REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université TAHRI Mohammed Béchar
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématique et Informatique

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Licence Mathématiques**

Module : **Analyse 4**

Cours et exercices corrigés

EL HENDI Hichem Et BENMANSOUR Safia née Guendouz

Année Universitaire : 2018 - 2019

EL HENDI Hichem

MCA à université Tahri Mohammed Béchar

Email : elhendihichem@yahoo.fr

BENMANSOUR Safia

MCA à l'école supérieure de management de Tlemcen

Email : safiabenmansour@hotmail.fr

Table des matières

Ce polycopié est destiné aux étudiants de quatrième semestre licence mathématiques (LMD). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné (Analyse4) de licence mathématiques. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exercices résolus. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

De nombreux ouvrages fondant cet axe, parfois très opulents et fournis, existent. Néanmoins dans le présent travail, on a cherché, en prenant en ligne de compte les réserves impérativement imposées par un volume horaire souvent pas très suffisant, à pourvoir l'étudiant d'un support pédagogique répondant aux exigences du programme en vigueur. Ce manuscrit a la particularité de dégager les points essentiels qui permettent d'orienter le travail personnel de l'étudiant. Il est structuré en trois chapitres ; chacun comporte un cours contenant les définitions, propriétés et théorèmes dont les preuves simples sont laissées à titre d'application au soin de l'étudiant. On y trouve aussi des exemples illustratifs, des remarques pertinentes ainsi qu'une série d'exercices résolus de façon détaillée visant l'assimilation du cours et l'acquisition des techniques. Dans ce contexte, nous conseillons l'étudiant d'essayer de résoudre avant de regarder la solution. On y trouvera aussi des exercices sans solutions proposés dans le but de stimuler l'étudiant à fournir un effort personnel. Ceci étant il pourra faire son auto évaluation voire deviner le type de question auxquelles il devrait s'attendre lors des contôles et examens.

Ce polycopié n'a pas été conçu pour exempter les étudiants de leurs cours, il est loin d'être exhaustif, on y trouvera certainement des imperfections ; par conséquent nous serons trés attentifs à toute suggestions suceptibles d'apporter amélioration.

Objectifs :

Ce polycopié se départage en trois parties : Les Fonctions à plusieurs variables, Calcul Différentiel, Intégrales multiples.

L'objectif de la première partie partie du cours sera l'étude des fonctions de deux variables en particulier le calcul des limites, l'étude de la continuité et surtout le calcul dérivées partielles qui amorcent la notion d'optimisation.

L'objectif de la deuxième partie du cours sera l'étude de la différentiabilité et caclul des dérivés partielles sur les fonctions à plusieurs variables.

L'objectif de la troisième partie est d'introduire la notion de l'intégrale double et comment calculer l'aire d'une surface ainsi que la notion de l'intégrale curviligne.

1.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeur de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Fonctions numériques de deux variables

Définition 1

On appelle fonction numérique de deux variables une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui au couple (x, y) associe le nombre réel $f(x, y)$.

Exemple 1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

Définition 2

Soit $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$.

1. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

   est appelé la surface représentative de f. S est aussi appelé le graphe de la fonction f.

2. Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de D. Les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement b et a sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $L_k = \{(x, y) \in D$ tel que $f(x, y) = k\}$ est la ligne de niveau de la fonction f.

Remarque 1.

Le domaine de définition d'une fonction numérique de deux variables est le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'une de ses parties.

Exemple 2.

A. *$f(x,y) = 4x^2 + y^2$ sur $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. On calcule et représente des lignes de niveau pour $k = 0, k = 1, k = 2, k = 4, k = -1$. Pour $k = 0$ c'est un seul point $(0,0)$, avec la valeur de la fonction 0, pour $k = 1, 2, 4$ on obtient des ellipses. Par exemple aux points de l'ellipse $4x^2 + y^2 = 1$ la fonction a la valeur 1, etc. La ligne de niveau $k = -1$ est l'ensemble vide (la fonction ne prend la valeur -1 en aucun point). Au point $(0,0)$ les fonctions partielles sont $x \mapsto 4x^2$ et $y \mapsto y^2$.*

B. *Sur $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ et $x \neq 0$ on considère la fonction $f(x,y) = y/x$ avec ses lignes de niveau $k = 0, 1, -1, 2, -2$. Ce sont des intervalles des droites $y = 0,\ y = x,\ y = -x,\ y = 2x,\ y = -2x$ sans le point $x = y = 0$. La valeur de la fonction sur la droite $y = x$ est égale à 1, sur $y = -x$ est égale à -1, etc.*

1.2 Limites et continuité

Définition 1

Soit f une fonction définie au voisinage du point $M_0(x_0, y_0)$ sauf peut-être en $M_0(x_0, y_0)$. On dit que le nombre l est la limite de f lorsque $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0, y_0)$ et on écrit $\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y) = l$ ou $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$, .si et seulement si,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / d(M, M_0) < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon, (x,y) \to (x_0,y_0)$

ou

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \alpha^2 \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$

Remarque 2.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \Leftrightarrow \forall A >> 0, \exists \alpha > 0/d(M,M_0) < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| > A.$$

Exemple 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - 2y = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x+5y} = 1.$$

Remarque 3. *Si la limite existe, elle est unique.*

Remarque 4.

La limite de f lorsque $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ ne doit pas dépendre du chemin que parcourt le point $M(x,y)$ pour tendre vers le point $M_0(x_0,y_0)$. Par conséquent, dès qu'une limite dépend du chemin elle n'existe pas.

Exemple 4.

Sur le chemin $y = x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 2.$$

Sur le chemin $y = x^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-2}{x-1} = 2.$$

Remarque 5.

Certes sur l'exemple précédent, on a trouvé deux chemins qui ont donné la même limite cependant ce n'est pas suffisant pour conclure l'existence de la limite car on ne peut pas la calculer sur tous les chemins. Ainsi on s'accorde à utiliser la méthode des chemins plutôt pour montrer la non existence d'une limite. Plus explicitement, pour montrer la non existence d'une limite, il suffit de trouver deux chemins sur lesquels on aura deux limites différentes. En effet lorsqu'il s'agit d'étudier la limite en $(0,0)$, sur les chemins $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, dès que la limite dépend de α, on conclut qu'elle n'existe pas.

Exemple 5.

On veut calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Sur les chemins $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Calcul des limites en coordonnées polaires

On veut calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en utilisant les coordonnées polaires, on pose :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta.$$

Lorsque $(x,y)\to(0,0)$, $r\to 0^+$ et θ est un angle bien choisi.

Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r,\theta).$$

La limite existe si elle ne dépend pas de θ.

Exemple 6.

1) On veut calculer en coordonnées polaires

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$

Cette limite dépend de θ *donc elle n'existe pas.*

2) On veut calculer en coordonnées polaires

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1}.$$

On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta + r\sin\theta - 2}{r\cos\theta - 1} = 2.$$

Remarque 6.

On étudiera les limites lorsque $(x,y) \to (0,0)$ *et dans des situations différentes c'est-à-dire quand* $(x,y) \to (a,b) \neq (0,0)$, *on peut toujours ramener la limite au point* $(0,0)$ *en effectuant un changement de variables.*

Remarque 7.

Les propriétés, le calcul, les opérations et les théorèmes usuels des limites d'une fonctions à une variable restent vrais pour les fonctions de deux variables.

1.2.1 Continuité d'une fonction de deux variables

Définition 2

On dit que $f(x,y)$ est continue au point $M_0(x_0,y_0)$ appartenant à son domaine de définition si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

On dit qu'elle est continue sur la partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est continue en chaque point $M \in A$ on écrira alors $f \in C^0(A)$ et on lit " f est de classe C^0 sur A ".

Définition 3

Soit $f: \ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f est continue en A ssi $\forall (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = f(A)$.

Exemple 7.

1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Tout plynôme de deux variables est continu sur $\mathbb{R}^2$.

3) Soit f *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrons que $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Il est clair que f *est continu sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Etudions sa continuité au point* $(0,0)$.

Pour cela calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ *en coordonnées polaires.*

On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$, f *est donc continue au point* $(0,0)$ *et par conséquent* f *est continu sur* $\mathbb{R}^2$.

Remarque 8.

Les propriétés et les théorèmes usuels de la continuité d'une fonctions à une variable restent vrais pour les fonctions de deux variables.

Une fonction f *continue sur une partie fermée bornée* $A \subset \mathbb{R}^2$ *y atteint son maximum et son minimum, c'est-à-dire :*

$\exists M_1(x_1,y_1) \in A / m = \min\limits_A f(x,y) = f(x_1,y_1)$,

$\exists M_2(x_2,y_2) \in A / M = \max\limits_A f(x,y) = f(x_2,y_2)$.

Définition 4

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soit $X_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^p) \in D$. Pour $i = 1 \ldots, p$, on appelle <u>i-ème fonction partielle</u> de f en X_0 la fonction :

$$f_{X_0,i} : \begin{cases} D_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q \\ x \mapsto f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^p) \end{cases}$$

où x est à la i-ème place, et D_i est tel que pour $x \in D_i$, $(x_0^1, \ldots, x, \ldots, x_0^p) \in D$.

Proposition 1

Si f est continue en $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^p)$ alors $\forall i = 1 \ldots, p$, la fonction partielle $f_{x_0,i}$ est continue en x_0^i.

Remarque 9.

La réciproque est fausse !

Exemple 8. *On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante*

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en $(0,0)$ *sont*

$$f_{(0,0),1}:\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} \ \textit{si}\ x \neq 0, \\ \\ 0\ \textit{si}\ x=0, \end{cases}$$

et

$$f_{(0,0),2}:\ y \mapsto \begin{cases} \dfrac{0\cdot y}{0+y^2} \ \textit{si}\ y \neq 0, \\ \\ 0\ \textit{si}\ y=0. \end{cases}$$

Elles sont donc continues. Pourtant f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *:*

Soient $x_n = y_n = 1/n$. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, *mais* $f(x_n,y_n) = \dfrac{1/n^2}{2/n^2} = \dfrac{1}{2}$. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) \neq 0 = f(0,0)$.

Une autre démonstration du fait que f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *: prenons une restriction de* f *sur la droite* D_1 *définie par l'équation* $y=x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x,y)\big|_{D_1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction f *restreinte à un sous-ensemble* D_1 *de* $\mathbb{R}^2$ *n'a pas la même limite que la même fonction restreinte à deux autres sous-ensembles de* $\mathbb{R}^2$. *(Les fonctions partielles* $f_{(0,0),1}$ *et* $f_{(0,0),2}$ *sont des restrictions de* f *aux droites* $y=0$ *et* $x=0$ *respectivement). Or la limite, si elle existe, doit être unique (remarque* **??***), donc la limite n'existe pas.*

Exemple 9.

1. *On considère* $f(x,y) = x^2 + y^2$. *On va montrer que pour toutes valeurs* $(x,y) = (a,b)$ *la limite de* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *existe et est égale à la valeur au point* $f(a,b) = a^2 + b^2$. *Si* $(x,y) \to (a,b)$ *(par exemple dans une norme euclidienne) cela veut dire que* $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0$ *donc on a :*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \to 0 \\ y - b \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \to a \\ y \to b \end{cases}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, *c'est exactement ce qu'on cherche a montrer, et alors la fonction est continue en chaque point.*

En général on ne vérifie pas la continuité en chaque point comme dans cet exemple - aux points réguliers on utilise plutôt les propriétés des fonctions continues.

2. *Prenons un autre exemple :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 3, & si\ x = 0 \end{cases}$$

alors $f(a,b) = \dfrac{y}{x}$ *pour* $x \neq 0$ *étant une fraction de fonctions continues est continue mais pour* $x = 0$ *sur les droites* $y = kx$ *on obtient des limites différentes quand* $x \to 0$. *On conclut que la fonction n'est pas continue en* $(0,b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$. *Il y a une droite des points de discontinuité. Cette droite a pour équation* $x = 0$.

Définition 5

Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Soit A un point adhérent à D n'appartenant pas à D. Si f a une limite L lorsque $X \to A$ on peut étendre le domaine de définition de f à $D \bigcup \{A\}$ en posant $f(A) = L$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point A.

Propriétés des fonctions continues sur un compact

Définition 6

Une partie compacte (un compact) de $\mathbb{R}^p$ est une partie fermée et bornée.

Il existe au moins deux differentes façons de définir un compact dans un espace normé, mais dans $\mathbb{R}^p$ elles sont équivalentes à celle qu'on donne ici.

Exemple 10. *Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé, et dans $\mathbb{R}^p$ les boules fermées sont des exemples de compacts.*

Théorèm 1

(Admis) Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction *continue* sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ et K une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ contenue dans D. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^q$.

Corollaire 2

Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Cela signifie que sur un compact $K \in \mathbb{R}^p$ il existe au moins un point $X_m \in K$ et au moins un point $X_M \in K$ tels que pour tout $X \in K$ on ait

$$\|f(X_m)\| \leqslant \|f(X)\| \leqslant \|f(X_M)\|.$$

Connexité par arc. Théorème des valeurs intermédiaires

Définition 7

On dit qu'une partie Γ de $\mathbb{R}^p$ est un arc continu si on peut trouver une application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ dont l'image soit Γ. γ est appelé un paramétrage de Γ. Les points de Γ, $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$ s'appellent les extrémités de Γ.

Définition 8

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$. On dit que E est connexe par arc si, étant donnés deux points arbitraires A et B de E on peut trouver un arc continu Γ, d'extrémités A, B entièrement contenu dans E.

Théorèm 3 (des valeurs intermédiaires)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ connexe par arc. Soit A, B deux points de D. Pour tout nombre réel r compris entre $f(A)$ et $f(B)$ il existe un point C de D tel que $f(C) = r$.

2.1 Dérivées partielles. Matrice jacobienne. Gradient

Définition 1

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à la variable x au point $M_0(x_0, y_0) \in D_f$ si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ existe. La dérivée partielle par rapport à la variable x au point $M_0(x_0, y_0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$. De même, on dit que f possède une dérivée partielle par rapport à la variable y au point $M_0(x_0, y_0) \in D_f$ si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$ existe. La dérivée partielle par rapport à la variable y au point $M_0(x_0, y_0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Remarque 10.

La dérivée partielle par rapport à x notée $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ obtenue en dérivant f par rapport à x et en supposant y constante Et de même la dérivée partielle par rapport à y notée $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ obtenue en dérivant f par rapport à y et en supposant x constante.

Exemple 11.

1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction : $f(x, y) = 4x^3 + 7xy^2 - 6y + 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 + 7y^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 14xy - 6.$$

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction :* $f(x, y) = y \ln x + e^x$ *sur* $(0, +\infty)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + e^x$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Définition 2

On dit que f est différentiable au point $M_0(x_0, y_0) \in D_f$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et sont continues. La différentielle de f au point $M_0(x_0, y_0)$ est notée df et $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$.

Exemple 12.

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *et la différentielle de la fonction :* $f(x, y) = e^{x-7y} + x^3$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-7y} + 3x^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -7e^{x-7y},$$

d'où

$$df = (e^{x-7y} + 3x^2)dx - 7e^{x-7y}dy.$$

2.1.1 Différentielle et Matrice Jacobienne

Définition 3

La matrice des dérivées partielles de $f \ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de f.

La matrice jacobienne $Jac(f)(X_0)$ fait passer de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$: elle a p colonnes et q lignes.

$$Jac(f)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Autrement dit, pour une fonction vectorielle $f(x_1, \cdot x_p)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ la matrice jacobienne a pour colonnes les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En particulier, pour une fonction de p variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est simplement une matrice-ligne :

$$Jac(f)(x_1, \cdots, x_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right).$$

Sa matrice transposée - la matrice-colonne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \cdots, x_p) = {}^{\dagger}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right)$$

s'appelle le gradient de f.

2.1.2 Gradient.

Définition 4

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Son gradient, pris en tout point de D définit une fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{\text{grad}} f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, noté aussi :

$$\vec{\nabla} f(x,y) \;:=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

Exemple 13.

A. $f(x,y) = x^2+y^2$. $L_a(f) = C((0,0), \sqrt{a})$ *- cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* $\sqrt{a}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

On remarque que $(2x, 2y) = 2(x,y)$ *est 2 fois le vecteur radial qui est en effet orthogonal au cercle.*

B. Soit la courbe d'équation $x^2 - y = 0$*. Pour calculer la normale en chaque point de cette courbe, on la voit comme une ligne de niveau* 0 *de la fonction* $f(x,y) = x^2 - y$*. La normale est donc donnée par son gradient :* $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.1.3 Propriétés des dérivées partielles.

Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles.

Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est obtenue par des opérations algébriques (somme, produit, fraction) sur les fonctions $g, h : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ses dérivées partielles peuvent être obtenues à partir des dérivées partielles de g et h par les formules de dérivée de somme, produit, fraction habituelles $((u+v)' = u' + v'$, etc.)

Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.

Rappel : règle de chaîne. Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}, g : x \mapsto g(x),\ h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : y \mapsto h(y)$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : x \mapsto h(g(x))$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=g(x_0)} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

Proposition 1

Soient

$$\begin{aligned} g :&\quad D \subset \mathbb{R}^p \to E \subset \mathbb{R}^m, g : X \mapsto g(X) = (g_1(X), \cdots, g_m(X)), \\ h :&\quad E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q, h : Y \mapsto h(Y) = (h_1(Y), \cdots, h_q(Y)), \\ f :&\quad D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f : X \mapsto h(g(X)) = f(X) = (f_1(X), \cdots f_q(X)) \end{aligned}$$

des fonctions telles que g en $X_0 \in D$ et h en $g(X_0) \in E$ sont des fonctions continument dérivables (i.e. les dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}, j \in \{1, \cdots, q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) =&\ \frac{\partial (h \circ g)_j}{\partial x_i}(X_0) \\ =&\ \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(g(X_0))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X_0) + \cdots + \frac{\partial h_j}{\partial y_m}(g(X_0))\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(X_0) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ce qui nous donne les entrées d'une matrice jacobienne de f qui est un produit des matrices jacobiennes de h et g.

2.1.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

Définition 5

On dit que f est de classe C^1 sur la partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si et seulement si ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur A on écrira alors $f \in C^1(A)$.

On dit que f est de classe C^2 sur la partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si et seulement si ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe continues C^1 sur A on écrira alors $f \in C^2(A)$. De plus on a les dérivées partielles du second ordre suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}).$$

Exemple **14.** *Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction : $f(x, y) = e^x + 2x^3y^2$.*

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + 6x^2y^2$$

,et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y.$$

Et par suite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x + 12xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2 y,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 y.$$

2.2 Fonctions de classe C^k

2.2.1 Théorème de Schwarz

Définition 1

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^k est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Une fonction est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorèm 1

(Théorème de Schwarz)

Soit f une fonction définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$. Alors, les dérivées partielles du second ordre mixtes sont égales c'est-à-dire : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pour tout $(x, y) \in A$.

Exemple 15.

Vérifier que les dérivées partielles du second ordre mixtes de la fonction : $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x^2}$ *sont égales sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \{x = 0\}$.

En effet on a sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{x = 0\}$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 - 2x(x+y^2)}{x^4} = \frac{-x^2 - 2xy^2}{x^4}$$

,et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}.$$

Et par suite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4y}{x^3},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4y}{x^3}.$$

Définition 2

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \in D$. La différentielle $\mathrm{d}f(A)$ de f au point A est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que au voisinage de A on a :

$$f(A+H) - f(A) = (\mathrm{d}f(A))(H) + r(H), \text{ où } r(H) = o(\|H\|). \tag{2.3}$$

Ici, $H \in \mathbb{R}^p$, tel que $A+H$ est au voisinage de A. La fonction f est dite différentiable au point A si elle possède une différentielle en ce point. La fonction f est dite différentiable dans un domaine D si elle est différentiable en tout point de D.

Cette application agit sur les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et les envoie vers $\mathbb{R}^q$, en particulier $(\mathrm{d}f(A))(H) \in \mathbb{R}^q$. Le reste, $r(H) = o(\|H\|)$, dit “petit o” de $\|H\|$, est une fonction $r : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, négligeable devant $\|H\|$. On peut comparer leurs normes :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{\|r(H)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|H\|_{\mathbb{R}^p}} = 0.$$

On peut réécrire la condition de différentiablité

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - (\mathrm{d}f(A))(H)}{\|H\|} = 0$$

Si elle existe, la différentielle $\mathrm{d}f(A)$ est unique. On la note selon les auteurs ou les circonstances :

$$L = Df(A) \text{ ou } \mathrm{d}f(A) \text{ ou } D_A f \text{ ou } \mathrm{d}_A f.$$

Propriété 1

Soit $f: \ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $X_0 \in D$. Si $\forall i = 1, \ldots, p$, $\forall j = 1, \ldots, q$, $X \mapsto \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)$ *existe au voisinage de* X_0 *et est continue en* X_0, alors f est différentiable en X_0.

Proposition 2

Propriétés de la différentielle.

1. **Continuité.** Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.
2. **Linéarité.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables en $A \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{d}(f+g)(A) = \mathrm{d}f(A) + \mathrm{d}g(A)$ et $\mathrm{d}(\lambda f)(A) = \lambda\, \mathrm{d}f(A)$.
3. **Composition.** Soient $g : D \to E \subset \mathbb{R}^m$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ et différentiable en $A \in D$, et $h : E \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(A)$, alors $h \circ g$ est différentiable en A et la différentielle $\mathrm{d}(h \circ g)(A) = (g(A)) \times \mathrm{d}g(A)$

Exemple 16. *1. On reprend : soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante*

$$f: \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ \textit{si} \ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \ \textit{si} \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On sait que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ parce qu'elle n'est même pas continue. Comment se comportent ses dérivées partielles au voisinage de $(0,0)$?

On a vu que si $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{y_0(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}$ *et que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. *Donc* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est bien définie au voisinage de* $(0,0)$*, mais elle n'est pas continue : si* $x_n=1/n$ *et* $y_n=2/n$*, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$, *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)=\dfrac{2/n^2}{(1/n^2+4/n^2)^2}=\dfrac{2/n^2}{25/n^4}$. *Donc,* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)\neq 0$.

2. *Soit*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ \\ (x,y)\mapsto(x^2y^2,x+y)\end{cases}$$

Est-elle différentiable en $(2,3)$ *?*

Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0y_0^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0x_0^2$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial x}(x_0,y_0)=1$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial y}(x_0,y_0)=1$.

Toutes ces dérivées partielles sont continues en $(2,3)$ *donc* f *est différentiable en* $(2,3)$*. On a*

$$Jac(f)(2,3)=\begin{pmatrix}36 & 24\\ \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. *On considère :*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \\ x\mapsto x^2\end{cases}$$

est-elle différentiable en 2 *? Soit* $x_0\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)=2x_0$. *Elle est continue en* 2 *donc* f *est différentiable en* 2 *et* $Jac(f)(2)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(2)=f'(2)=4$.

2.2.2 Théorème des accroissements finis

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable.

Théorèm 2

(Inégalité des accroissements finis). Soient $a, b \in U$ tels que

$$[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\} \subset U$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||$$

2.2.3 Formule de Taylor

Rappel : petit o. Soient f et g deux fonctions d'une variable à valeurs réelles. On dit que $g = o(f)$ au point a si :

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Exemple : $u(x) = x^3, v(x) = x^2 + 2x$. En $a = 0$ on a $u(x) = o(v(x))$ et en $a = +\infty$ on a $v(x) = o(u(x))$.

Rappel : La formule de Taylor avec le reste en forme de Lagrange. Si f est $n+1$ fois différentiable en a, on a une approximation de f par un polynôme :

$$f(a + t) = f(a) + f'(a)t + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!} t^n + r_n(a, t)$$

où il existe $\theta \in [a, a+t]$ tel que $r_n(a,t) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : si f est continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, $a < b$ alors $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a)$.

Finalement, on a aussi **la formule de Taylor-Young** avec $r_n(a,t) = o(t^n)$:

$$f(a+t) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + o(t^n)$$

C'est cette formule qu'on va généraliser au cas de plusieurs variables.

Théorèm 3

(Formule de Taylor) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^n au voisinage du point $A(a_1, a_2, \cdots a_p) \in D$. Soient $H(h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ et l'intervalle $[A, A+H] \subset D$. Alors,

$$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left((h_1\partial_1 + \cdots h_p\partial_p)^k(f)\right)(A) + o(\|H\|^n)$$

En particulier, la formule de Taylor à l'ordre 2 est la suivante :

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \partial_i\partial_j f(a)h_ih_j + o(\|H\|^2) \tag{2.4}$$

La matrice-colonne des entrées $\partial_i f$ est la matrice Jacobienne. La matrice $p \times p$ des dérivées secondes

$$Hess_f(A) := [\alpha_{ij}] = [\partial_i\partial_j f(A)]$$

s'appelle la <u>matrice Hessienne</u> de f en A. Par le théorème de Schwarz cette matrice est symétrique si f

est de classe C^2. La forme quadratique $\alpha(u) = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} u_i u_j$ s'appelle la forme hessienne de f en A.

Remarque **11.** *L'idée de la formule de Taylor c'est de trouver une approximation de la fonction par un polynôme dans un voisinage d'un point donné.*

En particulier, pour $p = 2$, $A = (a, b)$, $H = (h, k)$, $(A + H) = (a + h, b + k)$ on a les formules de Taylor suivantes :

– $n = 0$

$$f(A+H) - f(A) = o((\sqrt{h^2+k^2})^0) \Leftrightarrow \lim_{H \to 0} \frac{f(A+H) - f(A)}{1} = 0$$

- *continuité*

– $n = 1$

$$f(A+H) - f(A) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

- *différentiabilité.*

– $n = 2$

$$\begin{aligned} f(A+H) \quad - f(A) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(h^2+k^2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3 Extremum local d'une fonction de deux variables

Soient f une fonction définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ et $(x_0, y_0) \in A$. Alors

1) Le point (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \;\text{ et }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

2) Le point critique (x_0, y_0) réalise un maximum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0.$$

3) Le point critique (x_0, y_0) réalise un minimum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0.$$

4) Le point critique (x_0, y_0) ne réalise ni minimum local ni maximum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 < 0.$$

5) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 = 0,$$

on ne peut rien conclure

Exemple 17. *Trouver les points critiques de $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$. puis déterminer leur nature.*

Les points critiques de $f(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 3x^2 + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont : $(0, 0)$ *et* $(1, -1)$.

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y \ \text{et} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3.$$

Pour le point critique $(0,0)$*, on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 3.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right]^2 = -9.$$

On conclut que le point $(1,-1)$ *ne réalise ni minimum ni maximum pour la fonction* $f(x,y)$*.*

Pour le point critique $(1,-1)$*, on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = 6, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = 3.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1)\right]^2 = 27$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 6 > 0.$$

On conclut que le point $(1,-1)$ *réalise un minimum de la fonction* $f(x,y)$*.*

2.3.1 Théorème des extrema sur un compact

Théorèm 1

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^p$. Alors f admet un maximum et un minimum sur K.

Remarque 12. *En dimension $p = 1$ la fonction a des points extrémaux sur un intervalle. Soit ils sont à l'intérieur de l'intervalle, auquel cas ils vérifient $f'(x) = 0$, soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas forcément satisfaite). Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la derivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmi ces valeurs-là.*

Théorèm 2 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ admettant un maximum ou un minimum local au point $A \in U$. Alors A est un point critique de f.

2.3.2 Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessienne

Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$. Quand $p = 1$, pour savoir si un point critique X_0 est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si $f''(X_0) > 0$, alors $f(X_0)$ est un minimum local,

– si $f''(X_0) < 0$, alors $f(X_0)$ est un maximum local,

– si $f''(X_0) = 0$, il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.

Dans le cas de plusieurs variables à la place de f'', on étudie la Hessienne.

Propriété 1

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f. On suppose que la Hessienne $Hf(X_0)$ existe. Alors

– si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement positives, $f(X_0)$ est un minimum local,

– si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement négatives, $f(X_0)$ est un maximum local,

– si non, si toutes les valeurs propres ne sont pas 0, il n'y a pas d'extrema. Si toutes les valeurs propres sont 0, il faut étudier des termes d'ordre supérieur dans la décomposition de Taylor en X_0.

Pour $p = 2$ on fait le calcul de la formule de Taylor. Au point critique $X_0(a, b)$ on a

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Donc le signe de la forme quadratique (la forme hessienne)

$$\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right)$$

va déterminer si on a un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. Pour avoir un maximum (resp. minimum) il faut que la forme soit négative (resp. positive) pour tout (h, k) au voisinage de $(0, 0)$. Si la forme hessienne n'est pas de signe défini on a des couples (h, k) pour lesquelles la valeur de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ est positive et d'autres pour lesquelles cette valeur est négative. Donc on a des directions (h, k) dans lesquelles la fonction a un maximum au point (a, b) et d'autres où la fonction a un minimum au même point. Ce type de point critique s'appelle un point selle (comme une selle de cheval) ou bien point col (comme dans les montagnes).

On étudie alors la forme hessienne. On choisit des notations standard :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b),\ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b),\ T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

On suppose que $R \neq 0$ et on réécrit la forme hessienne :

$$\begin{aligned} Rh^2 + 2Shk + Tk^2 &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 - \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 + \left(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2}\right)k^2\right) \end{aligned}$$

Puisque le premier terme $\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 \geqslant 0$, c'est le deuxième terme qui définit si la forme est de signe défini. Alors,

- Si $(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2}) > 0$ ($\Leftrightarrow RT - S^2 > 0$) on a un maximum si $R < 0$ et minimum si $R > 0$.
- Si $RT - S^2 < 0$ on a un point selle.

Remarque 13.

Si $RT - S^2 > 0$ la condition $R > 0$ ($R < 0$) est équivalente à la condition $R + T > 0$ ($R + T < 0$) i.e. la condition sur la trace de la matrice hessienne.

Recherche des extrema :

- Déterminer des points où f n'est pas de classe C^1 et regarder les valeurs de f en ces points. Par exemple, la fonction $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmi les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.

Exemple 18.

Extrema locaux et globaux de $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 4xy + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) & = 0 \\ x^2 + y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0,0), (-1,-1)$ et $(1,-1)$.

pt critique	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$R = 4y + 4$ $S = 4x$ $T = 2$ $RT - S^2$ *Signe de* R	*4* *0* *2* *8* >0	*0* *-4* *2* -16	*0* *4* *2* -16
Nature du pt critique :	*min*	*pt selle*	*pt selle*

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,-2) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$

2.4 Extremums libres et liés par des relations multiplicateurs de Lagrange

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $g(x, y) = 0$ l'équation de la courbe $C \subset K$. Si C est le bord de K, on a une notation $C = \partial K$. On regarde la restriction de f sur la courbe C. Si la courbe C a pour équation $g(x, y) = 0$, tous les points de la courbe satisfont cette équation. Quand on cherche les extrema de la fonction f sur C on dit qu'on étudie les extrema de f assujettie à la contrainte $g(x, y) = 0$. Ce sont des extrema liés.

Exemple 19.

Exemple A. *Voici un exemple de problème de recherche d'extrema liés : parmi des rectangles avec la somme de cotés $2p$ (où p est un nombre positif donné), trouver un rectangle à l'aire maximale. Soient x, y les cotés du rectangle. Alors on a $\sigma(x, y) = xy$ l'aire, qui doit être maximale tandis que (x, y) sont sousmis à la condition $x + y = p$. Ici, il est facile d'exprimer y par x et trouver un maximum d'une fonction d'une variable ainsi obtenue.*

Il est rare que l'on puisse exprimer y directement comme une fonction de x en utilisant la contrainte.

Exemple B. *Regardons un exemple de la page 362 [?] : la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ et la contrainte, la courbe C, définie par une équation $g(x, y) = 0$. Il s'agit de trouver un minimum de f, lié par cette relation $g(x, y) = 0$. C'est un minimum de f sur la courbe C. Géométriquement on peut résoudre le problème en traçant des lignes de niveau de f. Les lignes de niveau de f sont des cercles concentriques* *du centre* $(0,0)$*. Si on trace des cercles de rayons croissants, jusqu'à leur rencontre avec la courbe* C*, la valeur critique est sur le cercle qui touche la courbe. Faites un dessin - c'est instructif (dessinez une courbe quelconque et tracez les cercles).*

La méthode générale utilise la considération suivante. Soit $P(a,b)$ un point extremum de f restreint à la courbe C. Le vecteur tangent à la courbe au point P doit être aussi tangent à la ligne de niveau $f(a,b)$ (on le voit clairement dans l'exemple B). Mais les lignes de niveau sont normales au gradient de f, de l'autre côté le vecteur tangent à C est normal au gradient de g. Donc ces deux gradients sont proportionnels. On appelle le coefficient de proportionnalité le multiplicateur de Lagrange.

Proposition 1

Soit $f : U \to \mathbb{R},\ g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit (a,b) un point de U tel que :

1. f soumise à la contrainte $g(x,y) = 0$ admet un extremum au point(a,b).
2. $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(a,b) \neq 0$

Alors il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a,b) = \lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\ g(a,b)$.

Les nombres a, b, λ sont des solutions du système d'équations suivant : les dérivées partielles de $f(x,y) - \lambda g(x,y)$ par rapport à x, y, λ doivent être égales à 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) & = 0 \\ g(a,b) & = 0 \end{cases}$$

Exemple 20. *Trouver le point de la courbe* $y = x^2$ *qui est le plus près du point* $(0, h)$*. Alors, ici* $g(x, y) = y - x^2$, *et* $f(x, y) = x^2 + (y - h)^2$ *- le carré de la distance. Les gradients nous donnent*

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2(y-h) - \lambda &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \end{cases}$$

Les solutions : soit $x = 0$, *et alors* $y = 0$ *aussi, ou bien* $\lambda = -1$ *et* $y = h - 1/2$, $x = \pm\sqrt{h - 1/2}$*. Alors pour* $h \geqslant 1/2$, *les points* $(\pm\sqrt{h - 1/2}, h - 1/2)$ *sont à la distance minimale de* $(0, h)$*. Si* $h < 1/2$ *on a* $(0, 0)$ *comme point le plus proche.*

Théorèm 1

Soit f une fonction C^2 sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, alors f atteint un minimum et un maximum globaux sur K. Ces points d'extrema sont

– soit des points intérieurs de K, auquel cas ce sont des points critiques ($\overrightarrow{\text{grad}}\ f = 0$ en ces points)

– soit ils sont sur le bord ∂K de K auquel cas ils sont donnés par le calcul des extrema liés en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

Exemple 21. *Trouver les extrema globaux de* $f(x, y) = y + y^2 - x^2 + 3$ *sur* $B(0, 1)$ *disque de centre* $(0, 0)$ *de rayon* 1*. On cherche les points critiques :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= -2x &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 1 + 2y &= 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0,-1/2)$. *Ce point se trouve dans le disque et sa valeur est* $f(0,-1/2) = 11/4$

La matrice hessienne donne :

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow (0,-1/2) \text{ point selle.}$$

Il faut alors chercher les extrema globaux sur le bord $x^2+y^2-1=0$. On a :

$$\begin{cases} -2x-2\lambda x &= 0 \\ 1+2y-2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{cases}$$

On trouve les points $(0,\pm 1)$ et $(\pm\frac{\sqrt{15}}{4},-\frac{1}{4})$. Les valeurs : $f(0,1)=5,\ f(0,-1)=3, f(\pm\frac{\sqrt{15}}{4},-\frac{1}{4})=\frac{15}{8}$. On compare ces valeurs et conclut que le max se trouve au point $(0,1)$ et le min aux points $(\pm\frac{\sqrt{15}}{4},-\frac{1}{4})$.

2.5 Théorème d'inversion locale

On fixe une fois pour toutes $n,p\in\mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n, a\in U$ et $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable de classe C^1.

Définition 1

On dit que f est un difféomorphisme sur son image si elle est de classe C^1, bijective et de réciproque de classe C^1

Théorèm 1

(Inversion locale). On suppose que f est de classe C^k et que d_af est inversible. Alors il existe $V \subset U$ voisinage de a et W voisinage ouvert de $f(a)$ tels que f soit un C^k-difféomorphisme de V dans W

Remarque 14.

L'hypothèse selon laquelle la différentielle de f est inversible en tout point de U est essentielle : sans cela le théorème est faux. Par exemple, l'application $x \longmapsto x^3$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, mais la fonction réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas dérivable en 0.

Remarque 15.

En général, un difféomorphisme local n'est pas un difféomorphisme global.

Exemple 22.

1. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.*
2. *Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.*

   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

   (a) *La fonction f étant dérivable, elle est continue. Montrons qu'elle est injective. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = 0$*

ce qui contredit le fait que f' ne s'annule jamais. Par conséquent $x = y$ et f est injective. Pour montrer que f^{-1} est continue, il faut montrer que l'image réciproque par f^{-1} d'un voisinage d'un point est un voisinage de la réciproque du point. Ou encore, que l'image directe par f d'un voisinage d'un point a est un voisinage de $f(a)$. Soit V un voisinage de a, il contient un intervalle du type $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, l'image de ce connexe par une fonction continue est encore connexe et est donc un intervalle $[c, d]$ (fermé car f est continue et l'intervalle de départ est compact). Si $f(a) \in]c, d[$, on la démonstration est finie. Si $f(a) = c$ ou $f(a) = d$ alors a est un extrémum local de f et donc $f'(a) = 0$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi f est un homéormorphisme. f^{-1} est différentiable car la différentielle de f ne s'annule pas (théorème de deug...).

(b) *Le taux d'accroissement*

$$T_x(f) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 + x \sin \frac{\pi}{x}$$

tend vers 1 quand x tend vers zero ($\sin \frac{\pi}{x}$ est bornée) et donc f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 1 \neq 0$.

(c) *Par l'absurde, supposons que f soit inversible au voisinage de 0.Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[$ soit inclus dans ce voisinage. f étant continue (car dérivable), elle est strictement monotone. Or $f'(x) = 1 - \pi \cos \frac{\pi}{x} + 2x \sin \frac{\pi}{x}$. Prenons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2k} < \varepsilon$ et $\frac{1}{1+2k} < \varepsilon$ alors $f'(\frac{1}{2k}) = 1 - \pi < 0$ et $f(\frac{1}{2k+1}) = 1 + \pi > 0$ et donc f n'est pas monotone sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ce qui donne la contradiction recherchée. Le théorème de l'inverse local nous montre de plus que f n'est pas de classe C^1 dans aucun voisinage de 0.*

Théorèm 2

(Inversion globale). On suppose que f est de classe C^k. Alors f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi elle est injective et en tout point sa différentielle est inversible, f est alors ouvert

2.6 Théorème des fonctions implicites

Théorèm 1

(Théorème des fonctions implicites).

Soient $n, m \geqslant 1$ deux entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$, et la différentielle de l'application $y \longmapsto f(x_0, y)$ soit inversible en y_0. Alors il existe un ouvert V contenant x_0, un ouvert W contenant (x_0, y_0) et une application $\varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x, y) \in W, f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \in V \quad et \quad \varphi(x) = y$$

On dit que alors l'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de (x_0, y_0)

Exemple 23.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. *Soit* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. *Montrez qu'il existe un intervalle* I *contenant* x_0 *et une application* $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ *et* $f(x, \varphi(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$.

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ *(par exemple* $(1, 1, 1)$*).* f *est* C^1 *car coordonnées polynomiales.*

$$Mat\, D_2 f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

$\det(Mat\, D_2 f(x_0, y_0, z_0)) = -2x_0(y_0^2 + z_0^2) \neq 0$ *car* $x_0 y_0 z_0 = 1$ *donc* $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$. *D'après le théorème des fonctions implicites, il existe* I *intervalle contenant* x_0 *et* $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x, \varphi(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$ *et* $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$.

2.7 Exercices

Exercice 1

Préciser le domaine de définitition des fonctions suivantes et faire un dessin.

1)

$$f(x,y) = \frac{x+y-1}{x-y}.$$

2)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2-1}.$$

3)

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}.$$

4)

$$f(x,y) = \sqrt{xy}.$$

5)

$$f(x,y) = \frac{x-2}{\sqrt{y-x^2}}.$$

6)

$$f(x,y) = \ln xy.$$

7)

$$f(x,y) = e^{x-\frac{1}{y}}.$$

8)

$$f(x,y) = \ln(4-x^2-y^2).$$

9)

Exercice 2

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y}.$$

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y^2}.$$

3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y.$$

4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+y^2).$$

5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Exercice 3

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition.

1)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2)

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles du premier ordre des fonctions :

1)

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}.$$

2)

$$f(x, y) = \sqrt{x + y^2}.$$

3)

$$f(x, y) = \cos y \sqrt{x}.$$

4)

$$f(x, y) = (x^3 + y^2)^5.$$

5)

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

6)

$$f(x, y) = \ln \frac{x + y}{y}.$$

7)

$$f(x, y) = x^y.$$

8)

$$f(x, y) = \ln \frac{x - y}{x + y}.$$

Exercice 5

Déterminer les courbes de niveaux des fonctions suivantes :

1)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3.$$

2)

$$f(x,y) = \frac{x-1}{2y+3}.$$

3)

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

4)

$$f(x,y) = \frac{x^2+2x-1}{y+3}.$$

5)

$$f(x,y) = \frac{2}{xy}.$$

6)

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Exercice 6

1) Soit f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

2) On dit que f est harmonique si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.

a)

$$f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

b)

$$f(x,y) = \ln \sqrt{(x^2+y^2)}.$$

c)

$$f(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x.$$

Exercice 7

1) Calculer la différentielle totale de chacune des fonctions suivantes :

a)

$$f(x,y) = x^2 + x^2y - \sin y.$$

b)

$$f(x,y) = \ln xy.$$

c)

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}.$$

2) Soit $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Caluler la différentielle de f et en déduire la dérivée de $f(\cos t, \sin t)$.

Exercice 8

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes puis préciser leur nature.

1)

$$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3.$$

2)

$$f(x,y) = e^x \sin y.$$

3)

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y.$$

4)

$$f(x,y) = 2x^2 + x^2y^2 + 2y^2 - x^4 - y^4.$$

5)

$$f(x,y) = x^3 - 6x^2 + 6y^2 + y^3.$$

6)

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

7)

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y}.$$

2.8 Exercices corrigés

Exercice 1

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $\frac{xy}{x+y}$
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
4. $\frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
6. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Solution

On note f la fonction considérée.

1. Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0, $-x+x^3$ tend vers 0 puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\ y=-x+x^3}} f(x,y) = -\infty$. f n'a de limite réelle en $(0,0)$.
2. Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0$ puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$. Mais aussi, pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x\times x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ puis $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$. Donc si f a une limite réelle, cette limite doit être égale à 0 et à $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - 2|xy| + y^2 = (|x|-|y|)^2 \geqslant 0$ et donc $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Par suite, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2) = 1$. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

5. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^3+y^3| = |x+y|(x^2+xy+y^2) \leqslant \frac{3}{2}|x+y|(x^2+y^2)$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}|x+y|.$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

6. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^4+y^4| = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^4+y^4|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}(x^2+y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}(x^2+y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice 2

On pose $f_{x,y} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & xt^2+yt \end{array}$ puis $F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

Déterminons tout d'abord $F(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. • Pour $y \in \mathbb{R}$, $F(x,y) = \text{Max}\{f_{0,y}(-1), f_{0,y}(1)\} = \text{Max}\{y,-y\} = |y|$. • Si $x \neq 0$, $F(x,y) = \text{Max}\left\{f_{x,y}(-1), f_{x,y}\left(-\frac{y}{2x}\right), f_{x,y}(1)\right\} = \text{Max}\left\{x+y, x-y, -\frac{y^2}{4x}\right\} = \text{Max}\left\{x+|y|, -\frac{y^2}{4x}\right\}$. Plus précisément, si $x > 0$, on a $x+|y| > 0$ et $-\frac{y^2}{4x} \leqslant 0$. Donc $F(x,y) = x+|y|$ ce qui reste vrai quand $x = 0$. Si $x < 0$, $x+|y|-\left(-\frac{y^2}{4x}\right) = \frac{4x^2+4x|y|+y^2}{4x} = \frac{(2x+|y|)^2}{4x} < 0$ et donc $F(x,y) = -\frac{y^2}{4x}$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{cases} x + |y| \text{ si } x \geqslant 0 \\ -\frac{y^2}{4x} \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

En vertu de théorèmes généraux, F est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$.

Soit $y_0 \neq 0$. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x<0,\ y=y_0}} F(x,y) = +\infty \neq |y_0| = F(0,y_0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,y_0)$. Enfin, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x<0,\ y=\sqrt{-x}}} F(x,y) = \dfrac{1}{4} \neq 0 = F(0,0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,0)$.

F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$ et est discontinue en tout $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2$ où $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

Solution

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ et donc f est définie sur $\mathbb{R}^2$. • f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. • **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{x\times 0\times(x^2-0^2)}{x\times(x^2+0^2)} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. • Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$.

Finalement, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(y,x)=-f(x,y)$. Par suite, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. En effet, pour (x_0,y_0) donné dans $\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{-f(y,x_0)+f(y_0,x_0)}{y-y_0}=-\frac{f(y,x_0)-f(y_0,x_0)}{y-y_0}\underset{y\to y_0}{\to}-\frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0).$$

Donc, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\begin{cases}0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\\ \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y(x^4+4x^2y^2-y^4)|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, puisque $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. f est donc au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. • Pour $x\neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{x^4}{x^4}=1$ et donc $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. Pour $y\neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-\frac{y^4}{y^4}=-1$ et donc $\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=-1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Schwarz.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ exactement sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

Solution

1. Posons $\Delta = \{(x,y)/\ y \neq 0\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en vertu de théorèmes généraux. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y^2 \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$
Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(x_0,0)$. Finalement,
$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

2. • f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. En particulier, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Δ. pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right),$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$.** Pour $x \neq x_0$, $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = 0$ et donc $\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\rightarrow} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases}.}$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $y \neq 0$,

$$\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ y\left|\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

et donc $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} \underset{y \to 0}{\rightarrow} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \end{cases}.}$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=0$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=0.}$$

- **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.** Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y}=1$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=1.}$$

Exercice 5

Le laplacien d'une application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Déterminer une fontion de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$g(x,y)=f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

Solution

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\in[-1,1]$. Plus précisément, quand x décrit $\mathbb{R}$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times 0)}$ décrit $[-1,1]$ et donc quand (x,y) décrit $\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}$ décrit $[-1,1]$. On suppose déjà que f est de classe C^2 sur $[-1,1]$. L'application g est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{2\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \text{ puis } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right).$$

Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) - 2\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)\frac{-4\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) &= \frac{-8\cos(2x)\operatorname{ch}^2(2y) + 8\cos(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&\quad + \frac{4\sin^2(2x)\operatorname{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4(1-\cos^2(2x))\operatorname{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)(\operatorname{ch}^2(2y)-1)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\operatorname{ch}^2(2y) - 4\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{4}{\operatorname{ch}^2(2y)}\left(-2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\Delta g = 0 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ -2tf'(t) + (1-t^2)f''(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1], ((1-t^2)f')'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in [-1,1],\ (1-t^2)f'(t) = \lambda.$$

Le choix $\lambda \neq 0$ ne fournit pas de solution sur $[-1,1]$. Donc $\lambda = 0$ puis $f' = 0$ puis f constante ce qui est exclu. Donc, on ne peut pas poursuivre sur $[-1,1]$. On cherche dorénavant f de classe C^2 sur $]-1,1[$ de sorte que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall t \in]-1,1[,\ (1-t^2)f'(t) = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* /\ \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} /\ \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \lambda \operatorname{argth} t + \mu.$$

Exercice 6

Trouver les extrema locaux de

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array}$$
2. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$$

Solution

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Donc si f admet un extremum local, c'est nécessairement en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ avec $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2 + y^2 + 3y \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2y - 1 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Donc f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ égal à $-\frac{7}{3}$ et ce minimum local est un minimum global. D'autre part, f n'admet pas de maximum local.

2. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1,1), (-1,-1).$$

Les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Maintenant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$. Ceci permet de restreindre l'étude aux deux points $(0,0)$ et $(1,1)$. • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^4 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x,x) = -4x^2 + 2x^4 = 2x^2(-2 + x^2) < 0$ sur $]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$. Donc f change de signe dans tous voisinage de $(0,0)$ et puisque $f(0,0) = 0$, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. • Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
f(1+h,1+k)-f(1,1) &= (1+h)^4+(1+k)^4-4(1+h)(1+k)+2 = 6h^2+6k^2 \\
&- 4hk+4h^3+4k^3+h^4+k^4 \\
&\geqslant 6h^2+6k^2-2(h^2+k^2)+4h^3+4k^3+h^4+k^4 = 4h^2 \\
&+4h^3+h^4+4k^2+4k^3+k^4 \\
&= h^2(2h^2+1)^2+k^2(2k^2+1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

f admet donc un minimum global en $(1,1)$ (et en $(-1,-1)$) égal à -2.

Exercice 7

Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

Solution

Soit M un point intérieur au triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note x, y, z et $\mathcal{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MCA, MAB et ABC. On a

$$d(M,(BC))d(M,(CA))d(M(AB)) = \frac{2\text{aire}(MBC)}{a}\frac{2\text{aire}(MCA)}{b}\frac{2\text{aire}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathcal{A}-x-y).$$

On doit donc déterminer le maximum de la fonction $f(x,y) = xy(\mathcal{A}-x-y)$ quand (x,y) décrit le triangle ouvert $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0,\ x+y < \mathcal{A}\}$. On admet que f admet un maximum global sur le triangle fermé $T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant \mathcal{A}\}$ (cela résulte d'un théorème de math Spé : « une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum »).

Ce maximum est atteint dans l'intérieur T de T' car f est nulle au bord de T' et strictement positive à l'intérieur de T'.

Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f atteint son maximum sur T en un point critique de f. Or, pour $(x, y) \in T^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathcal{A} - x - y) - xy = 0 \\ y(\mathcal{A} - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathcal{A} - 2x - y) = 0 \\ x(\mathcal{A} - x - 2y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \mathcal{A} \\ x + 2y = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Le maximum cherché est donc égal à $\frac{8}{abc} \times \frac{\mathcal{A}}{3} \times \frac{\mathcal{A}}{3} \times \left(\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{3} - \frac{\mathcal{A}}{3}\right) = \frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$. (On peut montrer que ce maximum est obtenu quand M est le centre de gravité du triangle ABC).

Exercice 8

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} + \sqrt{y^2 + (x - a)^2}$.

Solution

Soient $\mathcal{R}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique puis M, A et B les points de coordonnées respectives (x, y), $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans $\mathcal{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = MA + MB \geqslant AB = a\sqrt{2}$ avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. Donc

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ existe et vaut } a\sqrt{2}.}$$

Exercice 9

Trouver toutes les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application f de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Solution

Soit φ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ puis f l'application définie sur U par $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Puis, quand (x,y) décrit U, $\frac{y}{x}$ décrit $\mathbb{R}$ (car $\frac{y}{1}$ décrit déjà $\mathbb{R}$)

$$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3} \Leftrightarrow \forall (x,y)\in U,\ \frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ 2t\varphi'(t)+(t^2-1)\varphi''(t)=t$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda \quad (*)$$

Maintenant, $\frac{t^2}{2}+\lambda$ ne s'annule pas en ± 1, l'égalité $(*)$ fournit une fonction φ telle que φ' n'a pas une limite réelle en ± 1. Une telle solution n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc nécessairement $\lambda=-\frac{1}{2}$ puis

$$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\ \text{(par continuité de } \varphi' \text{ en } \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{t}{2}+\lambda.$$

Exercice 10

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. $2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ (en utilisant le changement de variables $u=x+y$ et $v=x+2y$)

2. $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$ sur $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x>0\}$ (en passant en polaires).

Solution

1. $\begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2u - v \\ y = -u+v \end{cases}$. L'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, posons alors $g(u, v) = f(2u - v, u + v) = f(x, y)$ de sorte que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = g(x + y, x + 2y) = g(u, v)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x+y, x+2y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(g(x+y, x+2y)\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que} \\
&\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = F(v) \\
&\Leftrightarrow \exists F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \\
&\text{telle que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x+2y).
\end{aligned}$$

2. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On pose

$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta)$. On sait que $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = r\frac{\partial g}{\partial r},$$

puis

$$\forall (x,y)\in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \forall r>0,\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \Leftrightarrow \forall r>0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/\ \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \exists\varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[/$$

$$\forall (x,y)\in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\psi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 11

1. Montrer que l'application $\varphi : (r, \theta) \to (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x, y)$ est un élément de $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Solution

1. L'application $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^∞ car ses coordonnées le sont. Pour montrer que c'est un difféormorphisme global, il suffit de montrer que c'est un difféo local (théorème de

l'inverse local) et qu'elle est bijective. Calculons la matric jacobienne de φ :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

La jacobienne de φ est $det(D\varphi(r,\theta)) = r(\sin^2 x + \cos^2 x) = r > 0$ si $(x, y) \neq (0,0)$. L'application φ est donc bien un difféomorphisme local au voisinage de chacun des point de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. La bijectivité se vérifie en explicitant par exemple la réciproque de φ (si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on pourra considérer les données x^2+y^2 et y/x...).

Exercice 12

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pas

$$\varphi(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y).$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$).
4. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
5. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Solution

1. φ a des coordonnées de classe C^1, elle l'est donc aussi. On a

$$Jac(\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}$$

   On a $det(Jac(\varphi)(x,y)) = 1 - 1/4\cos(x/2)\cos(y/2) \geqslant 3/4 > 0$. Par conséquent la jacobienne est inversible et $D\varphi(x,y) \in Isom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = GL(\mathbb{R}^2$.

2. D'après le théorème de l'inverse local, Il suffit de montrer que φ est injective. Supposons $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$, alors $\sin(y_1/2) - x_1 = \sin(y_2/2) - x_2$ et $\sin(x_1/2) - y_1 = \sin(x_2/2) - y_2$. D'où $\sin(y_1/2) - \sin(y_2/2) = x_1 - x_2$ et $\sin(x_1/2) - \sin(x_2/2) = y_1 - y_2$. Or, $\forall a, b \in \mathbb{R}, |\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$ (conséquence des accroissements finis appliqué à $\sin x$). Donc $|x_1 - x_2| \leqslant |y_1/2 - y_2/2|$ et $|y_1 - y_2| \leqslant |x_1/2 - x_2/2|$ d'où $|x_1 - x_2| \leqslant 1/4|x_1 - x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. $\varphi : U \to F$ est injective. L'ensemble $f(U)$ est ouvert car il est réunion d'ouverts (d'après thm inverse local). C'est un difféomorphisme en U et $\varphi(U)$.

3. Soient $(X_1, y_1), (X_2, Y_2) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi(x_1,y_1) = (X_1, Y_1)$ et $\varphi(x_2,y_2) = (X_2,Y_2)$ ou encore $\varphi^{-1}(X_1,Y_1) = (x_1,y_1)$ et $\varphi^{-1}(X_2,Y_2) = (x_2,y_2)$. On a

$$||\varphi^{-1}(X_1,Y_1) - \varphi^{-1}(X_2,Y_2)|| = ||(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|| = ||(x_1 - x_2, y_1, y_2)|| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

   Or $\sin(y_1/2) - x_1 = X_1$, $\sin(y_2/2) - x_2 = X_2$, $\sin(x_1/2) - y_1 = Y_1$ et $\sin(x_2/2) - y_2 = Y_2$. Par conséquent

$$x_1 - x_2 = \sin(y_1/2) - X_1 - \sin(y_2/2) + X_2$$

$$y_1 - y_2 = \sin(x_1/2) - Y_1 - \sin(x_2/2) + Y_2.$$

D'où

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqslant |X_2 - X_1| + |\sin(y_1/2) - \sin(y_2/2)| + |Y_2 - Y_1| + |\sin(x_1/2) - \sin(x_2/2)|$$

$$\leqslant |X_2 - X_1| + 1/2|y_1 - y_2| + |Y_2 - Y_1| + 1/2|x_1 - x_2|$$

d'où

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqslant 2(|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1|) \leqslant 2||(X_1, Y_1) - (X_2, Y_2)||.$$

Donc φ^{-1} est lipschitzienne.

4. Soit (X_n, Y_n) une suite de cauchy dans $\varphi(\mathbb{R}^2)$, $((X_n, Y_n) = \varphi(x_n, y_n)\,; (x_n, y_n) = \varphi^{-1}(X_n, Y_n))$. Pour tout $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, p, q \geqslant n \Rightarrow ||(X_p, Y_p) - (X_q, Y_q)|| < \varepsilon$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}; p, q \geqslant n \Rightarrow ||(x_p, y_p) - (x_q, y_q)|| < 2\varepsilon$. La suite (x_n, y_n) est alors de cauchy dans $\mathbb{R}^2$, qui est complet. Par conséquent elle converge. Soit (x, y) sa limite. Comme φ est continue et que $\lim_n (x_n, y_n) = (x, y)$ alors $\lim_n \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x, y)$. La suite (X_n, Y_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge. Soit (X, Y) sa limite, alors $(X, Y) = \varphi(x, y)$ car $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ et $\varphi(x_n, y_n) \to \varphi(x, y)$. Donc $(X, Y) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est alors complet et donc fermé. Comme $\varphi(\mathbb{R}^2$ est un ouvert fermé et non vide (il contient $(0, 0) = \varphi(0, 0)$) dans le connexe $\mathbb{R}^2$, on a $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

5. $p = (1-\pi/2, \sqrt{2}/2-\pi) = \varphi(\pi/2, \pi) = \varphi(q)$ où $q = (\pi/2, \pi)$. $\varphi : E \to F$ est un C^1-difféormorphisme

donc $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id$ et donc

$$Id = D(\varphi^{-1} \circ \varphi)(q) = D\varphi^{-1}(\varphi(q)) \circ D\varphi(q).$$

Or $D\varphi^{-1}(\varphi(q)) = (D\varphi(q))^{-1}$ et donc $Jac\varphi^{-1}(p) = (Jac\varphi(\pi/2, \pi))^{-1}$. Or

$$Jac\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Jac\varphi(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Jac\varphi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h\rangle \geqslant \alpha\langle h, h\rangle.$$

1. En considérant la fonction $t \to \varphi(t) = \langle f(a + t(b-a)), b_a)\rangle$, montrez que

$$\langle f(b) - f(a), b - a\rangle \geqslant \alpha\langle b - a, b - a\rangle \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n.$$

   En déduire que f est une application fermée.

2. Démontrer que, pour tout $x \in E, Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.

3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Solution

Posons $\theta(t) = a + t(b - a)$ et $\Psi(x) = \langle x, b - a\rangle$ qui est linéaire et continue (donc C^∞).

1. f et φ sont de classe C^1 car composées d'applications de classe C^1. On a

$$D\varphi(t) = \varphi'(t) = (\Psi\circ f\circ\theta)(t)'(t) = D\Psi(f(\theta(t)))\circ Df(\theta(t))\circ D\theta(t) = \langle Df(a+t(b-a))(b-a), b-a\rangle.$$

   Par conséquent :

$$\varphi'(t) \geqslant \alpha\langle b - a, b - a\rangle.$$

Or, $\varphi(1)-\varphi(0)=\langle f(b)-f(a),(b-a)\rangle$ et il existe $t\in]0,1[$ tel que $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t)$ d'où

$$\langle f(b)-f(a),b-a\rangle\geqslant\alpha\langle b-a,b-a\rangle.$$

Indications pour mq f est fermée : Posons $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ alors

$$\alpha\|b-a\|^2\leqslant\langle f(b)-f(a),b-a\rangle\leqslant\|f(b)-f(a)\|.\|b-a\|.$$

D'où

$$\|b-a\|\leqslant 1/\alpha\|f(b)-f(a)\|.$$

Soit F un fermé et y_n une suite de points de $f(F)$ convergeant vers un point limite y_∞. Il faut montrer que $y_\infty\in f(F)$. Soit x_n une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x_n)=y_n$. Il reste à montrer que cette suite admet est de Cauchy, qu'elle converge donc et que sa limite x_∞ vérifie $f(x_\infty)=y_\infty$.

Exercice 14

Donner l'allure de $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^4+y^3-y^2+x-y=0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Solution

Posons $f(x,y)=x^4+y^3-x^2-y^2+x-y$, $f(0,0)=0$ et $f(1,1)=0$. $\mathbb{R}$ est un espace de Banach et f est de classe C^1 car polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-2y-1$$

Étude au point $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Il existe I contenant 0, J contenant 0 et $g : I \to J$, C^1 tel que $g(0) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in I$. On a

$$x^4 + (g(x))^3 - x^2 - (g(x))^2 + x - g(x) = 0$$

En dérivant on obtient :

$$4x^3 + 3g^2(x)g'(x) - 2x - 2g(x)g'(x) + 1 - g'(x) = 0$$

d'où $g'(0) = 1$. On dérive encore :

$$12x^2 + 6g(x)g'(x)^2 + 3g^2(x)g''(x) - 2 - 2g'(x)^2 - 2g(x)g''(x) - g''(x) = 0$$

d'où

$$g''(0) = -4.$$

Étude au point $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$. Ce n'est plus un difféo, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites. Dans ce cas, on prend la dérivée par rapport à la première variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe I contenant 1, J contenant 1 et $g : I \to J$ de classe C^1 tels que $g(1) = 1$ et $f(g(x), x) = 0, \forall y \in I$. On a

$$g(y)^4 - g^2(y) + g(y) + y^3 - y^2 - y = 0$$

En dérivant

$$4g^3 g' - 2gg' + g' + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

d'où $4g'(1) - g'(1) = 0$ et donc $g'(1) = 0$.

$$12g^2(g')^2 + 4g^3 g'' - 2gg'' - 2(g')^2 + g'' + 6y - 2 = 0$$

d'où $g''(1) = -4/3$.

3.1 Intégrales curvilignes

3.1.1 Intégrale curviligne d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant une courbe Γ, $t \in [a,b]$.

L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Exemple 24. *Soit Γ le cercle dans le plan $z=1$ de centre $(0,0,1)$ et de rayon $R>0$. On choisit une représentation paramétrique, pour $t \in [0,2\pi[$*

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = & R\cos t \\ y(t) = & R\sin t \\ z(t) = & 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\gamma}'(t) = \begin{cases} x'(t) = & -R\sin t \\ y'(t) = & R\cos t \\ z'(t) = & 0 \end{cases}$$

On a $\quad |\overrightarrow{\gamma}'(t)| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$. *La longueur du cercle*

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |\overrightarrow{\gamma}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R$$

Soit $f(x,y,z) = x^2 = y^2 + z^2$. *Sa restriction sur le cercle est*

$$f(x,y,z)\|_\Gamma = f(R\sin t, R\cos t, 1) = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t + 1 = R^2 + 1$$

et finalement l'intégrale curviligne vaut

$$I = \int_0^{2\pi} (1+R^2)R\,\mathrm{d}t = 2\pi(1+R^2)R$$

3.2 Définition. Intégrale double

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}^2$. On partage ce rectangle en $n\cdot m$ petits rectangles $R_{ij}, i \in [1,m],\ j \in [1,n]$. R_{ij} a pour cotés le m-ième segment horizontal et le n-ième segment vertical. Son sommet supérieur droit est le point $(x_i, y_j) = (a + i\cdot\frac{b-a}{m}, c + j\cdot\frac{d-c}{n})$. La *somme de Riemann,* S_{mn}, est la somme des volumes des parallélépipèdes de bases sur R_{ij} et de hauteurs donnés par la valeur de f en (x_i, y_j) de R_{ij}

$$S_{mn} = \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).$$

S_{mn} est appelé la somme Darboux.

Définition 1

L'intégrale double de f sur R est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn}.$$

Propriété 1

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, alors

$$\iint_R (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2. **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x,y) \leqslant g(x,y),\ \forall (x,y) \in R$, alors

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On en déduit que

$$\left|\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_R |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3. **Théorème de Fubini pour un rectangle.** L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b (f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d (f(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$$

En particulier, si $f(x,y) = g(x)h(y)$

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

3.2.1 Aire d'une partie quarrable. Théorème de Fubini

Pour définir l'intégrale double sur une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un rectangle on introduit la notion d'une partie quarrable du plan.

Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle qui la contient.

On appelle subdivison σ de R, $m \cdot n$ rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], x_i, y_j \in R$ venant du partage de $[a, b]$ en m segments et de $[c, d]$ en n segments :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \ ; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

pour m et n quelconques. Le rectangle R_{ij}, est d'aire $\mu(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

A toute subdivison σ de R on associe deux quantités qu'on appelle les sommes de Darboux :.

$$s(\sigma) = \sum_{Rij \subset D} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) \ \text{ et } S(\sigma) = \sum_{Rij \bigcap D \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j).$$

Définition 2

On dit que $D \subset R$ est quarrable si la borne supérieure des sommes $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des sommes $S(\sigma)$. Leur valeur commune donne l'aire de D.

Remarque 16. *Si D est une partie quarrable du plan alors la frontière de D est quarrable d'aire nulle. Ainsi, un disque ou un polygone sont des exemples de parties quarrables, que l'on prenne ou non leur frontière.*

Définition 3

Une fonction f bornée sur une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ est intégrable si et seulement si la somme (aussi appelé une somme de Riemann)

$$\sum_{R_{ij} \bigcap D \neq \emptyset} f(u_i, v_j) \text{ Aire}(R_{ij})$$

tend vers une limite finie indépendante du choix de (u_i, v_j) quand $x_{i+1} - x_i$ et $y_{j+1} - y_j$ tendent vers 0. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur D :

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Théorèm 1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur une partie quarrable du plan. Alors f est intégrable sur D.

Remarque **17.** *La propriété d'être bornée est importante. C'est la même chose pour les fonctions d'une seule variable comme le montre l'exemple de la fonction* $1/x$ *qui n'est pas bornée sur l'intervale* $]0, 1]$: *elle n'est pas intégrable !*

Théorèm 2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur une partie quarrable du plan. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle alors f est intégrable sur D.

Par ailleurs, l'aire d'une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être vue comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :

$$Aire(D) = \iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Il est facile d'expliquer cela par un raisonnement géométrique - présenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume représente l'intégrale double.

Comment, en pratique, calcule-t-on les intégrales doubles sur une partie quarrable du plan ?

- Soit ϕ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

(Faire un dessin). Soit f une fonction réelle intégrable sur D. Alors, on a

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Exemple **25.** *On calcule*

$$I = \iint_D (x + y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

où D est un triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(2, 0)$. Alors ici

$$\phi(x) = 0 \ \textit{et} \ \psi(x) = -\frac{x}{2} + 1, \ x \in [0, 2].$$

Donc

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x/2+1} (x+y)^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[(x+y)^3 \right]_{y=0}^{y=-x/2+1} \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$$

La variable x ayant exactement le même statut que la variable y donc on peut calculer la même intégrale comme suit :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et obtenir le même résultat. Il faut faire attention aux bornes de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est un nombre - on ne peut pas avoir des fonctions pour des bornes pour l'intégrale simple calculée en dernier.

3.2.2 Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne

Soit f une fonction continue sur un compact quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit une bijection notée $\Delta \to D$ définie par :

$$(u, v) \mapsto (x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)),$$

ϕ et ψ étant de classe C^1. Alors,

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\phi(u, v), \psi(u, v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

où $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (définition 3) des dérivés premières de l'application $\Delta \to D$.

On peut le voir en utilisant le calcul des formes différentielles. Si $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ la 2-forme différentielle $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ s'exprime en $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ par le calcul suivant (dans le contexte des intégrales on n'écrit pas de symbole de produit $\wedge$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Exemple 26. *Si on effectue un changement linéaire des variables :*

$$\phi(u,v) = au + bv,\ \ \psi(u,v) = cu + dv$$

alors, la fonction intégrée n'est modifiée que par le facteur

$$|ad - bc|,$$

(valeur absolue du déterminant). Lorsque ce déterminant est 1 *(pour une rotation par exemple), la fonction intégrée reste inchangée. Ce changement de variables linéaire envoie un carré* $[0,1]\times[0,1]$ *vers le parallélogramme* P *engendré par les vecteurs* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$*. Donc en particulier*

$$Aire(P) = \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[0,1]\times[0,1]} |ad-bc|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = |ad-bc|$$

Exemple 27. *Changement en coordonnées polaires. Soit* $[0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ *une bijection entre les* *coordonées polaires et cartésiennes données par*

$$(r,t) \mapsto (x = r\cos t, y = r\sin t).$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

Calculer $I = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *sur* D*, disque de centre* $(0,0)$ *de rayon* R*. Le calcul direct est assez long :*

$$\begin{aligned} I = \ & \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} 2\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\ = \ & \int_{-R}^{R} 2\,(y^3/3)_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^3\,\mathrm{d}x \\ = \ & \tfrac{4}{3}\int_{\pi/2}^{0} R^3\sin^3\theta(-R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{4}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables

$$x = R\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad \mathrm{d}x = -R\sin\theta\ \mathrm{d}\theta,\ R^2 - x^2 = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta.$$

On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4\theta$ *:*

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Ce calcul a l'air assez long et fort utile, mais à l'aide d'un changement de variables sous l'intégrale double on arrive au résultat plus rapidement : les coordonnées polaires transforment le rectangle en disque. Ici *on a un disque et donc :*

$$\Delta = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant r \leqslant R \ et \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\} \to D = \{(x,y) \in R^2 \left| x^2 + y^2 \leqslant R^2 \right\}$$

D'où

$$I = \iint_{\Delta} r^2 \sin^2 tr \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}r = \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^4}{4}$$

3.3 Intégrales triples

Pour certaines parties $E \subset \mathbb{R}^3$ et certaines fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ on définit un nombre réel noté

$$I = \iiint_E f(x,y,z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

et appelé l'intégrale de f sur E.

Définition 1

Un compact élémentaire Δ de $\mathbb{R}^3$ est une partie de $\mathbb{R}^3$ de l'une des formes suivantes :

(1) $\Delta_{(x,y)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \phi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \phi_2(x,y),$ où$(x,y) \in D -$ partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $\phi_1, \phi_2 -$ fonctions continues sur$D\}$

(2) $\Delta_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ a \leqslant z \leqslant b,$ où$(x,y) \in D(z) =$ la projection sur le plan xy de l'intersection de Δ et du plan passant par $(0,0,z)$ et parallèle au plan $xy\}$

(3) $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, dans ce cas on dit aussi que c'est un pavé de $\mathbb{R}^3$.

Théorèm 1

(de Fubini) Soit Δ un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$ et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Δ.

1. Si Δ est de type $\Delta_{(x,y)}$ alors

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   (intégration par "piles")

2. Si Δ est de type Δ_z alors

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

   (intégration par "tranches")

3. Si $\Delta = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ alors

$$\begin{aligned}\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \cdots\end{aligned}$$

En particulier, le volume de Δ est l'intégrale triple sur Δ de la fonction 1 :

$$\text{Volume de } \Delta = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Les intégrales triples sont des intégrales de 3-formes différentielles. Pour les 3-formes différentielles on peut calculer ce qui ce passe si on change les variables. Supposons que x, y et z soient des fonctions de variables u, v et w telles qu'on a les formules

$$x = x(u, v, w), \;\; y = y(u, v, w), \;\; z = z(u, v, w).$$

Ce sont des formules de changement de variables - c'est-à-dire une transformation qui à un point m de coordonnées u, v et w associe le point de coordonnées x, y et z. Le jacobien du changement de variable est le déterminant

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}.$$

Alors, si le domaine Δ est transformé par ce changement de variables en Δ', la 3-forme différentielle $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ doit être changée à l'aide du Jacobien et on obtient la formule suivante :

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

3.3.1 Coordonnées cylindriques. Coordonnées sphériques

Prima facie, les

coordonnées cylindriques sont r, t et z telles que

$$x = r\cos t, \;\; y = r\sin t, \;\; z = z, \;\text{avec } r^2 = x^2 + y^2, \quad t \in [0, 2\pi[$$

On obtient

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,t,z)}\right| = r$$

Exemple 28. *Le volume de la partie Δ du cylindre d'équation $x^2+y^2-ax \leqslant 0$ (où $a>0$) comprise entre le plan xy et le plan d'équation $z=1$ s'obtient grâce à la formule de changement de variables : Δ est transformée par les coordonnées cylindriques en*

$$\Delta' = \{(r,t,z)|\ t \in [0,2\pi[,\ \ r \in [0, a\cos t],\ \ z \in [0,1]$$

Alors,

$$\begin{aligned} V = &\iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\cos t} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t)^2}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2\pi}{2} \end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques sont (θ,ϕ,r) telles que

$$\begin{aligned} g\ \ : [0,\pi]\times[0,2\pi]\times[0,+\infty[\ &\to\ \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi,r)\ &\mapsto\ g(\theta,\phi,r) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.4 Exercices sur les intégrales multiples

Exercice 1

Calculer l' intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

1. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $(0,-1)$ et $(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.
2. $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
3. $\omega = xyzdx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Solution

1. C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1.

$$\int_C \omega = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt$$
$$= 0 \text{ (fonction impaire)}.$$

$$\boxed{\int_C \omega = 2\ln 2.}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1-\cos(4t))\right) dt = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t)\ dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t)dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= -\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$$

Exercice 2

Soit $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2dx + x^2dy$.

Solution

1. $\omega = x^2dx + y^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Schwarz. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.

2. $\omega = y^2dx + x^2dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.

   On parcourt le cercle C le cercle de centre (a, b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma \ : \ t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left((b + R\sin t)^2(-R\sin t) + (a + R\cos t)^2(R\cos t)\right)\, dt \\
&= R\int_0^{2\pi} (a\cos t - b\sin t + 2aR\cos^2 t - 2bR\sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t))\, dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (2a\cos^2 t - 2b\sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t))\, dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t) - b(1 - \cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t\sin t + \sin^2 t))\, dt \\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a - b + R(\cos t - \sin t)(1 + \cos t\sin t))\, dt \\
&= R^2\left(2\pi(b - a) + \int_0^{2\pi} R(\cos t - \sin t + \cos^2 t\sin t - \cos t\sin^2 t)\, dt\right) \\
&= 2\pi R^2(b - a).
\end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer les intégrales multiples suivantes

1. $I = \iint_D (x+y)\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.
2. $I = \iint_{[-1,1]^2} |x+y|\, dxdy$.
3. $I = \iint_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.
4. $I = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$.
5. $I = \iint_{x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.
6. $I = \iiint_{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1} xyzdxdydz$.
7. $I = \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant 1} zdxdydz$.

Solution

1. Représentons le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.

$$I = \iint_D (x+y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y) dy \right) dx \text{ (ou aussi } \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x+y) dx \right) dy)$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\iint_D (x+y)\,dxdy = \frac{2}{3}.}$$

2. Si on pose pour $(x,y) \in /mbr^2$, $f(x,y) = |x+y|$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O. Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1,1]^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy + \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy \\
&= 2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0} (x+y)\,dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)\,dy\right)dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1} dx = 2\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy = \frac{8}{3}.}$$

3. Représentons le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.

$$I = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right)x\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{12}.$$

4. En passant en polaires, on obtient

$$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, rdrd\theta$$
$$= \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\, dr\right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \text{ (intégrales indépendantes)}$$
$$= 2\pi \times \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi \ln 2.$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy = \pi \ln 2.}$$

5. Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Puisque $x \leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r,θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$M \in D \Leftrightarrow r\cos\theta \leqslant r^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } (0 < r \leqslant 1 \text{ et } r \geqslant \cos\theta.$$

En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^1 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}d(\tan\theta)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\tfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

6.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 zdz\right)ydy\right)xdx = \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{2}(1-y^2)ydy\right)xdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1 (y-y^3)dy\right)xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)xdx\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 (x^5-2x^3+x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \tfrac{1}{48}.}$$

7. En sommant par tranches, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}} dxdy\right) zdz \\
&= \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1} (1-\sqrt{z})^4 dudv\right) zdz \text{ (en posant } x=(1-\sqrt{z})^2u \text{ et } y=(1-\sqrt{z})^2v) \\
&= \mathcal{A}(D) \times \int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4 dz \text{ où } D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2} dv\right) du = \int_0^1 (1-2\sqrt{u}+u)du = 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

et

$$\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4 dz = \int_0^1 (z-4z^{3/2}+6z^2-4z^{5/2}+z^3)\ dz = \frac{1}{2}-\frac{8}{5}+2-\frac{8}{7}+\frac{1}{4}=\frac{1}{140}.$$

Finalement

$$\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz = \frac{1}{840}.}$$

Exercice 4

(Un calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$).

1. r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x \sin x - y \cos x)dx + (x \cos x + y \sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.

2. En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$ en fonction d'une autre intégrale.
3. En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Solution

1. La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après le théorème de Schwarz, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.

   Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, posons $P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \sin x - y \cos x)$ et $Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \cos x + y \sin x)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\sin x + \cos x + y\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x + y\sin x) + (x^2+y^2)(-x\sin x + \cos x + y\cos x))\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\sin x - y\cos x) - 2y(x\sin x - y\cos x) - (x^2+y^2)\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On choisit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leqslant 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0,y)$, $y>0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ. Puisque ω est exacte sur Ω, on sait alors que $\int_\Gamma \omega = 0$.

2. Le contour Γ est constitué de 4 arcs :

- Γ_1 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de r à R,
- Γ_2 est l'arc $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à π.
- Γ_3 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,

- Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, t variant en décroissant de π à 0.

D'après la question 1), $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt = \int_r^R P(t,0)\,dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2}\times t\sin t\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_3}\omega = \int_{-R}^{-r}\frac{\sin t}{t}\,dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\,dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega = 2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ puis pour tout $(r,R)\in]0,+\infty[^2$ tel que $r<R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\omega &= \int_0^\pi (P(R\cos t, R\sin t)(-\sin t) + Q(R\cos t, \sin t)(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}((\cos t\sin(R\cos t)\\ &- \sin t\cos(R\cos t))(-\sin t) + (\cos t\cos(R\cos t) + \sin t\sin(R\cos t))(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_4}\omega = \int_\pi^0 e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = -\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ et on a montré que

$$\boxed{\forall (r,R)\in]0,+\infty[^2,\ r<R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

3. • Etudions $\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt$. Pour $R>0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\left|\cos(R\cos t)\right|\,dt \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt\\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{R}(1-e^{-2R})\\ &\leqslant \frac{\pi}{R}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. On en déduit que pour tout $r>0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\boxed{\forall r>0,\ \int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Etudions maintenant $\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$. Soit $F\ :\ \begin{array}{rcl}[0,+\infty[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ (r,t) & \mapsto & e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\end{array}$

- Pour tout réel $r\in[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto F(r,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

- Pour tout réel $t\in[0,\pi]$, la fonction $r\mapsto F(r,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

- Pour tout $(r,t)\in[0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)|\leqslant 1=\varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r\mapsto\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^\pi e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

et finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 5

Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.

Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y\}$.

Solution

L'aire du domaine considéré $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2x\}$ est

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy.$$

Pour $(x, y) \in D^2$, posons $p = \frac{y^2}{2x}$ et $q = \frac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D & \to & [p_1, p_2] \times [q_1, q_2] \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y}\right) \end{array}$$ et vérifions que φ est un C^1-difféomorphisme.

- Pour chaque $(x, y) \in D^2$, on $2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x$ et $2q_1y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y$ ou encore $p_1 \leqslant \frac{y^2}{2x} \leqslant p_2$ et $q_1 \leqslant \frac{x^2}{2y} \leqslant q_2$. Donc φ est bien une application.

- Soit $(p, q) \in [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$. Pour $(x, y) \in (]0, +\infty[)^2$,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{cases}$$

Donc, l'équation $\varphi(x, y) = (p, q)$ a exactement une solution (x_0, y_0) dans $]0, +\infty[^2$. De plus, puisque $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1, p_2]$ et $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1, q_2]$, on a $2p_1x_0 \leqslant y_0^2 \leqslant 2p_2x_0$ et $2q_1y_0 \leqslant x_0^2 \leqslant 2q_2y_0$ et donc $(x_0, y_0) \in D^2$. Donc φ est une bijection.

- φ est de classe C^1 sur D et pour $(x, y) \in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)} = J(\varphi)(x,y) = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D. On sait alors que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$.

Posons alors $(p,q)=\varphi(x,y)$ dans $\iint_D dxdy$. On obtient

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy = \iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} \left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right| dpdq = \frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]} dpdq = \frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \tfrac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

Exercice 6

Calculer le volume de $B=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n / \ x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\ \|_2$).

Solution

1ère solution. $V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz$. Or $x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}$. On pose donc $u=x+\frac{z}{2}$, $v=\frac{y}{\sqrt{2}}$ et $w=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=2$ puis que

$$V=\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw = 2\times\frac{4\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ est $\frac{4}{3}\pi abc$. La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$. On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives $\lambda=\frac{1}{a^2}$, $\mu=\frac{1}{b^2}$ et $\nu=\frac{1}{c^2}$ puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V=\frac{4}{3}\pi abc=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\frac{8\pi}{3}.}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $R\geqslant 0$, posons $B_n(R)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n.$$

En posant $x_1=Ry_1,\ \ldots,\ x_n=Ry_n$, on a $\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}=R^n$ (quand $R>0$) puis

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n=R^n\int\ldots\iint_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1}dy_1\ldots dy_n=R^nV_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R=0$. Pour $n\geqslant 2$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}V_n(1)&=\int_{-1}^{1}\left(\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n\\&=\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)\end{aligned}$$

où $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Pour calculer I_n, on pose $x = \cos\theta$. On obtient

$I_n = \int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta = 2W_n$ (intégrales de Wallis).

Finalement,

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ V_n(1) = 2W_nV_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n \geqslant 2$,

$$V_n(1) = (2W_n)(2W_{n-1})\ldots(2W_2)V_1(1) = 2^n\prod_{k=2}^{n}W_k = 2^n\prod_{k=1}^{n}W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Donc, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p}W_k = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k}) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(1) &= 2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1}W_k = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1}) = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)} \\ &= \frac{\pi^p2^{2p+1}}{3\times5\times\ldots\times(2p+1)} = \frac{\pi^p2^{p+1}(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times2}{(2p+1)!} = \frac{\pi^p2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall R > 0,\ V_{2p}(R) = \frac{\pi^pR^{2p}}{p!} \text{ et } V_{2p-1}(R) = \frac{\pi^p2^{2p+1}p!R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particulier, $V_1(R) = 2R$, $V_2(R) = \pi R^2$ et $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 7

Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

Solution

Exercice 8

Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathcal{L}$ sa longueur et $\mathcal{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C). Montrer que

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathcal{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de Parseval aux intégrales permettant de calculer $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

Solution

Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L = 2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, telle que $\forall t \in [0, 2\pi]$, $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques.

Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L = 2\pi &= \int_0^{2\pi} 1\ dt = \int_0^{2\pi} (x'^2(t) + y'^2(t))\ dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t)\ dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t)\ dt \\
&= \pi \left(\frac{a_0^2(x')}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \\
&= \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x') + a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) (a_0(x') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}(x(2\pi) - x(0)) = 0 = a_0(y')) \\
&\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2(x) + b_n^2(x) + a_n^2(y) + b_n^2(y)) \right).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t)\ dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ((x(t) + y'(t))^2 - (x(t) - y'(t))^2)\ dt \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_0^2(x+y')}{2} - \frac{a_0^2(x-y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x+y') - a_n^2(x-y') + b_n^2(x+y') - b_n^2(x-y')) \right) \\
&= \pi \left(\frac{a_0(x) a_0(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) a_n(y') + b_n(x) b_n(y')) \right) \text{ (par linéarité des coefficients de FOURIER)} \\
&= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n(x) b_n(y) - b_n(x) a_n(y)) \\
&\leqslant \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) = \frac{\mathcal{L}}{2} \times \frac{\mathcal{L}}{\pi} = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n \geqslant 1$,

$n(a_n(x)b_n(y)-b_n(x)a_n(y)) \leqslant n\times\frac{1}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y)) \leqslant \frac{n^2}{2}(a_n^2(x)+b_n^2(y)+b_n^2(x)+a_n^2(y))$,

sont des égalités. En particulier, pour $n\geqslant 2$, on a $a_n(x)=a_n(y)=b_n(x)=b_n(y)=0$. D'autre part, quand $n=1$, $a_1(x)b_1(y)-b_1(x)a_1(y)=\frac{1}{2}(a_1^2(x)+b_1^2(y)+b_1^2(x)+a_1^2(y))$ impose $(a_1(x)-b_1(y))^2+(b_1(x)+a_1(y))^2=0$ et donc $a_1(y)=-b_1(x)$ et $b_1(y)=a_1(x)$.

D'après le théorème de DIRICHLET, en posant $\alpha=\frac{a_0(x)}{2}$, $\beta=\frac{a_0(y)}{2}$, $a=a_1(x)$ et $b=b_1(x)$,

$$\forall t\in[0,2\pi],\ \begin{cases} x(t)=\alpha+a\cos t+b\sin t=\alpha+\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-t_0)\\ y(t)=\beta-b\cos t+a\sin t=\beta+\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-t_0)\end{cases}$$

où $\cos(t_0)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(t_0)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L=2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathcal{L}$ quelconque, l'homothétique (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathcal{L}}$ a une longueur $\mathcal{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathcal{A}'=\left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}}\right)\times\mathcal{A}$.

L'inégalité $\mathcal{A}'\leqslant\frac{\mathcal{L}'^2}{2\pi}=2\pi$ s'écrit encore $\mathcal{A}\leqslant 2\pi\times\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi^2}=\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2R^2}{4\pi}=\pi R^2=\mathcal{A}$).

$\boxed{\mathcal{A}\leqslant\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}\text{ avec égalité si et seulement si la courbe }(C)\text{ est un cercle.}}$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

Exercice 9

Calculer $I=\displaystyle\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(x^2-y^2)\,dxdy.$

Solution

On pose déjà $u = xa$ et $v = yb$ de sorte que $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = ab$. On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\, dxdy = ab \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (a^2u^2 - b^2v^2)\, dudv.$$

Ensuite,

$$\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} u^2\, dudv = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} v^2\, dudv = \frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (u^2+v^2)\, dudv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \times r dr d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{4},$$

et donc

$$\boxed{I = \frac{\pi ab(a^2-b^2)}{4}.}$$

[1] **A. Ouaqqa**. *Fonctions d'une à plusieurs variables réelles* , ELLIPSES MARKETING (19 septembre 2017).

[2] **G. Hirsch et G. Eguether**. *Fonctions de plusieurs variables : 364 exercices corrigés*, Masson, 1994.

[3] **G. Faccanoni**. *Mathématiques méthodes et exercice*, Dunod, Paris, 2009.

[4] **J. Marie Monier**. *Cours Mathématiques*, Tome2, Dunod, 1977.

[5] **J. Lelong-Ferrand , J. M. Araudies**. *Cours Mathématiques*, Tome2, Dunod, 1977.

[6] **J. Melleray**. *Calcul Intégral et Différentiel*, Université Lyon I, Semestre de printemps 2012-2013.

[7] **J. Marie Monier**. *Mathématiques méthodes et exercice MP*, Dunod paris 2009.

[8] **J. Douchet**. *Calcul différentiel et intégral*, 2007.

[9] **O. Kravchenko, B. Braconnier**. *Math IV : Analyse* , (version du 09/06/2011).

[10] **P. Broussous**. *Fonctions de plusieurs variables*, UNIVERSITÉ DE POITIERS, 2009-2010.