fonction $\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$ où $z \neq 0$, $|z| \neq 0$, $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ avec les composantes $u(r, \theta) = \ln(r)$ et $v(r, \theta) = \theta$ est à valeur unique et continue dans le domaine déterminé (Figure 2.2).

Notons que si cette fonction devait être définie sur le rayon $\theta = \alpha$, elle n'y serait pas continue. Car si z est un point de ce rayon, il y a des points arbitrairement proches de z auxquels les valeurs de v sont proches de α et aussi des points tels que les valeurs de v sont proches de $\alpha + 2\pi$.

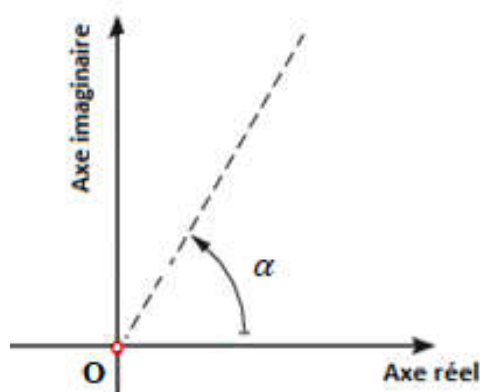


Figure 2.2 : Représentation de la coupe de branche (La demi-ligne passant par $z = 0$)

La fonction citée ci-dessus est non seulement continue mais aussi holomorphe dans tout le domaine $r > 0$, $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ puisque les dérivées partielles du premier ordre de u et v y sont continues.

Définition 2.6 (Coupure de branche et point de branchement)

1. Une coupure de branche est une partie de ligne ou de courbe, constituée de points singuliers, qui est introduite pour définir une branche d'une fonction à valeurs multiples.
2. Un point singulier commun à toutes les coupures de branche d'une fonction f est appelé un point de branchement de f .

Exercice 2.8

Montrer que $\text{Log}(z + 1)$ est holomorphe partout dans $\mathbb{C}$ sauf sur la demi-ligne $y = 0$ et $x \leq -1$.

Solution

Posons $f(w) = \text{Log}(w)$ et $w = g(z) = z + 1$.

Alors $\text{Log}(z + 1) = (f \circ g)(z) = f(g(z))$.

$\text{Log}(w)$ est holomorphe sur l'ensemble $D = \mathbb{C} - \{w : \text{Im}(w) = 0, \text{Re}(w) \leq 0\}$.

Remarquons que la fonction g est entière et par la suite $\text{Log}(z + 1) = f(g(z))$ est holomorphe si $w = g(z) = z + 1$ appartient à D . Donc pour $z = x + iy$ on a $w = x + 1 + iy$ et $\text{Im}(w) = 0 \Rightarrow y = 0$ et $\text{Re}(w) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$.

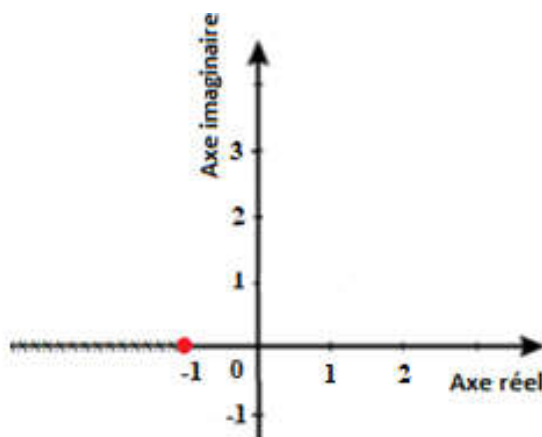


Figure 2.3 : Domaine d'analyticité de $\text{Log}(z + 1)$

Proposition 2.3

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Alors :

1. $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$.
2. $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$.

Preuve

$$1) \log(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2).$$

$$= \ln(|z_1| |z_2|) + i(\arg(z_1) + \arg(z_2)).$$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i \arg(z_1) + i \arg(z_2).$$

$$= \ln|z_1| + i \arg(z_1) + \ln|z_2| + i \arg(z_2).$$

$$= \log(z_1) + \log(z_2).$$

$$2) \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

$$= \ln\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) + i(\arg(z_1) - \arg(z_2)).$$

$$= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i \arg(z_1) - i \arg(z_2).$$

$$= (\ln|z_1| + i \arg(z_1)) - (\ln|z_2| + i \arg(z_2)).$$

$$= \log(z_1) - \log(z_2).$$

Exercice 2.9

Vérifier l'égalité $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ si $z_1 = -1$ et $z_2 = i$.

Solution

pour $z_1 = -1$ et $z_2 = i$, on a :

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log(-i). \\ &= \ln|-i| + i \arg(-i). \\ &= \ln|-i| + i(\operatorname{Arg}(-i) + 2n\pi) \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= i\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(z_1) &= \log(-1). \\ &= \ln|-1| + i \arg(-1). \\ &= \ln|-1| + i(\operatorname{Arg}(-1) + 2n_1\pi) \text{ où } n_1 \in \mathbb{Z}. \\ &= i(2n_1 + 1)\pi \text{ où } n_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(z_2) &= \log(i). \\ &= \ln|i| + i \arg(i). \\ &= \ln|i| + i(\operatorname{Arg}(i) + 2n_2\pi) \text{ où } n_2 \in \mathbb{Z}. \\ &= i\left(2n_2 + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ où } n_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log(z_1) + \log(z_2) \Rightarrow i\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi = i(2n_1 + 1)\pi + i\left(2n_2 + \frac{1}{2}\right)\pi. \\ &\Rightarrow 2n - \frac{1}{2} = 2(n_1 + n_2) + 1 + \frac{1}{2}. \\ &\Rightarrow 2n = 2(n_1 + n_2 + 1). \\ &\Rightarrow n = n_1 + n_2 + 1 \text{ où } (n, n_1, n_2) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vérifiée si on choisit $(n, n_1, n_2) \in \mathbb{Z}$ tel que $n = n_1 + n_2 + 1$.

Exercice 2.10

Montrer que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$ si $z_1 = -1$ et $z_2 = i$.

Solution

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z_1 z_2) &= \operatorname{Log}(-i). \\ &= \ln|-i| + i \operatorname{Arg}(-i). \\ &= -\frac{\pi}{2}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z_1) &= \operatorname{Log}(-1). \\ &= \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1). \\ &= \pi i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z_2) &= \operatorname{Log}(i). \\ &= \ln|i| + i \operatorname{Arg}(i). \\ &= \frac{\pi}{2}i. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i \neq -\frac{\pi}{2}i = \operatorname{Log}(z_1 z_2).$$

Donc $\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$.

Proposition 2.4

Soit z un nombre complexe non nul. Alors :

$$1. \quad z^n = e^{n \log(z)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

$$2. \quad z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(z)} \text{ où } n \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Preuve (Exercice)

Exercice 2.11

Montrer que $\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log}(i)$.

Solution

Lorsque la définition de la branche principale est utilisée, on peut avoir :

$$\begin{aligned}\text{Log}(i^3) &= \text{Log}(-i). \\ &= \ln|-i| + i\text{Arg}(-i). \\ &= -\frac{\pi}{2}i.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}3\text{Log}(i) &= 3(\ln|i| + i\text{Arg}(i)). \\ &= \frac{3\pi}{2}i.\end{aligned}$$

Donc $\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log}(i)$.

2.5. Fonction puissance complexes

Définition 2.7

Soit z un nombre complexe non nul et soit a un nombre complexe quelconque. Nous définissons z^a comme étant :

$$z^a = e^{a\log(z)} \quad (2.20)$$

Où $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ est la fonction à valeurs multiples.

Remarques 2.6

1. La fonction $z^a = e^{a\log(z)}$ est aussi une fonction à valeurs multiples.
2. Soit α un nombre réel et soit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ où :
 $|z| > 0$ et $\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$, une branche de $\log(z)$. Alors $z^a = e^{a\log(z)}$ est holomorphe dans l'ensemble $D = \{(r, \theta) : r > 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi\}$.
3. Si on choisit la branche principale de $\log(z)$, alors on a $z^a = e^{a\text{Log}(z)}$ et sa dérivée est la suivante $\frac{d}{dz}(z^a) = az^{a-1}$. (2.21)

Exercice 2.12

Trouver les valeurs de $w = z^{2i}$ au point $z = i$.

Solution

$$(i)^{2i} = e^{2i\log(i)} = e^{2i\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]} = e^{-(4n+1)\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2.13

Trouver toutes les valeurs de $(1)^i$.

Solution

$$\text{Puisque } \log(1) = \ln|1| + i\arg(1) = 2n\pi i.$$

Et d'après la définition précédente on aura :

$$(1)^i = e^{i \log(z)} = e^{i 2n\pi i} = e^{-2n\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Donc $(1)^i$ possède une infinité dénombrable de valeurs.

Exercice 2.14

Trouver toutes les valeurs de $(i)^{2+i}$.

Solution

En appliquant la définition on obtient :

$$\begin{aligned}(i)^{2+i} &= e^{(2+i)\log(i)} \\ &= e^{(2+i)(\ln|i|+i\arg(i))} \\ &= e^{(2+i)i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= e^{(2i-1)\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} e^{(4n+1)\pi i} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} e^{4n\pi i} e^{\pi i} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= -e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Exercice 2.15

Trouver toutes les valeurs de $(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{2}}$.

Solution

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{2}} &= e^{\left(\frac{3}{2}\right)\log(1+\sqrt{3}i)} \\ &= e^{\left(\frac{3}{2}\right)(\ln|1+\sqrt{3}i|+i\arg(1+\sqrt{3}i))} \\ &= e^{\left(\frac{3}{2}\right)(\ln|1+\sqrt{3}i|+i\arg(1+\sqrt{3}i)+2n\pi)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= e^{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\ln(2)+i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\right)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= e^{\left(\frac{3}{2}\right)\ln(2)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+3n\pi\right)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= \sqrt{2^3} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} e^{3n\pi i} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\ &= 2\sqrt{2}(-1)^n i \text{ où } n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Donc $(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{2}} = \pm 2\sqrt{2}i$, c'est-à-dire elle possède deux valeurs.

Remarque 2.7

La détermination principale de z^a est définie par la fonction :

$$z^a = e^{a \operatorname{Log}(z)}. \quad (2.22)$$

Le point de branchement de la fonction puissance générale est $z = 0$.

Proposition 2.5

Soit z un nombre complexe non nul et soit a un nombre complexe quelconque.

$$\text{Alors : } \frac{1}{z^a} = z^{-a}. \quad (2.23)$$

Preuve (Exercice)

Remarque 2.8

Comme cas particulier de la fonction z^a , nous étudierons la fonction racine carrée $z^{\frac{1}{2}}$. Par définition $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z)} = \pm\sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\text{Arg}(z)}$. Il s'agit d'une fonction à deux valeurs.

La valeur principale de $z^{\frac{1}{2}}$ est $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\text{Arg}(z)}$ et la branche principale de $z^{\frac{1}{2}}$ est donnée par : $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\text{Arg}(z)}$ où $|z| > 0$ et $-\pi < \arg(z) < \pi$. La branche principale de $z^{\frac{1}{2}}$ est holomorphe sur l'ensemble $D = \{(r, \theta) : r > 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi\}$ et $\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Exercice 2.16

Trouver toutes les valeurs de $(1+i)^{\frac{1}{2}}$.

Solution

Selon la remarque précédente on a :

$$\begin{aligned} (1+i)^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{|1+i|}e^{\frac{i}{2}\text{Arg}(1+i)} \\ &= \pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{8}i} \\ &= \pm\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}. \end{aligned}$$

Définition 2.8

Soit z un nombre complexe et soit a un nombre complexe non nul.

Nous définissons a^z par :

$$a^z = e^{z\log(a)} \quad (2.24)$$

Où $\log(a) = \ln|a| + i\arg(a)$ est la fonction à valeurs multiples.

Exercice 2.17

En se basant sur la définition de a^z trouver 2^i et $2^{(1+i)}$.

Solution

1) Pour $z = i$ on a :

$$2^i = e^{i\log(2)} = e^{i(\ln(2) + i\arg(2))} = e^{i\ln(2)}e^{-(0+2n\pi)} = e^{i\ln(2)}e^{-2n\pi} \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

2) Pour $z = 1+i$ on a :

$$\begin{aligned} 2^{1+i} &= e^{(1+i)\log(2)} = e^{(1+i)(\ln(2) + i\arg(2))} = e^{(1+i)\ln(2)}e^{i(1+i)(0+2n\pi)} \\ &= e^{\ln(2)-2n\pi}e^{i(\ln(2)+2n\pi)} = 2e^{-2n\pi}e^{i(\ln(2)+2n\pi)} \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Proposition 2.6

Lorsqu'une valeur de $\log(a)$ est spécifiée, a^z est une fonction entière de z et :

$$\frac{d}{dz}(a^z) = a^z \log(a). \quad (2.25)$$

Preuve

On a $\frac{d}{dz}(a^z) = \frac{d}{dz}(e^{z \log(a)}) = \log(a)e^{z \log(a)}$.

Ceci montre que $\frac{d}{dz}(a^z) = a^z \log(a)$.

2.6. Fonctions trigonométriques

La formule d'Euler conduit à $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$. Ces deux dernières formules conduisent aux expressions du sinus et cosinus suivantes :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{Et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Définition 2.9

On définit le cosinus et sinus d'une variable complexe z par les formules :

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\text{et } \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Remarque 2.9

1. Il ne faut pas croire que $\cos(z)$ et $\sin(z)$ sont les parties réelle et imaginaire de e^{iz} pour z complexe.
2. $\sin(z) = 0$ si et seulement si $z = n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
3. $\cos(z) = 0$ si et seulement si $z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2.6.1. Propriétés

Toutes les règles exponentielles auxquelles nous sommes habitués des nombres réels sont reportées au cas complexe.

1. Les fonctions $\cos(z)$ et $\sin(z)$ sont entières car ce sont des combinaisons linéaires des fonctions entières e^{iz} et e^{-iz} .
2. $\frac{d}{dz}[\sin(z)] = \cos(z)$.
3. $\frac{d}{dz}[\cos(z)] = -\sin(z)$.
4. $\sin(-z) = -\sin(z)$.
5. $\cos(-z) = \cos(z)$.

Proposition 2.7

Soient z , z_1 et z_2 trois nombres complexes. Alors :

1. $[\sin(z)]^2 + [\cos(z)]^2 = 1$.
2. $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$.
3. $\sin(z_1 - z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) - \cos(z_1)\sin(z_2)$.
4. $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$.
5. $\cos(z_1 - z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_1)\sin(z_2)$.

Preuve

Nous démontrons la proposition (2), alors que les autres sont considérées comme exercice.
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

Alors :

$$\begin{aligned} \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})\frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})\frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}). \\ &= \frac{1}{4i}[(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)})] \\ &\quad + \frac{1}{4i}[(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)})] \\ &= \frac{1}{4i}[(2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)})] \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Exercice 2.18

Trouver toutes les racines de l'équation $\sin(z) = 1$.

Solution

Pour $z = x + iy$ on a :

$$\begin{aligned} \sin(z) = 1 &\Rightarrow \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) = 1. \\ &\Rightarrow \sin(x)\cosh(y) = 1 \text{ et } \cos(x)\sinh(y) = 0. \end{aligned}$$

Pour trouver les solutions de l'équation on procède selon les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \cos(x)\sinh(y) = 0 &\Rightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \sinh(y) = 0 \\ &\Rightarrow x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \text{ ou } y = 0 \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2) Pour $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \sin(x)\cosh(y) = 1 &\Rightarrow \sin\left((2n + 1)\frac{\pi}{2}\right)\cosh(y) = 1. \\ &\Rightarrow (-1)^n\cosh(y) = 1. \\ &\Rightarrow \cosh(y) = (-1)^n. \end{aligned}$$

On distingue les cas suivants :

Puisque $\cosh(y) > 0 \Rightarrow n = 2m$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Donc pour $n = 2m$ on trouve $\cosh(y) = 1 \Rightarrow y = 0$ et $x = (4m + 1)\frac{\pi}{2}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent les solutions de l'équation sont : $z = (4m + 1)\frac{\pi}{2}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

3) Pour $y = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \sin(x)\cosh(y) = 1 &\Rightarrow \sin(x)\cosh(0) = 1. \\ &\Rightarrow \sin(x) = 1. \\ &\Rightarrow x = (4m + 1)\frac{\pi}{2} \text{ où } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par conséquent les solutions de l'équation sont : $z = (4m + 1)\frac{\pi}{2}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.19

Montrer que l'égalité $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$ est vraie.

Solution

Sachant que $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ on a :

$$\cos(iz) = \frac{1}{2}(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2}(e^{-z} + e^z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

$$\overline{\cos(iz)} = \overline{\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})} = \frac{1}{2}(\overline{e^z} + \overline{e^{-z}}) = \frac{1}{2}(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}).$$

$$\cos(i\bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i(i\bar{z})} + e^{-i(i\bar{z})}) = \frac{1}{2}(e^{-\bar{z}} + e^{\bar{z}}) = \frac{1}{2}(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}).$$

Donc $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$.

Exercice 2.20

Montrer que $|\cos(z)| \geq |\cos(x)|$.

Solution

Essayons de trouver une formule en termes de x et y pour le module des fonctions cosinus, nous exprimons d'abord ces fonctions en termes de leurs parties réelle et imaginaire. Nous remplaçons le symbole z par le symbole $x + iy$ dans l'expression $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$. Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \\ &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}). \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}). \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + e^y(\cos(-x) + i\sin(-x))). \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + e^y(\cos(x) - i\sin(x))). \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + i\sin(x)e^{-y} + \cos(x)e^y - i\sin(x)e^y). \\ &= \cos(x)\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) - i\sin(x)\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}). \\ &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

Cherchons maintenant le module du $\cos(z)$.

$$\begin{aligned}|\cos(z)| &= \sqrt{(\cos(x))^2(\cosh(y))^2 + (\sin(x))^2(\sinh(y))^2}. \\ &= \sqrt{(\cos(x))^2(1 + (\sinh(y))^2) + (1 - (\cos(x))^2)(\sinh(y))^2}.\end{aligned}$$

$$|\cos(z)| = \sqrt{(\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2}.$$

$$\text{D'où } |\cos(z)|^2 = (\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2.$$

$$\text{On peut voir que } |\cos(z)|^2 = (\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2 \geq (\cos(x))^2.$$

$$|\cos(z)|^2 \geq (\cos(x))^2 \Rightarrow \sqrt{|\cos(z)|^2} \geq \sqrt{(\cos(x))^2}.$$

$$\Rightarrow |\cos(z)| \geq |\cos(x)|.$$

2.6.2. Tangente et cotangente, sécante et cosécante

Définition 2.10

On définit les fonctions tangentes, cotangente, sécante et cosécante d'une variable complexe z comme étant :

$$\text{a) } \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

$$\text{b) } \cotan(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

$$\text{c) } \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}.$$

$$\text{d) } \csc(z) = \frac{1}{\sin(z)}.$$

Proposition 2.8

1. Les fonctions tangentes et sécante d'une variable complexe sont holomorphes partout sauf aux points singuliers $z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ où $n \in \mathbb{Z}$.
2. Les fonctions cotangente et cosécante d'une variable complexe sont holomorphes partout sauf aux points singuliers $z = n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{d}{dz} \tan(z) = (\sec(z))^2.$
4. $\frac{d}{dz} \cotan(z) = -(\csc(z))^2.$
5. $\frac{d}{dz} \sec(z) = \sec(z)\tan(z).$
6. $\frac{d}{dz} \csc(z) = -\csc(z)\cotan(z).$

Preuve (Exercice)

Exercice 2.21

Montrer que $\tan(z + \pi) = \tan(z)$ où $z \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Solution

$$\text{Nous avons } \tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(z)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(z)}{\cos(z)\cos(\pi) - \sin(z)\sin(\pi)} \\
 &= \frac{\sin(z)\cos(\pi)}{\cos(z)\cos(\pi)} \\
 &= \frac{-\sin(z)}{-\cos(z)} \\
 &= \tan(z).
 \end{aligned}$$

2.6.3. Fonctions hyperboliques

Définition 2.11

On définit les fonctions hyperboliques d'une variable complexe z comme étant :

1. $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.
2. $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$.
3. $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)$.
4. $\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right)$.

Remarque 2.10

Les fonctions $\sinh(z)$ et $\cosh(z)$ sont des fonctions entières.

Exemple 2.2

$$\sin(i\pi) = \frac{1}{2i}(e^{i(i\pi)} - e^{-i(i\pi)}) = \frac{-i}{2}(e^{-\pi} - e^{\pi}) = \frac{i}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = i\sinh(\pi).$$

Proposition 2.9

Pour $z = x + iy$ on a :

1. $|\sin(z)|^2 = (\sin(x))^2 + (\sinh(y))^2$.
2. $|\cos(z)|^2 = (\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2$.

Preuve (Exercice)

Proposition 2.10

- a) $\cosh(z) = \cos(iz)$.
- b) $\sinh(z) = -i\sin(iz)$.
- c) $\sinh(-z) = -\sinh(z)$.
- d) $\cosh(-z) = \cosh(z)$.
- e) $\frac{d}{dz}\sinh(z) = \cosh(z)$.
- f) $\frac{d}{dz}\cosh(z) = \sinh(z)$.
- g) $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$.
- h) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\cosh(z_1)$.

- i) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_1)\sinh(z_2).$
- j) $|\sinh(z)|^2 = (\sinh(x))^2 + (\sin(y))^2.$
- k) $|\cosh(z)|^2 = (\sinh(x))^2 + (\cos(y))^2.$

Preuve

Nous allons démontrer les propositions (b), (g) et (j), alors que les autres seront considérées comme exercice.

$$(b) \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}).$$

$$= \frac{i}{2i}(e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}).$$

$$= \frac{-i}{2i}(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}).$$

$$= -i\sin(iz).$$

$$\begin{aligned} (g) \quad (\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 &= (\cos(iz))^2 - (-i\sin(iz))^2 \\ &= (\cos(iz))^2 - i^2(\sin(iz))^2 \\ &= (\cos(iz))^2 + (\sin(iz))^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (j) \quad \text{Pour } z = x + iy \text{ et avec } |\sin(z)|^2 &= |\sin(x + iy)|^2 = (\sin(x))^2 + (\sinh(y))^2 \text{ on a :} \\ \sinh(z) = -i\sin(iz) &\Rightarrow |\sinh(z)|^2 = |-i\sin(iz)|^2 \\ &= |\sin(iz)|^2 \\ &= |\sin(i(x + iy))|^2 \\ &= |\sin(-y + ix)|^2 \\ &= (\sin(-y))^2 + (\sinh(x))^2 \\ &= (\sin(y))^2 + (\sinh(x))^2. \end{aligned}$$

Remarques 2.11

$$\text{✚ } \sinh(z) = 0 \text{ si et seulement si } z = n\pi i \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{✚ } \cosh(z) = 0 \text{ si et seulement si } z = (2n + 1)\frac{\pi i}{2} \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.11

1. Si $z = iy$, alors $\sin(iy) = i\sinh(y)$ et $\cos(iy) = \cosh(y)$.
2. Si $z = x + iy$, alors $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.
3. Si $z = x + iy$, alors $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

Preuve (Exercice)

Exercice 2.22

Montrer que $\sinh(z + i\pi) = -\sinh(z)$.

Solution

$$\begin{aligned}
 \sinh(z + i\pi) &= -i\sin(i(z + i\pi)). \\
 &= -i\sin(iz - \pi). \\
 &= -i[\sin(iz)\cos(\pi) - \sin(\pi)\cos(iz)]. \\
 &= -i[(-1)\sin(iz) - (0)\cos(iz)]. \\
 &= i\sin(iz). \\
 &= -\sinh(z).
 \end{aligned}$$

2.6.4. Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses

Définition 2.12 (Fonction sinus inverse)

Nous définissons la fonction à valeurs multiples (multiforme) $\arcsin(z)$ comme étant :

$$\arcsin(z) = -i\log \left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \text{ où } (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{|1 - z^2|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg}(1 - z^2)}.$$

Où $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ est une fonction à deux valeurs (multiforme).

Exercice 2.23

Trouver $\arcsin(2)$.

Solution

En se basant sur la définition précédente on trouve :

$$\begin{aligned}
 \arcsin(2) &= -i\log \left[2i + (1 - 2^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \\
 &= -i\log \left[2i + (1 - 4)^{\frac{1}{2}} \right]. \\
 &= -i\log \left[2i + (-3)^{\frac{1}{2}} \right]. \text{ Par définition } (-3)^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{|-3|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg}(-3)}. \text{ Il s'agit donc}
 \end{aligned}$$

d'une fonction à deux valeurs. Où $\text{Arg}(-3) = \arctg\left(\frac{0}{-3}\right) + \pi = \arctg(0) + \pi = \pi$.

Il vient :

$$\begin{aligned}
 \arcsin(2) &= -i\log \left[2i \pm \sqrt{|-3|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg}(-3)} \right]. \\
 &= -i\log \left[(2 \pm \sqrt{3})i \right].
 \end{aligned}$$

D'après la définition 2.3 on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \arcsin(2) &= -i \left[\ln|(2 \pm \sqrt{3})i| + i \left(\text{Arg}((2 \pm \sqrt{3})i + 2n\pi) \right) \right] \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\
 &= -i \left[\ln|2 \pm \sqrt{3}| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\
 &= -i \left[\ln|2 \pm \sqrt{3}| + \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] \text{ où } n \in \mathbb{Z}. \\
 &= \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi - i\ln|2 \pm \sqrt{3}| \text{ où } n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Définition 2.13 (Fonctions cosinus et tangentes inverses)

Nous définissons les fonctions à valeurs multiples (multiformes) $\arccos(z)$ et $\arctan(z)$ comme étant :

$$1. \arccos(z) = -i \log \left[z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$2. \arctan(z) = \frac{i}{2} \log \left[\frac{i+z}{i-z} \right].$$

$$\text{Où } (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{|1 - z^2|} e^{\frac{1}{2} \text{Arg}(1 - z^2)}.$$

Remarque 2.12

Lorsque des branches spécifiques de la racine carrée et des fonctions logarithmiques sont utilisées, les fonctions $\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\arctan(z)$ deviennent à valeur unique et holomorphes dans un certain domaine parce qu'elles sont des compositions de fonctions holomorphes.

De plus, nous avons :

$$1. \frac{d}{dz}(\arcsin(z)) = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$2. \frac{d}{dz}(\arccos(z)) = \frac{-1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$3. \frac{d}{dz}(\arctan(z)) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Définition 2.14 (Fonctions hyperboliques inverses)

On définit les fonctions hyperboliques inverses par :

$$1. \operatorname{arcsinh}(z) = \log \left[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$2. \operatorname{arccosh}(z) = \log \left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$3. \operatorname{artanh}(z) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{1+z}{1-z} \right].$$

$$\text{Où } (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{|1 - z^2|} e^{\frac{1}{2} \text{Arg}(1 - z^2)}.$$

Exercice 2.24

Résoudre l'équation $\sin(z) = 1$.

Solution

Pour $\sin(z) = 1$ on a $z = \arcsin(1)$.

$$= -i \log \left[i(1) + (1 - (1)^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$= -i \log(i).$$

$$= -i(\ln|i| + i \arg(i)).$$

$$= -i(i(\operatorname{Arg}(i) + 2n\pi)) \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$$= -i \left(i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right) \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2.25

Résoudre l'équation $\cosh(z) = i$.

Solution

L'équation $\cosh(z) = i$ donne $z = \operatorname{arccosh}(i)$.

$$= \log \left[i + ((i)^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \text{ (d'après la définition 2.14).}$$

$$= \log \left[i + (-2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$= \log \left[i \pm \sqrt{-2} e^{\frac{1}{2} \operatorname{Arg}(-2)} \right].$$

$$= \log \left[(1 \pm \sqrt{2})i \right].$$

$$= \ln |(1 \pm \sqrt{2})i| + i \arg \left((1 \pm \sqrt{2})i \right).$$

$$= \ln |1 \pm \sqrt{2}| + i \left[\operatorname{Arg} \left((1 \pm \sqrt{2})i + 2n\pi \right) \right] \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$$= \ln |1 \pm \sqrt{2}| + i \left[\pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right] \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$$= \ln |1 \pm \sqrt{2}| + i \left(2n \pm \frac{1}{2} \right) \pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

3.1. Introduction

Dans ce chapitre nous commençons par l'introduction des intégrales de contour complexes. Ceci permet de définir l'opération inverse de dérivation conduisant d'une fonction f à une nouvelle F appelée primitive. Puis on se penche sur les plus importantes méthodes, d'étude des fonctions holomorphes, méthodes qui sont basées sur la représentation de ces fonctions par des intégrales spéciales (intégrales de Cauchy, formules intégrales de Cauchy) ou par des sommes de séries (séries de Taylor et de Laurent). Ensuite nous abordons la définition de types de points singuliers. Enfin nous donnons le principe du prolongement analytique.

3.2. Contours (Courbe ou chemin)

Une courbe dans le plan complexe peut être décrite par la représentation paramétrique $z(t) = x(t) + iy(t)$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues à valeur réelle de la variable réelle t pour $a \leq t \leq b$.

Remarques 3.1

- ✚ Pour chaque paramètre réel $t \in [a, b]$ donné, il existe un ensemble de points $(x(t), y(t))$ qui représentent les points image de l'intervalle $[a, b]$.
- ✚ Les points d'image $z(t)$ sont ordonnés en fonction de t croissant.

Définition 3.1

Soit C une courbe dans le plan complexe représentée par :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \text{ où } a \leq t \leq b. \quad (3.1)$$

1. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues, alors C est appelé un arc ou une courbe continue.
2. Si $x'(t)$ et $y'(t)$ existent et sont continus pour tout t , alors C est appelé arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3.1

Soit C une courbe dans le plan complexe représentée par $z(t) = t + it^2$ où $-1 \leq t \leq 2$.
Dire si C est un arc de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution

$z(t) = t + it^2$ où $-1 \leq t \leq 2$ est un arc, une partie de la parabole $y = x^2$. C'est un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

En effet on a :

$x(t) = t$ et $y(t) = t^2$ sont des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 2]$ où $x'(t) = 1$ et $y'(t) = 2t$.

Les points d'extrémités sont $z(-1) = -1 + i$ et $z(2) = 2 + 4i$.

Pour $t = x$ on obtient $y = x^2$ qui représente une parabole.

Donc $z(t)$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3.2

Soit C une courbe dans le plan complexe représentée par : $z(t) = \begin{cases} 1 + t - i, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 + (t - 1)i, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$.

Dire si C est un arc différentiable ?

Solution

$z(t)$ est un arc mais il ne représente pas un arc de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $z'(0)$ n'existe pas.

En effet on a :

$$x(t) = \begin{cases} 1 + t, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Et

$$y(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq 0 \\ t - 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Sachant que : $z(t) = x(t) + iy(t)$ on a :

Pour $-1 \leq t \leq 0$: $x(t) = 1 + t$ et $y(t) = -1$.

Pour $0 \leq t \leq 1$: $x(t) = 1$ et $y(t) = t - 1$.

$z(t)$ est continue en $z = -1$ mais n'est pas différentiable en ce point.

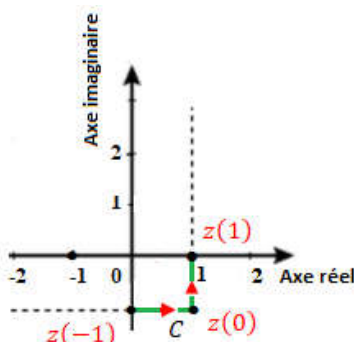


Figure 3.1 : Tracé du chemin de l'exercice 3.2

3.2.1. Longueur d'un arc

Si $z(t)$ où $t \in [a, b]$ est un arc différentiable, alors sa longueur est donnée par la relation suivante : $L = \int_a^b |z'(t)| dt$.

Exercice 3.3

Trouvez la longueur de l'arc défini par :

$z(t) = e^{-it}$ où $t \in [0, \pi]$.

Solution

On a $z(t) = e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos(t) - i\sin(t)$ et $z'(t) = -ie^{-it}$.
 Alors : $L = \int_0^\pi |z'(t)| dt = \int_0^\pi |-ie^{-it}| dt = \int_0^\pi |-i| |e^{-it}| dt = \int_0^\pi 1 dt = [t]_0^\pi = \pi$.

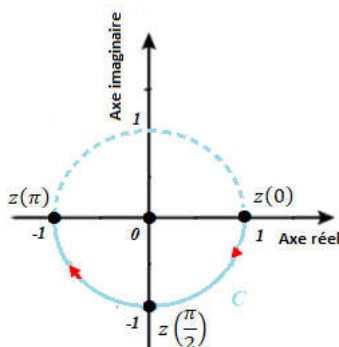


Figure 3.2 : Tracé de la courbe définie par $z(t) = e^{-it}$ où $t \in [0, \pi]$

3.3. Exemples de courbes

Définition 3.2

1. Soit C un arc décrit par $z = z(t)$ où $t \in [a, b]$ et si $z'(t)$ existe et est continue pour tout $t \in [a, b]$ et $z'(t) \neq 0$ pour tous $t \in (a, b)$, alors C est appelé arc lisse.
2. Un contour ou un arc lisse par morceaux est un arc constitué d'un nombre fini d'arcs lisses joints point par points.
3. Soit C un contour décrit par $z = z(t)$ où $t \in [a, b]$. Alors C est appelé un contour simple s'il ne coupe pas lui-même, c'est-à-dire si $z(t_1) \neq z(t_2)$ pour tout $t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $t_1 \neq t_2$, sauf pour la possibilité que $z(b) = z(a)$.
4. Soit C un contour décrit par $z = z(t)$ où $t \in [a, b]$. Si C est simple sauf pour : $z(a) = z(b)$, alors C est appelé un contour simple et fermé.

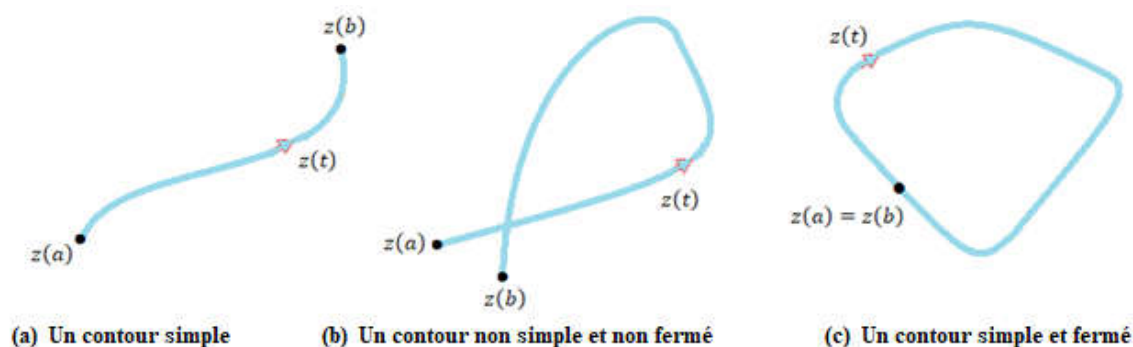


Figure 3.3 : Exemples de contours

Exemple 3.1

Considérons le cercle unitaire décrit par $z(t) = e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$. On remarque que :

1. C'est un arc lisse, puisque $z'(t) = ie^{it}$ est continu sur $[0, 2\pi]$ et $z'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.
2. C'est un contour.

3. C'est un contour simple car il ne coupe pas lui-même et fermé puisque $z(0) = z(2\pi) = 1$.

Exercice 3.4

Soit la courbe décrite par :

$$z(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t + (t - 1)i, & 1 \leq t \leq 2. \\ (3 - t)i, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Vérifier si cette courbe représente un contour fermé et simple ?

Solution

Essayons de tracer cette courbe.

Pour $0 \leq t \leq 1$ on a : $x(t) = t$ et $y(t) = 0$. C'est une droite allant du point $(0,0)$ vers le point $(1,0)$.

Pour $1 \leq t \leq 2$ on a : $x(t) = 2 - t$ et $y(t) = t - 1$. C'est une droite allant du point $(1,0)$ vers le point $(0,1)$.

Pour $2 \leq t \leq 3$ on a : $x(t) = 0$ et $y(t) = 3 - t$. C'est une droite allant du point $(0,1)$ vers le point $(0,0)$.

Nous remarquons que $z(0) = z(3)$. Alors la courbe C définie par la paramétrisation $z(t)$ est un contour fermé et simple.

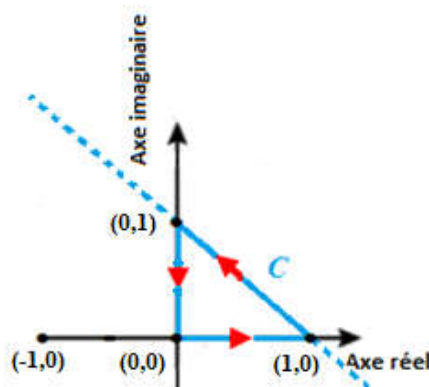


Figure 3.4 : Tracé de la courbe de l'exercice 3.4

3.4. Intégration le long d'un chemin (Contour)

Définition 3.3

Supposons que l'équation $z = z(t)$ où $t \in [a, b]$ représente un contour C .

Soit f une fonction continue par morceaux sur C . On définit alors l'intégrale de contour de f le long de C comme étant : $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$. (3.2)

Exercice 3.5

Evaluez $\int_C z dz$ si C désigne le contour défini par : $z(t) = 1 - t + it$ où $t \in [0,1]$.

Solution

Traçons le contour C : $z(t) = 1 - t + it$ où $0 \leq t \leq 1$ et $z'(t) = -1 + i$.

On peut distinguer $x(t) = 1 - t$ et $y(t) = t$ d'où $y(t) = 1 - x(t)$ qui représente une droite passant par les points $(1,0)$ et $(0,1)$.

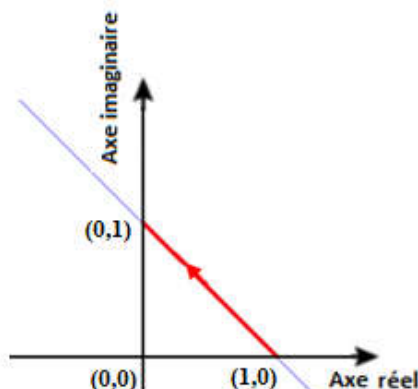


Figure 3.5 : Tracé de la droite défini par : $z(t) = 1 - t + it$ où $t \in [0,1]$

Posons $f(z) = z$.

$$\begin{aligned}
 \int_C z dz &= \int_0^1 z(t) z'(t) dt. \\
 &= \int_0^1 (1 - t + it)(-1 + i) dt. \\
 &= (-1 + i) \int_0^1 (1 - t + it) dt. \\
 &= (-1 + i) \left[t - \frac{t^2}{2} + i \frac{t^2}{2} \right]_0^1. \\
 &= (-1 + i) \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right]. \\
 &= (-1 + i) \left[\frac{1+i}{2} \right]. \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Définition 3.4

Soit C un contour représenté par $z = z(t)$ où $t \in [a, b]$ avec $z_1 = z(a)$ et $z_2 = z(b)$.

Le contour $-C$ est constitué du même ensemble de points mais avec un ordre inversé de sorte qu'il s'étend à partir de z_2 vers z_1 .

Le contour $-C$ a une représentation paramétrique défini par : $z = z(s)$ où $s \in [-b, -a]$.

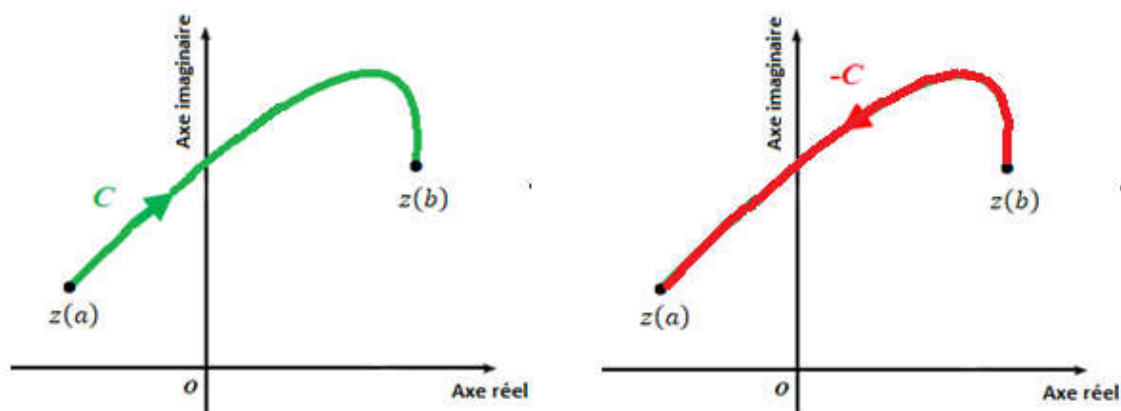


Figure 3.6 : Contours C et $-C$

Proposition 3.1

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz.$$

Preuve

Le contour C est tel que : $z(t)$ où $a \leq t \leq b$.

Le contour $-C$ est tel que : $z(-s)$ où $-b \leq s \leq -a$.

Pour $z = z(-s)$ on a : $\frac{dz}{ds} = -z'(-s)$ et pour $t = -s$ on a : $dt = -ds$.

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z)dz &= - \int_{-b}^{-a} f(z(-s))z'(-s)ds. \\ &= - \int_b^a f(z(t))z'(t)(-dt). \\ &= \int_b^a f(z(t))z'(t)dt. \\ &= - \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \\ &= - \int_C f(z)dz. \end{aligned}$$

Exercice 3.6

Calculer les intégrales $\int_C (z^2 + \bar{z})dz$ et $\int_{-C} (z^2 + \bar{z})dz$ si C est le contour défini par : $z(t) = t + i(t - 1)$ où $t \in [1, 2]$.

Solution

Le contour C est défini par : $z(t) = t + i(t - 1)$ où $t \in [1, 2]$ et $z'(t) = 1 + i$. Nous pouvons voir que $x(t) = t$ et $y(t) = t - 1$.

La relation qui existe entre $x(t)$ et $y(t)$ est $y(t) = x(t) - 1$. Elle représente une droite.

Le contour $-C$ est défini par : $z(-s) = -s + i(-s - 1) = -s - i(s + 1)$ où $s \in [-2, -1]$ et $z'(-s) = -1 - i$.

$$\begin{aligned} 1) \int_C (z^2 + \bar{z})dz &= \int_C \left((t + i(t - 1))^2 + (t - i(t - 1)) \right) (1 + i)dt. \\ &= (1 + i) \int_1^2 (t^2 - (t^2 - 2t + 1) + 2it(t - 1) + t - i(t - 1))dt. \\ &= (1 + i) \int_1^2 ((3t - 1) + i(2t^2 - 3t + 1))dt. \\ &= (1 + i) \left[\left(\frac{3}{2}t^2 - t \right) + i \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t \right) \right]_1^2. \\ &= (1 + i) \left(\left(\frac{3}{2}(4 - 1) - (2 - 1) \right) + i \left(\frac{2}{3}(8 - 1) - \frac{3}{2}(4 - 1) + (2 - 1) \right) \right). \\ &= (1 + i) \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{6}i \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{-C} (z^2 + \bar{z})dz &= \int_{-2}^{-1} \left((-s - i(s + 1))^2 + (-s + i(s + 1)) \right) (-1 - i)ds. \\ &= -(1 + i) \int_{-2}^{-1} \left((s + i(s + 1))^2 + (-s + i(s + 1)) \right) ds. \\ &= -(1 + i) \int_{-2}^{-1} (s^2 - (s^2 + 2s + 1) + 2is(s + 1) - s + i(s + 1))ds. \\ &= -(1 + i) \int_{-2}^{-1} ((-3s - 1) + i(2s^2 + 3s + 1))ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(1+i) \left[\left(-\frac{3}{2}s^2 - s \right) + i \left(\frac{2}{3}s^3 + \frac{3}{2}s^2 + s \right) \right]_{-2}^{-1} \\
 &= -(1+i) \left(\left(-\frac{3}{2}(1-4) - (-1+2) \right) + i \left(\frac{2}{3}(-1+8) + \frac{3}{2}(1-4) + (-1+2) \right) \right) \\
 &= -(1+i) \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{6}i \right).
 \end{aligned}$$

Donc on peut confirmer que : $\int_{-C} (z^2 + \bar{z})dz = -\int_C (z^2 + \bar{z})dz$.

Proposition 3.2

1. Soit C un contour tel que $C = C_1 \cup C_2$ constitué d'un contour C_1 de z_1 vers z_2 suivi d'un contour C_2 de z_2 vers z_3 . Alors : $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$.
2. Si $|f(z)| \leq M$ pour tout point z du contour C et L est la longueur de C , alors :

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 \left| \int_C f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \right| \Rightarrow \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt. \\
 &\Rightarrow \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt. \\
 &\Rightarrow \left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \int_a^b |z'(t)|dt. \\
 &\Rightarrow \left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML.
 \end{aligned}$$

Exercice 3.7

Calculer $\int_C \operatorname{Re}(z)dz$ si C est le cercle $|z| = 2$ décrit dans le sens positif (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Solution

Posons $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

C est le cercle d'équation $|z| = 2$ dont la paramétrisation est $z(t) = 2e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$ et $z'(t) = 2ie^{it}$.

$$\begin{aligned}
 \int_C \operatorname{Re}(z)dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(z(t))z'(t)dt. \\
 &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(2e^{it})2ie^{it}dt. \\
 &= 4i \int_0^{2\pi} \cos(t)(\cos(t) + i\sin(t))dt. \\
 &= 4i \int_0^{2\pi} \left[(\cos(t))^2 + i(\cos(t)\sin(t)) \right] dt. \\
 &= 4i \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} + i \frac{\sin(2t)}{2} \right) dt. \\
 &= 2i \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t) + i\sin(2t))dt. \\
 &= i[2t + \sin(2t) - i\cos(2t)]_0^{2\pi}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\cos(2t) + i(2t + \sin(2t))]_0^{2\pi}. \\
 &= (\cos(4\pi) + i(4\pi + \sin(4\pi))) - (\cos(0) + i(0 + \sin(0))). \\
 &= (1 + i(4\pi + 0)) - (1 + i(0)). \\
 &= 4\pi i.
 \end{aligned}$$

Exercice 3.8

Calculer $\int_C (z^2 + 1)dz$ où C est constitué du segment de droite allant du point $(-1,1)$ au point $(1,1)$ suivi du demi-cercle de gauche défini par l'équation : $|z - 1| = 1$.

Solution

Le contour C est décrit comme étant $C = C_1 \cup C_2$ où :

1) C_1 est le segment de droite allant du point $z_1 = -1 + i$ au point $z_2 = 1 + i$, il est défini par la l'équation : $z(t) = (1 - t)z_1 + tz_2, 0 \leq t \leq 1$.

C'est-à-dire $z(t) = -1 + 2t + i, 0 \leq t \leq 1$ et $z'(t) = 2$.

2) C_2 est le demi-cercle de gauche défini par : $z(t) = 1 + e^{it}$ où $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ et $z'(t) = ie^{it}$.

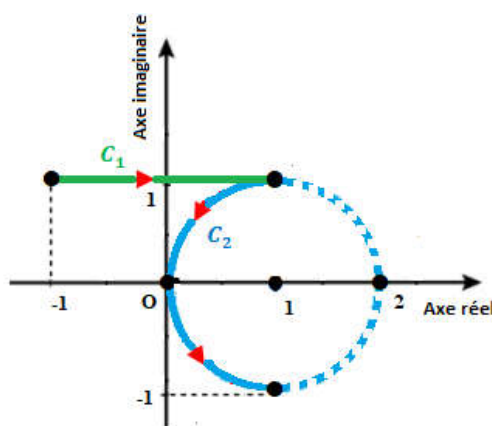


Figure 3.7 : Tracé du contour de l'exercice 3.8

$$\int_C (z^2 + 1)dz = \int_{C_1} (z^2 + 1)dz + \int_{C_2} (z^2 + 1)dz.$$

$$\int_{C_1} (z^2 + 1)dz = \int_0^1 ((z(t))^2 + 1) z'(t) dt.$$

$$= 2 \int_0^1 ((-1 + 2t + i)^2 + 1) dt.$$

$$= 2 \int_0^1 ((-1 + 2t)^2 + 2i(-1 + 2t) + i^2 + 1) dt.$$

$$= 2 \int_0^1 (1 - 4t + 4t^2 - 2i + 4ti + i^2 + 1) dt.$$

$$= 2 \int_0^1 (1 - 4t + 4t^2 - 2i + 4ti) dt.$$

$$= 2 \left[t - 2t^2 + 4\frac{t^3}{3} - 2ti + 2t^2i \right]_0^1.$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$\int_{C_2} (z^2 + 1)dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((z(t))^2 + 1) z'(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left((1 + e^{it})^2 + 1 \right) i e^{it} dt. \\
 &= i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2e^{it} + 2e^{2it} + e^{3it}) dt. \\
 &= i \left[\frac{2}{i} e^{it} + \frac{1}{i} e^{2it} + \frac{1}{3i} e^{3it} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}. \\
 &= i \left[\frac{2}{i} e^{it} + \frac{1}{i} e^{2it} + \frac{1}{3i} e^{3it} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}. \\
 &= \left[2e^{i\frac{3\pi}{2}} + e^{3\pi i} + \frac{1}{3} e^{i\frac{9\pi}{2}} \right] - \left[2e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{\pi i} + \frac{1}{3} e^{i\frac{3\pi}{2}} \right]. \\
 &= -\frac{10}{3}i.
 \end{aligned}$$

Donc $\int_C (z^2 + 1) dz = \frac{2}{3} - \frac{10}{3}i$

3.5. Primitives

Dans le cas général, la valeur de l'intégrale dépend du chemin parcouru. Cependant, il est naturel de se demander s'il est possible de caractériser la classe des fonctions pour lesquelles la valeur de l'intégrale ne dépend que des extrémités et non du chemin suivi entre ces extrémités z_1 et z_2 . Pour de telles fonctions, nous montrerons que:

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (3.3)$$

Où F est la primitive de f et C est tout contour décrit d'un point z_1 à un point z_2 .

Exercice 3.9

Calculer les intégrales suivantes $\int_{C_1} |z|^2 dz$ et $\int_{C_2} |z|^2 dz$ sachant que :

$C_1 : z_1(t) = t + it$ pour $t \in [0, 1]$ et $C_2 : z_2(t) = t^2 + it$ pour $t \in [0, 1]$.

Solution

Le contour C_1 est défini par l'équation : $z(t) = t + it$ où $0 \leq t \leq 1$ et $z'(t) = 1 + i$ et le contour C_2 est décrit comme étant $z(t) = t^2 + it$ où $0 \leq t \leq 1$ et $z'(t) = 2t + i$.

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} |z|^2 dz &= \int_0^1 |z(t)|^2 z'(t) dt. \\
 &= \int_0^1 |t + it|^2 (1 + i) dt. \\
 &= 2(1 + i) \int_0^1 t^2 dt. \\
 &= \frac{2}{3} (1 + i) [t^3]_0^1. \\
 &= \frac{2}{3} (1 + i). \\
 \int_{C_2} |z|^2 dz &= \int_0^1 |z(t)|^2 z'(t) dt. \\
 &= \int_0^1 |t^2 + it|^2 (2t + i) dt. \\
 &= \int_0^1 (t^4 + t^2) (2t + i) dt. \\
 &= \int_0^1 [(2t^5 + 2t^3) + i(t^4 + t^2)] dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\left(\frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{2}t^4 \right) + i \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right) \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{6} + \frac{8}{15}i.
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que : $\int_{C_1} |z|^2 dz \neq \int_{C_2} |z|^2 dz$.

3.5.1. Théorème fondamental pour l'intégration complexe

Théorème 3.1 (Théorème fondamental pour l'intégration complexe)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un domaine D et supposons que f admet une primitive F sur D ; c'est-à-dire qu'il existe une fonction F telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in D$. Alors pour tout contour C situé dans D et d'extrémités z_1 et z_2 on a :

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (3.4)$$

En particulier, si le contour C est fermé, alors $\int_C f(z)dz = 0$.

Preuve

Puisque $F'(z) = f(z)$ on a $\int_C f(z)dz = \int_C F'(z)dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt$.

Et sachant que $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t))z'(t)$.

Donc on peut écrire :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt = [F(z(t))]_a^b = F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

Remarque 3.2

Si la fonction f satisfait l'hypothèse du théorème 3.1, alors pour tout contour C situé dans D commençant en z_1 et se terminant en z_2 on a :

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Par conséquent, le résultat démontre que l'intégrale ne dépend pas du chemin.

Exercice 3.10

Calculer l'intégrale $\int_C z dz$ en utilisant l'idée de la primitive sachant que le contour C est défini de la façon suivante :

$C : z(t) = 1 - t + it$ pour $t \in [0,1]$.

Solution

La primitive de la fonction f telle que $f(z) = z$ est $F(z) = \frac{z^2}{2}$.

Les extrémités du contour C sont les suivants : $z_1 = z(0) = 1$ et $z_2 = z(1) = i$.

$$\int_C f(z)dz = \int_C z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z_1}^{z_2} = \left[\frac{z^2}{2} \right]_1^i = \frac{i^2}{2} - \frac{1^2}{2} = -1.$$

3.6. Théorème de Cauchy

Théorème 3.2 (Cauchy –Goursat)

Soit C un contour simple et fermé et soit f une fonction holomorphe à l'intérieur de C ainsi que sur C lui-même. Alors $\int_C f(z)dz = 0$. (3.5)

Preuve (Exercice)

Exercice 3.11

Montrer que $\int_C \frac{z}{z-2} dz = 0$ sachant que C est le cercle unité défini par l'équation $|z| = 1$.

Solution

Soit la fonction f défini par $f(z) = \frac{z}{z-2}$. On remarque que f est holomorphe sur le contour C et dans la région entourée par C . Donc en appliquant le théorème de Cauchy-Goursat on obtient $\int_C f(z)dz = 0$.

Exercice 3.12

Montrer que $\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ si C est le cercle orienté positivement défini par l'équation défini par $|z| = 3$.

Solution

La fonction f défini par $f(z) = \frac{1}{z}$ n'est pas holomorphe au point $z = 0$. Ce point appartient à la région enfermée par le contour C .

Le contour C est définie par : $|z| = 3 \Leftrightarrow z = 3e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3e^{it}} 3ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

3.6.1. Domaines simplement et multiplement connexes

Définition 3.5

1. Un domaine D simplement connexe est un domaine tel que chaque courbe fermée et simple à l'intérieur de D ne renferme que des points de D (D ne possède pas de trous).
2. Si un domaine D n'est pas simplement connexe, alors il est appelé multiplement connexe (D possède des trous).

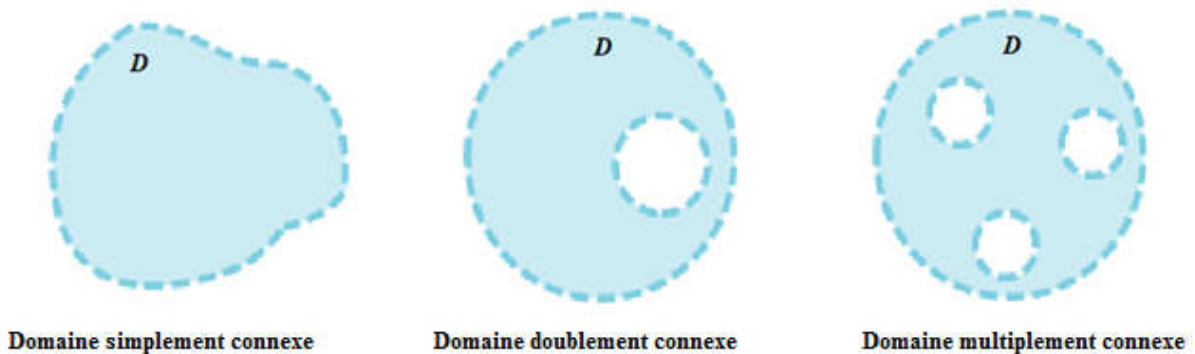


Figure 3.8 : Domaines simplement et multiplement connexes

Exemple 3.2

$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ est un domaine simplement connexe.

Exemple 3.3

$D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ est un domaine multiplément connexe.

Théorème 3.3

Si f est une fonction holomorphe dans un domaine D simplement connexe, alors :

$\int_C f(z)dz = 0$ pour tout contour fermé C situé dans D .

Preuve (Exercice)

Corollaire 3.1

Toute fonction f holomorphe dans un domaine D simplement connexe admet une primitive sur D .

Théorème 3.4

Soit C un contour fermé simple décrit dans le sens anti-horaire; et soient C_k , $k = 1, 2, \dots, n$, de simples contours fermés décrits dans le sens des aiguilles d'une montre, qui sont intérieurs à C et dont les intérieurs n'ont pas de points communs.

Si f est une fonction holomorphe dans la région fermée constituée de tous les points à l'intérieur et sur C sauf pour les points intérieurs à tout C_k , alors :

$$\int_C f(z)dz + \left(\sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz \right) = 0. \quad (3.6)$$

Corollaire 3.2

Soient C_1 et C_2 deux contours fermés simples orientés positivement tels que C_1 se trouve à l'intérieur de C_2 . Si une fonction f est holomorphe dans un domaine D qui contient à la fois C_1 et C_2 et tous les points entre eux, alors : $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$. (3.7)

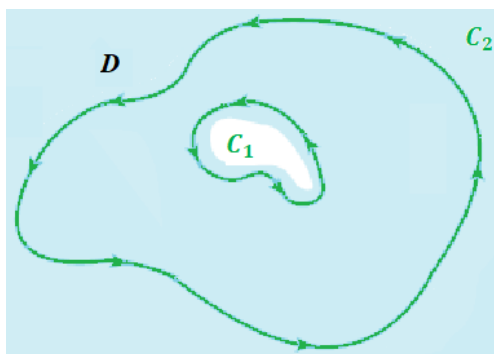


Figure 3.9 : Domaine D qui contient les contours fermés et simples C_1 et C_2 et la région se trouvant entre eux.

Exercice 3.13

Calculer $\int_C \frac{z^3}{(z-1)^2} dz$ où C est le contour orientée positivement décrit par le rectangle dont les côtés se trouvent le long des lignes $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$.

Solution

La fonction f présente un point singulier $z = 1$. Nous choisissons le cercle de centre $z = 1$ et de rayon $r = 1$ qui est décrit par :

$$C_1 : |z - 1| = 1 \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

On peut écrire l'équation paramétrique de C_1 de la manière suivante :

$$C_1 : z(t) = 1 + e^{it} \text{ où } t \in [0, 2\pi].$$

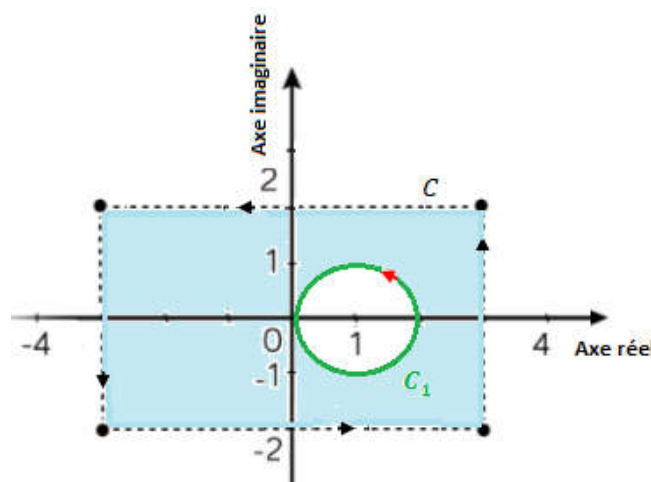


Figure 3.10 : Tracé du contour $C_1 : z(t) = 1 + e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$ et du rectangle décrit par $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$

Puisque f est holomorphe sur C et C_1 et dans la région comprise entre eux, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z^3}{(z-1)^2} dz &= \int_{C_1} \frac{z^3}{(z-1)^2} dz. \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^{it})^3}{(e^{it})^2} i e^{it} dt. \\ &= i \int_0^{2\pi} (1 + 3e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it}) e^{-it} dt. \\ &= i \int_0^{2\pi} (e^{-it} + 3 + 3e^{it} + e^{2it}) dt. \\ &= i \left[\frac{e^{-it}}{-i} + 3t + 3 \frac{e^{it}}{i} + \frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{2\pi}. \\ &= \left[-e^{-it} + 3it + 3e^{it} + \frac{1}{2}e^{2it} \right]_0^{2\pi}. \\ &= \left(-e^{-2\pi i} + 6i\pi + 3e^{2\pi i} + \frac{1}{2}e^{4\pi i} \right) - \left(-e^{-0} + 0 + 3e^0 + \frac{1}{2}e^0 \right). \\ &= 6i\pi. \end{aligned}$$

Exercice 3.14

Trouvez $\int_C f(z) dz$ si $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ et C est la frontière du carré défini par $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$ décrit dans le sens positif.

Solution

Nous remarquons que f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{i, -i\}$ et le point $z = i$ se trouve à l'intérieur de C tandis que le point $z = -i$ se trouve à l'extérieur de C .

Nous choisissons le cercle de centre $z = i$ et de rayon $r = 1/2$ qui est décrit par :

$$C_1 : |z - i| = \frac{1}{2} \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

On peut écrire l'équation paramétrique de C_1 de la manière suivante :

$$C_1 : z(t) = i + \frac{1}{2}e^{it} \text{ où } t \in [0, 2\pi].$$

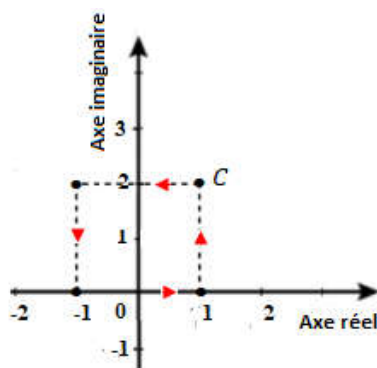


Figure 3.11 : Tracé de la frontière du carré défini par $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$

Remarquons que f est holomorphe sur C et C_1 et dans la zone comprise entre eux, alors on peut écrire : $\int_C \frac{2z}{z^2+1} dz = \int_{C_1} \frac{2z}{z^2+1} dz$.

$$\begin{aligned} &= \int_{C_1} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right) dz. \\ &= \int_{C_1} \left(\frac{1}{z+i} \right) dz + \int_{C_1} \left(\frac{1}{z-i} \right) dz. \end{aligned}$$

Or la fonction g tel que $g(z) = \frac{1}{z+i}$ est holomorphe sur C_1 et dans la zone enfermée par C_1 , alors on peut écrire $\int_{C_1} \left(\frac{1}{z+i} \right) dz = 0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{2z}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}} \right) i e^{it} dt. \\ &= i \int_0^{2\pi} dt. \\ &= i[t]_0^{2\pi}. \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

3.7. Formule de l'intégrale de Cauchy

Théorème 3.5

Soit f une fonction holomorphe partout à l'intérieur et sur un contour simple et fermé C pris dans le sens positif. Alors pour tout point z_0 intérieur à C on a : $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0)$. (3.8)

Preuve

Soient D un domaine simplement connexe et C un contour simple fermé dans D , et z_0 un point intérieur de C . De plus, soit C_1 un cercle de centre z_0 et de rayon r ($r \rightarrow 0$) pour que C_1 soit à l'intérieur de C .

Le cercle C_1 est décrit par $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z'(\theta) = rie^{i\theta}$.

Puisque la fonction $\frac{f(z)}{z-z_0}$ est holomorphe dans le domaine qui contient à la fois C et C_1 et tous les points entre eux, alors par l'application du corollaire 3.2 on a :

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta. \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.\end{aligned}$$

En faisant tendre $r \rightarrow 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + 0) d\theta. \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta. \\ &= if(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta. \\ &= if(z_0) [\theta]_0^{2\pi}. \\ &= 2\pi if(z_0).\end{aligned}$$

Et par conséquent on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0).$$

Exercice 3.15

Calculer l'intégrale $\int_C \frac{\sin(z)}{z+1} dz$, où C est la frontière du carré orientée positivement défini par $-3 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 3$.

Solution

Posant $g(z) = \frac{\sin(z)}{z+1}$ et $f(z) = \sin(z)$.

Nous remarquons que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ et le point $z = -1$ se trouve à l'intérieur de C . Alors que la fonction f est holomorphe à l'intérieur et sur C .

Pour $z_0 = -1$ et par l'application du théorème de la formule intégrale de Cauchy nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_C g(z) dz &= \int_C \frac{f(z)}{z+1} dz. \\ &= 2\pi i \cdot f(-1).\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\int_C \frac{\sin(z)}{z+1} dz = 2\pi i \cdot \sin(-1) = -2\pi i \cdot \sin(1).$$

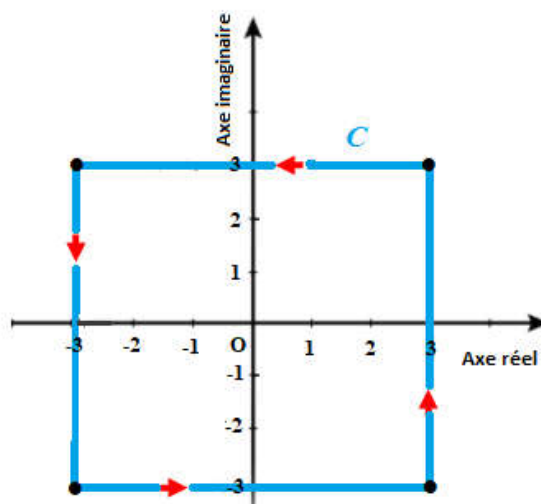


Figure 3.12 : Tracé du carré orienté positivement défini par $-3 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 3$

Exercice 3.16

Calculer l'intégrale $\int_C \frac{z}{(z^2+4)(z-1)} dz$, où C est le cercle orienté positivement défini par $|z-2| = 2$.

Solution

Posons $g(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z-1)}$ et écrivons la fonction g sous la forme $g(z) = \frac{f(z)}{z-1}$ où :

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4}.$$

Nous remarquons que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$ et les points $z = -2i$ et $z = 2i$ se trouvent à l'extérieur de C . Alors que la fonction f est holomorphe à l'intérieur et sur C .

Pour $z_0 = 1$ et d'après le théorème de la formule intégrale de Cauchy nous obtenons :

$$\int_C g(z) dz = \int_C \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i \cdot f(1).$$

$$\text{C'est-à-dire } \int_C \frac{z}{(z^2+4)(z-1)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{(1)^2+4} = \frac{2}{5}\pi i.$$

3.8. Dérivés des fonctions holomorphes

Théorème 3.6

Soit f une fonction holomorphe partout à l'intérieur et sur un contour simple et fermé C pris au sens positif. Alors pour tout point z_0 à l'intérieur de C toutes les dérivées $f^{(n)}(z_0)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ existent et $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ où $n = 0, 1, 2, \dots$ (3.9)

Preuve (Exercice)

Exercice 3.17

Calculer l'intégrale $\int_C g(z) dz$ où $g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(2z+1)^2(z-2)^2}$ et C est le cercle orienté positivement défini par $|z+1| = 2$.

Solution

On remarque que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C} - \left\{\frac{-1}{2}, 2\right\}$ et le point $z = \frac{-1}{2}$ se trouve à l'intérieur de C tandis que le point $z = 2$ se trouve à l'extérieur de C .

Nous avons $g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(2z+1)^2(z-2)^2} = \frac{\frac{\cos(\pi z)}{4(z-2)^2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{f(z)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$ où $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{4(z-2)^2}$, donc $g(z)$ est de la forme $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ où $z_0 = \frac{-1}{2}$ et $n = 1$.

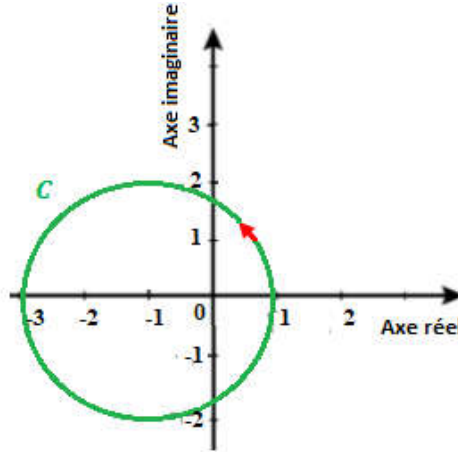


Figure 3.13 : Tracé du cercle orienté positivement défini par $|z + 1| = 2$

En appliquant le théorème précédent on trouve $\int_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+1)^2(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f' \left(\frac{-1}{2} \right)$.

La dérivée de la fonction f est $f'(z) = \frac{-4\pi(z-2)^2 \sin(\pi z) - 8(z-2)\cos(\pi z)}{16(z-2)^4} = \frac{-4\pi(z-2)\sin(\pi z) - 8\cos(\pi z)}{16(z-2)^3}$

et $f' \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{-4\pi \left(-\frac{1}{2} - 2 \right) \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 8\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{16 \left(-\frac{1}{2} - 2 \right)^3} = \frac{\pi}{25}$.

Donc $\int_C \frac{\cos(\pi z)}{(2z+1)^2(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \frac{\pi}{25} = \frac{2\pi^2 i}{25}$.

Corollaire 3.3

Si f est une fonction holomorphe en un point z_0 , alors ses dérivées de tous les ordres sont également des fonctions holomorphes en ce point z_0 .

3.9. Séries entières

Définition 3.6

Une série entière est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (3.10)$$

Où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$, z et z_0 sont deux nombres complexe.

Exercice 3.18

Montrer que si $|z| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Solution

Soit $S_N = z^0 + z^1 + z^2 + \dots + z^{N-1}$.

$$S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}.$$

En multipliant ces deux membres par z nous trouvons : $zS_N = z + z^2 + z^3 + \dots + z^N$.

$$\text{Et } zS_N - S_N = z^N - 1 \Leftrightarrow S_N(z - 1) = z^N - 1.$$

$$zS_N - S_N = z^N - 1 \Leftrightarrow S_N = \frac{z^N - 1}{z - 1}.$$

$$zS_N - S_N = z^N - 1 \Leftrightarrow S_N = \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

$$\text{Le reste } \rho_N \text{ vaut } \rho_N = S - S_N = \frac{1}{1 - z} - \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z^N}{1 - z}.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\rho_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{z^N}{1 - z} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|z|^N}{|1 - z|} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|z|^N}{|1 - z|} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln(|z|^N)}}{|1 - z|} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{N \ln(|z|)}}{|1 - z|}$$

Et puisque $|z| < 1$, alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\rho_N| = 0$$

3.9.1. Séries de Taylor

Théorème 3.7 (Théorème de Taylor)

Supposons qu'une fonction f soit holomorphe dans tout disque ouvert $|z - z_0| < R_0$. Alors, en chaque point z de ce disque, $f(z)$ a une représentation en série :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ où } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (3.11)$$

C'est-à-dire, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, converge vers $f(z)$ dans le disque $|z - z_0| < R_0$.

Exercice 3.19

Montrez que le développement en série de Maclaurin de $f(z) = e^z$ est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ où $|z| < \infty$.

Solution

Soit la fonction f définie par $f(z) = e^z$, $|z| < R_0$ et $z_0 = 0$. Puisque la fonction f est entière, alors $R_0 = \infty$.

$$\text{Essayons d'écrire } f(z) \text{ sous la forme } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n.$$

$$\text{Où : } f(0) = 1, f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1.$$

$$\text{Donc } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \text{ où } |z| < \infty.$$

Exercice 3.20

Trouver le développement en série de Taylor de $f(z) = \cos(z)$ autour de $z_0 = 0$.

Solution

Soit la fonction f définie par $f(z) = \cos(z)$ et $z_0 = 0$. Puisque la fonction f est holomorphe pour tout z dans $\mathbb{C}$.

$$\text{Essayons d'écrire } f(z) \text{ sous la forme } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \text{ où } |z| < \infty.$$

Où : $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$

Nous remarquons que :

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ et $f^{(2n+1)}(0) = 0$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

3.9.2. Séries de Laurent

Définition 3.7

Une série de Laurent est une série de la forme :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (3.12)$$

Où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des suites complexes à éléments dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.8

Une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ convergent.

Remarque 3.3

On peut considérer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ comme une série entière pour $w = (z - z_0)^{-1}$. Si elle converge pour $|w| < R_1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ converge pour $\frac{1}{|z - z_0|} < R_1$ ou $|z - z_0| > \frac{1}{R_1}$.

Par conséquent, si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge pour $|z - z_0| < R_2$ alors la série de Laurent converge pour $\frac{1}{R_1} < |z - z_0| < R_2$.

Exercice 3.21

Montrer que la série Laurent $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ converge pour $1 < |z| < 2$.

Solution

Considérons la série Laurent $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, qui peut être écrite de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ où } c_n = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & n \geq 0 \end{cases}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{2-z}$ converge lorsque $|z| < 2$.

Et la série $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right] = \frac{1}{z-1}$ converge lorsque $|z| > 1$.

Par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z}$ converge lorsque $1 < |z| < 2$.

Théorème 3.8 (Théorème de Laurent)

Supposons qu'une fonction f soit holomorphe dans tout le domaine circulaire $R_1 < |z - z_0| < R_2$ et soit C tout contour fermé simple orienté positivement autour de z_0 et se trouvant dans ce domaine. Alors, à chaque point z de ce domaine, $f(z)$ a la représentation en série suivante : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$. (3.13)

Preuve (Exercice)

Remarque 3.4

Si f est holomorphe à l'intérieur du disque $|z - z_0| < R_2$ alors $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ implique $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pour $n \geq 0$.

Pour $n < 0$, $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ est holomorphe dans et sur $\mathbb{C}$ et donc $c_n = 0$, pour $n \leq -1$. Par conséquent, si f est holomorphe à l'intérieur du disque $|z - z_0| < R_2$, alors la série de Laurent se réduit à la série de Taylor autour de z_0 .

Exercice 3.22

Trouvez le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^3}$ pour $0 < |z| < \infty$. Ensuite, utilisez-le pour calculer $\int_C \frac{\cosh(z)}{z^3} dz$, lorsque C est le cercle $|z| = 1$ orienté positivement.

Solution

Soit $f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^3}$ pour $0 < |z| < \infty$ avec $z_0 = 0$.

Essayons d'écrire $f(z)$ de la façon suivante :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

On sait que : $\cosh(z) = \cos(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (iz)^{2n}$ avec $|iz| < \infty$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (i^2)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \text{ où } |z| < \infty. \end{aligned}$$

Donc $f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n-3}$ où $0 < |z| < \infty$.

$$f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^3} = z^{-3} + \frac{1}{2!} z^{-1} + \frac{1}{4!} z + \frac{1}{6!} z^3 + \dots$$

Sachant que $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ et pour $n = -1$ on obtient $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ ce qui donne $\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \left(\frac{1}{2!}\right) = \pi i$.

3.9.2.1. Zéros des fonctions holomorphes

Définition 3.9

1. Un zéro d'une fonction f est un point z_0 où f est holomorphe et $f(z_0) = 0$.
2. Le point z_0 est dit zéro isolé s'il existe un disque ouvert $D_r(z_0)$ tel que z_0 est le seul zéro de f dans $D_r(z_0)$.

Définitions 3.10

1. z_0 est un zéro d'ordre m de f si f est holomorphe en z_0 et $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0$ mais $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
2. Une fonction f holomorphe dans $D_r(z_0) = \{z: |z - z_0| < r\}$ a un zéro d'ordre m au point $z = z_0$ si et seulement si sa série de Taylor donnée par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ a : $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$ et $c_m \neq 0$.
3. En supposant que z_0 est un zéro d'ordre m de f , alors dans un certain voisinage de z_0 on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^m [\sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z - z_0)^n]. \\ &= (z - z_0)^m g(z) \text{ où } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z - z_0)^n \text{ et } g(z_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.9.2.2. Points singuliers

Rappelons que le point z_0 est appelé point singulier, ou singularité, de la fonction complexe f si f n'est pas holomorphe au point z_0 , mais que tout voisinage $D_r(z_0)$ de z_0 contient au moins un point auquel f est holomorphe.

Définition 3.11

Un point singulier z_0 d'une fonction f est appelé point singulier isolé s'il existe un voisinage $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ dans lequel f est holomorphe.

Exemple 3.4

La fonction $f(z) = \frac{(z-1)}{z(z^2-1)}$ a trois points singuliers $z = 0$, $z = 1$ et $z = -1$. Ces points singuliers sont isolés.

Exemple 3.5

La fonction $f(z) = \text{Log}(z)$ a un point singulier en $z = 0$. Cependant cette singularité n'est pas isolée puisque chaque voisinage de $z = 0$ contient des points sur l'axe réel négatif où f ne parvient pas à être holomorphe.

3.9.2.3. Types de points singuliers isolés

Dans cette partie, nous classerons le point singulier isolé $z = z_0$ d'une fonction f selon la partie $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$ de la représentation en série de Laurent de f dans le domaine décrit par $0 < |z - z_0| < R$.

Définition 3.12

Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction f et soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ la représentation en série de Laurent de f dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$. Alors la partie $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ impliquant des puissances négatives de $z - z_0$, est appelée la partie principale de f en z_0 .

Définition 3.13

Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction f et soit :

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ la représentation en série de Laurent de f dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$.

1. Si $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$, alors z_0 est appelé point singulier apparent.
2. S'il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_m \neq 0$ et $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$ alors z_0 est appelé pôle d'ordre m car : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$. (3.15)
3. Si un nombre infini de coefficients b_n sont différents de zéro, alors z_0 est appelé un point singulier essentiel.

Exercice 3.23

Trouvez les points singuliers isolés de $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^5}$ et déterminez s'il s'agit de pôles apparents ou de points singuliers essentiels.

Solution

Soit la fonction f définie par : $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^5}$.

La fonction f est holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Le seul point singulier isolé est $z = 0$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ où } 0 < |z| < \infty.$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} \text{ où } |z| < \infty.$$

$$\text{Donc } f(z) = \frac{\cos(z)}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n-5}$$

$$\text{Et } f(z) = z^{-5} - \frac{1}{2} z^{-3} + \frac{1}{24} z^{-1} - \frac{1}{720} z + \dots$$

Donc $z = 0$ est un pôle d'ordre 5.

Exercice 3.24

Trouvez et classez les points singuliers isolés de $f(z) = \frac{\sin(z)-1}{2z-\pi}$.

Solution

Soit la fonction f définie par : $f(z) = \frac{\sin(z)-1}{2z-\pi}$.

La fonction f est holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Le seul point singulier isolé est $z = \frac{\pi}{2}$. Pour classer $z = \frac{\pi}{2}$ nous devons écrire $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^n$ où $0 < |z| < \infty$.

Remarquons que :

$$f(z) = \frac{\sin(z)-1}{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\sin(z) = \sin\left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} \text{ où } \left|z - \frac{\pi}{2}\right| < \infty.$$

Et

$$\begin{aligned}\sin(z) - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} - 1. \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots\right] - 1. \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{2 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} \text{ où } 0 < \left|z - \frac{\pi}{2}\right| < \infty. \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{6!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots \right].\end{aligned}$$

On peut donc dire que $z = \frac{\pi}{2}$ est un point singulier apparent.

Remarques 3.5

1. Un pôle d'ordre 1 est appelé un pôle simple.
2. Si une fonction f a un point singulier apparent en z_0 , alors :

$$\text{La fonction } F(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ c_0, & z = z_0 \end{cases} \text{ est holomorphe dans un voisinage de } z_0. \quad (3.16)$$

3. Dans tout voisinage d'un point singulier essentiel, une fonction prend toute valeur finie, à une exception possible, un nombre infini de fois.

Exercice 3.25

Montrez que $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}$ a un point singulier apparent en $z = 0$ et redéfinissez $f(z)$ pour qu'il soit holomorphe en $z = 0$.

Solution

Soit la fonction f définie par : $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}$.

La fonction f est holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Le point singulier isolé est $z = 0$.

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z)^{2n} \Rightarrow \cos(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z)^{2n}. \\ &\Rightarrow \cos(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z)^{2n} \text{ où } |z| < \infty.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\cos(z)-1}{z} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z)^{2n}}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z)^{2n-1} \text{ où } 0 < |z| < \infty. \\ f(z) &= -\frac{1}{2!} z + \frac{1}{4!} z^3 - \frac{1}{6!} z^5 + \dots.\end{aligned}$$

Donc le point $z = 0$ est un point singulier apparent.

On définit la nouvelle fonction $F(z)$ dont le domaine de définition serait $\mathbb{C}$ comme suit :

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

3.10. Prolongement analytique

Proposition 3.3

Soit D un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . Alors, les équivalences suivantes sont équivalentes :

1. f est identiquement nulle sur D ,
2. f est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide inclus dans D ,
3. Il existe $z_0 \in D$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(z_0) = 0$.

Preuve (Exercice)

Théorème 3.9 (Principe des zéros isolés)

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle, alors les zéros de f (i.e. les points en lesquels f s'annule) sont isolés.

Preuve (Exercice)

Théorème 3.10 (Principe du prolongement analytique)

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur $D \subset \mathbb{C}$, si $f = g$ sur un sous-ensemble de D ayant un point d'accumulation dans D alors $f = g$ sur D .

Preuve

L'ensemble des zéros de $f - g$ possède un point d'accumulation dans D et donc les zéros de $f - g$ ne sont pas isolés, comme $f - g$ est holomorphe et D un domaine, il résulte du principe des zéros isolés que $f = g$ sur D .

Définition 3.14

Soit f est une fonction holomorphe dans un ouvert D_1 du plan complexe et soit g une fonction holomorphe dans un ouvert D_2 du plan complexe.

Si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in (D_1 \cap D_2)$.

Alors : $g(z)$ est le prolongement analytique de $f(z)$ dans D_2 . De même, $f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans D_1 .

Exemple 3.6

Soit la fonction f définie par $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ dans le domaine $D_1 = \{z : |z - i| < 1\}$ et soit la fonction $f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ dans le domaine $D_2 = \{z : |z - i| < \sqrt{2}\}$.

On remarque que : $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

Et $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

$$f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = \frac{1}{1-i} \left(\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

On remarque que f et g sont deux fonctions holomorphes sur les domaines ouverts D_1 et D_2 du plan complexe respectivement.

Donc on peut dire que $f_1(z)$ est le prolongement analytique de $f_2(z)$ dans D_1 . De même, $f_2(z)$ est le prolongement analytique de $f_1(z)$ dans D_2 .

Remarque 3.6

Le prolongement analytique de $f(z)$ s'il existe est unique.

Chapitre 4

Théorèmes des résidus et applications au calcul d'intégrales

4.1. Introduction

Nous commençons dans ce chapitre par la définition de l'importante formule des résidus et les différentes méthodes de calcul des résidus aux pôles. On montre aussi comment les extensions de Laurent peuvent donner des informations utiles.

Nous citons quelques applications importantes de la théorie des résidus. Ces applications incluent l'évaluation de certains types d'intégrales définies et impropres apparaissant dans l'analyse réelle telles que les intégrales de fonctions rationnelles, les intégrales de fonctions trigonométriques, les intégrales de fonctions multiformes et la fonction gamma. Le théorème des résidus fournit une méthode simple et parfois la seule pour calculer ces intégrales.

4.2. Théorème des résidus

Soit f une fonction qui a un point singulier isolé en z_0 . Alors il y a un nombre R tel que f est holomorphe dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$. Par conséquent f a une représentation en série de Laurent dans ce domaine selon :

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ où $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ et C est tout contour simple et fermé orienté positivement autour de z_0 qui se trouve dans le domaine : $0 < |z - z_0| < R$.

Lorsque $n = -1$, cette expression pour c_n peut être écrite comme : $\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$.

Définition 4.1

Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction f et soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ la représentation en série de Laurent de f dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$.

Alors c_{-1} est appelé le résidu de f en z_0 et est noté :

$Res_{z=z_0} f(z)$ ou $Res(f, z_0)$

Où :

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

En effet :

Selon le développement de Laurent, la fonction f aura la représentation suivante dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$.

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

Et en utilisant les formules d'intégration de Cauchy, on trouve après intégration de la relation précédente :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = 0 + 0 + 0 + \dots + b_1 + 0 + 0 + \dots \text{ c'est-à-dire que } \text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = c_{-1}.$$

Remarque 4.1

Pour un point singulier apparent le développement de Laurent est de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ pour } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Donc $b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Exercice 4.1

Soit la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$. Trouver $\text{Res}_{z=0} f(z)$.

Solution 4.1

$$\text{Soit } f(z) = \frac{1}{z(z-2)}.$$

La fonction f a deux points singuliers $z = 0$ et $z = 2$. Ces points singuliers sont isolés.

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1}.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ où } 0 < |z| < R.$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)} = \frac{-1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \text{ où } \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

$$f(z) = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} \text{ où } 0 < |z| < 2.$$

$$f(z) = - \left[\frac{z^{-1}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \dots \right] = - \frac{z^{-1}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \dots$$

$$\text{Donc } \text{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

4.3 Résidus aux pôles

Proposition 4.1

1. Si $f(z)$ a un pôle simple en z_0 , alors :

$$b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4.1)$$

2. Si $f(z)$ a un pôle d'ordre m en z_0 , alors :

$$b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (4.2)$$

Preuve

1) Supposons, pour simplifier, que $f(z)$ a un pôle simple en z_0 . Alors le développement en série de Laurent de $f(z)$ autour de z_0 a la forme suivante :

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \text{ où } b_1 = c_{-1}.$$

D'où le résidu peut être calculé par :

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left[\frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \right]. \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} [b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots]. \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} [b_1] + \lim_{z \rightarrow z_0} [a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots]. \\
 &= b_1 + 0. \\
 &= b_1.
 \end{aligned}$$

2) Supposons que $f(z)$ a un pôle d'ordre m en z_0 . Alors le développement en série de Laurent de $f(z)$ autour de z_0 a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \\
 &= \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \text{ où } b_m \neq 0.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Multiplions l'équation (4.3) par $(z - z_0)^m$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 (z - z_0)^m f(z) &= b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \\
 &+ a_1(z - z_0)^{m+1} + \dots
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

D'où en prenant des dérivées $(m - 1)$ de l'équation (4.4), on a :

$$\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = b_1(m - 1)! + a_0 m! (z - z_0) + a_1(m + 1)! (z - z_0)^2 + \dots \quad (4.5)$$

Finalement, si on calcule la limite des deux termes au voisinage de z_0 de l'équation (4.5), on obtient $b_1(m - 1)!$, ce qui donne alors une formule pour le résidu de f à un pôle d'ordre m :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = b_1(m - 1)! \Rightarrow b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Exercice 4.2

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

Solution

La fonction f possède un point singulier $z = 1$ qui représente un pôle d'ordre deux pour f , alors on peut écrire :

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(2-1)}}{dz^{2-1}} \left[(z - 1)^2 \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} \right].$$

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z - 1)^2 \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} \right].$$

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [e^{2z}].$$

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [e^{2z}].$$

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = 2e^2 = b_1.$$

Nous pouvons trouver $\text{Res}_{z=1} f(z) = b_1$ par la méthode suivante :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} e^{2e^{2(z-1)}}.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} e^2 \left[1 + 2(z-1) + \frac{4}{2!} (z-1)^2 + \frac{8}{3!} (z-1)^3 + \dots \right].$$

$$f(z) = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + 2e^2 + \frac{8}{6} (z-1) + \dots.$$

Donc $b_1 = 2e^2$.

Remarques 4.2

1. Si la fonction f a un pôle simple en z_0 et que la fonction g est analytique en z_0 , alors :
- $$\operatorname{Res}_{z=z_0}(f(z)g(z)) = g(z_0)\operatorname{Res}_{z=z_0}f(z). \quad (4.6)$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{1}{g(z_0)}\operatorname{Res}_{z=z_0}f(z). \quad (4.7)$$

2. Si la fonction g a un simple zéro en z_0 alors $\frac{1}{g}$ a un simple pôle en z_0 , alors :

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\left(\frac{1}{g(z)}\right) = \frac{1}{g'(z_0)}. \quad (4.8)$$

Exercice 4.3

Trouvez tous les pôles et leurs résidus de $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$.

Solution

Les pôles de $f(z)$ sont les zéros de $\sin(z)$, à savoir $z_0 = n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Posons $g(z) = \sin(z)$ dont la dérivée est $g'(z) = \cos(z)$.

Donc $\operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{\sin(z)}\right) = \frac{1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n$.

4.3.1. Cas de fonctions rationnelles

Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P(z)$ et $Q(z)$ deux fonctions holomorphes en z_0 .

Supposons que $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$.

Puisque $Q'(z_0) \neq 0$, $Q(z)$ a un simple zéro à z_0 . Donc $\frac{1}{Q(z)}$ a un pôle simple en z_0 , $Q(z_0) \neq 0$ et :

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\left(\frac{1}{Q(z)}\right) = \frac{1}{Q'(z_0)}.$$

Puisque $P(z_0) \neq 0$, on a :

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) = P(z_0)\operatorname{Res}_{z=z_0}\left(\frac{1}{Q(z)}\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (4.9)$$

Evidemment, si le développement de Laurent donne une série infinie pour les degrés négatifs, le calcul du résidu en ce point (dit alors pôle ou singularité essentielle) ne pourra se faire que par le calcul du coefficient c_{-1} de la série de Laurent.

4.4. Théorème des résidus de Cauchy

Théorème 4.1

Soit C un contour fermé simple orienté positivement. Si une fonction f est holomorphe à l'intérieur et sur C sauf pour un nombre fini de points singuliers z_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ à l'intérieur de C , alors $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k}f(z)$.

$$(4.10)$$

Preuve (Exercice)

Puisque les points $z_1, z_2, \dots, z_n$ se trouvent à l'intérieur du contour simple et fermé alors nous pouvons trouver de petits cercles C_n orientés positivement qui sont intérieurs à C et qui sont mutuellement disjoints (Figure 4.1).

Les cercles C_n , avec le contour fermé simple C , forment la frontière d'une région fermée dans laquelle f est holomorphe et dont l'intérieur est un domaine multiplement connexe constitué des points à l'intérieur de C et extérieurs à chaque C_n .

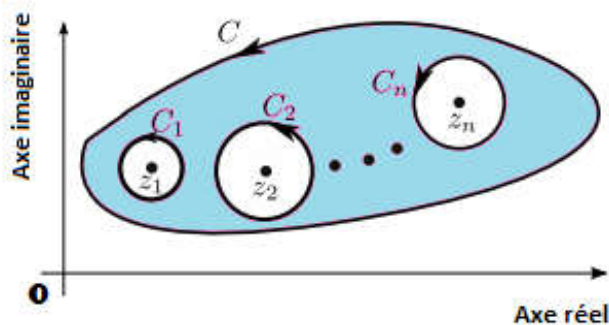


Figure 4.1 : Illustration du domaine et contour pour le théorème des résidus de Cauchy

Ainsi, d'après l'application du théorème de Cauchy-Goursat à de tels domaines nous aurons :

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz = 0.$$

$$\text{Ce qui implique } \int_C f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz - \dots - \int_{C_n} f(z)dz = 0.$$

$$\text{Donc : } \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

$$\text{Et comme } \int_{C_n} f(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=z_n} f(z).$$

Il résulte :

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=z_2} f(z) + \dots + 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=z_n} f(z). \\ &= 2\pi i \left(\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z) + \dots + \text{Res}_{z=z_n} f(z) \right). \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \end{aligned}$$

Exercice 4.4

Calculer $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, où C est le cercle $|z| = 1$ orienté positivement.

Solution

Soit $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Le contour C est le cercle $|z| = 1$ orienté positivement.

La fonction f est holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. En particulier f est holomorphe en $0 < |z| \leq 1$. Le seul point singulier à l'intérieur de C est $z = 0$.

Par l'application du théorème des résidus on a :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}_{z=0} f(z).$$

Et $\text{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1}$.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ où $0 < |z| < \infty$.

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ où $|z| < \infty$.

Donc $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$ où $|z| < \infty$.

Et $f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-2} n!}$ où $0 < |z| < \infty$.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z^{-2}}{4!} + \dots$.

Donc $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ et $\int_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi i}{3}$.

Exercice 4.5

Calculer $\int_C \frac{z+2}{z(z+1)} dz$, où C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement.

Solution

Soit $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)}$. Le contour C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement. Nous remarquons que f est une fonction rationnelle ayant un zéro $z = -2$ et deux pôles $z = 0$ et $z = -1$.

La fonction f est holomorphe en tout point $z \in \mathbb{C} - \{0, -1\}$. Les deux points singuliers isolés se trouvent à l'intérieur du contour C .

On a : $\int_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=-1} f(z)]$.

Le calcul des résidus pourra se faire par deux méthodes différentes à savoir l'application du cas de fonctions rationnelles présentant des pôles simples ou multiples ou par l'application du théorème 4.1.

Par l'application de la définition 4.1 et puisque la fonction f a un point singulier isolé en $z = 0$. Par conséquent f a une représentation en série de Laurent donnée par $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ dans le domaine $0 < |z| < 1$ (Domaine où la fonction f est holomorphe).

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+2}{z(z+1)} \\ &= \frac{z+2}{z} \cdot \frac{1}{z+1} \\ &= \frac{z+2}{z} \cdot \frac{1}{1-(-z)} \\ &= \frac{z+2}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ où } |z| < 1. \\ &= \left(1 + \frac{2}{z}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1} \\ &= [1 - z + z^2 - z^3 + \dots] + 2[z^{-1} - 1 + z - z^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Donc $\text{Res}_{z=0} f(z) = 2$.

Selon la définition 4.1 et puisque la fonction f admet un point singulier isolé en $z = -1$. Par conséquent f a un développement en série de Laurent donnée par $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n$ dans le domaine $0 < |z+1| < 1$ (Domaine où la fonction f est holomorphe).

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+2}{z(z+1)} \\ &= \frac{z+2}{z+1} \cdot \frac{1}{(z+1)-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{1}{z+1}\right) \cdot \frac{-1}{1-(z+1)} \\
 &= -\left(1 + \frac{1}{z+1}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \text{ où } |z+1| < 1. \\
 &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{n-1} \\
 &= -[1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots] - [(z+1)^{-1} + 1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots].
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Res}_{z=-1} f(z) = -1$.

Et finalement on a : $\int_C f(z) dz = 2\pi i [2 - 1] = 2\pi i$.

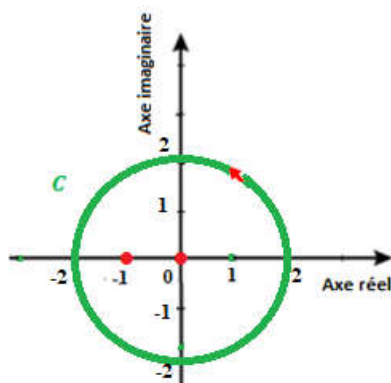


Figure 4.2 : Tracé du cercle orienté positivement défini par $|z| = 2$ et des points singuliers $z = 0, z = -1$ (Exercice 4.5)

Exercice 4.6

Calculer $\int_C \frac{ze^{isin(z)}}{4z^2 - \pi} dz$, où C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement.

Solution

Soit $f(z) = \frac{ze^{isin(z)}}{4z^2 - \pi}$.

Le contour C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement.

La fonction f est holomorphe en tout point $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Ces deux points singuliers se trouvent à l'intérieur du contour C .

Par conséquent :

$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) + \text{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) \right]$. Puisque $z = \pm \frac{\pi}{2}$ sont des zéros pour $Q(z) = 4z^2 - \pi$ et ne sont pas des zéros pour $P(z) = ze^{isin(z)}$.

Ce sont des pôles simples pour $\frac{ze^{isin(z)}}{4z^2 - \pi}$.

Sachant que : $Q'(z) = 8z$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) &= \frac{\frac{\pi}{2} e^{isin(-\frac{\pi}{2})}}{8(-\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{-i}}{8} \\
 &= \frac{\frac{\pi}{2} e^{isin(\frac{\pi}{2})}}{8(\frac{\pi}{2})} = \frac{e^i}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_C f(z) dz = \int_C \frac{ze^{isin(z)}}{4z^2 - \pi} dz = 2\pi i \left[\frac{e^{-i}}{8} + \frac{e^i}{8} \right] = \frac{2\pi i}{4} \left[\frac{e^i + e^{-i}}{2} \right] = \frac{\pi i}{2} \cos(i).$$

4.5. Résidu à l'infini

Le résidu à l'infini est un outil astucieux qui peut parfois nous permettre de remplacer le calcul de nombreux résidus par le calcul d'un seul résidu.

Définition 4.2

Soit f une fonction holomorphe sur et en dehors du cercle C dont le centre est un point sur le plan complexe et dont le rayon est suffisamment grand. Nous définissons le résidu à l'infini $Res_{z=\infty} f(z)$ par la relation suivante:

$$Res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = -b_1.$$

On note que b_1 représente le coefficient du terme $\frac{1}{z}$ dans le développement en série de Laurent de la fonction f à l'infini.

Proposition 4.2

Si la fonction f est holomorphe pour tous points du plan complexe à l'exception d'un nombre fini de points singuliers qui se trouvent à l'intérieur du cercle dont le centre est l'origine et le rayon est suffisamment grand pour que tous les points y tombent à l'intérieur. Alors :

$$\sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f(z) + Res_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (4.11)$$

Preuve

D'après théorème des résidus de Cauchy on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f(z). \quad (4.12)$$

$$\text{Et } Res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (4.13)$$

$$\text{Ce qui implique que } -Res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (4.14)$$

En comparant les équations (4.12) et (4.14) nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f(z) = -Res_{z=\infty} f(z), \text{ ce qui donne } \sum_{k=1}^n Res_{z=z_k} f(z) + Res_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Théorème 4.2

Soit C un contour fermé simple orienté positivement. Si une fonction f est holomorphe partout dans $\mathbb{C}$ à l'exception d'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur de C , alors

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i Res_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (4.15)$$

Preuve(Exercice)

Exercice 4.7

Calculer $\int_C \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} dz$, où C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement.

Solution

Soit $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$. Le contour C est le cercle $|z| = 2$ orienté positivement.

La fonction f est holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C} - \{1, -i, i\}$. Les points singuliers $z = 1$, $z = -i$ et $z = i$ se trouvent à l'intérieur de C .

Par l'application du théorème des résidus on peut avoir :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i [Res_{z=1}f(z) + Res_{z=i}f(z) + Res_{z=-i}f(z)].$$

Ou par l'application du théorème 4.2 du résidu à l'infini on aura :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right)} \right] = \frac{-z}{(z-1)(z^2+1)}.$$

$$\text{Cherchons maintenant } Res_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ où } 0 < |z| < 1.$$

Remarquons que $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe au point $z = 0$ ce qui implique que

$$Res_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right] = 0, \text{ donc } \int_C f(z)dz = 0.$$

4.6. Lemmes de Jordan

Dans l'évaluation des intégrales, il est parfois nécessaire d'utiliser les lemmes de Jordan. Cependant, pour mener à bien les calculs il est indispensable de connaître le comportement de $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ où Γ_R est un arc de cercle d'ouverture constante et $\rightarrow \infty$.

Lemme 4.1 (Lemme 1 de Jordan)

Soit a un pôle simple et soit Γ_R un arc de cercle de centre a et d'ouverture $\alpha = \theta_2 - \theta_1$, alors : $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = i \alpha Res_{z=a} f(z)$. (4.16)

Lemme 4.2 (Lemme 2 de Jordan)

Soit Γ_R un arc de cercle de centre a et de rayon R .

Si $\lim_{R \rightarrow 0} |z| |f(z)| = 0$ alors $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$.
 resp $R \rightarrow \infty$ resp $R \rightarrow \infty$ (4.17)

Lemme 4.3 (Lemme 3 de Jordan)

Si $|f(z)| \leq M_R$ sur un demi cercle C_R centré à l'origine et de rayon R dans un demi plan et si $M_R \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$, alors, pour tout $m > 0$,

$$a) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0. \text{ Si } C_R \text{ est dans le demi-plan supérieur } Im z > 0. \quad (4.18)$$

$$b) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{-imz} dz = 0. \text{ Si } C_R \text{ est dans le demi-plan inférieur } Im z < 0. \quad (4.19)$$

$$c) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{-mz} dz = 0. \text{ Si } C_R \text{ est dans le demi-plan droit } Re z > 0. \quad (4.20)$$

$$d) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{mz} dz = 0. \text{ Si } C_R \text{ est dans le demi-plan gauche } Re z < 0. \quad (4.21)$$

4.7. Application du théorème des résidus au calcul intégral

4.7.1. Intégrales trigonométriques

La première des applications du théorème des résidus est le calcul d'intégrales trigonométriques de la forme :

$$\int_0^{2\pi} H(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta, \quad (4.22)$$

où H est une fonction rationnelle de ses arguments et telle qu'elle est définie dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Proposition 4.3

$$\int_0^{2\pi} H(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Où $f(z) = \frac{1}{iz} H\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ et $|z_k| < 1$. (4.23)

Preuve

Nous voulons transformer cela en une intégrale de contour complexe afin de pouvoir appliquer le théorème des résidus. Une façon de procéder est la suivante.

Pour cela nous considérons le contour Γ paramétré par $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ qui représente le cercle unité parcouru une fois au sens positif.

On a : $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Et $\frac{1}{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

Par conséquent, nous pouvons résoudre pour $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en termes de z et $\frac{1}{z}$ comme suit:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

De même, $dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, d'où $d\theta = \frac{1}{iz} dz$. En mettant tout cela ensemble, nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} H(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_{\Gamma} \frac{1}{iz} H\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right) dz.$$

$$\int_0^{2\pi} H(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_{\Gamma} \frac{1}{iz} H\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz. \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) est l'intégrale de contour d'une fonction rationnelle de z , et peut donc être calculée en utilisant le théorème des résidus:

$$\int_0^{2\pi} H(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \text{ où } |z_k| < 1.$$

Où $f(z)$ est la fonction rationnelle $f(z) = \frac{1}{iz} H\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ et z_k sont les pôles de la fraction rationnelle de $f(z)$ qui sont à l'intérieur du cercle $|z| = 1$. Cette situation est illustrée par la figure 4.3.

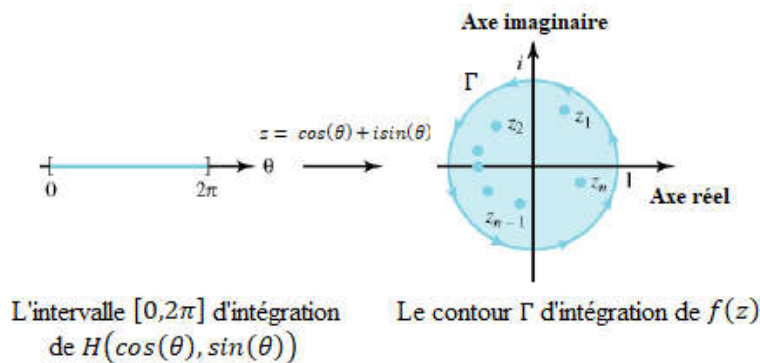


Figure 4.3 : Le changement des variables d'une intégrale définie sur $[0, 2\pi]$ à une intégrale de contour autour de Γ .

Exercice 4.8

Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Solution

En posant $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $d\theta = \frac{1}{iz} dz$ nous obtenons $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$.

Nous définissons le contour Γ dont l'équation est : $|z| = 1$.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(\theta)} d\theta &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{5+4\left(\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)} \right] \frac{1}{iz} dz. \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{5iz+2z^2-2} dz. \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz. \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \text{ où } f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2} \text{ et } |z_k| < 1. \end{aligned}$$

La fonction f admet deux points singuliers ($z_1 = -2i, z_2 = -\frac{1}{2}i$) qui représentent les solutions de l'équation $2z^2 + 5iz - 2 = 0$.

Nous remarquons que le point z_1 se trouve à l'extérieur du cercle unitaire Γ , alors que le point z_2 est à l'intérieur de Γ .

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(\theta)} d\theta &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_2} f(z). \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=-\frac{1}{2}i} f(z). \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{3}i\right). \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4.9

Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ où $|a| < 1$.

Solution

Considérons le cercle unitaire C parcouru au sens positif et qui est défini par la paramétrisation $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ce qui nous donne les différentiels symboliques suivants :

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \text{ et } d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

En remplaçant dans l'intégrale donné on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos(\theta)} d\theta &= \int_C \left[\frac{1}{1+a\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} \right] \frac{1}{iz} dz. \\ &= \int_C \frac{2}{2iz+iaz^2+ia} dz. \\ &= \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{az^2+2z+a} dz. \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{i} (2\pi i) \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \text{ où } f(z) = \frac{1}{az^2+2z+a} \text{ et } |z_k| < 1.$$

L'équation $2z^2 + 5iz - 2 = 0$ admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ et } z_2 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Donc la fonction f admet deux points singuliers z_1 et z_2 .

Le point z_1 se trouve à l'extérieur du cercle unitaire C , alors que le point z_2 est à l'intérieur de Γ .

En effet :

$$|z_1| = \left| \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right| = \frac{|-1-\sqrt{1-a^2}|}{|a|} = \frac{|1+\sqrt{1-a^2}|}{|a|} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|} = \frac{1}{|a|} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} > 1.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = \frac{1-(1-a^2)}{a^2} = 1.$$

D'où :

$$|z_2| = \frac{1}{|z_1|} < 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos(\theta)} d\theta &= \frac{2}{i} (2\pi i) \text{Res}_{z=z_2} f(z). \\ &= \frac{2}{i} (2\pi i) \left[\frac{1}{2az+2} \right]_{z=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}} \\ &= \frac{2}{i} (2\pi i) \left(\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \right). \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}$$

4.7.2. Intégrales de fractions rationnelles de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Définition 4.3 (Valeur principale de Cauchy - v. p.)

Soit f une fonction à valeur réelle continue pour tout x . La valeur principale de Cauchy (v. p.) de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est définie par :

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx. \quad (4.25)$$

A condition que la limite existe.

Remarque 4.3

Pour toute fonction paire, on a la propriété suivante :

$$\int_0^R f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x)dx \Rightarrow \int_{-R}^R f(x)dx = 2 \int_0^R f(x)dx. \quad (4.26)$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ont un processus général à évaluer. Pour cela on considère le contour C , qui se compose du segment de droite sur l'axe réel à partir de $[-R, R]$ et du contour C_R défini par l'équation $z = Re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$.

Puis par l'application du théorème des résidus on écrit :

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z)dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Que l'on peut être écrire de la façon suivante :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz. \quad (4.28)$$

Exercice 4.10

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Solution

Soit la fonction f définie pour tout nombre complexe z par $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$.

La fonction f présente deux pôles d'ordre 2 aux points $z_1 = -i$ et $z_2 = i$. Le point $z_2 = i$ est la seule singularité de f dans le demi-plan supérieur.

Pour cela on considère un contour C , qui se compose du segment de droite sur l'axe réel à partir de $[-R, R]$ et du contour C_R qui représente la partie supérieure du demi-cercle défini par l'équation $z = Re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$.

Par l'application du théorème des résidus de Cauchy on a :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z).$$

En utilisant les propriétés des intégrales et la définition de la valeur principale de Cauchy (v.p.) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z) \Rightarrow \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z). \\ &\Rightarrow 2 \int_0^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z). \\ &\Rightarrow \int_0^R f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{C_R} f(z) dz + \pi i \text{Res}_{z=i} f(z). \end{aligned}$$

Calculons le résidu au point $z_2 = i$:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]. \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{-2}{(z+i)^3} \right]. \\ &= \frac{-2}{(2i)^3}. \\ &= \frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

En remplaçant le résidu calculé on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_{C_R} f(z) dz + \pi i \frac{1}{4i}. \\ &= -\frac{1}{2} \int_{C_R} f(z) dz + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Montrons que $\int_{C_R} f(z) dz$ tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini :

Pour $z \in C_R$ on a,

$$\begin{aligned} |z^2 + 1| &\geq |z^2| - 1 = R^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1}. \\ &\Rightarrow \frac{1}{(z^2+1)^2} \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \text{ où } M = \frac{1}{(R^2-1)^2} \text{ et } L = \pi R. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\left| \int_{C_R} \int_0^R \frac{1}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \pi R.$$

$$\text{Mais } \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \right] = 0.$$

Alors $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = 0 + \frac{\pi}{4}$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 4.4

Soit f une application holomorphe sur D sauf en un nombre fini de points non réels. Supposons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et que $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (4.29)$$

Preuve

Les singularités de la fonction f sont dans le disque ouvert $D(0; R)$ pour $R > 0$ assez grand.

Pour un tel R , il vient d'après le théorème des résidus que :

$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)$ où γ_R est le demi-cercle supérieur décrit dans le sens direct.

L'estimation standard des intégrales complexes donne :

$$\left| \int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta \right| \leq \pi R |f|_{\gamma_R}.$$

L'hypothèse $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ entraîne : $\lim_{z \rightarrow \infty} R|f|_{\gamma_R} = 0$. Et par suite le résultat.

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels de degré m et n , respectivement, alors $f(x)$ est appelée une fonction rationnelle. Nous montrons maintenant comment le théorème des résidus peut être utilisé pour obtenir la valeur principale de Cauchy de l'intégrale de $f(x)$ sur $(-\infty, +\infty)$.

Nous supposons que :

- 1) $n \geq m + 2$.
- 2) $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Sous ces conditions si $z_1, z_2, \dots, z_n$ est l'ensemble des zéros du polynôme $Q(x)$ qui sont dans le demi-plan supérieur, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

On considère un contour fermé simple C constitué du segment de l'axe réel allant de $z = -R$ à $z = +R$ et de la moitié supérieure du cercle Γ_R , centré à l'origine, de rayon R assez grand pour entourer tous les points singuliers $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de f ayant une partie imaginaire $\text{Im}(z_k) \geq 0$ où $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

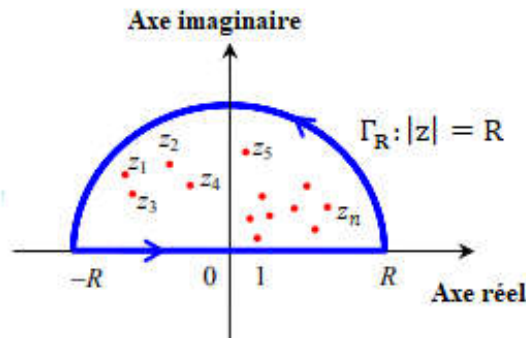


Figure 4.4 : Contour pour évaluer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Par l'application du théorème des résidus on a :

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^R f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \text{ où } \text{Im}(z_k) \geq 0. \quad (4.30)$$

Montrons par l'application du Lemme de Jordan que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |zf(z)| = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left| z \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \lim_{z \rightarrow +\infty} |z| \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Exercice 4.11

$$\text{Calculer } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^3} dx.$$

Solution

$$\text{Posons } f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^3} = \frac{1}{(z+2i)^3(z-2i)^3}.$$

La fonction f présente deux pôles d'ordre 3 aux points $z_1 = -2i$ et $z_2 = 2i$. Le point $z_2 = 2i$ est la seule singularité de f dans le demi-plan supérieur. Calculons le résidu au point $z_2 = 2i$.

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=2i} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^2}{dz^2} [(z-2i)^3 f(z)]. \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{(z+2i)^3} \right]. \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{-3}{(z+2i)^4} \right]. \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{12}{(z+2i)^5} \right]. \\ &= -\frac{3i}{512}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = 2\pi i \text{Res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{3i}{512} \right) = \frac{3\pi}{256}.$$

Exercice 4.12

$$\text{Calculer } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx.$$

Solution

$$\text{Pour } x = z \text{ nous obtenons } f(z) = \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}.$$

La fonction f admet quatre points singuliers $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2i$ et $z_4 = 2i$ qui représentent les solutions de l'équation $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$. Seuls $z_2 = i$ et $z_4 = 2i$ ont des parties imaginaires positives. Elles appartiennent au contour C constitué de : $[-R, +R] + \Gamma_R$.

Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \text{Res}_{z=2i} f(z).$$

$$\text{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z^2-1}{(z+i)(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z^2 - 1}{(z+i)(z-i)(z+2i)} = -\frac{3}{4}i.$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2}i\right) + 2\pi i \left(-\frac{3}{4}i\right) = -\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

4.7.3. Intégrales de fonctions multiformes

La difficulté dans le cas des fonctions multivalentes réside dans la possibilité qu'ont ces fonctions de sauter d'une branche à l'autre, suivant le parcours effectué. Par exemple si la variable z a décrit un cercle C de centre O et de rayon R dans le sens positif, son argument augmente de 2π et la fonction change de branche. De ce fait elle change de valeur et les deux intégrales le long de parcours infiniment proches ne se compenseront pas forcément, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Exercice 4.13

Calculer l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x} dx$ pour $-1 < a < 0$.

Solution

La fonction z^a est clairement multiforme car :

$$z = r e^{i(\theta + 2k\pi)} \Rightarrow z^a = r^a e^{i(\theta a + 2k\pi a)}$$

Pour rendre cette fonction univalente, on peut choisir la coupure de Riemann définie par demi axe réel positif. Dans ce cas on choisit un contour d'intégration longeant le demi axe réel sur lequel on cherche à calculer l'intégrale.

Pour fermer le contour on parcourt dans le sens horaire le cercle $\Gamma_R = C(O, R)$, avec $R > 1$, puis le demi axe réel positif parcouru dans le sens décroissant et, dans le sens anti-horaire le cercle $\gamma_r = C(O, r)$, avec $r < 1$.

Ce contour est représenté par la figure 4.5. On note $C = [AB] \cup \Gamma_R \cup (-[A'B']) \cup (-\gamma_r)$

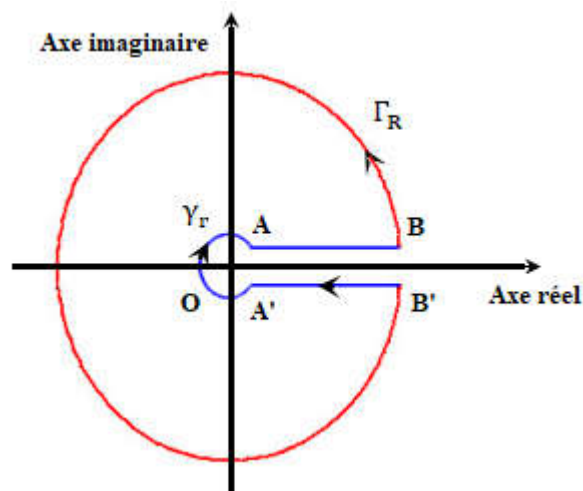


Figure 4.5 : Contour d'intégration "Trou de serrure"

La fonction intégrée a deux pôles en $z = 0$ et en $z = -1$. Seul le pôle en $z = -1$ est dans le contour d'intégration. Par l'application du théorème des résidus on trouve :

$$\int_C \frac{z^a}{1+z} dz = 2\pi i \text{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i e^{i\pi a}.$$

Sur le segment $[AB]$, on a $z = x$ et $dz = dx$. Sur le segment $[A'B']$, on a $z = xe^{i2\theta}$ et $dz = dx$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x^a}{1+x} dx &= \int_r^R \frac{x^a}{1+x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{x^a}{1+x} dx - \int_r^R \frac{x^a e^{i2\pi a}}{1+x} dx - \int_{\gamma_r} \frac{x^a}{1+x} dx. \\ &= (1 - e^{2i\pi a}) \int_r^R \frac{x^a}{1+x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{x^a}{1+x} dx - \int_{\gamma_r} \frac{x^a}{1+x} dx. \end{aligned}$$

On cherche alors à évaluer la contribution des deux cercles, pour cela on utilise l'inégalité fondamentale pour majorer ces intégrales

$$\text{Sur le cercle } \gamma_r = C(O, r), \text{ on a : } \left| \frac{r^a e^{i\theta a}}{1+re^{i\theta}} \right| \leq \frac{r^a}{1-r}. \quad (4.31)$$

L'inégalité fondamentale donne donc :

$$\left| \int_{C(O,r)} \frac{x^a}{1+x} dx \right| \leq \frac{2\pi r^{a+1}}{1-r} \rightarrow 0 \text{ pour } r \rightarrow 0. \quad (4.32)$$

Autrement dit, l'intégrale sur γ_r est nulle lorsque r tend vers 0.

$$\text{Sur le cercle } \Gamma_R = C(O, R), \text{ on a : } \left| \frac{R^a e^{i\theta a}}{1+Re^{i\theta}} \right| \leq \frac{R^a}{R-1}. \quad (4.33)$$

L'inégalité fondamentale donne donc :

$$\left| \int_{C(O,R)} \frac{x^a}{1+x} dx \right| \leq \frac{2\pi R^{a+1}}{R-1} \rightarrow 0 \text{ pour } R \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Autrement dit, l'intégrale sur Γ_R est nulle lorsque R tend vers ∞ .

Finalement, en passant aux limites : $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, l'intégrale sur le contour C devient :

$$\int_C \frac{x^a}{1+x} dx = (1 - e^{2i\pi a}) \int_r^R \frac{x^a}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi a}.$$

Ce qui donne le résultat final :

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{i\pi a}}{(1 - e^{2i\pi a})} = \frac{2\pi i}{(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a})} = -\frac{\pi}{\left(\frac{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}}{2i}\right)} = -\frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

4.8. Formule des compléments

Définition 4.4

La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, se définit par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ où } \text{Re}(z) > 0 \text{ et } t^{z-1} = e^{(z-1)\ln(t)}, t \in]0, +\infty[. \quad (4.35)$$

Proposition 4.5

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (4.36)$$

Preuve

Soit $\alpha \in]0, 1[$. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt\right) \left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds\right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t-s} dt ds. \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(s+t)} ds \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On appliquant le changement de variables suivant : $\begin{cases} u = s + t \\ v = \frac{s}{t} \end{cases}$, dont le jacobien est :

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ \frac{-s}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-s}{t^2} - \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}.$$

On en déduit donc :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} e^{-u} \frac{dudv}{v+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{\alpha(v+1)}} \int_0^{+\infty} e^{-u} dudv = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{\alpha(v+1)}} dv.$$

Le lemme suivant termine la preuve.

Lemme 4.4

On a l'égalité suivante : $\forall \alpha \in]0,1[: \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha(t+1)}} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$ (4.37)

Il existe plusieurs manières d'introduire la fonction Γ d'Euler et celle-ci possède de nombreuses propriétés remarquables.

Propriétés 4.1

1. $\Gamma(z)$ est défini et analytique dans la région $Re(z) > 0$.
2. La fonction $\Gamma(z)$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), Re(z) > 0. \quad (4.38)$$

Ce qui implique la relation de récurrence : $\Gamma(n+1) = n!$, pour l'entier $n \geq 0$.

3. La fonction $\Gamma(z)$ est holomorphe pour $Re(z) > 0$.
 En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ où $Re(z) > 0$, l'expression suivante :

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} (\ln(t))^n e^{-t} dt. \quad (4.39)$$

4. On peut prolonger la fonction $\Gamma(z)$ au moyen de la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $Re z > 0$, en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

5. Pour $Re(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (4.40)$$

6. On a pour $Re(z) > 0$, la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad (4.41)$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0,57721 \dots$)

7. Formule de Stirling :

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \text{ pour } |z| \text{ assez grand et } Re(z) > 0. \quad (4.42)$$

$$\text{En particulier } n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}. \quad (4.43)$$

8. Formule de duplication de Legendre :

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (4.44)$$

Exercice 4.14

Utilisez les propriétés de Γ pour montrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution

On a $\Gamma(1) = 0! = 1$. La formule de duplication de Legendre pour $z = \frac{1}{2}$ donne $2^0 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \sqrt{\pi} \Gamma(1)$, donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Et $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Applications

5.1. Introduction

On définit dans ce chapitre, pour les fonctions d'une variable complexe, l'équivalence entre holomorphicité et analyticité. Nous étudierons par la suite le théorème de Gauss sur la valeur moyenne, le principe du module maximum et le théorème de Liouville.

Ce chapitre présente aussi d'autres sujets importants tels que le théorème fondamental de l'algèbre, la définition des fonctions méromorphes, le principe de l'argument et le théorème de Rouché qui représente un outil assez pratique pour trouver le nombre des zéros d'une fonction dans un ouvert du plan complexe. Enfin nous introduisons le calcul d'intégrales sur des contours particuliers par la méthode des résidus.

5.2. Equivalence entre holomorphicit  et analyticité

Définition 5.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction de U dans $\mathbb{C}$.

On dit que f est analytique en un point $z_0 \in U$, si pour tout point z_0 il existe un disque ouvert $D(z_0, r) \subset U$ tel que $f(z)$ s'écrit comme une série entière en $(z - z_0)$ selon :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Et on dit que f est holomorphe sur U si elle est analytique en tout point de U .

Définition 5.2

Le plus grand cercle $|z - z_0| = R$ tels que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en chaque point à l'intérieur de celui-ci s'appelle le cercle de convergence.

Corollaire 5.1

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ a un cercle de convergence $|z - z_0| = R$, alors $f(z)$ est holomorphe en chaque point du disque ouvert $|z - z_0| < R$.

Remarque 5.1

Ce corollaire est utile pour établir l'analyticité des fonctions et pour évaluer les limites.

Exercice 5.1

$$\text{Soit } f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

(a) Montrer que f est une fonction entière.

(b) Calculer $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.

Solution

a) Montrons que $f(z)$ s'écrit de la manière suivante $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où $|z| < \infty$.

Sachant que :

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \text{ où } |z| < \infty, \text{ il vient } \frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \text{ où } 0 < |z| < \infty.$$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \dots$ vaut 1 au point $z = 0$.

$f(z) = 1$ au point $z = 0$.

Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ce qui veut dire que la fonction f est entière.

b) Puisque f est entière alors elle est continue en tout $z \in \mathbb{C}$ et par conséquent :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = 1.$$

Remarques 5.2

✚ La série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ peut-être dérivée terme par terme. Autrement dit, à chaque z à l'intérieur du cercle de convergence de cette série.

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. Par conséquent $f(z)$ est indéfiniment dérivable sur U . Autrement dit une fonction analytique est holomorphe.

✚ Pour une fonction f analytique en un point $z_0 \in U$; alors les coefficients a_n du développement en série entière de f au voisinage de z_0 sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

✚ Le développement en série entière de f en z_0 coïncide avec son développement de Taylor.

✚ Les dérivées successives d'une fonction analytique sont aussi analytiques.

5.3. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Théorème 5.1

Si f est holomorphe dans U et $z_0 \in U$, alors $f(z_0)$ est égale à la valeur moyenne de f prise autour de la frontière de tout disque centré en z_0 et contenu dans U . Autrement dit :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \text{ où } D(z_0, r) \subset U. \quad (5.1)$$

Preuve

Soit C un cercle de centre z_0 et de rayon r . f est une fonction holomorphe sur et à l'intérieur du cercle.

On peut paramétrer C de la façon suivante :

$$z(t) = z_0 + r e^{i\theta} \text{ où } \theta \in [0, 2\pi] \text{ et } dz = i r e^{i\theta} d\theta.$$

Par la formule de Cauchy, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta .$$

On peut dire que la propriété de la valeur moyenne indique que $f(z_0)$ est la moyenne arithmétique des valeurs sur le cercle.

5.4. Théorème du Maximum

Définition 5.3

Soit f une fonction de la variable complexe. On dit que $|f|$ admet un maximum local relatif en $z = z_0$ s'il existe un voisinage U de z_0 tel que :

$$\forall z \in U: |f(z)| \leq |f(z_0)| . \quad (5.2)$$

Si l'inégalité est stricte, i.e. : $\forall z \in U: |f(z)| < |f(z_0)|$, alors le maximum local est dit strict.

5.5. Principe du module maximum

Une des conséquences importantes du théorème de Cauchy est le résultat connu sous le nom du principe du module maximum qui dit que pour une fonction holomorphe non constante f sur un domaine (ouvert et connexe) D , alors le module $|f|$ ne peut pas avoir un maximum (minimum) dans le domaine D .

Proposition 5.1

Supposons que f ait un développement en séries entières définie par :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ où } z \in D(z_0, R) \text{ et si } 0 < r < R.$$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Preuve (Exercice)

Proposition 5.2

Soient D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r est inclus dans D . Alors :

$$|f(z_0)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|. \quad (5.3)$$

Avec égalité si et seulement si f est constante sur le disque $D(z_0, r)$.

Preuve

On suppose que : $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Et supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour tout z appartenant au disque fermé de centre z_0 et de rayon r .

D'après la proposition 5.1 on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2.$$

De ce fait on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$ et $f(z) = f(z_0)$ pour tout z appartenant au disque fermé de centre z_0 et de rayon r . Puisque D est connexe, alors f est constante sur D .

5.5.1. Principe du module maximum (Première version)

Proposition 5.3

Soient U un ouvert connexe et non vide de $\mathbb{C}$ et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in U$, alors f est constante sur U .

Preuve

Puisque la fonction f admet un maximum local en $z_0 \in U$, on peut trouver un disque ouvert $D(z_0, r)$ où $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ tel que : $\forall z \in \overline{D}(z_0, r) : |f(z)| < |f(z_0)|$.

Par conséquent, en se basant sur la proposition précédente, la fonction f est constante sur U .

5.5.2. Principe du module maximum (Deuxième version)

Proposition 5.4

Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie et continue sur l'adhérence $\overline{U}$ de U et holomorphe sur U . Soit M le maximum de $|f|$ sur la frontière de U .

On définit la frontière de U par ∂U .

Alors on a :

- ✚ Pour tout $z \in U$, $|f(z)| \leq M$;
- ✚ Si $|f(z_0)| = M$ pour un $z_0 \in U$, f est constante sur f .

Preuve

Puisque $\overline{U}$ est une partie compacte (à la fois fermé et borné) de $\mathbb{C}$ car elle est connexe et borné, ce qui fait que la fonction continue $|f|$ atteint son maximum sur $\overline{U}$. D'où l'existence de $z_0 \in \overline{U}$ tel que :

$|f(z_0)| \leq \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)|$. Ici on discute deux cas :

1. Pour le cas où $z_0 \in \partial U$ on a : $\sup_{\xi \in \partial U} |f(\xi)| = |f(z_0)|$ et on réalise l'inégalité suivante :

$$\forall z \in U, |f(z)| \leq \sup_{\xi \in \partial U} |f(\xi)|.$$

2. Pour le cas où $z_0 \in U$ on déduit du fait que U est ouvert qu'il existe $r > 0$ qui réalise $D(z_0, r) \subset U$ alors on déduit que $|f(z_0)| \geq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|$. A partir de la proposition 5.2 on déduit que $|f(z_0)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|$.

$$\text{Ce qui prouve que } |f(z_0)| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

Cela implique, basé sur la proposition 5.2 elle-même, que la fonction est constante sur U et par la suite sur $\overline{U}$ du fait que f est continue sur l'adhérence $\overline{U}$.

Exercice 5.2

Trouvez le module maximum de $f(z) = 2z + 5i$ sur la région circulaire fermée définie par $|z| \leq 2$.

Solution

En remplaçant z par $2z + 5i$ dans l'expression $|z|^2 = z\bar{z}$ on trouve :

$$\begin{aligned} |2z + 5i|^2 &= (2z + 5i)\overline{(2z + 5i)} \\ &= (2z + 5i)(2\bar{z} - 5i) \\ &= 4z\bar{z} - 10zi + 10\bar{z}i + 25 \\ &= 4z\bar{z} - 10i(z - \bar{z}) + 25 \\ &= 4z\bar{z} - 10i(2\operatorname{Im}(z)) + 25 \text{ . Car } z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) \text{ .} \\ &= 4z\bar{z} + 20\operatorname{Im}(z) + 25 \\ &= 4|z|^2 + 20\operatorname{Im}(z) + 25 \text{ .} \end{aligned}$$

Remarquons que la fonction f est un polynôme, elle est donc holomorphe sur la région définie par $|z| \leq 2$.

D'après la proposition du maximum, $\max_{|z| \leq 2} |2z + 5i|$ se produit sur la frontière $|z| = 2$. Par conséquent, pour $|z| = 2$, on a :

$$\max_{|z| \leq 2} |2z + 5i| = \max_{|z|=2} |2z + 5i| = \max_{|z|=2} \sqrt{4|z|^2 + 20\operatorname{Im}(z) + 25}.$$

La dernière expression atteint son maximum lorsque $\operatorname{Im}(z)$ atteint son maximum sur $|z| = 2$, c'est-à-dire au point $z = 2i$. D'où :

$$\max_{|z| \leq 2} |2z + 5i| = \sqrt{4(2)^2 + 20(2) + 25} = \sqrt{81} = 9.$$

Exercice 5.3

Trouvez la valeur maximale de $|z^2 + 3z - 1|$ dans le disque $|z| \leq 1$.

Solution

L'inégalité triangulaire nous donne immédiatement :

$$|z^2 + 3z - 1| \leq |z|^2 + 3|z| + 1 \leq 5 \text{ pour } |z| \leq 1.$$

Cependant, le maximum est en fait plus petit que cela, comme le montre l'analyse suivante.

Le maximum de $|z^2 + 3z - 1|$ doit se produire à la frontière du disque $|z| = 1$ dont la paramétrisation est :

$z(t) = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$; d'où :

$$\begin{aligned} |z^2 + 3z - 1|^2 &= (z^2 + 3z - 1)(\bar{z}^2 + 3\bar{z} - 1) \\ &= ((e^{i\theta})^2 + 3(e^{i\theta}) - 1)((e^{-i\theta})^2 + 3(e^{-i\theta}) - 1) \\ &= (e^{2i\theta} + 3e^{i\theta} - 1)(e^{-2i\theta} + 3e^{-i\theta} - 1) \\ &= 11 - 2\cos(2\theta). \end{aligned}$$

Ainsi, le maximum de $|z^2 + 3z - 1|$ est $\sqrt{13}$ qui se produit à $z = \pm i$ et du fait que $|\cos(2\theta)| \leq 1$.

5.6. Théorème de Liouville

Proposition 5.5 (Inégalités de Cauchy)

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D et $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ un cercle de centre z_0 et de rayon r qui se trouve entièrement dans D . Si $|f(z)| \leq M$ pour tout point z de C .

Alors :

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Preuve

De l'hypothèse $\left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}$.

Ainsi par la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées et par l'application de la proposition 3.2 on a :

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

Le nombre M dépend du cercle $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. Mais notons que si $n = 0$, alors $M \geq |f(z_0)|$ pour tout cercle C centré sur z_0 tant que C est compris dans D . En d'autres termes, une borne supérieure M de $|f(z)|$ sur C ne peut pas être inférieure à $|f(z_0)|$.

Théorème 5.2 (Théorème de Liouville)

Si f est une fonction holomorphe et bornée pour tout point z de $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Preuve

C'est une application simple des inégalités de Cauchy. Supposons que la fonction f soit entière et bornée. Soit M un majorant de $|f|$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$.

D'après les inégalités de Cauchy (en $z_0 = 0$), on a :

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{M}{r^n} \text{ pour tout } r.$$

Remarquons que $\frac{M}{r^n}$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini.

Comme f est entière, elle est égale à la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ de son développement en 0.

Donc $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et le développement de Taylor de f en 0 est réduit à son terme constant.

5.7. Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 5.3 (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$ à coefficients complexes $a_i \in \mathbb{C}$ possède toujours au moins une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ c'est à dire $P(z_0) = 0$.

Preuve

Considérons en effet un polynôme non constant P de degré n tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$. Alors $\frac{1}{P}$ est une fonction holomorphe pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Écrivons :

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \right| = \frac{1}{|z^n| |a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}|}.$$

Ainsi, nous voyons que $|f(z)| \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow \infty$ et conclure que la fonction f doit être bornée pour z fini. Il découle alors du théorème de Liouville que f est constante, et donc P est constant. Mais c'est une contradiction avec notre hypothèse sous-jacente selon laquelle P n'était pas un polynôme constant. Nous concluons qu'il doit exister au moins un nombre z_0 pour lequel $P(z_0) = 0$.

5.8. Fonctions méromorphes

Définition 5.4

Une fonction f est dite méromorphe si ses seules singularités sont des pôles.

Remarque 5.3

On en déduit que sur tout domaine borné, une fonction méromorphe ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles.

Exemple 5.1

Une fonction rationnelle constitue un cas particulier de fonction méromorphe.

La fonction $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)^2}$, qui est holomorphe en tout point à distance finie sauf en $z = -1$ (pôle simple) et $z = -2$ (pôle double), est une fonction méromorphe.

Théorème 5.4 (Principe de l'argument)

Soit f une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω . Soit C un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de f dans Ω . Alors :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_O(f) - N_P(f). \quad (5.5)$$

Où $N_O(f)$ et $N_P(f)$ sont, respectivement, le nombre de zéros et de pôles de f à l'intérieur de C (multiplicité incluse).

Preuve

La fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est analytique dans et sur le contour C sauf aux points à l'intérieur de C où f a un zéro ou un pôle, si z_0 est un zéro d'ordre n de f à l'intérieur de C , on peut écrire :

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) \text{ où } \varphi \text{ est holomorphe en } z_0 \text{ et } \varphi(z_0) \neq 0.$$

Après dérivation nous obtenons :

$$f'(z) = (z - z_0)^n \varphi'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \varphi(z).$$

Après division par l'expression de $f(z)$ on aura :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n \varphi'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \varphi(z)}{(z - z_0)^n \varphi(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{n}{(z - z_0)}.$$

Cette dernière expression montre que la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a un pôle simple en z_0 et le résidu en ce point est :

$$\text{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{n}{(z - z_0)} \right].$$

$Res_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) + n = 0 + n = n$ où n est l'ordre du zéro z_0 .

Maintenant, si z_p est un pôle d'ordre m de f dans C , alors on peut écrire :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = (z-z_0)^{-m} g(z), \text{ où } g \text{ est holomorphe en } z_p \text{ et } g(z_p) \neq 0.$$

Par dérivation, nous aurons :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(z-z_0)^m g'(z) - m(z-z_0)^{m-1} g(z)}{(z-z_0)^{2m}} \\ &= (z-z_0)^{-m} g'(z) - m(z-z_0)^{-m-1} g(z). \end{aligned}$$

Après division par l'expression de $f(z)$ on aura :

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{(z-z_0)^{-m} g'(z) - m(z-z_0)^{-m-1} g(z)}{(z-z_0)^{-m} g(z)} \\ &= \frac{(z-z_0)^{-m} g'(z) - m(z-z_0)^{-m-1} g(z)}{(z-z_0)^{-m} g(z)} \\ &= \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{m}{(z-z_0)}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a un pôle simple en z_p . En procédant comme précédemment, nous voyons aussi que le résidu en z_p est égal à $-m$, qui représente le négatif de l'ordre de pôle de f .

Enfin, supposons que $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0r}$ et $z_{p1}, z_{p2}, \dots, z_{pr}$ sont les zéros et pôles de f dans C et supposons en outre que l'ordre des zéros est $n_1, n_2, \dots, n_r$ et que l'ordre des pôles est $m_1, m_2, \dots, m_s$.

Alors chacun de ces points est un simple pôle de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ avec les résidus correspondants $n_1, n_2, \dots, n_r$ et $-m_1, -m_2, \dots, -m_s$. Il découle du théorème des résidus que :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^r Res_{z=z_{0k}} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^s Res_{z=z_{pk}} \frac{f'(z)}{f(z)} \right] \\ &= 2\pi i [\sum_{k=1}^r n_k + \sum_{k=1}^s (-m_k)] \\ &= 2\pi i [N_0 - N_p]. \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f).$$

Corollaire 5.2

Si f est analytique à l'intérieur et sur un contour simple fermé orienté positivement C et si f est non nul sur C , alors :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f). \quad (5.6)$$

Où $N_0(f)$ est le nombre de zéros de f à l'intérieur de C (multiplicité incluse).

Remarque 5.4

La définition du principe de l'argument peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(f(z)) = N_0(f) - N_p(f). \quad (5.7)$$

Où :

$\arg(f(z))$ est l'argument de f c'est-à-dire $f(z) = |f(z)|e^{i\arg(f(z))}$. (5.8)

$\Delta_C \arg(f(z))$ désigne le changement de l'argument de $f(z)$ sur C .

Exercice 5.4

Soit la fonction f définie par : $f(z) = \frac{2z+1}{z}$.

Trouvez le nombre de tours que la variable w fait autour de l'origine lorsque la variable z trace le cercle C d'équation $|z| = 1$ une seule fois dans le sens positif.

Solution

Remarquons que $f(z) = \frac{2z+1}{z} = 2 + \frac{1}{z}$ et $f(z) - 2 = \frac{1}{z}$.

L'image du cercle C d'équation $|z| = 1$ est le cercle C_1 d'équation $|w - 2| = 1$.

La fonction f présente un seul zéro ($z = -\frac{1}{2}$) et un seul pôle ($z = 0$) se trouvant tous les deux à l'intérieur du cercle C .

Alors : $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(f(z)) = N_O(f) - N_P(f) = 1 - 1 = 0$.

Cela veut dire que w ne fait aucun tour autour de l'origine.

5.9. Énoncé du théorème de Rouché

Théorème 5.5

Si f et g sont chacune des fonctions holomorphes à l'intérieur et sur un contour fermé simple C et si l'inégalité $|g(z)| < |f(z)|$ est vraie en chaque point de C , alors f et $f + g$ doivent avoir le même nombre total de zéros (en comptant les multiplicités) à l'intérieur de C .

Preuve

Nous commençons par la démonstration de la relation suivante :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f'(z)+g'(z))}{(f(z)+g(z))} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Pour cela on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f'(z)+g'(z))}{(f(z)+g(z))} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C d \left(\text{Log}(f(z) + g(z)) \right). \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C d \left(\text{Log} \left[f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] \right) \quad (f(z) \text{ facteur commun}). \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C d(\text{Log} f(z)) + \frac{1}{2\pi i} \int_C d \left(\text{Log} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right). \end{aligned}$$

En posant $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f'(z)+g'(z))}{(f(z)+g(z))} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Remarquons que : $w(z) - 1 = \frac{g(z)}{f(z)}$.

Puisque $w = 0$, qui représente la seule singularité de la fonction $w \rightarrow \frac{1}{w}$, se trouve à l'extérieur du contour Γ décrit par : $|w - 1| < 1$.

Puisque tous les points $w(z)$ se trouvent dans le cercle unitaire centré en $(1, 0)$, alors $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = 0$, on conclut donc que le nombre des zéros des deux fonctions f et $f + g$ est le même à l'intérieur de C .

Exercice 5.5

Trouver la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h'(z)}{h(z)} dz$ où $h(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$ et C est le contour défini par l'équation $|z| = 1$.

Solution

Le polynôme $h(z)$ admet des zéros et non pas des pôles, alors le nombre de pôles $N_p(h) = 0$.

Posons $f(z) = -4z^3$ et $g(z) = z^7 + z - 1$.

Nous remarquons que f et g sont deux fonctions holomorphes à l'intérieur et sur un contour simple et fermé C .

$|f(z)| = |-4z^3| = 4|z|^3 = 4$ et $|g(z)| = |z^7 + z - 1| \leq |z|^7 + |z| + 1 = 3$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Alors : $|g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Donc, en se basant sur le théorème de Rouché on peut dire que les fonctions f et $f + g = h$ ont le même nombre total de zéros à l'intérieur de C .

Puisque le nombre des zéros de f est égale à trois ($N_0(f) = 3$), alors le nombre des zéros de h est égale à trois ($N_0(h) = 3$) et par conséquent : $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 3$.

Exercice 5.6

Prouvez que les cinq zéros du polynôme $h(z) = z^5 + 3z + 1$ se trouvent dans le disque $|z| < 2$.

Solution

Nous prenons C comme cercle d'équation $|z| = 2$, et nous considérons la fonction $g(z) = 3z + 1$ qui vient s'ajouter à la fonction $f(z) = z^5$ pour former la fonction $h(z)$. $f(z)$ a cinq zéros à l'intérieur de C . Pour tester la condition $|f(z)| < |g(z)|$, nous estimons la fonction $g(z) = 3z + 1$ sur C par :

$|g(z)| = |3z + 1| \leq 3|z| + 1 = 3 \cdot (2) + 1 = 7$, qui est bien sûr strictement inférieur à :

$|f(z)| = |z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$.

Par conséquent, h aussi a cinq zéros à l'intérieur de $|z| < 2$.

5.10. Calcul d'intégrales par la méthode des Résidus

5.10.1. Intégrale sur des contours particuliers

Exercice 5.7

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ où $0 < a < 1$.

Solution

Posons $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$.

Et considérons comme contour un rectangle situé au-dessus de l'axe réel et dont les sommets sont : $R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$, et $-R$.

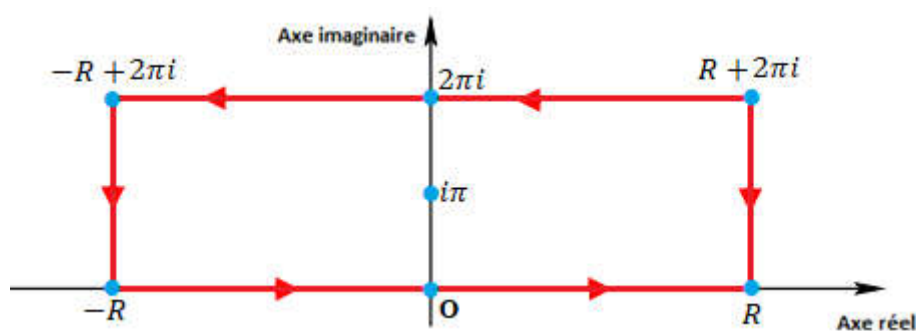


Figure 5.1 : Tracé du contour du rectangle défini par $-R \leq x \leq R$ et $0 \leq y \leq 2\pi i$

Le seul point à l'intérieur de ce contour en lequel le dénominateur $1 + e^z$ de $f(z)$ s'annule est $z = i\pi$. Pour calculer le résidu de f en ce point $z = i\pi$, écrivons :

$$(z - i\pi)f(z) = \frac{(z - i\pi)e^{az}}{e^z - e^{i\pi}}.$$

Calculons :

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi)f(z) = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z - i\pi)e^{az}}{e^z - e^{i\pi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon)e^{a(i\pi + \varepsilon)}}{e^{i\pi + \varepsilon} - e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}.$$

$$\text{D'où : } \text{Res}_{z=i\pi} f(z) = -e^{ai\pi}$$

Ainsi, le théorème des résidus offre :

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(R + iy) idy - \int_{-R}^R f(x + i2\pi) dx - \int_0^{2\pi} f(-R + iy) idy = 2\pi i (-e^{ai\pi}).$$

Nous affirmons maintenant que les deux intégrales $\int_0^{2\pi} f(R + iy) idy$ et $\int_0^{2\pi} f(-R + iy) idy$ tendent vers 0 quand $R \rightarrow \infty$.

En effet, pour l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(R + iy) idy$, dès que $R > 1$, en majorons on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(R + iy) idy \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| dy \\ &\leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \int_0^{2\pi} dy \sim 2\pi e^{-(1-a)R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Puisque } 0 < a < 1). \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} f(-R + iy) idy$ se traite de la même manière.

L'intégrale $-\int_{-R}^R f(x+iy)dx$ est exprimé comme suit :

$$-\int_{-R}^R f(x+iy)dx = -\int_{-R}^R \frac{e^{a(x+iy)}}{1+e^{(x+iy)}} = -e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Et en faisant $R \rightarrow \infty$ nous trouvons:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + 0 - e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - 0 = -2i\pi e^{ai\pi}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= -2i\pi \frac{e^{ai\pi}}{1-e^{2ai\pi}}. \\ &= \frac{2i\pi}{e^{ai\pi}-e^{-ai\pi}}. \\ &= \frac{\pi}{\frac{e^{ai\pi}-e^{-ai\pi}}{2i}}. \\ &= \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \end{aligned}$$

5.10.2. Intégrales impropres contenant une exponentielle

Pour calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$ connue sous le nom d'intégrale de Fourier de la fonction f , on doit d'abord évoquer les deux théorèmes ci-dessous :

Théorème 5.6

Supposons que :

- f une fonction complexe continue sur un domaine D tel que $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R \geq 0\}$
- Pour tous points $z \in C_R$, il existe une constante positive M_R telle que $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|$ et $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$.

Où C_R est le demi-cercle dans le demi-plan supérieur décrit par :

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

Alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz = 0. \quad (5.9)$$

Preuve

Les points du demi-cercle supérieur sont donnés par la paramétrisation suivante :

$$z = Re^{i\theta} \text{ où } \theta \in [0, \pi].$$

On écrit donc :

$$e^{iaz} = e^{ia(Re^{i\theta})} = e^{ia(R\cos(\theta)+iR\sin(\theta))} = e^{-aR\sin(\theta)+iaR\cos(\theta)}.$$

$$|e^{iaz}| = e^{-aR\sin(\theta)}.$$

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$ (En se basant sur la fonction sinus).

Par conséquent : $-aR\sin(\theta) \leq -aR\frac{2\theta}{\pi}$.

Puisque la fonction exponentielle est croissante on a $e^{-aR\sin(\theta)} \leq e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}$.

$$\left| \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq M_R \cdot R \int_0^\pi e^{-aR\sin(\theta)} d\theta.$$

$$\begin{aligned}
 &= 2M_R \cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin(\theta)} d\theta \leq 2M_R \cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta. \\
 &= -2M_R \cdot R \frac{\pi}{2aR} \left[e^{-aR \frac{2\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}. \\
 &= \frac{\pi}{a} M_R (1 - e^{-aR}).
 \end{aligned}$$

Donc $\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi}{a} M_R (1 - e^{-aR})$

Partant du fait que $e^{-aR} < 1$ pour $a > 0$ et $R > 0$ on a $\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi}{a} M_R$.

La limite finale du théorème est maintenant évidente puisque $M_R \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$.

Alors : $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$.

Théorème 5.7

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points non réels. Supposons que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz} \text{ où } a > 0 \text{ et } \text{Im}(z_k) > 0. \quad (5.10)$$

Preuve

Désignons par $z_1, z_2, \dots, z_n$ les pôles de f appartenant au demi-plan supérieur $\text{Im}(z) > 0$.

Soit C la courbe formée à partir de la moitié supérieure C_R du cercle dont le centre est l'origine et le rayon est suffisamment grand pour que tous les points singuliers tombent à l'intérieur de ce cercle et du segment de droite décrit par $(-R \leq x \leq +R, y = 0)$. A partir du théorème des résidus on a :

$$\int_C f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz} \text{ où } a > 0 \text{ et } \text{Im}(z_k) > 0.$$

Mais :

$$\int_C f(z) e^{iaz} dz = \int_{-R}^{+R} f(x) e^{iax} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz.$$

Par comparaison on trouve :

$$\int_{-R}^{+R} f(x) e^{iax} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz} \text{ où } \text{Im}(z_k) > 0.$$

En faisant tendre R vers l'infini on trouve :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) e^{iax} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz}, \text{Im} z_k > 0.$$

Donc d'après le théorème précédent on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

C'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz} \text{ où } \text{Im}(z_k) > 0.$$

En passant à la limite dans (2), on obtient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) e^{iaz} \text{ où } a > 0 \text{ et } \text{Im}(z_k) > 0.$$

Remarque 5.5

Pour le cas où $a < 0$, on considère le contour C formé à partir de la moitié inférieure du cercle de centre O et de rayon suffisamment grand et du segment de droite décrit par :

$$(-R \leq x \leq +R, y = 0).$$

Donc on aura le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iaz} \text{ où } a < 0 \text{ et } \text{Im}(z_k) < 0. \quad (5.11)$$

Remarque 5.6

Pour calculer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax)f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax)f(x) dx$ on utilise les relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax)f(x) dx = -2\pi \text{Im} \left[\sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iaz} \right] \text{ où } \text{Im}(z_k) > 0. \quad (5.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax)f(x) dx = 2\pi \text{Re} \left[\sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iaz} \right] \text{ où } \text{Im}(z_k) > 0. \quad (5.13)$$

Exercice 5.8

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4x+5} dx = \frac{-\pi}{e} \sin(2)$ et en déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4x+5} dx$.

Solution

Pour prouver la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4x+5} dx = \frac{-\pi}{e} \sin(2)$ on doit discuter la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx$. On remarque que la fonction $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$ admet deux pôles simples $z_1 = -2 + i$ et $z_2 = -2 - i$.

Soit le contour C formé à partir de la moitié supérieure du cercle C_R de centre O et de rayon $R > \sqrt{5}$ et du segment de droite décrit par : $(-R \leq x \leq +R, y = 0)$.

Donc on aura le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz &= 2\pi i \text{Res}_{z=-2+i} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{i(-2+i)}}{(-2+i)^2+4(-2+i)+5} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-1-2i}}{2i} \right] \\ &= \frac{\pi}{e} [\cos(2) - i\sin(2)]. \end{aligned}$$

Mais :

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz.$$

Par identification on trouve :

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz = \frac{\pi}{e} [\cos(2) - i\sin(2)].$$

Par l'application du théorème précédent on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz = 0.$$

Par conséquent on aura :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{\pi}{e} [\cos(2) - i \sin(2)].$$

Donc :

$$\begin{aligned} v.p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4x + 5} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4x + 5} dx. \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4x + 5} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 4x + 5} dx. \\ &= \frac{\pi}{e} [\cos(2) - i \sin(2)]. \\ &= \frac{\pi}{e} \cos(2) - i \frac{\pi}{e} \sin(2). \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4x + 5} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{\pi}{e} \cos(2) - i \frac{\pi}{e} \sin(2).$$

En comparant les deux membres de l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{\pi}{e} \cos(2).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 4x + 5} dx = -\frac{\pi}{e} \sin(2).$$

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5} dz = \frac{\pi}{e} \cos(2) - i \frac{\pi}{e} \sin(2).$$

Bibliographie

- [1] Ahlfors, L. V.: “Complex Analysis,” 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1979.
- [2] Brown, J. W. & Churchill, R. V. Complex Variables and Applications. 8th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education , 2009.
- [3] Cartan .H, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes. Hermann, 1978.
- [4] Chabat , B . : Introduction à l 'analyse complexe, fonctions d 'une variable.Tome 1,Editions Mir Moscou,1990 .
- [5] Dolbeault. P, Analyse Complexe, Masson, Paris, 1990
- [6] Genet. J et Pupion .G, Analyse moderne 2, Librairie Vuibert, Paris, 1974.
- [7] Giroux A. Analyse complexe. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2004.
- [8] Lesfari, A. : Variables complexes (Cours et exercices corrigés), éditions Ellipses , Paris , 2014.
- [9] Mathews, J. H., and R. W. Howell: “Complex Analysis for Mathematics and Engineering,” 5th ed.,Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, 2006.
- [10] Murray R. S. Variables complexes : cours et problèmes, volume 12 de Série Schaum, New York, 1973.
- [11] Rubinfeld, L. A.: “A First Course in Applied Complex Variables,” John Wiley & Sons, Inc., NewYork, 1985.
- [12] Silverman, R. A.: “Complex Analysis with Applications,” Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.
- [13] Spiegel, M. R. .Theory and problems of Complex variables. Singapore: McGraw-Hill. 1981.
- [14] Tauvel . P, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod, Paris, 2006.
- [15] Walter Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris. Manuel de deuxième cycle,1975.
- [16] Wunsch, A. D.: “Complex Variables with Applications,” 3d ed., Pearson Education, Inc., Boston,2005.