



N° d'ordre : UTMB/FSE/PP/

Filière : Physique

Spécialité : 2eme Année Licence SM-ST

Module : Vibrations et ondes

# Vibrations et Ondes

Cours et Exercices

Bennaceur Said

Expertisé par :

Dr . Kadri Siham  
Dr . Atouani Toufik

Année Universitaire :2020/2021

## Préambule

Le présent polycopié, intitulé : « Vibrations et Ondes Cours et Exercice » est élaboré et présenté en conformité au canevas relatif à la formation Licence LMD-S3 dans le domaine Science de la matière (SM) et Science et Technologie (ST). Ce cours est structuré en deux parties :

La première, répartie en Trois chapitres, traite le problème des vibrations. Le premier chapitre porte les Généralités sur les vibrations. Qui décrit la Définition d'un mouvement vibratoire, exemples de systèmes vibratoires et mouvements périodiques. Dans le deuxième chapitre est destiné en premier partie pour les systèmes linéaires à un degré de liberté ou il traite les oscillations libres, l'oscillateur harmonique, pulsation propre d'un oscillateur harmonique et l'énergie d'un oscillateur harmonique. La deuxième partie de ce chapitre est concernée pour traiter les oscillations libres amorties. Concernant la troisième partie de ce chapitre traite les oscillations libres forcées qui prend en compte le cas d'une excitation sinusoïdale (résonance, déphasage). Et enfin la quatrième partie de ce chapitre est consacrée pour les oscillations amorties forcées où elle décrit les deux modes de vibration (transitoire et permanente), avec une comparaison entre systèmes oscillants mécaniques et électriques. Le troisième chapitre et le dernier de cette partie cite les vibrations aux plusieurs degrés de liberté, car il commence

par une étude sur les systèmes à deux degrés de liberté et il généralise avec les systèmes à  $N$  degrés de liberté. La deuxième partie qui est intitulée par « les ondes mécaniques », consacrée au traitement des phénomènes de propagation des ondes. Car elle est divisée en quatre chapitres, le premier donne des généralités sur les ondes mécaniques initialisant par leurs classifications puis son équation générale finalisant par les caractérisations de ces ondes mécaniques. Le deuxième chapitre traite les ondes transversales sur une corde qui produisent, avec les ondes incidentes et réfléchies les ondes stationnaires. Le troisième chapitre est consacré aux ondes longitudinales dans les fluides finalisant par l'effet Doppler.

Le quatrième chapitre est consacré aux Ondes élastiques dans les solides.

Les cours présentés avec un enchaînement logique, chaque nouveau concept défini est clarifié par des exemples simples et utiles, une série d'exercices dans chaque chapitre venant enrichir le cours, le tout a été réalisé avec l'esprit de permettre une meilleure assimilation par l'étudiant.

*Dr. Bennacour Said*

# SOMMAIRE

Préambule

## PARTIE I : VIBRATION

### CHAPITRE 01 : Généralités sur les vibrations

1. Définition d'un mouvement périodique	02
2. Définition d'une oscillation	02
3. Définition d'un mouvement sinusoïdal	03
4. Nombre de liberté	04
5. Représentation complexe d'un mouvement vibratoire	04
6. Définition des séries de Fourier	04

Exercices 05

### CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

2.1 Les oscillations libres	06
2.1.1 Définition d'un oscillateur libre	06
2.1.2 Définition d'un oscillateur harmonique	06
2.1.3 Equation du mouvement	06
2.1.4 Energie d'un oscillateur harmonique (E)	08
2.1.5 Equation de Lagrange	10
2.1.6 Conditions d'équilibre et d'oscillation	11

Exercices 13

2.2 Oscillateur amortie à un degré de liberté 14

2.2.1 Définition d'un oscillateur amortie	14
2.2.2 Equation de Lagrange	14
2.2.3 Equation du mouvement	14
2.2.3.1 Résolution de l'équation du mouvement	15
2.2.3.2 Décrément logarithmique	17

Exercices 18

2.3 Oscillations amorties forcées 20

2.3.1 Définition d'un oscillateur amortie forcé	20
2.3.2 Equation de Lagrange	20
2.3.3 Equation du mouvement	20
2.3.3.1 Résolution de l'équation du mouvement	21

2.3.3.2 Résonance	23
2.3.3.3 Résonance de phase	24
2.3.3.4 Bande passante	24
2.3.3.5 Analogie électromécanique	26
Exercices	27
<b>CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté</b>	
3.1 Systèmes linéaire de plusieurs degrés de liberté	29
3.1.1 Les type de couplages	29
3.2 Systèmes linéaire deux degrés de liberté cas libre	32
3.2.1 Equation du mouvement	32
3.2.2 Les modes d'oscillations	33
3.3 Système force à deux degrés de libertés	34
3.4 Oscillations forcées d'un système non amorti à deux degrés de liberté	35
3.5 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté	35
Exercices	39
<b>PARTIE II : LES ONDES MECANIQUES</b>	
<b>CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques</b>	
4.1 Classification des ondes	41
4.2 Intégrale général de l'équation générale d'ondes progressives	42
4.2.1 Solution de l'équation de propagation	42
4.3 Vitesse de phase, vitesse de groupe	43
4.4 Front d'onde	44
4.4.1 Exemple des ondes planes, ondes sphériques	44
4.5 Réflexion et transmission des ondes	46
Exercices	48
<b>CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde</b>	
5.1 Introduction	50
5.2 Equation de propagation	50
5.3 Impédance caractéristique	51
5.4 Ondes stationnaires	52
5.4.1 Définition	52
5.4.2 Solution stationnaire de l'équation de l'Alembert	52
5.4.3 Réflexion et transmission	53
5.4.4 Types de condition aux limites pour une corde vibrante	53

5.4.4.1 Deux extrémités fixes	53
5.4.4.2 Une extrémité fixe et l'autre libre	55
5.4.4.3 Deux extrémités libres de la corde	57
5.4.4.4 Autres types de conditions aux limites	58
5.5 Partie expérimentale	59
5.5.1 Expérience générale	59
5.5.2 Energie emmagasinée sur une corde vibrante	59
5.5.3 Énergie cinétique	59
5.5.4 Energie potentielle	60
Exercices	61
<b>CHAPITRE 06 : Ondes longitudinales dans les fluides</b>	
6.1 Introduction	65
6.2 Ondes planes dans un tuyau cylindrique	65
6.2.1 Equation d'ondes dans un gaz	67
6.2.2 Ondes planes dans un tuyau cylindrique	67
6.2.2.1 Equation d'ondes dans un fluide	69
6.2.2.2 Vitesse du son	69
6.2.2.3 Impédance acoustique et impédance caractéristique	70
6.2.2.4 Energie transportée par une onde	71
6.2.2.5 Intensité	74
6.2.2.6 Niveau sonore	75
6.2.2.7 Coefficients de réflexion et de transmission d'ondes (condition aux limites)	75
6.2 Effet Doppler	77
6.3.1 Historique	77
6.3.2 Définition	78
Exercices	80
<b>CHAPITRE 07 : Ondes élastiques dans les solides</b>	
7.1 Introduction	85
7.2 Définition et propriétés élastiques d'un solide	85
7.3 Equation d'onde dans barreau solide	86
7.4 Résolution de l'équation de d'Alembert	87
7.4.1 Un barreau infini	88
7.4.2 Impédance mécanique	88

7.4.3 Aspect énergétique	88
Exercices	90

# Partie I : VIBRATIONS

## CHAPITRE 01 : Généralité sur les vibrations

### 1. Définition d'un mouvement périodique

Un mouvement est dit périodique s'il répète identique à lui-même pendant des intervalles de temps égaux.

#### Exemples :

- **Le mouvement de révolution de la Lune:** La lune effectue un cycle complet de révolution autour de la terre en environ 29 jours.

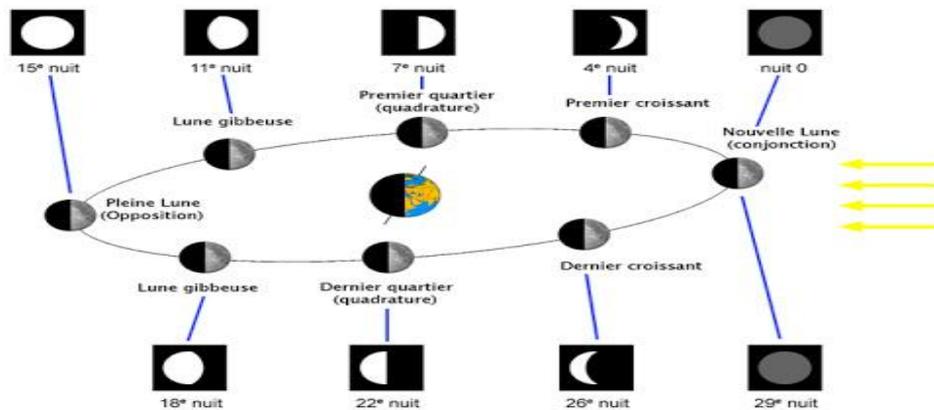


Figure 1-1 : Mouvement de révolution de la lune

- **Les battements du cœur:** un battement de cœur est une succession de contractions et de relâchement des muscles cardiaques qui actionnent des valves et provoquent la circulation du sang dans le corps.

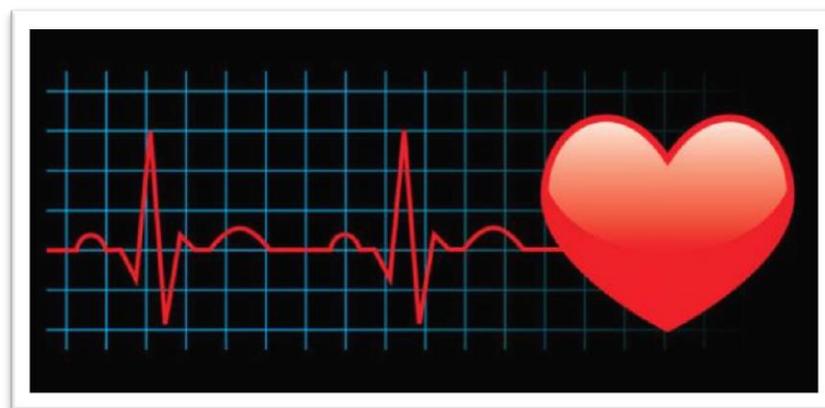


Figure 1-2 : Électrocardiogramme

### 2. Définition d'une oscillation

On appelle oscillation, un mouvement qu'il s'effectue autour d'une position d'équilibre.

# CHAPITRE 01 : Généralités sur les vibrations

## Exemples :

- Masse –ressort :

Soit un ressort de longueur à vide  $x_0$ . On modifie sa longueur en exerçant une force de tension à son extrémité libre, en le comprimant ou l'étirant.

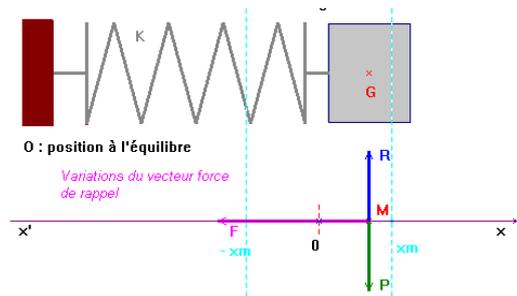


Figure 1-3 : Système masse-ressort

- Circuit électrique :

Soit un circuit contenant une bobine d'inductance ( L ) et d'un condensateur de capacité ( C ). La charge et la décharge du condensateur s'accompagnent d'oscillations électriques.

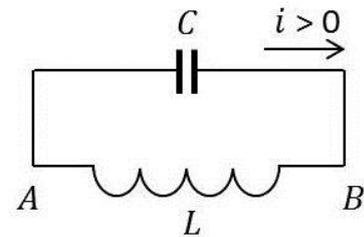


Figure 1-4 : Système bobine -condensateur

### 3. Définition d'un mouvement sinusoïdal

On appelle un mouvement sinusoïdal si sa forme :

$$\begin{cases} g(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ v \\ g(t) = A \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad \text{Où } \phi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (1-1)$$

Avec

A : amplitude

$\varphi$  : phase initiale (rad)

$\phi$  : phase initiale (rad)

$\omega$  : pulsation

t : temps

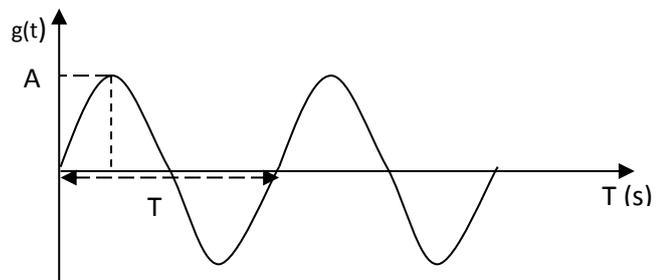


Figure 1-5 : Forme du mouvement sinusoïdal

- **Période (T) en seconde (s) :** c'est l'intervalle du temps.
- **Fréquence (f) en (Hertz):** le nombre des répétitions par seconde.

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-2)$$

Avec :

T : est la période

- **Pulsation ( $\omega$ ) en (rad/s) :**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1-3)$$

Avec :

T : est la période

f : est la fréquence

➤ Pour la périodicité en math s'exprime :  $g(t+T) = g(t)$

#### 4. Nombre de liberté

On définit le nombre de liberté (dll) par la relation suivante :

$$dll = n - m \quad (1-4)$$

**Remarque :** le nombre de liberté est le nombre d'équation à étudier.

n : Nombre des coordonnées généralisées indépendantes ou liées

m : Nombre des liaisons entre les coordonnées

#### 5. Représentation complexe d'un mouvement vibratoire

- **Représentation complexe :** pour faciliter les calculs nous transformons les grandeurs sinusoïdales en forme exponentielles grâce à la forme d'Euler :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1-5)$$

#### 6. Définition des séries de Fourier

La grandeur périodique peut être exprimée par les sommes des fonctions de sinus et cosinus afin de la manipuler physiquement et mathématiquement.

Cette somme est appelée série de Fourier.

La série de fourier d'une fonction f(t) périodique de période (T) , est définie par :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (1-6)$$

- ( $a_0$  ,  $a_n$  et  $b_n$ ) les coefficients de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

- La pulsation ( $\omega$ ) est appelée pulsation fondamentale

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1-7)$$

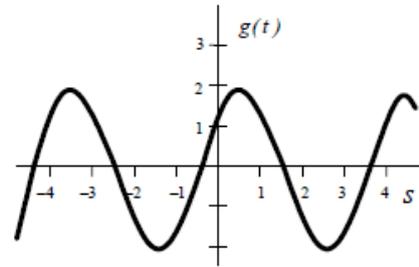
- Les pulsations ( $n\omega$ ) multiples de  $\omega$  sont appelées les harmoniques

## Exercices

### Exercice 01 :

Soit la grandeur sinusoïdale  $g(t)$  représentée ci-contre.

1. Calculer l'amplitude, pulsation et la phase initiale.
2. Déduire l'équation  $g(t)$ .



### Exercice 02 :

Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant :

$$x(t) = 4 \cos\left(25t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Où  $x$  en centimètres,  $t$  en secondes et la phase en radians.

1. Déterminer l'amplitude maximale
2. Donner la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement.
3. Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).
4. Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants  $t=0s$  et  $t=0.5s$ .

### Exercice 03 :

Un mobile  $M$  décrit un mouvement rectiligne sinusoïdal si son abscisse  $x$  est une fonction sinusoïdale du temps:  $x(t) = 2 \cos(4t + 6)$

Trouver à l'aide de la représentation complexe

1. la vitesse du mouvement rectiligne sinusoïdal  $\dot{x}(t)$
2. l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal  $\ddot{x}(t)$

### Exercice 04 :

Un mouvement harmonique est décrit par  $x(t) = X \cos(100t + \varphi)$ . Les conditions initiales sont  $x(0) = 4m$  et  $\dot{x}(0) = 1m/s$ .

- a) Calculer  $X$  et  $\varphi$ .
- b) Exprimer  $x(t)$  sous la forme  $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  et en déduire les valeurs de  $A$ .

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

### 2.1 Les oscillations libres

#### 2.1.1 Définition d'un oscillateur libre

Un oscillateur libre est un système oscillant en absence de toute force d'excitation.

#### 2.1.2 Définition d'un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un oscillateur qui est ramené à sa position d'équilibre lorsqu'il est déplacé d'une certaine distance en raison d'une force de rappel opposée au mouvement.

$$F = -c \times x \quad (2-1)$$

Avec

$c$  : une constante positive.

$x$  : la distance parcourue par l'oscillateur

#### Exemple : Système Masse –ressort

La masse est écartée légèrement de sa position d'équilibre et relâchée sans vitesse initiale, l'expérimentateur constate que celle-ci se met à osciller autour de cette position d'équilibre. La tension est la force de rappel qui ramène à sa position d'équilibre.

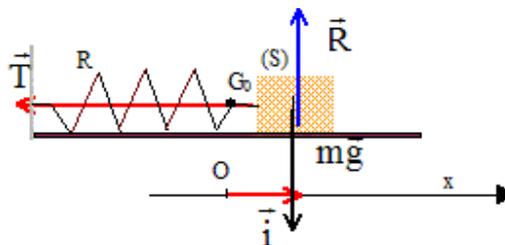


Figure 2-1 : Système masse –ressort horizontal

$$T = -k \times x \quad (2-2)$$

#### 2.1.3 Equation du mouvement

L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est de la forme

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2-3)$$

$q$  sont les coordonnées généralisées, pour la mécanique  $q(x, y, z, \theta, \varphi \dots \dots)$  et l'électricité  $q(i, u, Q, \dots \dots)$

La solution de l'équation (2-2) s'écrit comme :

$$\begin{cases} q(t) = A \sin(\omega_0^2 t + \varphi) \\ q(t) = A \cos(\omega_0^2 t + \varphi) \end{cases} \quad (2-4)$$

$$\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

Avec :

- A : amplitude
- $\varphi$  : phase initiale
- $\emptyset$  : phase initiale
- $\omega$  : pulsation
- t : temps

**Exemple :** Étude du mouvement d'un oscillateur harmonique, ressort (k) lié avec une masse (m). Soit une masse accrochée à l'extrémité d'un ressort verticale sans masse. Cette masse se déplace sans frottement sur le plan vertical. A t=0, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x puis on le lâche sans vitesse initiale.

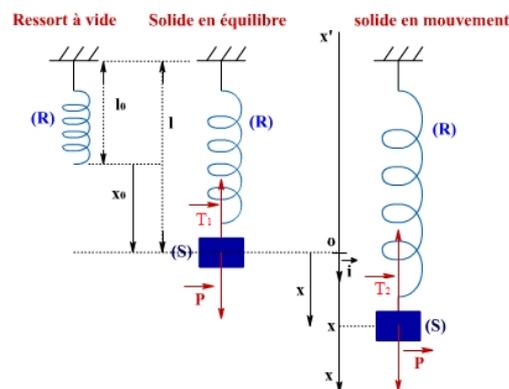


Figure 2-2 : Système masse –ressort vertical

### En appliquant la méthode de Newton

#### a. Equilibre

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{P} + \vec{T}_1 = \vec{0} \implies P - T_1 = 0$$

$$mg - kx_0 = 0 \tag{2-5}$$

#### b. Mouvement

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{T}_2 = m\vec{a} \implies P - T_2 = ma$$

$$mg - k(x_0 + x) = ma \implies \underbrace{mg - kx_0}_0 - kx = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x} \implies m\ddot{x} + kx = 0$$

L'équation de mouvement  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  (2-6)

En comparant cette équation par l'équation (2-3) on déduit que :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-7)$$

$\omega_0$  est la pulsation libre.

### 2.1.4 Energie d'un oscillateur harmonique (E)

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de l'énergie cinétique (T) et potentielle (U).

$$E = T + U \quad (2-8)$$

- **Energie cinétique (T)**

L'énergie cinétique d'un objet de masse  $m$ , ayant vitesse ( $\dot{q}$ ) (donc liée au mouvement) vaut :

- Translation  $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad \dot{q} = (v, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2-9)$

- Rotation  $T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad (2-10)$

$I_{\Delta}$  moment d'inertie  $\dot{\theta}$  vitesse angulaire

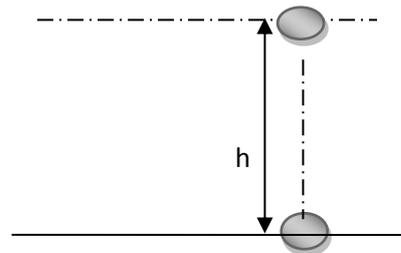
- **Energie potentielle (U)**

Il y a plusieurs formes qui présentent l'énergie potentielle

- **Energie potentielle de la force pesanteur :**

Une masse ( $m$ ) se trouve dans un champs gravitationnel constant ( $g$ ), l'énergie potentielle pesanteur est sous forme :

$$U_p = mgh \quad (2-11)$$

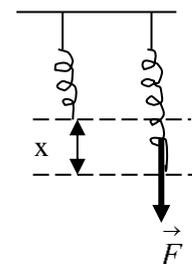


- **Energie potentielle élastique**

- pour Un ressort d'une constante de raideur ( $k$ ) et d'une déformation ( $x$ ). L'énergie

Potentielle est donnée par :

$$U_k = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-12)$$

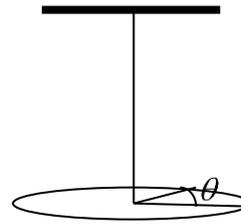


## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

- Un ressort de torsion d'un constant de raideur ( $k$ ), d'une déformation ( $\theta$ )

$$U_k = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (2-13)$$



- **Conservation de l'énergie totale**

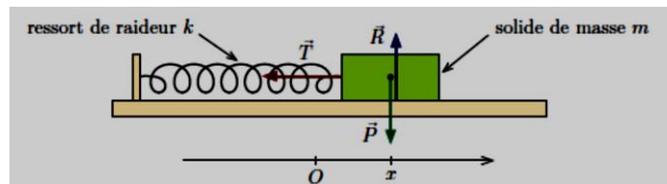
L'énergie ne peut être ni créée ni détruite, mais transférée seulement d'un système à un autre et transformée d'une forme à une autre. Donc si l'énergie totale (cinétique et potentielle) d'un système sera invariable durant son mouvement nous concluons que :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (2-14)$$

Cette équation de conservation va donner l'équation du mouvement.

### Exemple

Soit une masse  $m$  accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal sans masse de raideur  $k$ . Cette masse se déplace sans frottement sur le plan horizontal. A  $t=0$ , on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur  $x$  puis on le lâche sans vitesse initiale.



**Figure 2-3** : oscillateur mécanique : système masse –ressort horizontal

- **Energie totale**

$$E = T + U \quad (2-15)$$

- **Energie cinétique**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-16)$$

- **Energie potentielle**

$$U = \underbrace{U_p}_0 + U_k = U_k = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2-17)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (2-18)$$

Le système est conservatif  $\implies \frac{dE}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right)$

$$\frac{dE}{dt} = m \ddot{x} \dot{x} + k x \dot{x} = 0 \quad m \ddot{x} + k x = 0 \quad (2-19)$$

Equation de mouvement  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2-20)$

### 2.1.5 Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange permet de déterminer l'équation du mouvement des systèmes mécaniques. Elle est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \quad (2-21)$$

Où ( $L$ ) est le Lagrangien qui est une fonction explicite des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées

$$L = T - U \quad (2-22)$$

$T$  : est l'énergie cinétique totale du système

$U$  : est l'énergie potentielle totale du système

$q_i$  et  $\dot{q}_i$  sont les coordonnées et les vitesses généralisées

$F_i$  sont les forces généralisée associées à  $q_i$ .

Pour le cas du système conservatif à un degré de liberté, l'équation (2-21) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2-23)$$

### Exemple

Soit le système précédent (figure 2-3), on utilisant la méthode de Lagrange écrire l'équation de mouvement et déduire la pulsation propre.

- **Lagrangien**

$$L = T - U \quad (2-24)$$

- **Energie cinétique**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-25)$$

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

$$U = \underbrace{U_p}_0 + U_k = U_k = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-26)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-27)$$

- Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2-28)$$

Après les dérivations nous recevons cette équation

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (2-29)$$

Si nous divisons cette équation sur (m) nous obtenons l'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2-30)$$

Par la transposition avec l'équation générale  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Donc nous tirons la pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-28)$$

### 2.1.6 Conditions d'équilibre et d'oscillation

- **Condition d'équilibre**

Suivant les notions précédentes, la force est définie comme dérivante d'une énergie potentielle

$$F = - \frac{\partial U}{\partial q} \quad (2-29)$$

Notre système est en équilibre donc  $F=0$

Donc la condition d'équilibre sera comme suit

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (2-30)$$

- **Condition d'oscillation**

Un équilibre est stable si la constante de l'oscillateur harmonique est supérieure à zéro(0).

$$C = - \frac{\partial F}{\partial q} > 0 \quad (2-31)$$

Et comme on a décrit apparemment

$$F = - \frac{\partial U}{\partial q} \quad (2-32)$$

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

On appelle aussi **condition d'oscillation**  $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right]_{q=0} > 0$  (2-33)

- Si l'équilibre est instable don on n'aura pas des oscillations

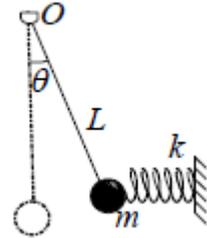
$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right]_{q=0} < 0 \quad (2-34)$$

## Exercices

### Exercice 01

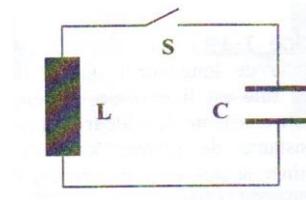
Le système ci-contre peut tourner librement autour du point O. La boule est supposée ponctuelle et la tige sans masse. ( $\sin \theta \approx \theta$ ) et ( $\cos \theta \approx 1$ )

1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U.
2. Trouver l'équation du mouvement.
3. Trouver la pulsation propre ( $\omega_0$ ) sachant que  $m=1\text{kg}$ ,  $L=2\text{m}$ ,  $k=2\text{N/m}$ ,  $g=10\text{m/s}^2$



### Exercice 02

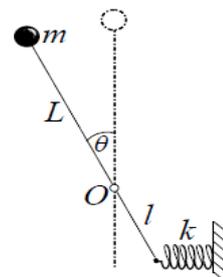
On considère le circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C branché aux bornes d'une bobine d'inductance L. Initialement le condensateur est chargé, puis on ferme l'interrupteur S. En écrivant la loi des mailles, donner l'équation différentielle du système en fonction de la charge q(t) du condensateur ; déduire la pulsation des oscillations du circuit.



### Exercice 03

Une tige de longueur totale L+l et de masse négligeable, porte à son extrémité supérieure une masse ponctuelle m. L'autre bout de la tige est relié à un ressort de raideur k. Celui-ci n'était pas déformé à l'équilibre et supposé rester horizontal lors des petits mouvements. La tige peut tourner librement autour du point O. À l'équilibre la tige était verticale.

1. Trouver l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique T du système
2. Trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre  $\omega_0$
3. Trouver la condition d'oscillation du système.



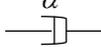
## 2.2 Oscillateur amortie à un degré de liberté

### 2.2.1 Définition d'un oscillateur amortie

Un système soumis à un frottement est dit amortie, les frottements visqueux sont de la forme :

$$f = -\alpha v \quad (2-35)$$

$\alpha$  : coefficient de frottement

Est schématisé par l'amortisseur 

### 2.2.2 Equation de Lagrange

En introduisant l'amortisseur, l'équation de Lagrange devienne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha \dot{q} \quad (2-36)$$

Si on introduisant la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 & \text{Translation } (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha (l \dot{\theta})^2 & \text{Rotation} \end{cases} \quad (2-37)$$

Avec une petite comparaison nous remarquons que  $\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha \dot{q}$  (2-38)

Donc l'équation de Lagrange de système amortie s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (2-39)$$

### 2.2.3 Equation de mouvement

L'équation de mouvement est sous la forme :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2-40)$$

( $\lambda$ ) coefficient d'amortissement

Le facteur de qualité est exprimé comme suit :

$$\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda} \quad (2-41)$$

### Exemple

Soit une masse ( $m$ ) est fixée à un ressort horizontal de raideur ( $k$ ) et un amortisseur de coefficient de frottement ( $\alpha$ ). Trouver l'équation du mouvement

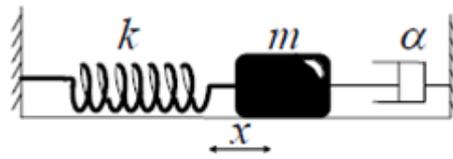


Figure 2-4 : Système amorti [masse, ressort] horizontal

- **Lagrangien**

$$L=T-U \quad (2-42)$$

- **Energie cinétique**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-43)$$

- **Energie potentielle**

$$U = \underbrace{U_p}_0 + U_k = U_k = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-44)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-45)$$

- **Equation de dissipation**

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad (2-46)$$

- **Equation de Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

Après les dérivations nous recevons cette équation

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} \quad (2-47)$$

Si nous divisons cette équation sur(m) nous acquérons l'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2-48)$$

Si nous superposons cette équation et l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2-49)$$

Nous obtenons  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$

### 2.2.3.1 Résolution de l'équation du mouvement

La résolution de l'équation du mouvement ( 2-40) sera supposée comme suit :

$$q(t) = Ae^{rt} \implies \dot{q}(t) = Are^{rt} \implies \ddot{q}(t) = Ar^2 e^{rt} \quad (2-50)$$

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

En remplaçant dans l'équation ( 2-26), on aboutit à :

$$Ar^2e^{rt} + 2\lambda A r e^{rt} + \omega_0^2 A e^{rt} = 0$$

$$(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2)Ae^{rt} = 0 \implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (2-51)$$

Donc il y a trois solutions suivant le sens de déterminant

$$\Delta' = (b'^2 - ac) = \lambda^2 - \omega_0^2$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$  le **mouvement aperiodique** ( $\phi < 0.5$ ) :

Nous remarquons un grand amortissement imposé sur le système .En effet, ce système une fois lâché de sa position d'équilibre ne fait que revenir à sa position d'équilibre sans faire d'oscillation, tellement l'amortissement appliqué est fort.

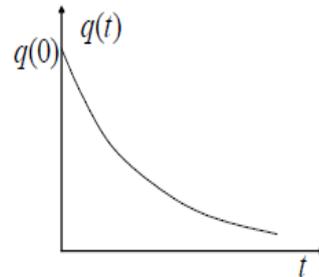
La solution de notre équation précédente sera comme suit :

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \quad (2-52)$$



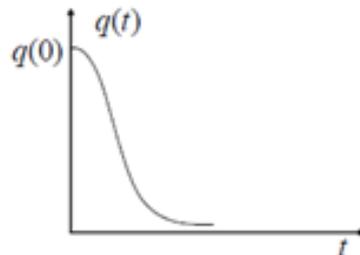
- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$  le **mouvement critique** ( $\phi = 0.5$ ) :

Le régime est dit critique car il correspond à un amortissement critique pour lequel on bascule d'un régime où il n'y a plus d'oscillations vers pseudo-périodique.

$$q(t) = A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt}$$

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

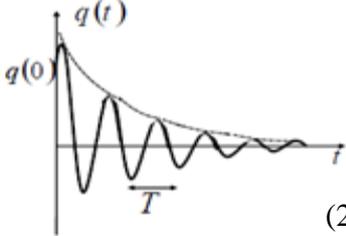
$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t} \quad (2-53)$$



- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$  le **mouvement pseudo-périodique** ( $\phi < 0.5$ ) :

L'amplitude décroissante au cours du temps en raison de frottement.

$$\begin{aligned}
 q(t) &= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\
 r_1 &= -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\
 r_2 &= -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\
 q(t) &= A_1 e^{-(\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})t} + A_2 e^{-(\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})t}
 \end{aligned}$$


(2-54)

le calcul montre que  $q(t)$  s'écrit sous la forme équivalente :

$$q(t) = A_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-55)$$

**Pseudo-pulsation :**  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (2-56)$

**Pseudo-périodique :**  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (2-57)$

### 2.2.3.2 Décrément logarithmique

On définit le décrément logarithmique ( $\delta$ ) par :  $\delta = \ln \frac{q(t_n)}{q(t_n + T)} \quad (2-58)$

Où  $q(t_n)$  et  $q(t_n + T)$  représentent les amplitudes des oscillations aux instants  $(t_n)$  et  $(t_n + T)$  ; généralement ces deux instants correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes.

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t_n} \cos(\omega t_n + \varphi)}{Ae^{-\lambda(t_n + T)} \cos(\omega(t_n + T))} = \ln \frac{Ae^{-\lambda t_n}}{Ae^{-\lambda(t_n + T)}} \quad (2-59)$$

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t_n}}{Ae^{-\lambda(t_n + T)}} = \ln e^{\lambda T}$$

$$\delta = \lambda T \quad (2-60)$$

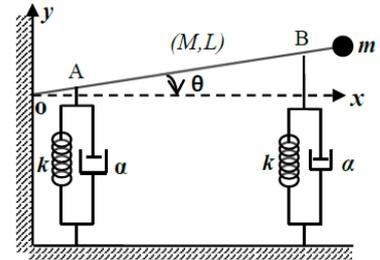
## Exercices

### Exercice 01 :

Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-contre. Si G est le centre de gravité de la barre de masse M et de longueur L.

- Trouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire  $\omega_0$  et  $\lambda$
- Ecrire l'équation du mouvement dans le cas  $\lambda \ll \omega_0$

$$(J_G = \frac{1}{12}ML^2, OA = L_1, OB = L_2).$$



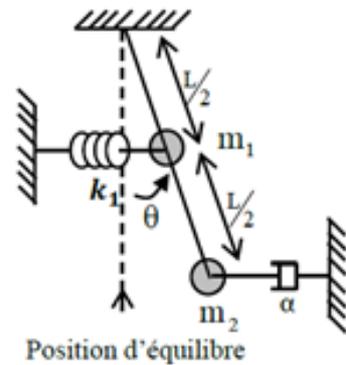
### Exercice 02

Le système est constitué de 2 masses  $m_1$  et  $m_2$ , d'une tige de masse négligeable de longueur L et d'un ressort k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux ( $\alpha$ ).

- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.
- Déterminer la pulsation propre du système.
- Trouver l'équation du mouvement, sachant

que  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ . On donne :

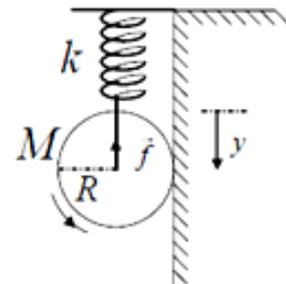
$$\frac{m_1}{4} = m_2 = m, \quad \frac{k}{4} = k \quad \text{et} \quad \lambda \ll \omega_0$$



### Exercice 03

Dans son mouvement va-et-vient, le disque ci-dessous suspendu au ressort reste en contact avec le mur qui le fait tourner sur lui-même. L'ensemble des frottements est symbolisé par la force  $f_{disque} = -\alpha v$  appliquée au centre du disque. A l'équilibre le ressort était allongé de  $y_0$ .

1. Trouver l'énergie potentielle U de système en fonction de y.
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation D.
4. Trouvez Lagrangien puis l'équation du mouvement.



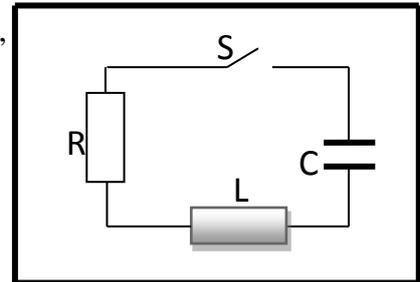
## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

5. Sachant que  $k= 13.5N/m$ .  $M=1kg$  trouver la valeur maximale que le coefficient  $\alpha$  ne doit pas atteindre pour le système oscille.
6. Pour  $\alpha = 9N.s/m$ , trouve la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire  $y(t)$  ( $y(0)=1cm$ ,  $\dot{y}(0)=0$ .)
7. Si  $\alpha = 3N.s/m$ , trouver le temps  $\tau$  nécessaire pour que l'amplitude diminue à  $\frac{1}{5}$  de sa valeur, calculer le décrement logarithmique  $\delta$  du mouvement.

### Exercice 04

La figure ci-contre représente un circuit série. Initialement, le condensateur est chargé, puis on ferme l'interrupteur S. On donne  $L=1H$  et  $C= 0.01 \mu F$ . on désigne par  $q(t)$  la charge du condensateur à l'instant  $t$ .



1. Ecrire l'équation différentielle qui décrit le circuit en fonction de la variable  $q$ . On précisera les valeurs de  $\lambda$  et  $\omega_0$ .
2. Dans quel cas le système oscille ? quelle est la valeur de résistance critique ?
3. Tracer approximativement  $q(t)$  pour  $R=100\Omega$  et  $R=500\Omega$ .

**2.3 Oscillations amorties forcées**

**2.3.1 Définition d'un oscillateur amortie forcé**

On appelle oscillateur amortie forcé lorsque qu'il est soumis à un frottement et une force extérieure appelée **force d'excitation**.

**2.3.2 Equation de Lagrange**

Il y a deux formes de l'équation de Lagrange suivant le mode de déplacement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F(t) \quad \text{Translation} \quad (2-61)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \mu(t) \quad \text{Rotation} \quad (2-62)$$

Ou  $F(t)$  force d'excitation

$\mu(t)$  moment de la force d'excitation

**2.3.3 Equation de mouvement**

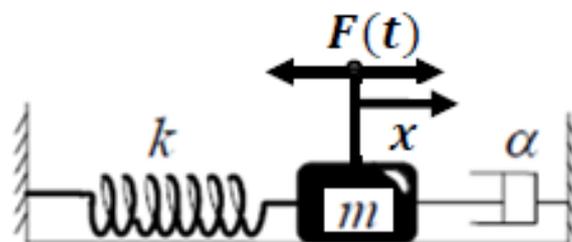
L'équation du mouvement des systèmes forcés est de la forme :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F(t)}{a} \quad \text{(a) Constante} \quad (2-63)$$

**Exemple**

On appliquant dans le système décrit dans la section 2.2.3 une force extérieure sinusoïdale:

$$F(t) = f_0 \cos(\Omega t) \quad (2-64)$$



**Figure 2-5** : Système amorti forcée (masse, ressort) horizontal

➤ **Lagrangien**

$$L=T-U \quad (2-65)$$

➤ **Energie cinétique**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-66)$$

➤ **Energie potentielle**

$$U = \underbrace{U_p}_0 + U_k = U_k = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-67)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-68)$$

➤ **Equation de dissipation**

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad (2-69)$$

➤ **Equation de Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F(t) \quad (2-70)$$

Après les dérivations nous recevons cette équation

$$m \ddot{x} + kx = -\alpha \dot{x} + f_0 \cos(\Omega t) \quad (2-71)$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{f_0 \cos(\Omega t)}{m} \quad (2-72)$$

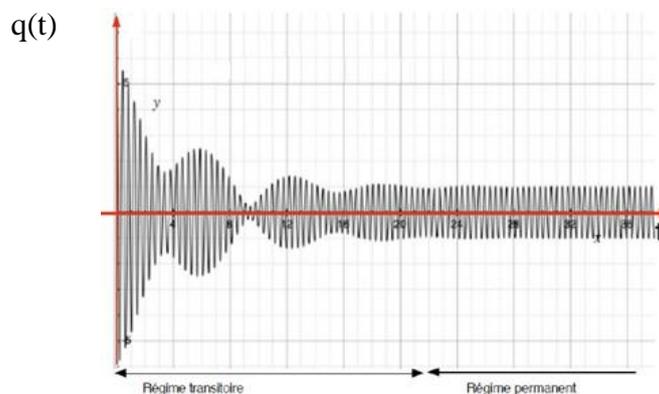
La constante  $a = m$

Pour la pulsation propre et le coefficient d'amortissement

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad (2-73)$$

### 2.3.3.1 Résolution de l'équation du mouvement

D'après la figure (2-1) est présentée l'enregistrement du mouvement d'un oscillateur amorti forcé nous remarquons deux régimes : le premier est court s'appelle **transitoire** et le deuxième est long s'appelle **permanent**. Donc la solution de l'équation du mouvement se compose de deux solutions



**Figure 2-6 :** l'enregistrement du mouvement d'un oscillateur amorti forcé.

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

$$q(t) = q_T(t) + q_P(t) \quad (2-74)$$

Ou :  $q_T(t)$  solution transitoire

$q_P(t)$  solution permanente

Puisque :  $q_T(t) \ll q_P(t)$        $q(t) = q_P(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$  (2-75)

$(\Omega)$  Pulsation de force excitatrice

$(\varphi)$  Déphase entre le système et la force excitatrice

A l'aide la représentation complexe nous déduisons ces deux paramètres

Il faut noter  $q(t)$  est la partie réelle de  $Ae^{j(\Omega t + \varphi)}$  :  $q(t) = \text{Re}[Ae^{j(\Omega t + \varphi)}]$

$$q(t) = q_P(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = A e^{j(\Omega t + \varphi)} \quad (2-76)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 e^{j(\Omega t)}$$

$$\dot{q}(t) = A\Omega e^{j(\Omega t + \varphi)} \quad (2-77)$$

$$\ddot{q}(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \varphi)} \quad (2-78)$$

$$(-\Omega^2 + 2\lambda\Omega j + \omega_0^2) A e^{j(\Omega t + \varphi)} = \frac{F_0}{a} e^{j(\Omega t)}$$

$$A(-\Omega^2 + 2\lambda\Omega j + \omega_0^2) = B e^{-j\varphi}$$

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) + 2\lambda\Omega j = B e^{-j\varphi}$$

On pose  $B = \frac{F_0}{a}$

Nous utilisons le conjugué

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) + 2\lambda\Omega j = B e^{-j\varphi}$$

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) - 2\lambda\Omega j = B e^{j\varphi}$$

L'amplitude du mouvement est donc :

$$A = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \quad (2-79)$$

D'après l'équation

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2) + 2\lambda\Omega j = B e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = (-\Omega^2 + \omega_0^2)$$

$$\sin \varphi = -2\lambda\Omega$$

La phase  $\varphi$  du mouvement (déphasage entre  $q(t)$  et  $F(t)$ ) est donner par :

$$\tan \varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{(-\Omega^2 + \omega_0^2)} \quad (2-80)$$

### 2.3.3.2 Résonance

La pulsation d'excitation  $\Omega$  pour laquelle l'amplitude  $A$  atteint son maximum est appelée

**pulsation de résonance** (d'amplitude)  $\Omega_R$ .  $A$  est maximale lorsque  $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \implies A = \frac{F_0 [4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega]}{2\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \implies -4(\omega_0^2 - \Omega_R^2) + 8\lambda^2 = 0$$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (2-81)$$

Si nous introduisons l'équation (2-81) dans l'équation (2-79), on obtient :

$$A_{\max} = \frac{F_0}{a\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}} \quad (2-82)$$

Nous introduisons le facteur de qualité  $\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda}$  dans l'équation (2-81)

$$\Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\phi^2}} \quad (2-83)$$

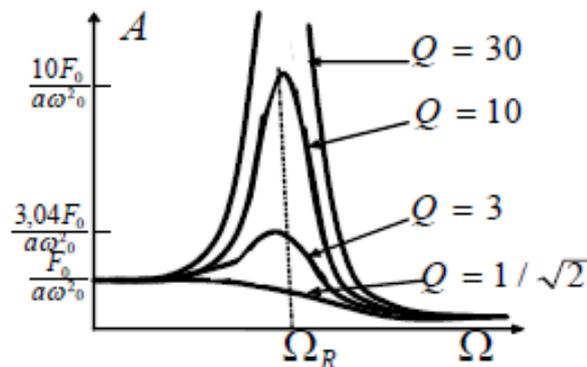
A cette pulsation, l'amplitude est :

$$A_{\max} = \frac{F_0}{a\omega_0^2} \frac{\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\phi^2}}} \quad (2-84)$$

Donc par la résonance il faut que :  $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \implies 1 - \frac{1}{2\phi^2} > 0$

$$\phi > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de qualité doit donc être supérieur à  $(\frac{1}{\sqrt{2}})$  l'amortissement doit être faible



**Figure 2-7 :** évolution de d'amplitude en fonction la pulsation

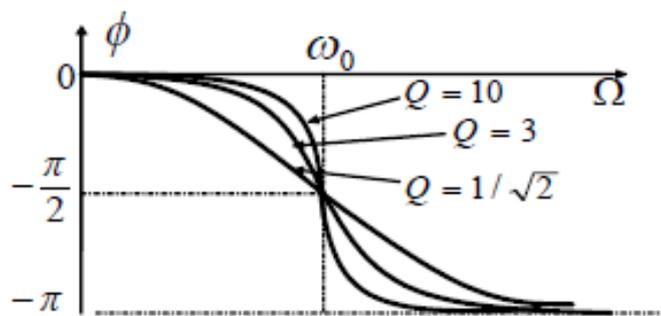
### 2.3.3.3 Résonance de phase

Lorsque  $\Omega_R = \omega_0$      $\tan \varphi = -\infty$      $\Longrightarrow$      $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \tan(\varphi) = 0$      $\Longrightarrow$      $\varphi = -\frac{\pi}{2}$      $F(t)$  et  $q(t)$  en phase

$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_R} \tan(\varphi) = -\infty$      $\Longrightarrow$      $\varphi = 0$      $F(t)$  et  $q(t)$  en quadrature phase

$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \tan(\varphi) = 0$      $\Longrightarrow$      $\varphi = -\pi$      $F(t)$  et  $q(t)$  en opposition phase



**Figure 2-8 :** évolution de la phase en fonction la pulsation

### 2.3.3.4 Bande passante

La bande passante est par définition l'ensemble des pulsations pour lesquelles l'amplitude

$$A \geq \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Nous définissons la largeur de la bande passante  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$  ou  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

correspondent à  $A(\Omega_1) = A(\Omega_2) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$

Si on pose  $\Omega_R \approx \omega_0$  dans l'équilibre (2-82), on trouve

$$A_{mzx} = \frac{F_0}{2\lambda\omega_0} \tag{2-85}$$

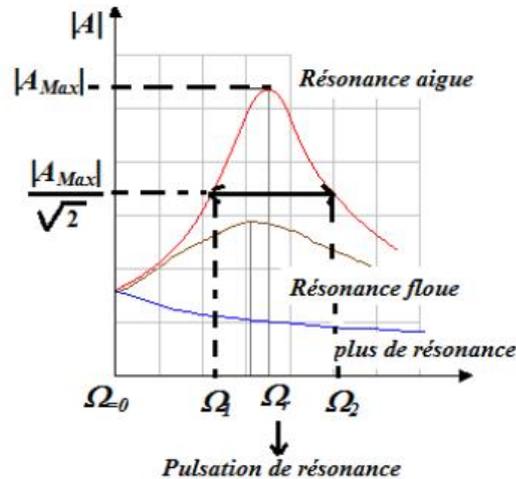


Figure 2-9 : évolution de d'amplitude en fonction la pulsation

$$\frac{A_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{2a\lambda\omega_0\sqrt{2}} \implies 4\lambda^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = 8\lambda^2\omega_0^2$$

Plus  $\lambda$  est faible, plus le **pic de résonance est étroit** ( $\Omega$  petit), on peut alors considéré dans  $\Delta\Omega$  que  $\Omega$  proche de  $\omega_0$

$$D'où la bande passante de l'oscillateur :  $B = \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\lambda$  (2-86)$$

Donc le facteur de qualité sera comme suit :

$$\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \quad (2-87)$$

### 2.3.3.5 Analogie électromécanique

Nous pouvons faire une analogie entre le système mécanique (translation et rotation) et le système électrique RLC est regroupé dans le tableau suivant :

## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

**Tableau 2-1 : Analogie des paramètres électromécanique**

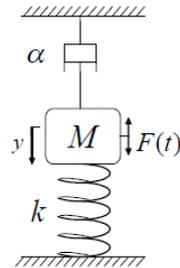
<u>Systèmes mécanique</u>		<u>Circuits électriques</u>
<u>Rotation</u>	<u>Translation</u>	<u>Force-tension</u>
<u>Analogie</u>		
Angle $\vartheta$	Déplacement $x$	Charge $q$
Vitesse $\dot{\vartheta}$ angulaire	Vitesse $\dot{x}$	Courant $\dot{q} = i$
Moment d'inertie $J$	Masse $m$	Inductance $L$
Constante de torsion $k_t$	Raideur $k$	$1/C$
Coefficient de frottement		Résistance
$\beta$	$\alpha$	$R$
<u>Energie cinétique</u>		
$T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2$	$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$T = \frac{1}{2} L i^2$
<u>Energie potentielle</u>		
$U = \frac{1}{2} c \vartheta^2$	$U = \frac{1}{2} k x^2$	$U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$
<u>Fonction de dissipation</u>		
$D = \frac{1}{2} \beta \dot{\vartheta}^2$	$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$	$D = \frac{1}{2} R i^2$
<u>Lagrangien <math>L=T-U</math></u>		
<u>Equation de Lagrange</u>		
$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t)$		
<u>« Force généralisée » appliquée <math>Q(t)</math></u>		
Moment appliqué $Q(t)=M(t)$	Force appliquée $Q(t)=F(t)$	Tension appliquée $Q(t)=E(t)$

## Exercices

### Exercice 1

Une masse  $m$ , suspendue par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient de frottement, oscille verticalement sous l'effet d'une excitation  $F$  de la forme  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

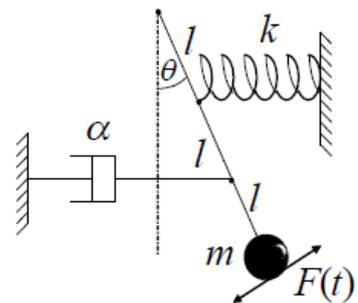
1. Trouver l'énergie cinétique  $T$ , l'énergie potentielle  $U$ , et la fonction de dissipation  $D$ .
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude  $A$  et sa phase)
4. Donner la condition de résonance et la pulsation de résonance  $\Omega_R$ :
5. Donner la bande passante  $B$  pour un amortissement faible: ( $\lambda \ll \omega_0$ )



### Exercice 2

Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur totale  $3l$  et de masse négligeable. Avec  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ .

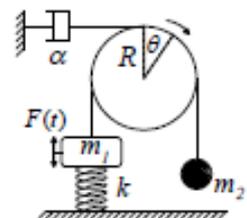
1. Trouver l'énergie cinétique  $T$ , l'énergie potentielle  $U$ , et la fonction de dissipation  $D$ .
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude  $A$  et sa phase)
4. Déduire la pulsation de résonance  $\Omega_R$ :
5. Donner les pulsations de coupure  $\Omega_1$ ;  $\Omega_2$  et la bande passante  $B$  pour un amortissement faible ( $\lambda \ll \omega_0$ ).
6. Calculer  $\Omega_R$ ,  $B$ , et le facteur de qualité si  $m = 1 \text{ kg}$ ,  
 $k = 15 \text{ N/m}$ ,  $l = 0,5 \text{ m}$ ,  $\alpha = 0,5 \text{ N.s/m}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .



### Exercice 3

Dans le système ci-contre, un fil autour du disque (de masse négligeable) est inextensible et non glissant, est lié avec deux masses  $m_1$ ,  $m_2$  et un ressort avec un raideur.

1. Trouver l'énergie cinétique  $T$ , potentielle  $U$ , et la fonction de dissipation  $D$ .
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement. ( $F = F_0 \cos \Omega t$ .)



## CHAPITRE 02 : Systèmes linéaires à un degré de liberté

---

3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude  $A$  et sa phase  $\varphi$ )
4. Déduire la pulsation de résonance  $\Omega_R$ .
5. Donner les pulsations de coupure  $\Omega_{c1}$ ;  $\Omega_{c2}$  et la bande passante  $B$   
Pour un amortissement faible ( $\lambda \ll \omega_0$ ).
6. Calculer  $\Omega_R$ ;  $B$ ; et le facteur de qualité si  $m_1=2kg$ ,  $m_2=1kg$ ,  $k=10N/m$ ,  $\alpha=0,1N.s/m$ .

CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

3.1 Systèmes linéaire de plusieurs degrés de liberté

Pour l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire plusieurs équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_1(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} &= - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} + F_n(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

3.1.1 Les types de couplages

**a) Couplage Elastique :** Le couplage dans les systèmes mécaniques sera par élasticité. Pour les systèmes électriques, les circuits couplés sont présentés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.

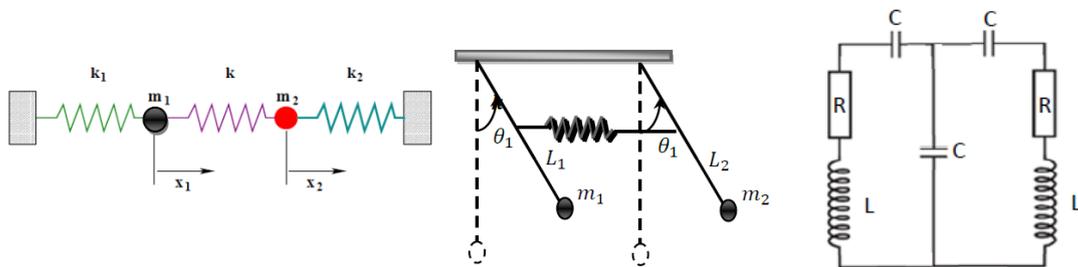


Figure 3-1 : Couplage systèmes élastique et équivalent électrique.

**b) Couplage Visqueux :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est évident par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on aperçoit les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur

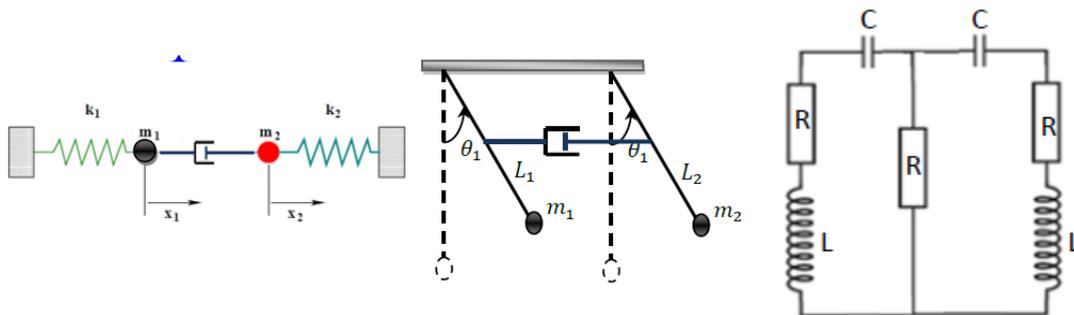
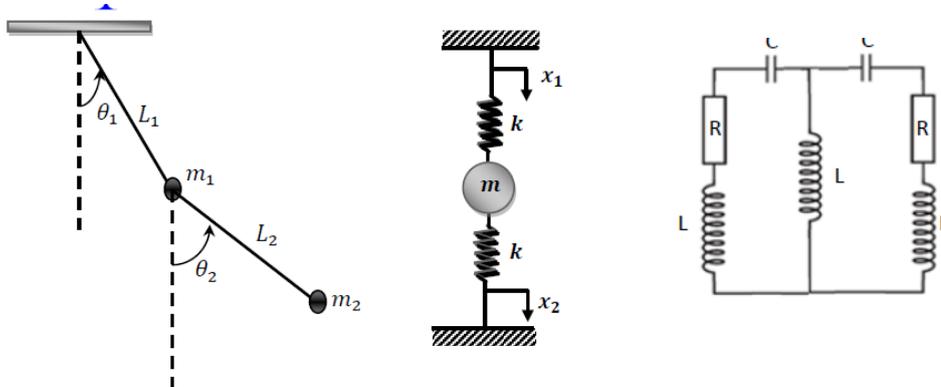


Figure 3-2 : couplage systèmes visqueux et équivalent électrique.

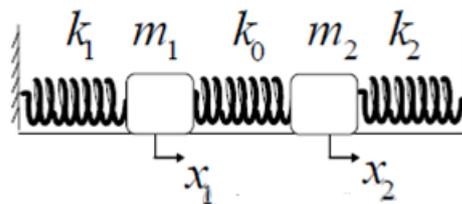
**c) Couplage Inertiel :** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie



**Figure 3-3 :** couplage systèmes inertiels et équivalent électrique

## 3.2 Systèmes linéaire deux degrés de liberté cas libre

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres ( $\omega_1, \omega_2$ ).



**Figure 3-4 :** Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degré de liberté.

### 3.2.1 Equation du mouvement

#### Exemple

Soit le système libre décrit précédemment. Les deux variables indépendantes sont  $x_1$  et  $x_2$ .  $k_0$  est appelé élément de **couplage**.

Calculer les énergies cinétique et potentielle du système, en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement. En déduire les pulsations propres du système.

#### ➤ Lagrangien

$$L=T-U \quad (3-2)$$

#### ➤ Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (3-3)$$

## CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

---

### ➤ Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (3-4)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (3-5)$$

### ➤ Equations de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 & \quad m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 + k_0 x_2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 & \quad m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 + k_0 x_1 = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} & \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = \underline{A}_1 e^{j(\omega t)} \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} & \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \underline{A}_2 e^{j(\omega t)} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Nous introduisons

$$\begin{cases} \left( -\omega^2 + \frac{k_1+k_0}{m_1} \right) \underline{A}_1 - \frac{k_0}{m_1} \underline{A}_2 = 0 \\ -\frac{k_0}{m_2} \underline{A}_1 + \left( -\omega^2 + \frac{k_2+k_0}{m_2} \right) \underline{A}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + a) \underline{A}_1 - b \underline{A}_2 = 0 \\ -c \underline{A}_1 + (-\omega^2 + d) \underline{A}_2 = 0 \end{cases} \quad (3-8)$$

Ces équations admettent des solutions si le déterminant sera nul

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= \begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0 \\ \omega^4 - (a + d)\omega^2 + (ad - bc) &= 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

### 3.2.2 Les modes d'oscillations

**Définition du mode d'oscillation** : le mode d'oscillation est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

Les deux solutions réelles et positives  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de cette équation sont appelées **pulsations propres** ou **normales**. La plus petite est appelée la **fondamentale**, l'autre est appelée l'**harmonique**.

Pour notre cas nous présentons les deux modes comme suit :

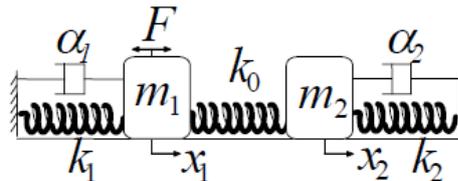
**Premier mode propre** : Pour  $\omega = \omega_1$   $\frac{\underline{A}_1(1)}{\underline{A}_2(1)} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} > 0 \iff$  **La vibration est en phase**

$$\begin{cases} x_{1(1)} = A_{1(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_{2(1)} = A_{2(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi) \end{cases} \quad (3-10)$$

**Deuxième mode propre :** Pour  $\omega = \omega_2$   $\frac{A_{1(2)}}{A_{2(2)}} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} < 0 \implies$  **La vibration est en opposition de phase**

$$\begin{cases} x_{1(2)} = A_{1(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ x_{2(2)} = -A_{2(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases} \quad (3-11)$$

### 3.3 Système forces et amorti a deux degrés de libertés



**Figure 3-5 :** Mouvement oscillatoire d'un système amorti et forcé couplé à deux degré de liberté.

**Exemple :** en utilisant l'équation de Lagrange déduire les équations du mouvement du système de la figure 3-5 qui se compose de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par 03 ressorts ces constants de raideurs  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_0$  glissent sur un plan horizontal. Sont soumises à deux forces de frottements représentées par la présence d'amortisseur des coefficients d'amortissement identiques ( $\alpha$ ) et une force externe dépendant du temps

➤ **Lagrangien**

$$L = T - U \quad (3-12)$$

➤ **Energie cinétique et Energie potentielle**

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (3-13)$$

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \quad (3-14)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad (3-15)$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{x}_2^2 \quad \text{et} \quad F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F_1(t) \implies \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 - k_0 x_2 = F_0 \cos(\Omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 - k_0 x_1 = 0 \end{cases} \quad (3-16)$$

## CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

### 3.4 Oscillations forcées d'un système non amorti à deux degrés de liberté

Nous considérons notre système mécanique symétrique décrit dans la figure 3-5.

( $k_1 = k_2 = k$  et  $m_1 = m_2 = m$ ) ou nous appliquons une force extérieure de forme sinusoïdale au premier sous système qui s'exprime comme suit :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 - k_0x_2 = F_0 \cos(\omega t) \quad (3-17)$$

D=0 et F≠0

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0$$

Régime permanent

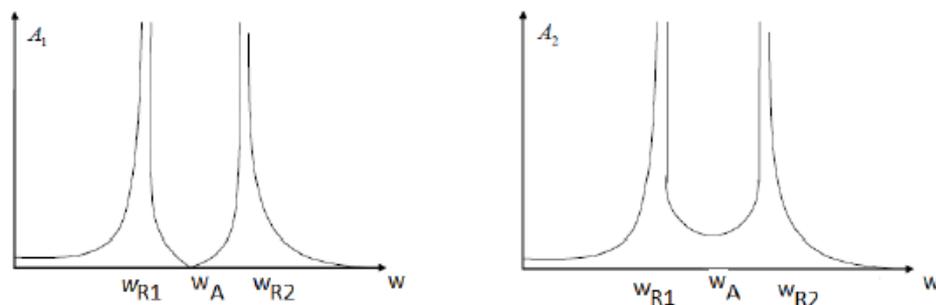
$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} \\ F(t) &= F_0 \cos(\omega t) = F_0 e^{j(\omega t)} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1(t) &= \underline{A}_1 e^{j(\omega t)} \\ x_2(t) &= \underline{A}_2 e^{j(\omega t)} \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 - k_0x_2 = F_0 e^{j\omega t} \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_0 + k_2)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k_0}{m_1}\right) \underline{A}_1 - \frac{k_0}{m_1} \underline{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ \left(-\omega^2 + \frac{k_0+k_2}{m_2}\right) \underline{A}_2 - \frac{k_0}{m_2} \underline{A}_1 = 0 \end{cases} \quad (3-19)$$

**Cas où :**  $m_1 = m_2 = m$  et  $k_0 = k_1 = k_2 = k$ .

$$\text{En Posant } \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \begin{cases} (-\omega^2 + 2\omega_0^2) \underline{A}_1 - \omega_0^2 \underline{A}_2 = \frac{F_0}{m} \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2) \underline{A}_2 - \omega_0^2 \underline{A}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{F_0}{m} \frac{|2\omega_0^2 - \omega^2|}{|(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4|} \\ \underline{A}_2 &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2}{|(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4|} \end{aligned} \quad (3-20)$$

- $A_1 = A_2 = \infty$  lorsque
- $\begin{cases} \omega = \omega_0 \equiv \omega_{R1} \text{ (appelée première pulsation de résonance.)} \\ \text{ou} \\ \omega = \sqrt{3}\omega_0 \equiv \omega_{R2} \text{ (appelée deuxième pulsation de résonance.)} \end{cases}$
- $A_1 = 0$  lorsque  $\omega = \sqrt{2}\omega_0 \equiv \omega_A$ . (appelée pulsation d'antirésonance.)



**Figure 3-6 :** Evolution de l'amplitude en fonction de la pulsation

# CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

## 3.5 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté

### Energie cinétique généralisée

Un système à n degrés de liberté possède n variables :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

### Energie cinétique généralisée

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2$$

Si on suppose :  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \quad (3-21)$$

On pose vecteur vertical (colonne)  $|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On pose vecteur horizontal (ligne)  $\langle x| = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} \langle x|x\rangle &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leftrightarrow \langle \dot{x}|\dot{x}\rangle = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \\ \implies T &= \frac{1}{2} m \langle \dot{x}|\dot{x}\rangle = \frac{1}{2} (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \implies T = \frac{1}{2} \langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \end{aligned} \quad (3-22)$$

$\mathcal{T}$  : Matrice carrée (nxn), Opérateur associé à T. Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont déduits des dérivées

### Energie potentielle généralisée

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_3 x_3^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n x_n^2 \quad (3-23)$$

Si  $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = k$

$$U = \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3-24)$$

$$\implies U = \frac{1}{2} k \langle x|x\rangle = U = \frac{1}{2} \langle x|\mu|x\rangle \quad \text{tel que} \quad \mu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

## CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

---

Le Lagrangien (la fonction de Lagrange) :

$$L=T-U=\frac{1}{2}\langle\dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle x|\mu|x\rangle \quad (3-26)$$

Equation de Lagrange : 
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)=0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\langle\dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \\ \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x|\mu|x\rangle \end{cases} \quad (3-27)$$

On a :  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\langle\dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle=2\langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle$  et  $\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x|\mu|x\rangle=2\langle I_i|\mu|\dot{x}\rangle$  avec  $I_i$  vecteur unité.

$$\langle I_1/= (1,0,0,0 \dots \dots 0), \langle I_2/= (1,0,0,0 \dots \dots 0), \dots \dots \dots \langle I_n/= (1,0,0,0 \dots \dots 0).$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=\langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \quad (3-28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\langle I_i|\mu|x\rangle \Rightarrow \langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle+\langle I_i|\mu|x\rangle=0, \text{ c'est l'équation de Lagrange}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}/\ddot{x}\rangle+\mathcal{U}/x\rangle=0 \Rightarrow / \ddot{x}\rangle+\mathcal{T}^{-1}=0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}/x\rangle+\mathcal{L}/x\rangle=0 \quad (3-29)$$

$\mathcal{L}=\mathcal{T}^{-1}.\mu$ : Opérateur associé au Lagrange  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T}^{-1}$ : Matrice inverse de  $\mathcal{T}$

### Equation aux valeurs propres:

La solution de l'équation  $\frac{d^2}{dt^2}/x\rangle+\mathcal{L}/x\rangle=0$  peut être sous la forme complexe :  $\mathcal{C}e^{j\omega t}$

$$\frac{d^2}{dt^2}/x\rangle=-\omega^2/x\rangle \Rightarrow -\omega^2/x\rangle+\mathcal{L}/x\rangle=0 \Rightarrow (\mathcal{L}-\omega^2)/x\rangle=0, \quad (3-30)$$

$(\mathcal{L}-\omega^2)/x\rangle=0 \Rightarrow \text{Det}[\mathcal{L}-\omega^2 I]=0$  c'est l'équation aux valeurs propres.  $\omega_i$  : valeur propre.

#### ❖ Valeur propres :

Exemple : 
$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

L'équation aux valeurs propres : 
$$\mathcal{L}-\omega^2 I=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}-\omega^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{11}-\omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}-\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} L_{11}-\omega^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (L_{11}-\omega^2)(L_{22}-\omega^2)-L_{21}.L_{12}=0 \quad (3-31)$$

A chaque valeur propre  $\omega_i$  correspond un vecteur  $\vec{V}_i$ ,  $\omega_1 \mapsto \vec{V}_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ ,  $\omega_2 \mapsto \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

#### ❖ Pour : $$\omega=\omega_1: (\mathcal{L}-\omega_1^2)\vec{V}_1=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11}-\omega_1^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}-\omega_1^2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (L_{11} - \omega_1^2)x_{11} + x_{12}L_{12} = 0 \\ L_{21}x_{11} - (L_{22} - \omega_1^2)x_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{11} \text{ et } x_{12} ? \quad (3-33)$$

$$\begin{aligned} \text{❖ **Pour : } \omega = \omega_2: (\mathcal{L} - \omega_2^2)\vec{V}_2 = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} L_{11} - \omega_2^2 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \omega_2^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x_{12} \text{ et } x_{22} \end{aligned} \quad (3-34)**$$

**Solutions des équations différentielles :**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\vec{V}_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B\vec{V}_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} = A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + B \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

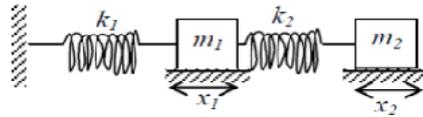
$$\begin{cases} x_{1(t)} = Ax_{11}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{21}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \\ x_{2(t)} = Ax_{12}e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Bx_{22}e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \end{cases} \quad (3-35)$$

## Exercices

### Exercice 01 :

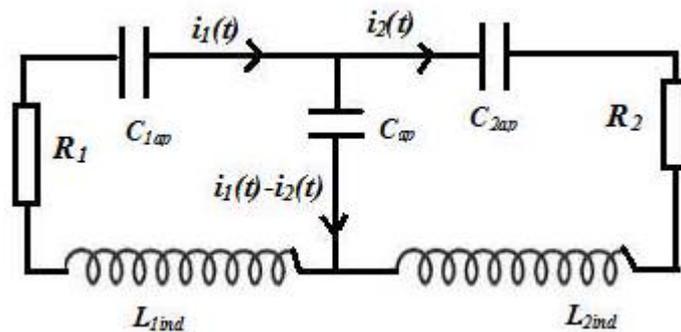
On considère les oscillations libres du système à deux degrés de liberté

1. Calculer les énergies cinétique et potentielle du système ;
2. Pour  $k_1 = k_2 = k$  et  $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ , et en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement. En déduire les pulsations propres du système.



### Exercice 02 :

On considère deux circuits électriques ( $R, L_{ind}, C_{ap}$ ) couplés représenté par la figure ci-dessous :



- Quel est le nombre de degré de liberté ?
- Déterminer le Lagrangien du système.
- Donner les équations du mouvement

On néglige les résistances des deux circuits. On prend les nouvelles grandeurs

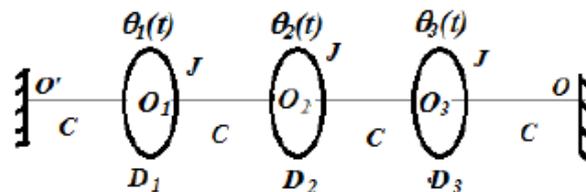
Physiques tel que :  $L_{1ind} = L_{2ind} = L_{ind}$  et  $C_{1ap} = C_{2ap} = C_{ap}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{L_{ind} C_{ap}}$

- Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.
- En déduire les pulsations propres du système en fonction de  $\omega_0$
- Donner les solutions générales.
- Quel est le modèle mécanique équivalent ?

## CHAPITRE 03 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

### Exercice 03 :

Sur un arbre  $OO'$  horizontal et fixe, de masse négligeable, encastré à ses extrémités  $O$  et  $O'$ , sont fixés trois disques ( $D_1$ ), ( $D_2$ ) et ( $D_3$ ) de centres respectifs  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  et de même moment d'inertie  $J$  par rapport à leur axe commun  $OO'$ . On désignera  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  et  $\theta_3(t)$ , les angles angulaires de rotation de chacun des trois disques par rapport à leur position de repos



de liberté

Les quatre parties  $OO_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$  et  $O_3O'$  de l'arbre ont la même constante de torsion  $C$ .

On posera  $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$

#### Régime libre :

- Déterminer le Lagrangien de ce système.
- Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les angles  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  et  $\theta_3(t)$ .
- En déduire les trois pulsations propres  $\omega_{1p}$ ,  $\omega_{2p}$  et  $\omega_{3p}$  de ce système en fonction de  $\omega_0$ .
- Déterminer pour chaque des trois modes propres, les amplitudes angulaires des disques  $D_2$  et  $D_3$  si l'amplitude angulaire du disque  $D_1$  est  $A = 1$  radian.
- Calculer l'énergie mécanique totale  $E_T$  de cette chaîne de trois disques, pour chacun des modes propres, en fonction de  $C$  et de l'amplitude angulaire  $\theta_1$  du disque  $D_1$ .

#### Régime forcé :

On applique au seul disque ( $D_1$ ) un couple moteur sinusoïdal de moment

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \cos(\omega t) \text{ La pulsation est réglable et d'amplitude } \Gamma_0.$$

- Etablir en fonction du paramètre  $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  les amplitudes angulaires  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  de chacun des disques en régime forcé.
- Pour quelles valeurs de  $X$  ce système est-il en résonance ?

---

# **Partie II**

## **LES ONDES**

### **MECANIQUES**

## CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques

### 4.1 Classification des ondes

Une onde est un phénomène vibratoire qui se propage. Elle peut être classée en deux familles: ondes mécaniques et ondes électromagnétiques.

Ces ondes ont deux principaux modes de propagation.

#### a- ondes mécaniques (élastiques)

- onde acoustique (son)
- onde sismique
- onde à la surface d'un liquide
- onde dans une corde

#### b- ondes électromagnétiques

- onde lumineuse (lumière)
- onde radio

Et avec deux principaux modes de propagation :

#### a- mode longitudinale (onde L)

La vibration est parallèle au sens de propagation (onde de "compression")

Exemple : **propagation de la déformation d'un ressort**

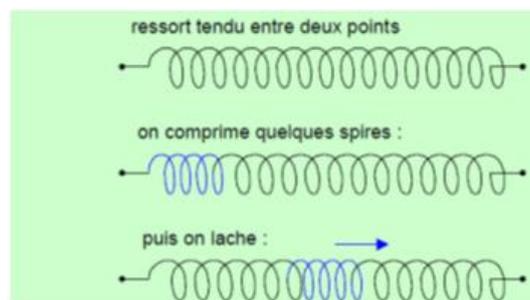


Figure 4-1 : propagation dans le ressort

#### b- mode transversale (onde T)

La vibration est perpendiculaire au sens de propagation (onde de "cisaillement").

• Exemple : **propagation de la déformation d'une corde**

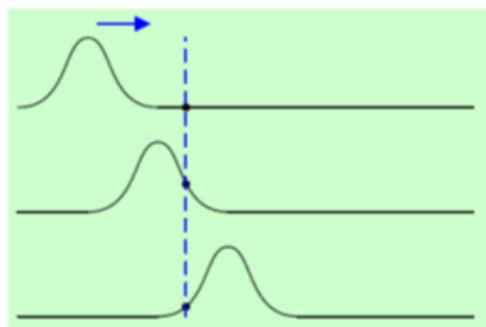


Figure 4-2 : propagation dans une corde

### 4.2 Intégrale générale de l'équation générale d'ondes progressives.

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps  $t$ . Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps  $t$  et d'une variable d'espace,  $x$  par exemple. Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation d'Alembert ou équation d'onde ou encore équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (4-1)$$

$A$  : la fonction d'onde qui se propage

$x$  : la direction de propagation

$t$  : temps

Dans laquelle  $V$  est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appelée dans la suite vitesse de propagation.

#### 4.2.1 Solution de l'équation de propagation

L'équation d'onde simple (4-1) peut se décomposer sous la forme :

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{V} \frac{\partial A}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \quad (4-2)$$

Ou 
$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) A = 0 \quad (4-3)$$

La dernière formulation de l'équation d'onde montre qu'il existe deux vitesses dans le système :  $+V$  et  $-V$ , associées à deux sens de propagation opposés. Pour chercher des solutions à l'équation d'onde, on introduit deux nouvelles variables :

$$\begin{cases} X(x,t) = x - Vt \\ Y(x,t) = x + Vt \end{cases} \quad (4-4)$$

qui sont des variables d'espace associées à deux référentiels mobiles aux vitesses  $+V$  et  $-V$  respectivement. Dans l'écriture en  $(x, t)$ , le référentiel a une position fixe, tandis que les variables  $X$  et  $Y$  sont associés à deux référentiels mobiles.

Les opérateurs de dérivation partielle de l'équation d'onde (4-1) doivent être transformés et on utilise pour cela :

## CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques

---

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \quad (4-5)$$

De même, la transformation de l'opérateur  $\partial/\partial t$  est :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = V \left( \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \right) \quad (4.6)$$

Dans l'équation (4-1), nous avons besoin de l'opérateur de dérivée seconde en x, donc  $\partial^2/\partial x^2$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2,$$

et l'opérateur  $\partial^2/\partial t^2$  est

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = V^2 \left( \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \right)^2$$

Par ce changement de variables, l'équation (4.1) devient une équation intégrable :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y}}_{\text{forme 1}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial A}{\partial Y} \right)}_{\text{forme 2}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial A}{\partial X} \right)}_{\text{forme 3}} = 0 \quad (4.7)$$

La deuxième forme de cette équation montre que la dérivée de A par rapport à Y ne dépend pas de X, donc la fonction A ne dépend que de Y . Mais la troisième forme montre que la dérivée de A par rapport à X ne dépend pas de Y , donc la fonction A ne dépend que de X . La forme générale de la solution A(X , Y ) est donc la somme de deux fonctions indépendantes qui ne dépendent chacune que d'une variable, X ou Y :

$$A(x,t) = F(X) + G(Y) = F(x - Vt) + G(x + Vt) \quad (4-8)$$

Les deux fonctions F et G sont des fonctions d'onde arbitraires et ne sont déterminées que par les conditions aux limites et initiales du système. L'équation d'onde simple n'impose aucune forme particulière pour ces fonctions, du moment qu'elles sont dérivables.

### 4.3 Vitesse de phase, vitesse de groupe

La vitesse de phase caractérise la vitesse de déplacement d'une onde plane. Elle dépend éventuellement de la fréquence si le milieu est dispersif. En ce sens cette vitesse n'a pas vraiment de sens physique car l'onde plane n'est qu'une représentation mathématique utile du paquet d'ondes qui lui est un vrai signal physique. La vitesse de groupe caractérise le déplacement de l'ensemble du paquet, c'est si on veut une sorte de vitesse moyenne du groupe d'ondes planes qui définit le signal.

## CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques

Vitesse de phase Par simple géométrie, il est clair que la crête de l'onde (son extremum) avance d'une longueur  $\lambda$  à chaque période  $\tau$  et donc la vitesse de la crête, aussi appelée vitesse de phase, est :

$$v_p = \lambda \tau = \lambda v \quad (4-9)$$

La vitesse de la crête de l'onde, ou vitesse de phase.

On peut écrire :  $v = v_p / \lambda$  ou  $\lambda = v_p / v$  (4-10)

On peut dire de  $v_p = \lambda v$  que la crête avance d'une distance  $\lambda$ ,  $v$  fois par unité de temps. Cette relation pour ( $v_p$ ) est valable pour toute onde, parce qu'elle est purement géométrique. Selon le mécanisme physique responsable de la génération de cette onde, la vitesse ( $v_p$ ) peut être ou ne pas être une fonction de la longueur d'onde/fréquence ou peut être constante et indépendante de la longueur d'onde/fréquence. Dans ce dernier cas, l'onde est dite harmonique. Nous y reviendrons.

### 4.4 Front d'onde

Nous pouvons aussi appeler surface d'onde ou nous définissons comme une surface d'égale phase d'une onde, c'est-à-dire que ces points ont mis le même temps de parcours depuis la source.

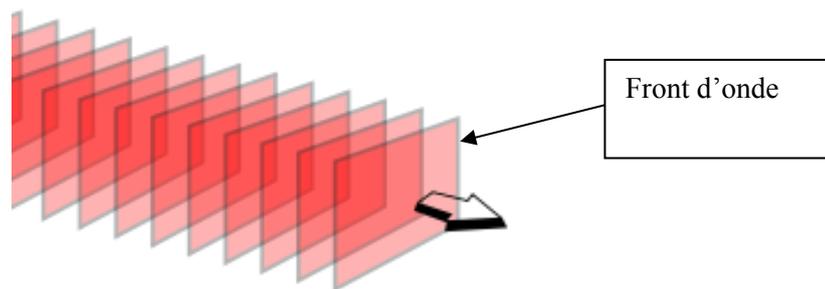


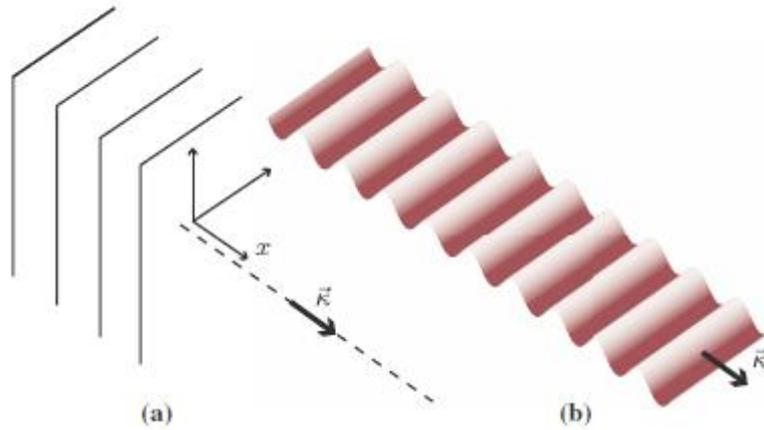
Figure 4-3 : Surface d'onde (front d'onde)

#### 4.4.1 Exemple des ondes planes, ondes sphériques

##### ➤ Onde plane

Une onde est plane quand les fronts d'ondes sont des surfaces planes. Cela correspond à un vecteur d'onde  $\vec{k}$  orienté suivant une seule direction de l'espace. Les fronts d'ondes sont des plans parallèles entre eux séparés d'une distance  $\lambda = 2\pi/k$  et tous perpendiculaires à la direction  $\vec{k}$ . Si le vecteur d'onde est orienté suivant la direction  $x$ , le vecteur propagation est  $\vec{k} = \vec{e}_x$  et l'onde plane monochromatique est notée :

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - vt) \quad (4-11)$$



**Figure 4-4 :** Illustrations des fronts d'onde plane (a) et de l'amplitude d'une onde se propageant selon l'axe x (b).

➤ **Onde sphérique**

Quand la propagation admet une symétrie ponctuelle dans un espace isotrope à trois dimensions, l'équation d'onde admet comme solutions les combinaisons linéaires des ondes monochromatiques sphériques. La direction de propagation est donnée par :

$$\vec{k} = k_r \vec{e}_r, \quad k_\theta = 0, \quad k_\varphi = 0$$

Et l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques est tel que :

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) \tag{4-12}$$

L'équation d'onde (4-12) s'écrit donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{4-13}$$

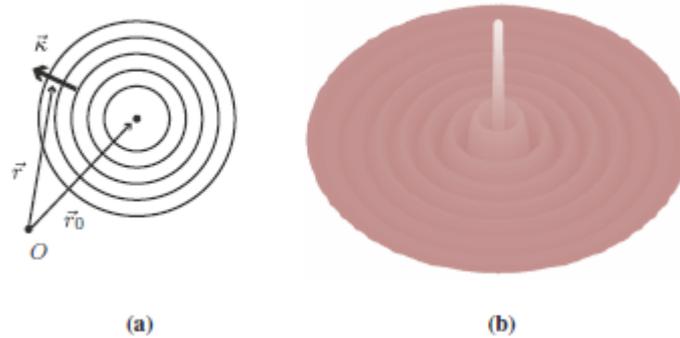
On retrouve ici une équation d'onde à une dimension d'espace dont la solution  $rA$  se décompose sous la forme  $F(r - ct) + G(r + ct)$ . La fonction d'onde sphérique est donc de la forme

$$A(r, t) = A(r, t) = \frac{1}{r} F(r - ct) + \frac{1}{r} G(r + ct) \tag{4-14}$$

Et l'onde monochromatique sphérique s'écrit sous la forme

$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(k \|\vec{r} - \vec{r}_0\| \pm \omega t) \tag{4-15}$$

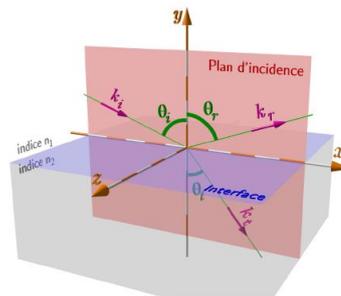
Avec  $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$  la position de la source ou du point d'absorption et  $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques du point considéré.



**Figure 4-5 :** Illustrations des fronts d'onde sphérique (a) et de l'amplitude de l'onde sphérique (b).

#### 4.5 Réflexion et transmission des ondes

Le dioptre est le plan  $xOz$ . Le demi-espace correspondant à  $y > 0$  est rempli d'un milieu 1 d'indice optique  $n_1$  le demi espace correspondant à  $y < 0$  est empli d'un milieu d'indice optique  $n_2$ . Nous considérons deux demi-espaces séparés par un dioptre plan.



**Figure 4-5 :** Réflexion et transmission

Nous considérons une onde plane progressive de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  se dirigeant vers le dioptre. Le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  fait un angle  $\theta_i$  (angle d'incidence) avec l'axe  $Oy$  qui est normal à l'interface. A l'interface entre les deux milieux, on constate deux phénomènes :

- Après la traversée du dioptre, l'onde est déviée. C'est le **phénomène de réfraction**. L'onde transmise est toujours une onde plane progressive. Son vecteur d'onde  $\vec{k}_t$  fait un angle  $\theta_t$  avec l'axe  $Oy$ .
- Une onde plane est renvoyée par le dioptre vers le milieu 1. C'est le **phénomène de réflexion**. Cette onde réfléchie est elle aussi une onde plane progressive. Son vecteur d'onde est  $\vec{k}_r$  fait un angle  $\theta_r$  avec l'axe  $Oy$ .

Notons immédiatement que les pulsations de ces trois ondes sont identiques.

## CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques

---

Exemple : **Le champ électromagnétique dans les deux demi-espaces.**

Dans le demi-espace  $y > 0$  le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(x, y > 0, z, t)$  est la superposition des champs des ondes incidente et réfléchie :

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y > 0, z, t) = \vec{\varepsilon}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{\varepsilon}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4-16)$$

Tandis que dans le demi espace  $y < 0$ , une seule onde est présente. Le champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(x, y < 0, z, t)$  est donc celui de l'onde transmise :

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y < 0, z, t) = \vec{\varepsilon}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4-17)$$

Comme chacune des trois ondes (incidente, réfléchie et transmise) est une onde plane, le champ magnétique s'exprime simplement en fonction des vecteurs d'onde et du champ électrique. En notant  $\alpha$  l'indice qui correspond à chacune des ondes ( $\alpha = i, r$  ou  $t$ ) :

$$\vec{\beta}_\alpha = \vec{\beta}_{i0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{\vec{k}_\alpha}{\omega} \times \vec{\varepsilon}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{n}{c} \frac{\vec{k}_\alpha}{\|\vec{k}_\alpha\|} \times \vec{\varepsilon}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

## Exercices

### Exercice 1 :

Vérifier que les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation D'Alembert

a)  $u(x, t) = A \sin(\omega(t - \frac{x}{V}))$  , b)  $u(x, t) = A e^{i\omega(t - \frac{x}{V})}$  , c)  $u(x, t) = A \cos(k(x - Vt))$  , d)

$u(x, t) = A e^{i\omega(t + \frac{x}{V})}$  e)  $u(x, t) = \alpha(x + Vt)^2$

On suppose que  $x$ ,  $t$  et  $V$  sont respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation

### Exercice 02 :

Soit des ondes sinusoïdales définies par les deux équations suivantes :

$$A_1(x, t) = 2 \cos(6.28t - 15x) \text{ et } A_2(x, t) = 5 \cos(9.42t + 22x)$$

Quelle est la vitesse de phase  $v_p$  pour chaque onde

Sachant que  $\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) = 2 \cos(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}) \cos(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})$  trouver la vitesse de phase  $v_p$  et

de groupe  $V_G$  de l'onde résultante

### Exercice 03 :

La figure ci-dessous représente l'aspect d'un ébranlement se propageant le long d'une corde indéfiniment longue. L'aspect de la corde est représenté aux instants  $t = 2$  s et  $t = 5$  s.

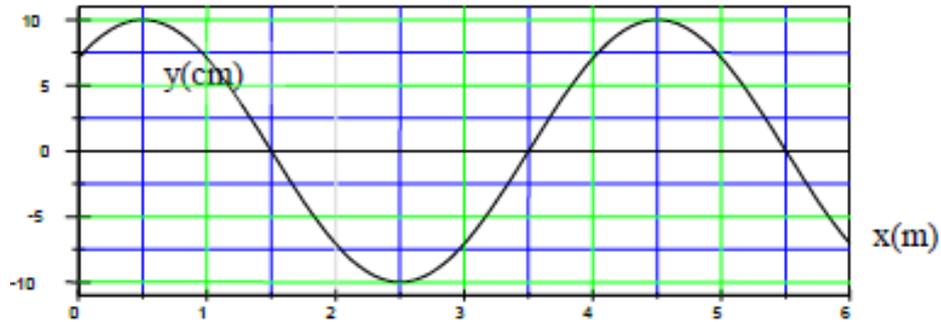


- 1- Calculer la vitesse de propagation de cet ébranlement. Quelle est la position de l'ébranlement à  $t = 0$ ?
- 2- A quel instant  $t_1$  le point B aura-t-il une amplitude maximale ?
- 3- A quel instant  $t_2$  le point B revient-il à sa position initiale ?
- 4- A quel instant  $t_3$  le point M retrouvera-t-il pour la première fois une élongation nulle ?
- 5- Tracer sur un même graphe les amplitudes  $y_A(t)$  et  $y_B(t)$  des points A et B de la corde.
- 6- Représenter la courbe de vitesse  $\dot{y}_B(t)$  du point B.

## CHAPITRE 04 : Généralités sur les ondes mécaniques

### Exercice 04 :

Une onde transversale sinusoïdale, se propage le long d'une corde dans le sens des  $x$  négatifs à la vitesse  $V = 10\text{m/s}$ . La figure ci-dessous illustre le déplacement des particules sur la corde en fonction de la position à un instant  $t$ .



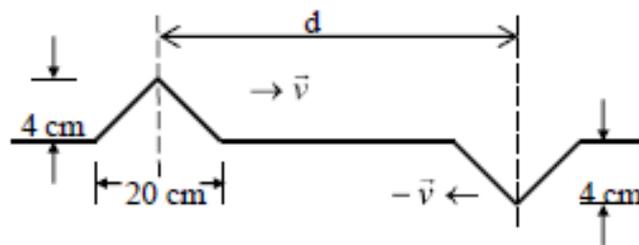
Calculer :

- l'amplitude de cette onde,
- sa longueur d'onde,
- sa vitesse de phase,
- sa période,
- la vitesse maximale d'une particule sur la corde.
- Quelle est l'équation de cette onde ?

### Exercice 05 :

1- Deux ébranlements de même amplitude mais de signes opposés se dirigent l'un vers l'autre sur la corde. La figure ci-contre les représente à  $t=0$ . Si les deux ébranlements sont distants de  $d = 60\text{cm}$ , dessinez la configuration de la corde aux instants 10, 15 et 30 ms.

2- Répondre aux mêmes questions si l'ébranlement de droite est du même signe que celui de gauche.



CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

5.1 Introduction

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée  $x$ , et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe  $Oy$ .

Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par  $T$  la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse  $x$  un segment très court de cette corde, de longueur  $\Delta x$ . La masse  $\Delta m$  du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \cdot \Delta x \tag{5-1}$$

Où  $\mu$  est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueur qui s'exprime en  $(kg/m)$ .

5.2 Equation de propagation

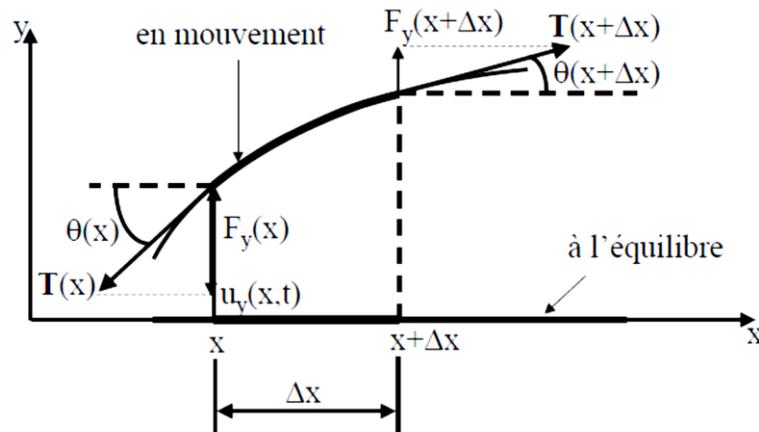


Figure 5-1 : Onde sur une corde vibrante

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude

$$\vec{u}(x, t) = u(x, t)\vec{e}_x \tag{5-2}$$

Après l'approximation

$$\begin{aligned} \sin(\theta)/x &= \tan(\theta)/x = \frac{\partial u}{\partial x} / x \\ \sin(\theta)/_{x+\Delta x} &= \tan(\theta)/_{x+\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} /_{x+\Delta x} \end{aligned}$$

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

L'allongement du segment est négligé aussi par l'approximation

➔ **La tension T= Constante**

La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x qui force appliquée vers le bas est égale en module à

$$F(x, t) = T \sin(\theta)/x \approx T \tan(\theta)/x = \frac{\partial u}{\partial x} / x \quad (5-3)$$

Pour la force au point  $x+\Delta x$  qui vers le haut

$$F(x + \Delta x, t) = T \sin(\theta)/_{x+\Delta x} \approx T \tan(\theta)/_{x+\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} /_{x+\Delta x} \quad (5-4)$$

La somme de ces forces dans la direction y est donc :

$$R = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} /_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} /_x \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (5-5)$$

Nous pouvons appliquer maintenant la deuxième loi de Newton :

$$R = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5-6)$$
$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si on définit  $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  son dimension d'une vitesse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5-7)$$

On appelle cette équation l'équation d'onde de la corde, Cette équation est **l'équation de d'Alembert à une dimension.**

### 5.3 Impédance caractéristique

Si nous supposons notre onde une onde progressive harmonique nous pouvons définir par

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) \quad (5-8)$$

Avec représentation complexe

$$u(x, t) = U_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (5-9)$$

Ou  $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$  module de vecteur d'onde,  $\lambda$  la longueur d'onde

Nous définissons la force en un point la projection selon (Oy) de la force exercée en ce point par la partie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F = -T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5-10)$$

$$F(x, t) = jkTU_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (5-11)$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} = j\omega U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

Nous remarquons que la vitesse

$\dot{u}(x, t)$  en phase avec la force  $F$

On appelle impédance en un point le rapport de la l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule

$$Z(x) = \frac{F_y}{\dot{u}_y}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T}$$

La quantité  $\sqrt{\mu T}$  définit l'impédance caractéristique de la corde

$$Z_c = \mu V = \sqrt{\mu T} \quad (5-12)$$

Nous obtenons une propriété de l'onde progressive plane

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x$$

### 5.4 Ondes stationnaires

#### 5.4.1 Définition

Une onde stationnaire est représentée, en notation réelle, sous la forme du produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps :

$$y(x, t) = F(x) \times G(t) \quad (5-13)$$

#### 5.4.2 Solution stationnaire de l'équation de l'Alembert

Soit la solution de l'équation d'Alembert :

$$y(x, t) = F(x) \times G(t)$$

$$\forall x, \forall t, \quad 0 = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = G(t)F''(x) - \frac{1}{c^2} F(x)G''(t)$$

La solution stationnaire de l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$y(x, t) = (C \sin kx + D \cos kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Avec } k = \frac{\omega}{v} \quad (5-14)$$

$\sqrt{C^2 + D^2}$  : Amplitude d'onde

$\omega$  : Pulsation d'onde ( rad/s)

$f$  : fréquence

$k$  : nombre d'onde (  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  )

$\lambda$  : longueur d'onde (m)

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

---

V : vitesse de phase ( m/s)

T : période temporelle ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )

Nous pouvons considérer l'onde stationnaire comme superposition de deux ondes progressives de même amplitudes de sens opposé.

Donc les constantes C et D sont définies par les conditions initiales et les conditions aux limites.

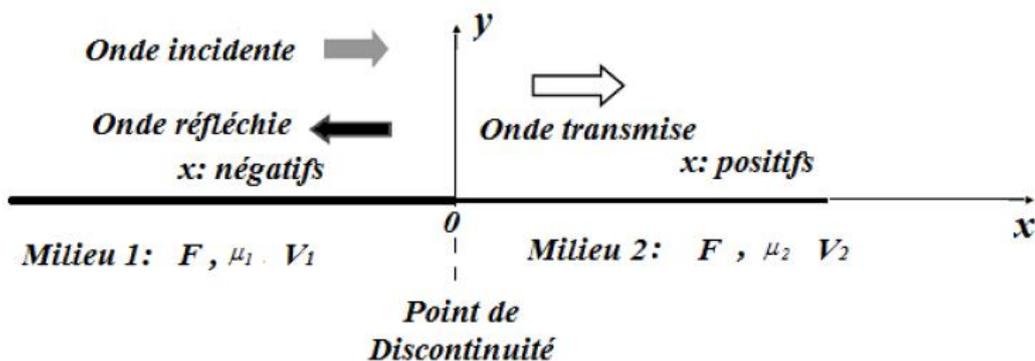
$$\text{Avec } f \cdot \lambda = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (5-15)$$

$T_0$  : tension

$\mu$  : densité linéique

### 5.4.3 Réflexion et transmission

Lors du passage de l'onde mécanique incidente du milieu 1 vers le milieu 2 il existe une onde transmise vers le milieu 2 et une onde réfléchie vers le milieu 1.



**Figure 5-2:** Modes de transmission et de réflexion d'une onde mécanique  
 Au point de discontinuité, on applique les conditions de continuité telle que :

$$y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t)$$

$$\left[ \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} + \left[ \frac{\partial y_r(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial y_t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (5-16)$$

### 5.4.4 Types de condition aux limites pour une corde vibrante

#### 5.4.4.1 Deux extrémités fixes

Lorsque la corde est tendue par les deux extrémités, on aura l'interférence des ondes incidentes et les ondes réfléchies, d'où l'apparition des ondes stationnaires.

Dans ce cas-là, on applique les conditions aux bords, comme suit :

$$y(0, t) = y(a, t) = 0 \tag{5-17}$$

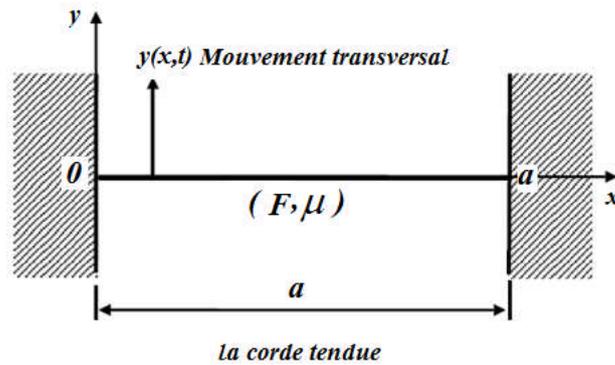


Figure 5.3 : Modèle de la corde tendue

On obtient les modes propres :

Appliquons ces deux conditions à la solution  $y(x, t)$

$$y(0, t) = D \cos(\omega t + \varphi) = 0 \rightarrow D = 0$$

$$y(L, t) = C \sin kL \cos(\omega t + \varphi) = 0 \rightarrow \sin kL = 0$$

$$kL = P\pi \rightarrow \text{avec } p=0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots$$

$$k_p = P \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_p = v k_p = p \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{5-18}$$

$\omega_p$  est la pulsation avec laquelle oscillent toutes les parties de la corde dans un mode  $P$  donné ( $k_p$ )

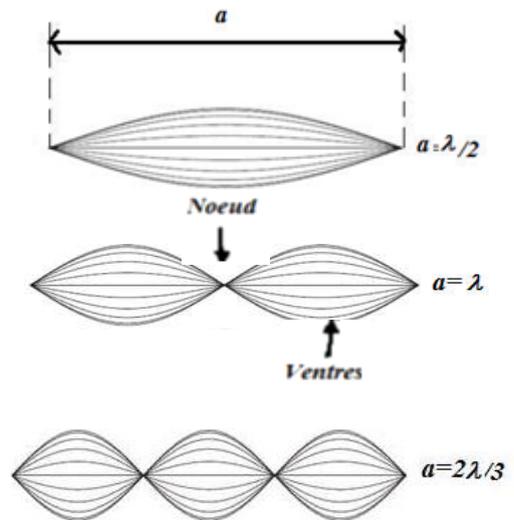
Pour  $P=0$  la corde à l'équilibre

$$\text{Mode 1 : } k_1 = \frac{\pi}{L} \longrightarrow \omega_1 = v \frac{\pi}{L}$$

$$\text{Mode 2 : } k_2 = \frac{2\pi}{L} \longrightarrow \omega_2 = 2v \frac{\pi}{L} = 2 \omega_1$$

$$\text{Mode 3 : } k_3 = \frac{3\pi}{L} \longrightarrow \omega_3 = 3v \frac{\pi}{L} = 2 \omega_1$$

Ainsi de suite .....



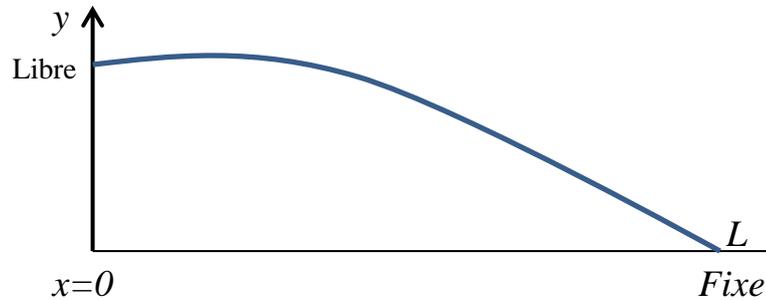
$$y_p(x, t) = C_p \sin k_p x \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} y_p(x, t) \quad (5-19)$$

### 5.4.4.2 Une extrémité fixe et l'autre libre

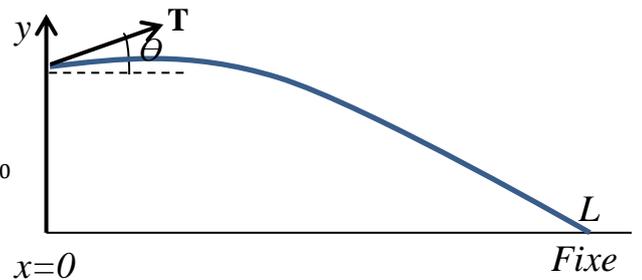
Supposons qu'à  $x=0$ , il existe un exciteur vertical qui applique une force sur l'extrémité de la corde.



A un instant donné, la force verticale appliquée par la corde à travers son extrémité sur l'exciteur est :

$$F_{(\text{corde sur exciteur})} = T \sin \theta$$

$$F_{(\text{corde sur exciteur})} = T \cos \theta \tan \theta \approx T \frac{\partial y}{\partial x} /_{x=0}$$



Maintenant, s'il n'existe aucun exciteur en  $x=0$ , l'extrémité gauche sur libre, la force de réaction  $F_{(\text{corde sur exciteur})}$  (composante verticale) doit être nulle :

$$T \frac{\partial y}{\partial x} /_{x=0} = 0$$

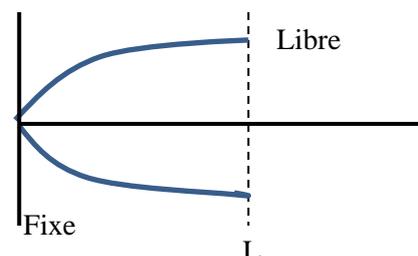
$$\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0$$

Ceci est la condition pour une extrémité libre, on applique cette condition à l'équation d'onde :

$$y(x, t) = (C \sin kx + D \cos kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-20)$$

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} /_{x=L} = 0$$

$$y(0, t) = 0 \longrightarrow D=0$$



## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

$$\frac{\partial y}{\partial x} /_{x=L} = 0 \quad \longrightarrow \quad C k \cos k L = 0$$

$$\cos k L = 0 \quad \longrightarrow \quad k L = p \frac{\pi}{2} \quad p=1,3,5,7,\dots$$

$$y_p(x, t) = C \sin k_p x \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

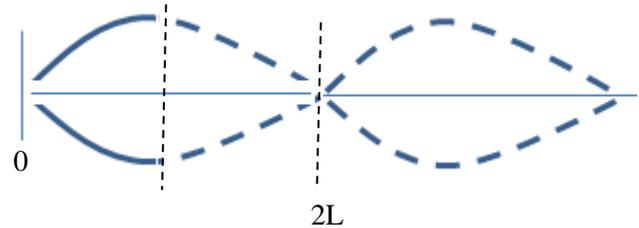
$$k_p = p \frac{\pi}{2L} \quad , \quad \omega_p = v k_p = v \frac{\pi p}{2L}$$

### Mode 1: $p=1$

$$k_1 = \frac{\pi}{2L}$$

$$\omega_1 = v \frac{\pi}{2L}$$

$$\lambda_1 = 4L$$



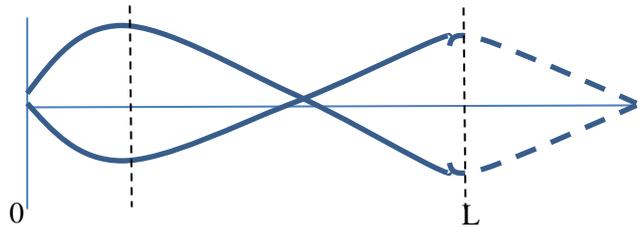
$$y_1(x, t) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

### Mode 2: $p=2$

$$K_2 = \frac{3\pi}{2L}$$

$$\omega_2 = 3v \frac{\pi}{2L}$$

$$\lambda_2 = \frac{4L}{3}$$



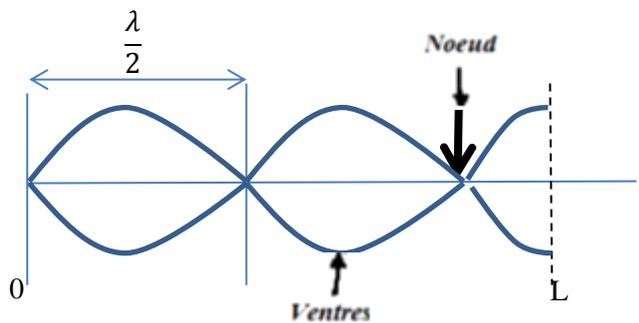
$$y_2(x, t) = C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{4L} x\right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

### Mode 3: $p=3$

$$K_3 = \frac{5\pi}{2L}$$

$$\omega_3 = 5v \frac{\pi}{2L}$$

$$\lambda_3 = \frac{4L}{5}$$



$$y_3(x, t) = C_3 \sin\left(\frac{5\pi}{2L} x\right) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$y(x, t) = \sum_{p=1,3,5,\dots} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{2L} x\right) \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

(5-21)

## 5.4.4.3 Deux extrémités libres de la corde

Nous appliquons simplement la condition

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{Pour } x=0 \text{ et } x=L$$

$$y(x, t) = (C \sin kx + D \cos kx) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} /_{x=0} = C \cos(\omega t + \varphi) = 0 \longrightarrow C=0$$

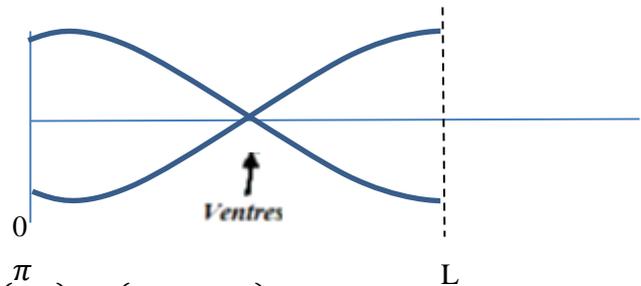
$$\frac{\partial y}{\partial x} /_{x=L} = D k \sin kL = 0 \longrightarrow kL = p \pi \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \dots$$

$$k_p = \frac{p\pi}{L} \quad p=1, 2, 3, \dots \dots$$

### Mode 1: $p=1$

$$k_1 = \frac{\pi}{L} \quad \omega_1 = v \frac{\pi}{L}$$

$$\lambda_1 = 2L$$

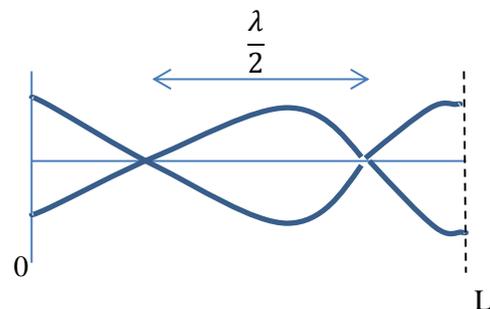


$$y_1(x, t) = D_1 \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

### Mode 2: $p=2$

$$k_2 = \frac{2\pi}{L} \quad \omega_2 = 2v \frac{\pi}{L}$$

$$\lambda_2 = L$$

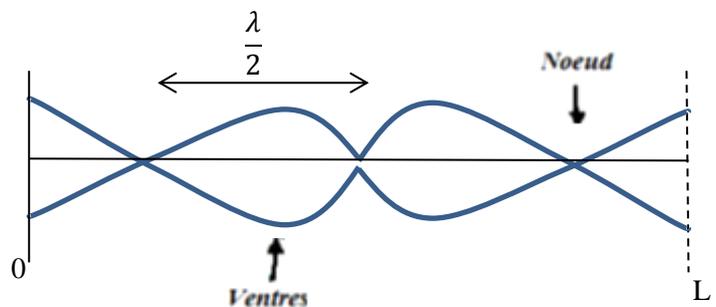


$$y_2(x, t) = D_2 \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

### Mode 3: $p=3$

$$k_3 = \frac{3\pi}{L} \quad \omega_3 = 3v \frac{\pi}{2L}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3}$$



$$y_3(x, t) = D_3 \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$y(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p \cos\left(\frac{P\pi}{L}x\right) \cos(\omega_p t + \varphi_p) \quad (5-22)$$

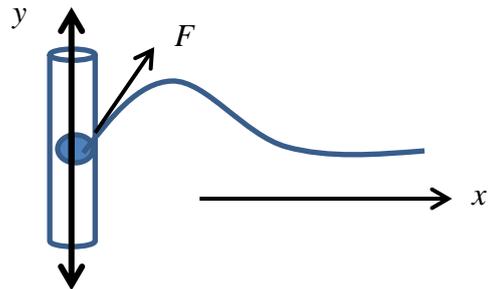
#### 5.4.4.4 Autres types de conditions aux limites

Il existe d'autres types de conditions aux limites qu'on peut rencontrer dans les dispositifs :

La corde est attachée à une masse qui roule verticalement dans une fente

L'équation en  $x=0$  s'écrit :

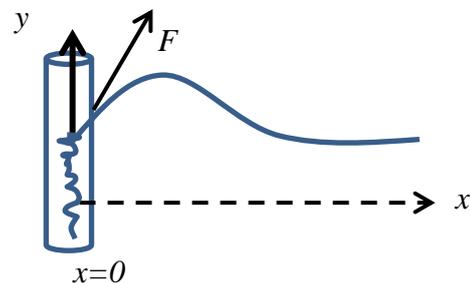
$$m\ddot{y}(0, t) = T \frac{\partial y(0, t)}{\partial x}$$



La corde est attachée à un ressort de raideur  $k$

Dans ce cas

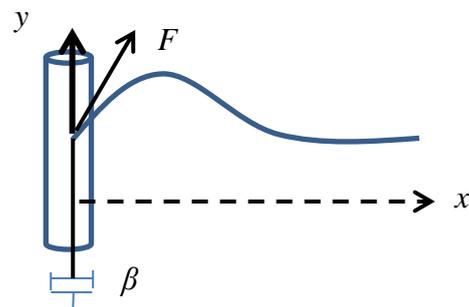
$$ky(0, t) = T \frac{\partial y(0, t)}{\partial x}$$



La corde est attachée à un amortisseur de coefficient  $\beta$

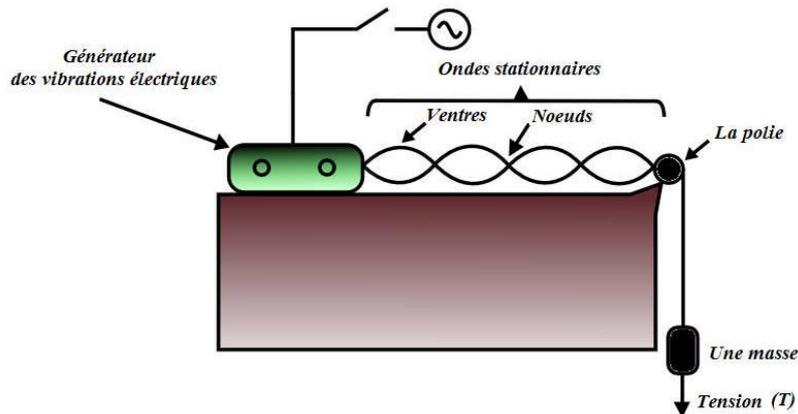
Dans ce cas

$$\beta\dot{y}(0, t) = T \frac{\partial y(0, t)}{\partial x}$$



#### 5.5 Partie expérimentale

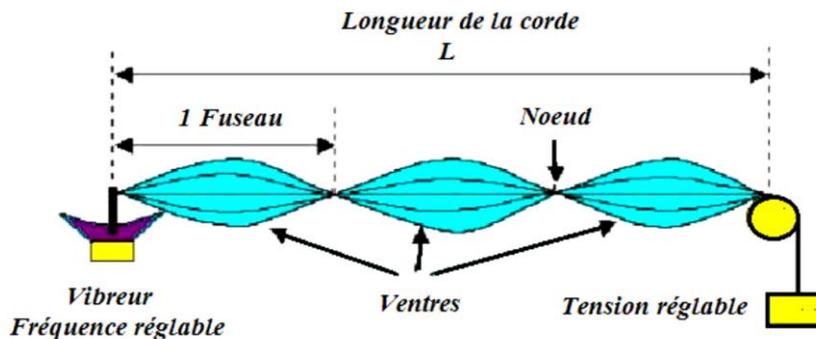
Le premier dispositif expérimental qui illustre l'expérience de la production des ondes stationnaires est celui de « MELDE » représenté dans la figure 5-3



**Figure 5-4 :** Dispositif expérimental de « MELDE »

### 5.5.1 Expérience générale

Une corde de longueur  $L$  est placée horizontalement sur deux tiges en fer, à l'une des extrémités de la corde nous attachons un poids de masse  $M$ . Un vibreur fait vibrer la corde selon une intensité variable. Nous constatons qu'il se produit un mouvement particulier de la corde qui présente des ventres et des nœuds en différents points.



**Figure 5-4:** Expérience de la corde tendue

### 5.5.2 Énergie emmagasinée sur une corde vibrante

Il faut noter pour des ondes stationnaires. Il n'y a pas de phénomène de propagation, ni de la matière ni de l'énergie :

Néanmoins, ces calculs nous seront très utiles lors de l'étude des phénomènes de propagation.

### 5.5.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un élément infinitésimal de la corde est donnée par :

$$dE_C = \frac{1}{2} \mu ds \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \tag{5-23}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}$$

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

---

Pour de faibles déviations de la corde de sa position d'équilibre, on peut négliger le terme  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$  devant le 1 et écrire  $ds \approx dx$ .

$$dE_c = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad (5-24)$$

On définit la densité d'énergie cinétique

$$e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad (5-25)$$

### 5.5.4 Energie potentielle

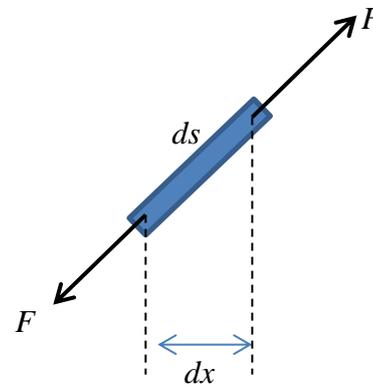
L'énergie potentielle est égale au travail nécessaire pour étirer une partie infinitésimale de la corde de longueur  $dx$ , pour quelle devenue d'une longueur  $ds$ .

$$dW = T(ds + dy)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

En faisant l'approximation :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$



On se trouve donc avec

$$dE_p = \frac{1}{2} T dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (5-26)$$

On définit la densité d'énergie potentielle :

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (5-27)$$

Donc la densité d'énergie totale :

Pour obtenir l'énergie totale emmagasinée dans une corde vibrante de longueur L, on calcule

$$e(x, t) = e_c(x, t) + e_p(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (5-28)$$

$$E_T = \int_0^L e(x, t) dx$$

## Exercices

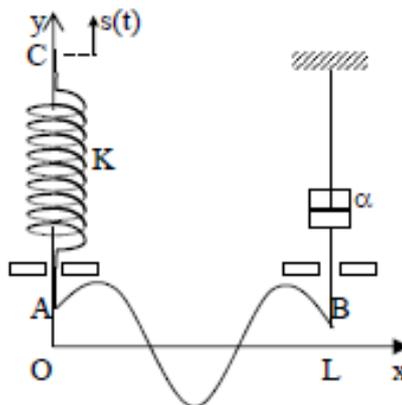
### Exercice 01 :

Une corde AB horizontale, de masse  $m$  et de longueur  $L=2m$ , est tendue avec une tension  $T$  réglable. La corde est reliée à son extrémité A d'abscisse  $x=0$  par un ressort de raideur  $K$  dont l'extrémité C est reliée à un vibreur. Celui-ci communique au ressort un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude  $s_0=1\text{cm}$  et de pulsation  $\omega=100\pi\text{ rad/s}$  :

$$S(t)=s_0 e^{j\omega t}$$

L'autre extrémité B d'abscisse  $x=L$  de la corde est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha =0.2\text{ N.s.m}^{-1}$ . Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements transverses des points A, B et C. Un point M d'abscisse  $x$  est repéré à l'instant  $t$  par sa petite élongation  $y(x, t)$ . L'onde se propageant de A vers B est progressive.

- 1- Pour quelle tension  $T$ , exprimée en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda$  l'onde qui se propage le long de la corde est progressive. En déduire la vitesse de phase  $V$  de l'onde et sa longueur d'onde  $\lambda$ .
- 2- Montrer que les extrémités A et B de la corde vibrent en phase.
- 3- Exprimer les forces qui s'exercent au point A et écrire l'équation différentielle du mouvement de ce point.
- 4- Etablir les expressions de l'amplitude  $y_0$  et de la phase  $\varphi$  de l'élongation,  $y(0,t)$  du point A. En déduire l'élongation,  $y(x,t)$  d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase  $\varphi$  est nulle ? Que vaut dans ce cas l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?



## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

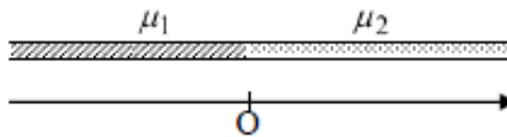
---

### Exercice 02 :

Deux cordes 1 et 2, de masses linéiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , sont soudées à la jonction O et sont tendues horizontalement suivant l'axe  $Ox$  avec une tension  $T$ . On choisit l'abscisse  $x=0$  à la jonction O des deux cordes. Soit une onde incidente de la forme :

$$y_i(x, t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

Cette onde donne naissance, à la jonction O, une onde réfléchie  $y_r(x, t)$  dans la région  $x < 0$  et une transmise  $y_t(x, t)$  dans la région des  $x > 0$ .



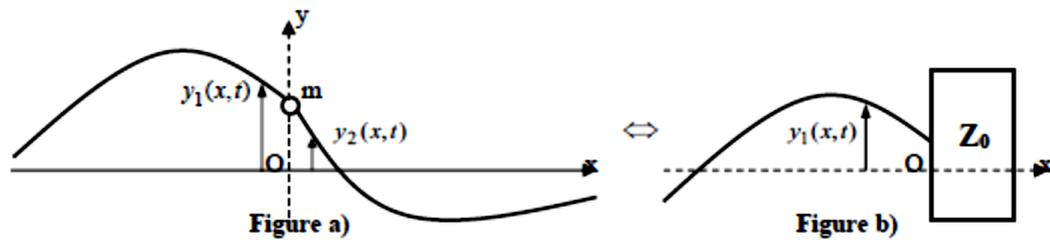
- 1- Ecrire les expressions des  $y_1(x, t)$  pour la région des  $x < 0$  et  $y_2(x, t)$  pour la région des  $x > 0$
- 2- Exprimer la tension instantanée en tout point transversale instantanée :  
6 en tout point M d'abscisse  $x$  de la corde 1 (région  $x < 0$ ).
- 3- Ecrire les deux équations de continuités au niveau de la jonction O pour le déplacement et la tension transversale.
- 4- En déduire les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  en déplacement en fonction de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .
- 5- **Application numérique** : calculer  $r$  et  $t$  lorsqu'un fil d'acier (corde 1) de diamètre  $d_1 = 2$  mm est relié à la jonction O à un autre fil d'acier (corde 2) de diamètre  $d_2 = 1$  mm.
- 6- **Application numérique** : mêmes questions, l'onde incidente venant de la droite pour aller vers la jonction O.

### Exercice 03 :

Une corde de longueur infinie, de masse linéique  $\mu$ , est tendue sous la tension  $T$ . La direction de la corde au repos est parallèle à l'axe  $x'Ox$ . Une masse  $m$  est fixée à l'origine  $x=0$  (figure a). On négligera le poids de la corde et celui de la masse  $m$  devant les autres forces. On considère une onde incidente de déplacement de la forme :

$$y_i(x, t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde



Venant de la gauche (région  $x < 0$ ) et se propageant dans le sens des  $x$  croissants. Elle donne naissance en  $x=0$  à une onde réfléchiée  $y_r(x, t)$  et à une onde transmise  $y_t(x, t)$ . On notera  $r$  et  $t$  les coefficients complexes de réflexion et de transmission relatifs aux amplitudes des déplacements au point  $O$ .

1- Donner l'expression complexes de l'onde transversale,  $y_1(x, t)$  pour la région des  $0 < x < \infty$  et de l'onde transversale,  $y_2(x, t)$  pour la région des  $x < 0$ .

2- Montrer que la force transversale qui s'exerce sur la masse  $m$  s'écrit :

$$F_y(0, t) = T \left[ \left( \frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=0} - \left( \frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=0} \right]$$

3- Montrer que, compte tenu de la condition de continuité du déplacement en  $x=0$  et de l'équation du mouvement de la masse  $m$ , les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  s'écrivent :

$$r = -\frac{j m \omega}{j m \omega + 2 Z_c} \quad \text{et} \quad t = \frac{2 Z_c}{j m \omega + 2 Z_c} \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{T \mu}$$

Quelles sont les limites de ces deux coefficients lorsque  $m \rightarrow 0$  et  $m \rightarrow \infty$ ?

4- Montrer que le système de la figure a) est équivalent au système de la figure b) constitué d'une corde semi-infinie occupant la région des  $x < 0$  et fermée en  $O$  par une impédance  $Z_0$  dont on calculera l'expression en fonction de  $Z_c$ ,  $m$  et  $\omega$ . Donner le coefficient de réflexion  $r$  en fonction de l'impédance réduite  $Z'_0 = Z_0 / Z_c$ .

5- Calculer l'impédance mécanique ramenée  $Z(x)$  en tout point d'abscisse  $x$  ( $x < 0$ ), en fonction de  $Z_c$ ,  $Z'_0$ ,  $k$  et  $x$ . Que vaut cette impédance pour les positions particulières suivantes :

a)  $x_n = n \frac{\lambda}{2}$                       b)  $x'_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$

Où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $n=0, -1, -2, \dots$

## CHAPITRE 05 : Ondes transversales sur une corde

---

6- Ecrire l'onde résultante de déplacement  $y_1(x, t)$  sous la forme :  $y_1(x, t) = A(x) \times y_i(x, t)$

7- Déterminer les positions et l'amplitude  $A_{min}$  des nœuds de déplacement ainsi que les positions et l'amplitude  $A_{max}$  des ventres de déplacement. En déduire le taux d'ondes stationnaire défini par le rapport :  $\rho = \frac{A_{max}}{A_{min}}$

7- A quelle distance se trouve le premier maximum le plus proche de la terminaison  $x=0$ .

## CHAPITRE 6 : Ondes longitudinales dans les fluides

### 6.1 Introduction

L'acoustique est la science des ondes sonores dont nous pouvons percevoir une partie avec nos oreilles. La physique des ondes sonores ne se limite pas à la propagation du son dans l'air car on peut, avec les mêmes équations, décrire les ondes sonores dans tous les fluides, liquides ou gaz. Malgré la complexité de la description des fluides en mouvement, l'équation d'onde acoustique est la plus simple qui soit, tant que les variations de pression sont petites par rapport à la pression atmosphérique. La vitesse de propagation des fluctuations de pression, la vitesse du son, peut être calculée à partir de deux paramètres du fluide : sa masse volumique et sa compressibilité.

La matière est classiquement divisée en trois états : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Les deux derniers états sont regroupés sous le nom de **fluide**. À la différence d'un solide, un fluide ne peut conserver une forme propre : par exemple un volume d'eau va adopter la forme du récipient et un gaz va occuper tout le volume disponible. Les composants des fluides, atomes ou molécules, n'ont pas de positions fixes et changent constamment de voisins.

### 6.2 Ondes planes dans un tuyau cylindrique

#### 6.2.1 Equation d'ondes dans un gaz.

On définit alors, les Ondes élastiques dans les fluides comme des ondes mécaniques qui se propagent dans les gaz ou dans les liquides.

On suppose que les fluides soient parfaits, il n'y aura pas d'absorption.

L'onde élastique dans l'air est due à la propagation de la variation de pression

Dans la suite, nous utiliserons les symboles suivants pour étudier l'onde acoustique qui se propage suivant l'axe des  $x$  :

$x$  : coordonnée à l'équilibre d'une particule du milieu.

$U_x$  : composante suivant l'axe des  $x$  du déplacement de particule par rapport à la position d'équilibre.

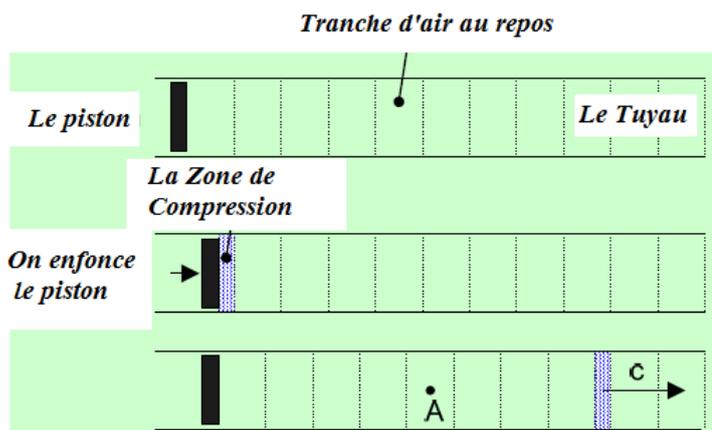
$\rho_0$  : masse volumique du fluide à l'équilibre

$P$  : pression instantanée en un point quelconque

$P_0$  : pression à l'équilibre

$p = P - P_0$  : surpression ou pression acoustique

$c$  : vitesse de propagation de l'onde



**Figure 6-1** : propagation d'une onde élastique sinusoïdale plane dans l'air

Dans un gaz, la pression est souvent de l'ordre de la pression atmosphérique,  $P = 10^5$  Pa  
 Une vibration mécanique est véhiculée par une surpression locale:  $p(x, t)$  telle que :

$$|p| \ll P$$

Sachant que les mouvements aux fréquences sonores sont trop rapides pour qu'il y ait des échanges thermiques, les variations de pression sont donc adiabatiques et l'évolution d'un volume  $V$  est reliée à celle de la pression comme suit :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (6-1)$$

Où  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.

On obtient la relation suivante :  $PV^\gamma = cte$

On entend par particule, un élément de volume contenant des millions de molécules de telle sorte qu'il puisse être considéré comme continu, mais toutefois suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume. Dans ce qui suit, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que  $P_0$  et  $\rho_0$  sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

## 6.2.2 Ondes planes dans un tuyau cylindrique

### 6.2.2.1 Equation d'ondes dans un fluide

Beaucoup de problèmes de bruit industriel sont liés à la propagation d'ondes sonores dans des conduites et des tuyaux. Cette propagation est conditionnée par la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  telle que :

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg D \quad (6-2)$$

$D$  : Diamètre de la conduite sonore

$c$  : Célérité du son dans l'air qui est égale à 344m/s à 20°C

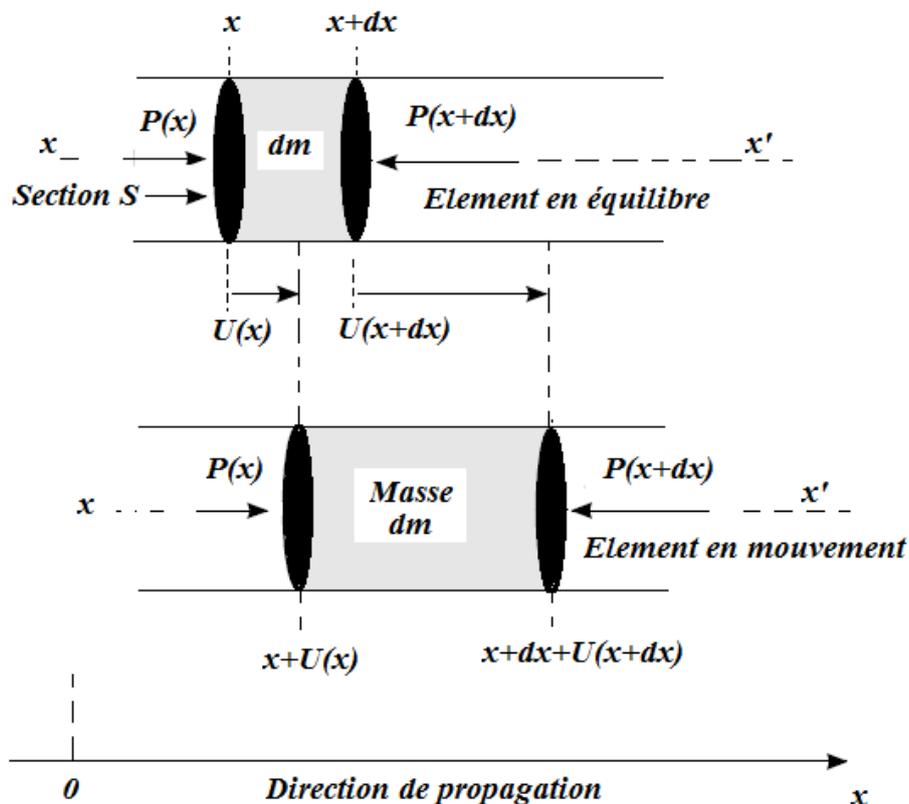
$f$  : Fréquence de l'onde

Soit une membrane vibrante émise une onde plane progressive dans un fluide uniforme, de masse volumique  $\rho$  et de pression  $P_0$  à l'équilibre. Cette onde se propage dans la direction  $x$  positif.

Le phénomène de propagation des ondes sonores dans le fluide est dû principalement par une succession de compressions et de détentes des tranches de fluide voisines.

On considère une tranche de fluide d'épaisseur  $dx$  située aux abscisses  $x$  et  $x+dx$ . Soient les pressions  $P(x)$  et  $P(x+dx)$  agissant sur les plans  $x$  et  $x+dx$  respectivement qui génèrent le mouvement de la tranche comme le montre la figure 6-2.

Soient  $U(x)$  et  $U(x+dx)$  les déplacements à l'instant  $t$  des plans d'abscisse  $x$  et  $x+dx$  respectivement



**Figure 6-2:** Propagation d'onde acoustique dans un fluide

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

En appliquant la loi de la dynamique de Newton :

$$dm \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(x + dx) - F(x) \quad (6-3)$$

$F(x)$  et  $F(x + dx)$  sont des forces d'actions appliquée aux plans d'abscisses  $x$  et  $x + dx$  respectivement.

La résultante des forces s'écrit :

$$F(x + dx) - F(x) = -S(P(x + dx) - P(x))$$

Avec :

$$(P(x + dx) - P(x)) = dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

D'où :

$$dm \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

On définit la surpression  $p$  d'un fluide compressible comme suit :

$$p = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6-4)$$

Où  $\chi$  est appelé le coefficient de compressibilité.

En injectant la valeur de surpression à l'équation du mouvement ; on obtient :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -S \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx$$

D'où l'équation de la propagation des ondes sonores dans le fluide s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi \rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (6-5)$$

Avec  $V = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi}}$  est appelé la célérité de l'onde sonore dans le fluide.

### 6.2.2.2 Vitesse du son

Le phénomène de propagation étant un processus adiabatique, on définit la vitesse du son dans un fluide :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (6-6)$$

**Exemple :** Dans l'air, dans les conditions normales  $T = 20^\circ C$  et  $P_0 = 105 N \cdot m^{-2}$ ,  $\gamma = 1.4$  et  $\rho_0 = 1.29 kg \cdot m^{-3}$ , on en déduit  $V \approx 330 m \cdot s^{-1}$ .

- La valeur de la pression à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (6-7)$$

$M$  représente la masse molaire du gaz.

- Dans un gaz parfait, la vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température mesurée en °K.

### 6.2.2.3 Impédance acoustique et impédance caractéristique.

Une onde acoustique sinusoïdale, s'écrit :

$$p(x, t) = p_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) \right] \quad (6-8)$$

On définit le module du vecteur d'onde  $k$  par

$$k = \frac{\omega}{V}$$

D'où

$$p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \quad (6-9)$$

En notation complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit

$$p(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (6-10)$$

La relation liant la pression acoustique et la compressibilité, avoir

$$p(x, t) = -\kappa \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6-11)$$

Permet d'écriture

$$\begin{aligned} U(x, t) &= -\frac{1}{\kappa} \int p(x, t) dx \\ U(x, t) &= -\frac{1}{\kappa} \int p_0 e^{j(\omega t - kx)} dx \\ U(x, t) &= \frac{p_0}{j\kappa k} e^{j(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (6-12)$$

$$U(x, t) = \frac{p_0}{j\omega \rho_0 V} e^{j(\omega t - kx)} \quad (6-13)$$

La variation de cette dernière expression par rapport au temps permet d'écrire la vitesse

$$\dot{U}(x, t) = \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0 V} e^{j(\omega t - kx)} \quad (6-14)$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particule est en phase avec la pression acoustique.

On appelle **impédance acoustique** en un point le rapport de l'amplitude complexe de la pression à l'amplitude complexe de la vitesse de particule :

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

---

$$Z(x) = \frac{p}{\dot{U}} \quad (6-15)$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \rho_0 V \quad (6-16)$$

Le produit  $\rho_0 V$  définit l'**impédance acoustique caractéristique du fluide**

$$Z_c = \rho_0 V \quad (6-17)$$

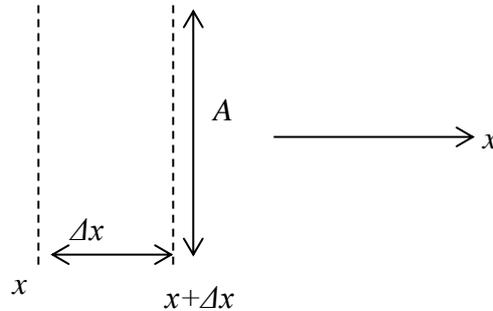
On obtient une propriété de l'onde plane progressive :

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x \quad (6-18)$$

### 6.2.2.4 Energie transportée par une onde.

#### ➤ Energie cinétique :

Le déplacement d'une position du fluide d'une position du fluide comprise entre les deux plans  $x$  et  $x+dx$  est donné par  $U(x)$



A : section du plan

L'énergie cinétique de cette position lors de son déplacement est donc égale à :

$$dE_c = \frac{1}{2} (\rho_0 \cdot A \cdot \Delta x) \left( \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (6-19)$$

Dans le cas où  $\Delta x$  est très petit, on peut définir l'énergie cinétique volumique ou la densité volumique d'énergie cinétique comme

Ou  $dV = A \cdot \Delta x$

$$e_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (6-20)$$

#### ➤ Energie potentielle :

Le déplacement du fluide s'accompagne d'une petite variation du volume de la position considérée ci-dessus sous l'effet de la surpression. C'est comme si on vient de comprimer un ressort en fournissant un travail, qui va être emmagasinée dans cette position puis dégage une fois que l'effet de compression ait cessé.

L'énergie potentielle est donc égale au travail nécessaire pour changer le volume de la position, donc :

$$dW = -PdV > 0 \quad (6-21)$$

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudinales dans les fluides

---

Le signe moins est présent du fait que  $dV$  est négatif (compressibilité)

Mais on a 
$$dV = \frac{\partial V}{\partial P} dP$$

Ce qui donne 
$$dW = -P \frac{\partial V}{\partial P} dP$$

Rappelons que le « Bulk modulus »  $B = -V \frac{\partial P}{\partial V}$  ou  $B = \frac{1}{\chi}$

( $\chi$ ) compressibilité

Puisque le volume  $V$  de la position du fluide est égal à  $A \cdot dx$ , on réécrit l'expression du travail sous forme :

$$dW = A \cdot dx \frac{P}{B} dP \quad (6-22)$$

Le travail accumulé par le fluide lorsque la surpression passe de 0 à  $\Delta P$  à partir de la pression d'équilibre peut s'écrire sous la forme :

$$dW = A \cdot dx \frac{1}{B} \int_{P_0}^{P_0 + \Delta P} P dP$$

$$dW = A \cdot dx \frac{1}{B} \left[ \frac{P^2}{2} \right]_{P_0}^{P_0 + \Delta P}$$

$$dW = A \cdot dx \frac{1}{B} \frac{1}{2} [(P_0 + \Delta P)^2 - P_0^2]$$

$$dW = A \cdot dx \frac{1}{2B} [(\Delta P)^2 + 2P_0 \Delta P]$$

On sait que :

$$\Delta P = -B \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6-23)$$

Ce qui, en remplaçant  $\Delta P$  dans l'équation ci-dessous, donne

$$dW = A \cdot dx \frac{1}{2B} \left[ \left( B \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2P_0 \Delta P \right] \quad (6-24)$$

Remarquons que  $\Delta P$ , la surpression, peut prendre des valeurs positives comme sa valeur moyenne (dans le temps et dans l'espace est nulle, et donc le terme  $P_0 \Delta P$  ne nous renseigne pas sur le transfert d'énergie.

Dans le cas d'une onde sinusoïdale :

$$\Delta P = \Delta P_{max} \cos(\omega t - kx)$$

$$\langle \Delta P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta P_{max} \cos(\omega t - kx) dt = 0$$

Ou encore

$$\langle \Delta P \rangle_T = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \Delta P_{max} \cos(\omega t - kx) dx = 0$$

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

---

L'expression du travail devient donc

$$dW = \frac{B_S}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 A dx \quad (6-25)$$

Ce qui est l'énergie potentielle emmagasinée dans la position de volume  $dV = A \cdot dx$

$$dE_p = \frac{B_S}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 A dx$$

La densité volumique de l'énergie potentielle de la position est :

$$e_p = \frac{dE_p}{dV} = \frac{B_S}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad (6-26)$$

La densité volumique de l'énergie forme :

$$e_t = e_c + e_p = \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{B_S}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad (6-27)$$

L'énergie totale sonore d'un tube de longueur L obtenue, en faisant l'intégrale :

$$E_t = \int_0^L e_t \cdot A \cdot dx \quad (6-28)$$

$$E_t = \frac{1}{2} \left[ A \cdot \rho_0 \int_0^L \left( \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + AB_S \int_0^L \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \right] \quad (6-29)$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale monochromatique :

$$U(x, t) = U_{max} \cos(\omega t \pm kx)$$

On aura :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega U_{max} \sin(\omega t \pm kx)$$

Et

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \pm k U_{max} \sin(\omega t \pm kx)$$

$$E_t = \frac{A}{2} \left[ \rho_0 \int_0^L \omega^2 U_{max}^2 \sin^2(\omega t \pm kx) dx + B_S \int_0^L k^2 U_{max}^2 \sin^2(\omega t \pm kx) dx \right] \quad (6-30)$$

Si L est un multiple de la longueur d'onde :  $L = n \lambda = n \frac{2\pi}{k}$

$$\int_0^L \sin^2(\omega t \pm kx) dx \quad \text{Serait égale à } \frac{L}{2} \text{ d'où}$$

$$E_t = \frac{A}{2} \left[ \rho_0 L \frac{\omega^2 U_{max}^2}{2} + L \frac{B_S k^2 U_{max}^2}{2} \right] \quad (6-31)$$

$$E_t = \frac{AL}{4} U_{max}^2 [\rho_0 \omega^2 + B_S k^2]$$

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

---

La relation de dispersion d'écrit comme :

$$\omega = v_{son} k \quad (6-32)$$

Ce qui permet d'écrire :

Où  $V=A.L$  
$$E_t = \frac{V}{4} U_{max}^2 \left[ \rho_0 + \frac{B_s}{v_{son}^2} \right] \omega^2 \quad (6-33)$$

On sait aussi que :

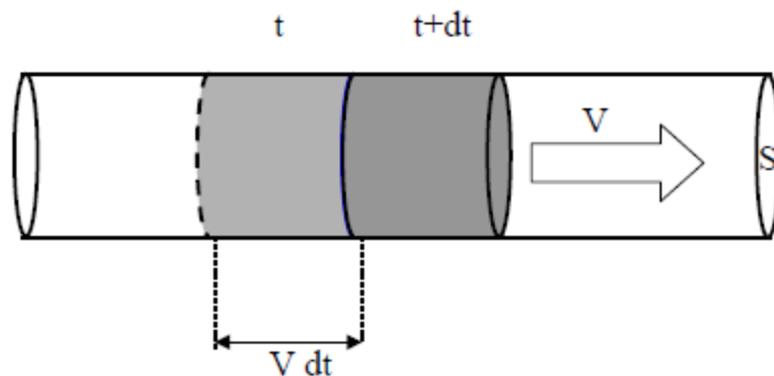
$$v_{son}^2 = \frac{B_s}{\rho_0}$$

D'où

$$\frac{E_t}{V} = \frac{1}{4} \rho_0 U_{max}^2 \omega^2 \quad (6-34)$$

### 6.2.2.5 Intensité de l'onde sonore

L'intensité acoustique est la puissance transportée par les ondes sonores, par unité de surface, mesurée perpendiculairement à la direction de ce transfert. Pour calculer cette intensité il faut calculer l'énergie lorsque l'onde traverse une surface  $S$  perpendiculaire à la direction de propagation pendant un intervalle de temps.



**Figure 6-3** : Intensité de l'onde acoustique

Cette énergie  $dE$  est égale à l'énergie contenue dans un volume  $S V dt$  et elle égale à

$$dE = \varepsilon S V dt \quad (6-35)$$

D'où la puissance

$$p = \frac{dE}{dt} = \varepsilon S V \quad (6-36)$$

On déduit l'expression de l'intensité de l'onde acoustique

$$I(t) = \frac{1}{S} p \quad (6-37)$$

$$I(t) = \varepsilon V \quad (6-38)$$

$$I(t) = \frac{p_0^2}{\rho_0 V} \cos^2(\omega t - kx) \quad (6-39)$$

On appelle intensité de l'onde acoustique la valeur moyenne

$$I = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t) dt \quad (6-40)$$

$$I = \frac{p_0^2}{2\rho_0 V} = \frac{p_0^2}{2Z_c} \quad (6-41)$$

### 6.2.2.6 Niveau sonore

Le domaine de fréquences accessibles à une oreille humaine s'étend environ de 20 Hz à 20kHz. La gamme des intensités sonores accessible est très large. Le seuil d'audition correspond à une intensité sonore (pour une oreille moyenne à environ 1500 Hz)  $I_0 = 10^{-12} \text{ Watt/m}^2$ . Le seuil de douleur se situe à  $1 \text{ Watt/m}^2$ . Il est donc intéressant d'utiliser une échelle logarithmique pour repérer les intensités sonores.

Le niveau sonore est défini en décibels (dB) par

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (6-42)$$

$$I_0 = 10^{-12} \text{ Watt/m}^2.$$

**Exemples :** niveau d'un réveil électronique est 20 dB, une pièce (salle) silencieuse = 30dB

Une rue animée = 75 dB .

En titre d'expérience calculons l'amplitude de déplacement d'une onde sonore d'un niveau sonore très élevé :  $L=120\text{dB}$ , de fréquence  $f=100\text{Hz}$ .

On sait que

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad I = 1 \text{ Watt/m}^2$$

D'autre part on a  $I_0 = \frac{1}{2} \rho_0 U_m^2 \omega^2 v_{son}$   $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$   $v_{son} = 337 \text{ m/s}$

$$U = \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 \omega^2 v_{son}}} = \sqrt{\frac{2 \times 1}{1.29 \times (2 \times \pi \times 1000)^2 \times 337}} = 10.79 \text{ nm}$$

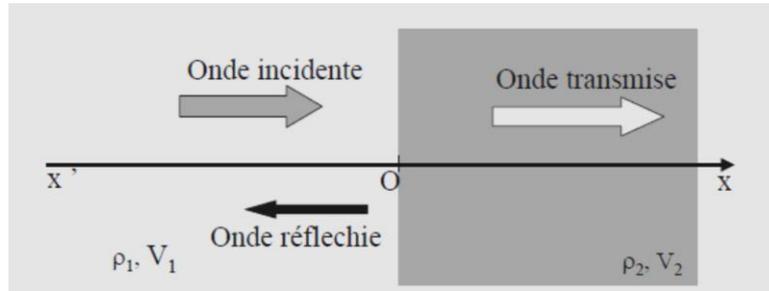
### 6.2.2.7 Coefficients de réflexion et de transmission d'ondes (conditions aux limites)

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par une surface plane. Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que le plan  $yOz$  coïncide avec la surface de séparation. Lorsque une onde acoustique provenant de  $-\infty$ , se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des  $x$  arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes.

- une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des  $x$  décroissant.

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudines dans les fluides

- une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des  $x$  croissant.



**Figure 6-4** : Réflexion à une interface fluide-fluide

L'onde résultante dans le premier milieu ( $x \leq 0$ ) est caractérisée par :

$$p_1(x, t) = p_i(x, t) + p_R(x, t) \quad (6-43)$$

$$p_1(x, t) = p_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + p_R e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

$$\dot{U}_1(x, t) = \frac{1}{Z_1} [p_i e^{j(\omega t - k_1 x)} - p_R e^{j(\omega t - k_1 x)}] \quad (6-44)$$

Dans le deuxième milieu :

$$p_2(x, t) = p_T(x, t)$$

$$p_2(x, t) = p_T e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

$$\dot{U}_2(x, t) = \frac{1}{Z_2} p_T e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (6-45)$$

On déduit

$$\begin{cases} p_i + p_R = p_T \\ \frac{1}{Z_1} (p_i - p_R) = \frac{1}{Z_2} p_T \end{cases} \quad (6-46)$$

Ou encore

$$\begin{cases} 1 + \frac{p_R}{p_i} = \frac{p_T}{p_i} \\ 1 - \frac{p_R}{p_i} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{p_T}{p_i} \end{cases} \quad (6-47)$$

Nous déduisons

- le coefficient de réflexion pour la pression.

$$R_P = \frac{p_R}{p_i} \quad (6-48)$$

- le coefficient de transmission pour la pression.

$$T_P = \frac{p_T}{p_i} \quad (6-49)$$

Les deux relations de continuité s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} 1 + R_P &= T_P \\ 1 - R_P &= \frac{Z_1}{Z_2} T_P \end{aligned} \quad (6-50)$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_P &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned} \quad (6-51)$$

En tenant compte des relations  $p_i = Z_1 \dot{U}_i$ ,  $p_R = -Z_1 \dot{U}_R$  et  $p_T = Z_2 \dot{U}_T$ , on peut calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour la vitesse de particules et pour le déplacement de particules :

$$\begin{aligned} R_{\dot{U}} &= R_U = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_{\dot{U}} &= T_U = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned}$$

En tenant compte des relations  $I_i = p_i^2 / 2Z_1$ ,  $I_R = p_R^2 / 2Z_1$  et  $I_T = p_T^2 / 2Z_2$ , on peut calculer les coefficients de transmission et réflexion pour intensité acoustique

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \frac{I_R}{I_i} = \left[ \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right]^2 \\ \alpha_T &= \frac{I_T}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{[Z_1 + Z_2]^2} \end{aligned} \quad (6-52)$$

### 6.3 Effet Doppler

#### 6.3.1 Historique

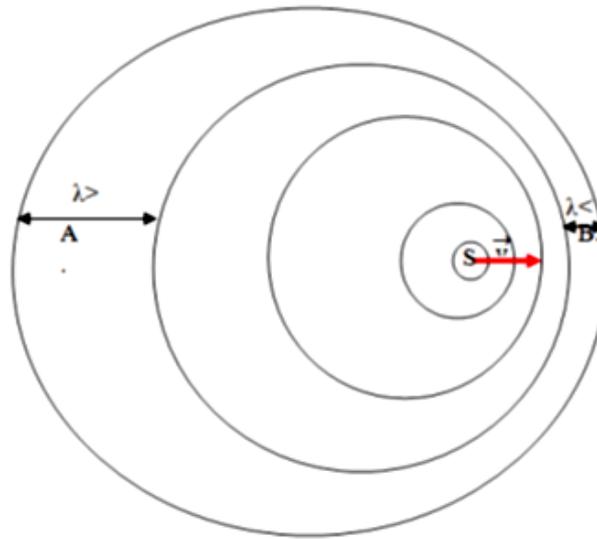
L'effet Doppler a été découvert en 1842 par Johann Christian Doppler (1803-1853 /Autrichien). Puis il a aussi été redécouvert 6 ans plus tard par Hippolyte Fizeau (1819-1896/Français), d'où cet effet porte aussi le nom d'effet Doppler-Fizeau.



**Figure 6-5** : Photos Doppler et Fizeau

### 6.3.2 Définition

La longueur d'onde des ondes émises par une source en mouvement dépend de l'endroit d'où elles sont observées. L'effet Doppler est présent dans notre quotidien : radar, sirène d'un camion en mouvement... Cet effet se manifeste aussi bien par les ondes sonores que les ondes lumineuses. On suppose une source S émettant une onde dans l'air, de longueur d'onde  $\lambda_s$  de vitesse  $v_s$ . Simultanément, la source se déplace avec une vitesse  $v$



**Figure 6-6 :** Le schéma simplifié de l'effet doppler

Lorsque la source se rapproche de l'observateur B, les ondes émises par la source ont une longueur d'onde  $\lambda$  inférieure à  $\lambda_s$ . Réciproquement, l'observateur A reçoit des ondes dont la longueur  $\lambda$  est supérieure à  $\lambda_s$ .

On a ainsi, entre la fréquence de l'émission  $f_s = \frac{v_s}{\lambda_s}$  et la fréquence  $f = \frac{v_s}{\lambda}$  de l'onde reçue par les observateurs, les relations

- Pour l'observateur A : on a alors  $f < f_s$

$$f = f_s \times \left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \quad (6-53)$$

- Pour l'observateur B : on a alors  $f > f_s$

$$f = f_s \times \left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \quad (6-54)$$

- Pour que ces relations soient cohérentes, l'air sera supposé immobile par rapport au sol.
- La vitesse de la source ( $v$ ) est très inférieure à la vitesse de l'onde ( $v_s$ ).

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudines dans les fluides

- Pour l'observateur B, le son perçu sera plus aigu, au contraire de l'observateur A qui aura une perception du son plus grave.

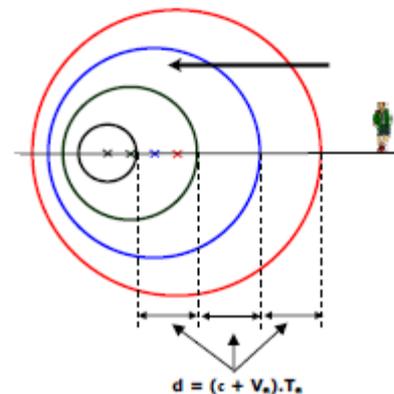
### Exemple :

Soit  $c = 340$  m/s ; vitesse du véhicule  $V_e = 25$  m/s (90 km/h) ; fréquence de la sirène 400Hz. Un observateur immobile voyant approcher un camion de pompier entendra la sirène a une fréquence

$$f = \frac{340}{(340 - 25)} \times 400 = 431.75 \approx 432\text{Hz}$$

Et lorsque le camion s'éloigne ?

Le schéma ci-contre simplifié permet de répondre a la question : Lorsque l'émetteur aura dépassé le récepteur, les fronts d'onde ont de plus en plus de distance a parcourir pour atteindre le récepteur. L'intervalle de temps entre deux fronts d'onde à la réception est maintenant supérieur à l'intervalle réel lors de l'émission. Chaque front d'onde est espace du précédent de :



$$d = d_f + d_e = c \cdot T_e + V_e \cdot T_e = (c + V_e) \cdot T_e$$

Le son perçu par le récepteur a donc une fréquence apparente d'expression :

$$f = \frac{c}{c + V_e} \cdot f_e$$

$\frac{c}{c + V_e} < 1$  donc  $f < f_e$  . L'observateur perçoit un son plus grave.

Reprenons notre exemple :

$c = 340$  m/s ;  $V_e = 25$  m/s (90 km/h) ;  $f_e = 400$  Hz.

L'observateur immobile voyant s'éloigner le camion, entendra la sirène a une fréquence

$$f = \frac{340}{(340 + 25)} \times 400 = 472.6 \approx 473\text{Hz}$$

A noter que l'écart n'est pas « symétrique » : gain de 32Hz à l'approche, perte de 27 Hz à l'éloignement.

## Exercices

### Exercice 01 :

Soit  $I$  l'intensité acoustique d'une onde sonore et l'intensité de référence prise égale à  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ . On appelle  $I_{dB}$  le niveau d'intensité acoustique exprimé en décibel (dB) :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

1° Calculer en décibels le seuil de douleur pour l'oreille humaine sachant que son intensité est  $10 \text{ W/m}^2$

2° Un des haut-parleurs d'une chaîne haute-fidélité (Hi-Fi) fonctionne et le niveau d'intensité acoustique où se trouve l'auditeur vaut 65 dB. Quelle est l'intensité du son perçu ?

3° Les deux haut-parleurs fonctionnent. Le seuil de douleur est-il atteint ? Quel est le niveau acoustique pour l'auditeur.

### Exercice 02 :

1° Chez l'homme, l'amplitude de pression maximale tolérable par l'oreille (seuil de douleur) est  $p_m = 28 \text{ Pa}$ . Quelle est l'amplitude de déplacement  $u_m$  d'une telle onde sonore dans l'air à la fréquence =  $1000 \text{ Hz}$ . Calculer son intensité acoustique.

2° Mêmes questions si l'amplitude de pression minimale tolérable par l'oreille humaine (seuil d'audibilité) est  $p_m = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  à la même fréquence.

On donne pour l'air :  $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  et  $V = 340 \text{ m/s}$ .

### Exercice 03 :

On définit l'impédance acoustique spécifique d'un milieu par le rapport, en notation complexe, de la pression acoustique sur la vitesse des particules :

$$Z = \frac{P}{\dot{u}} \text{ (exprimée en Rayls)}$$

1° Calculer  $Z$  pour une onde progressive plane sinusoïdale se propageant vers les  $x$  croissants. Application numérique : on donne pour l'air  $\rho = 1.21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  et  $V = 343 \text{ m/s}$

2° Une onde incidente, se propageant dans  $u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$ , se propageant dans l'air, arrive en incidence normale sur la surface d'un solide dont l'impédance acoustique spécifique en  $x = 0$  vaut  $Z_0 = \frac{P(0, t)}{\dot{u}(0, t)}$ .

- a) Calculer, en un point d'abscisse  $x (x \leq 0)$ , l'impédance ramenée  $Z(x) = \frac{P(x, t)}{\dot{u}(x, t)}$  en fonction de  $\rho, V, Z_0$  et  $\tan(kx)$ .

## CHAPITRE 06 : Ondes longitudes dans les fluides

---

b) Quelle est la valeur de l'impédance  $Z(-\lambda/4)$  ramenée au point  $x = -\lambda/4$

Etudier les cas particuliers  $Z_0 \rightarrow \infty$  ;  $Z_0 = \rho V$  ;  $Z_0 = jX$  (ou  $X$  est un réel positif) et donner pour chacune de ces impédances  $p(-\lambda/4, t)$  et  $u(-\lambda/4, t)$

c) Mêmes questions pour  $x = -\lambda/2$

### Exercice 04 : (effet Doppler) principe du Radar

Considérons une source sonore, immobile, de fréquence  $f$ . Considérons maintenant un objet s'approchant de la source sonore à la vitesse  $v$ . Au même endroit que la source sonore, un récepteur sonore capte le son de la source sonore réfléchi par l'objet en mouvement. On constate que la fréquence  $f'$  du son reçu a une fréquence différente du son émis  $f$ .

1. De quel phénomène s'agit-il ?

2. On remarque également que  $f'$  est supérieure à  $f$ . Pourquoi ?

Nous allons maintenant établir la relation mathématique liant  $f'$  et  $f$ :

On note  $T$  la période de la source sonore et  $T'$  la période du son reçu.

Considérons le son émis par la source à l'instant  $t = 0$ .

Le son se propage et atteint l'objet : on note  $d$  la distance qui sépare la source sonore et l'objet à ce moment.

3. Quelle durée ( $\tau$ ) met le son émis à l'instant  $t = 0$  pour aller jusqu'à l'objet et revenir ?

4. Quelle durée ( $\tau'$ ) met le son émis à l'instant  $t = T$  pour aller jusqu'à l'objet et revenir ?

5. Quelle est la relation entre  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $T$  et  $T'$  ?

6. En déduire que :

$v$  : vitesse de l'objet

$c$  : vitesse du son dans l'air

$$f' = f \frac{1}{1 - \frac{2v}{c}} = f \frac{c}{c - 2v}$$

## CHAPITRE 07 : Ondes élastiques dans les solides

### 7.1 Introduction

On définit une propagation d'onde dans un milieu matériel comme étant une perturbation évolutive du milieu sous l'action d'une excitation. Puisque le milieu est constitué de plusieurs particules en interaction entre elles, les forces internes sont responsables du déplacement de la perturbation. Cette propagation dépend des propriétés physiques du milieu où l'onde se propage.

### 7.2 Définition et propriétés élastiques d'un solide

Les solides sont des milieux matériels organisés et ordonnés. Les mouvements de chaque élément d'un solide sont fortement corrélés à ces voisins.

Les milieux solides ont toujours une élasticité qui rend possible la propagation des déformations produites par une force extérieure. Les caractéristiques des ondes observées dépendent du milieu ; ces ondes peuvent être longitudinales ou transverses, la célérité dépend de la densité et des coefficients d'élasticité.

Considérons le cas de la compression et des ondes longitudinales. Les déformations dans les milieux solides dues aux vibrations et aux ondes qui en résultent peuvent être analysées en partant de leurs propriétés d'élasticité, décrites en particulier par la loi de Hooke qui s'écrit :

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (7-1)$$

$\sigma$  : La contrainte appliquée (la force appliquée par unité de surface  $N/m^2$  ( ou *pa* )

$\varepsilon$  : La déformation élastique (l'allongement relatif suivant la direction d'application de la force).

$E$  : le module d'Young (Pa)

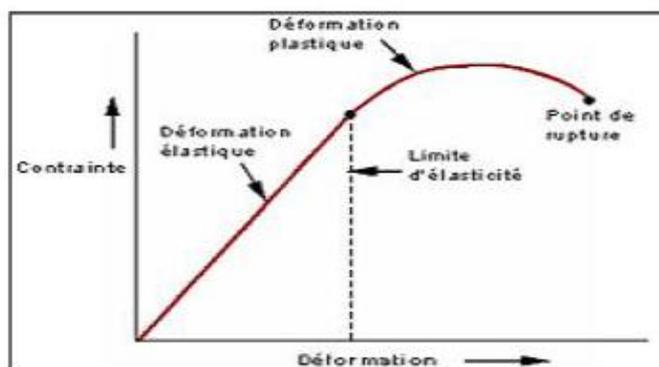


Figure 7-1 : Courbe Contrainte-déformation dans un solide

7.3 Equation d'onde dans un barreau solide

Soit un barreau solide continu, isotrope et homogène de masse volumique  $\rho$  de faible section  $S$  avec un module d'élasticité  $E$ . le barreau est soumis à une force de traction qui exerce normalement à sa section droite sa direction est confondue avec l'axe  $(ox)$ . Ce barreau est le siège d'une onde longitudinale qui est décrite par la fonction suivante :

$$\vec{u}(x, t) = u(x, t)\vec{e}_x \tag{7-2}$$

Les mouvements sont de faibles amplitudes, nous donnons des déformations élastiques

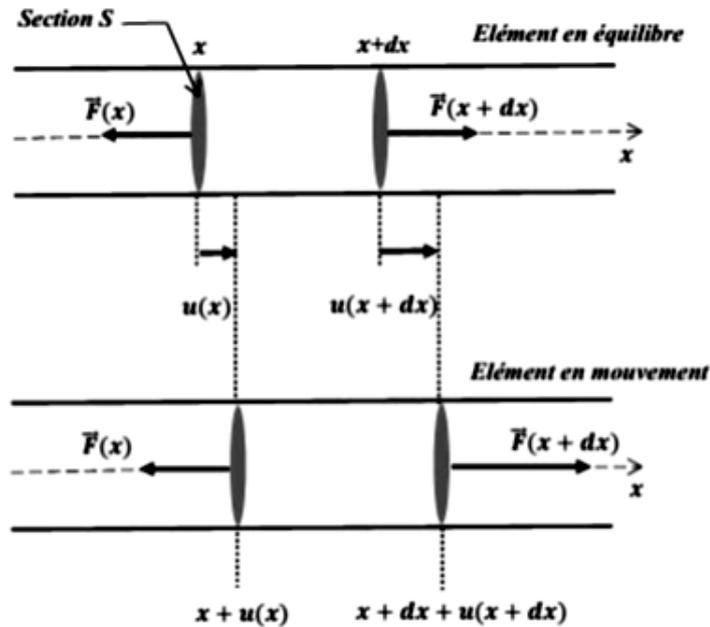


Figure 7-2 : Propagation d'un déplacement longitudinal dans un barreau solide

Parmi les hypothèses, on considère un élément du barreau de longueur  $dx$  à l'équilibre, de masse  $dm=\rho Sdx$  de longueur  $dx$  en étirement.

En applique la relation fondamentale de la dynamique sur cet élément, les forces exercées sont :

- La force exercée sur la section droite  $F(x + dx)$
- La force exercée sur la section gauche  $-F(x)$

$$\sum \vec{F} = dm \times \vec{a}_c \tag{7-3}$$

Pour le mouvement longitudinal :

$$\vec{a} = (\rho S dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \vec{e}_x \tag{7-4}$$

## CHAPITRE 07 : Ondes élastiques dans les solides

Par la projection sur l'axe ( $ox$ ) :

$$F(x + dx) - F(x, t) = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-5)$$

$dx$  et infinitésimal, on peut ainsi utiliser le développement de Taylor au premier ordre :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-6)$$

La force de traction appliquée sur l'élément du barreau fait apparaître une déformation élastique  $\varepsilon$  qui vérifie la loi de Hooke :

$$\frac{F}{S} = E \times \varepsilon \quad (7-7)$$

$$\frac{\partial(SE\varepsilon)}{\partial x} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7-8)$$

Un modèle simplifié permet d'exprimer la déformation élastique en fonction du déplacement longitudinal.

Lors de l'étirement, le petit élément  $dx$  se trouve à la fois déplacé et déformé :

$$dx' = dx + [u(x + dx) - u(x)] \quad (7-9)$$

Le développement de Taylor au premier ordre permet d'écrire :

$$u(x + dx) = u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx \quad (7-10)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{dx' - dx}{dx} = \varepsilon \quad (7-11)$$

$\varepsilon$  Est allongement relatif de segment  $dx$

En remplaçant (7-5) dans (7-8), on obtient l'équation de propagation d'une onde longitudinale dans un barreau solide :

$$\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7-12)$$

Cette équation est l'équation de d'Alembert à une dimension d'une onde élastique dans un solide.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7-13)$$

Est la vitesse de propagation de cette onde, elle dépend des caractéristiques macroscopiques du barreau.

### 7.4 Résolution de l'équation de d'Alembert

La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle s'écrit sous la forme :

$$\dot{u}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (7-14)$$

$f$  et  $g$  doivent néanmoins satisfaire les conditions auxquelles est soumis le milieu de propagation :

- Les conditions aux limites
- Les conditions initiales
- Les conditions de continuités

### 7.4.1 Un barreau infini

La solution de **l'équation de d'Alembert** est une onde plane progressive qui se propage vers les  $x$  croissants (ou vers les  $x$  décroissants), lorsque le barreau est considéré infini de longueur  $L \gg S$ , dans le cas des vibrations sinusoïdales, la solution est de la forme :

$$u(x, t) = u_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (7-15)$$

En notation

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_m e^{j(\omega t \pm kx)} \quad (7-16)$$

### 7.4.2 Impédance mécanique

L'impédance mécanique en point est le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule :

$$Z(x) = \frac{\vec{F}(x)}{\bar{u}} = \frac{-SE \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} \quad (7-17)$$

Alors dans le cas d'une Onde plane progressive harmonique (OPPH), on obtient :

$$Z(x) = \frac{SEK}{\omega}$$

La relation de dispersion :  $k = \frac{\omega}{c}$

La vitesse de propagation :  $c^2 = \frac{E}{\rho}$

$$\begin{aligned} \text{Alors :} \quad Z(x) &= S\sqrt{\rho E} = SZ_c \quad [Kg/s] \\ Z_c &= \sqrt{\rho E} = \rho c \quad [N/m^2] \end{aligned} \quad (7-18)$$

$Z_c$  Définit **l'impédance caractéristique** du barreau

### 7.4.3 Aspect énergétique

- **Énergie cinétique :**

L'énergie cinétique  $dE_C$  d'une tranche élémentaire  $dV=Sdx$  dans un barreau solide lors de passage de l'onde de est donné par :

## CHAPITRE 07 : Ondes élastiques dans les solides

---

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (7-19)$$

➤ L'énergie potentielle calculée à partir des forces qui interviennent lors du passage de l'onde

$$dE_p = \frac{1}{2} ES dx (\varepsilon)^2 = \frac{1}{2} ES dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (7-20)$$

Alors, dans le cas d'une OPPH qui se propage vers les  $x$  croissants, les densités d'énergie cinétique et potentielle s'écrivent :

$$\varepsilon_c = \frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\rho S dx}{S dx} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_m^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (7-21)$$

$$\varepsilon_p = \frac{dE_p}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{ES dx}{S dx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{c^2} u_m^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

La densité d'énergie totale :

$$\varepsilon_T = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_m^2 (1 - \cos 2\omega \left( t - \frac{x}{c} \right)) \quad (7-22)$$

La densité d'énergie moyenne :

$$\langle \varepsilon_T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_m^2 (1 - \cos 2\omega \left( t - \frac{x}{c} \right)) dt \quad (7-23)$$

$$\langle \varepsilon_T \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_m^2$$

La puissance instantanée reçue au plan  $x$  :

$$p(x, t) = \vec{F} \cdot \vec{V} = -SE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (7-24)$$

$$p(x, t) = SE \frac{\omega^2}{c} u_m^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = \rho \omega^2 c u_m^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

La puissance moyenne de l'ordre est :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(x, t) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 c u_m^2 S \quad (7-25)$$

$$\Phi = \langle p \rangle = \langle \varepsilon_T \rangle S c$$

$\Phi$  est le flux d'énergie qui traverse la surface  $S$  perpendiculaire à la direction de propagation

L'intensité de l'onde est défini par la puissance moyenne par unité de surface :

$$I = \frac{\langle p \rangle}{S} == \langle \varepsilon_T \rangle \cdot V \quad [Watt/m^2] \quad (7-26)$$

## Exercices

### Exercice 01 :

Soit  $U$  une onde mécanique longitudinale se propageant suivant l'axe  $Ox$  dans un barreau cylindrique homogène indéformable de masse volumique  $\rho$ , de module de Young  $E$  de longueur  $l$  et de section droite  $S$ .

1. Ecrire l'équation de propagation d'Alembert.
2. Déterminer la solution  $U(x, t)$  de l'onde.
3. Déterminer l'impédance mécanique  $Z(x)$  à la position  $x$ . En déduire l'impédance caractéristique du milieu  $Z_c$ .

### Exercice 02 :

Un barreau cylindrique d'aluminium, de masse volumique  $\rho$  de longueur  $l$  et de section droite  $\Sigma$ , subit un allongement relatif :

$$\frac{\Delta l}{E\Sigma}$$

Sous l'effet d'une force  $F$  d'étirement dans le sens de l'axe  $Ox$  du barreau ; la constante  $E$  est le module de Young du métal. On négligera les variations de la section du barreau. Lors du passage d'une onde acoustique, l'élément de barreau compris entre les plans de section voisins d'abscisses  $x, x + dx$  se déplacent respectivement de  $s(x, t)$  et  $s(x+dx, t)$  à l'instant  $t$  par rapport à leur position d'équilibre ;

- Montrer que l'élongation  $s(x, t)$  obéit à une équation de propagation d'ondes.
- Calculer la célérité  $V$  de ces ondes dans le barreau d'aluminium pour lequel  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  et  $E = 7.10^{10} \text{ Pa}$

Soit une onde plane progressive acoustique d'amplitude  $a_0$  :

$$s(x, t) = a_0 \cos\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

- Calculer dans ce cas la variation relative maximale  $\delta_{max}$  de volume de l'élément de barreau  $(x, x + dx)$  entre les instants  $0$  et  $t$  ;
- La tension  $T(x, t)$  du barreau au niveau de sa section droite d'abscisse  $x$ , l'instant  $t$ .

Le barreau de longueur  $l$ , fixé à une de ses extrémités  $O$ , est libre à l'autre extrémité  $A$ . On cherche la solution de l'équation de propagation de l'onde sous la forme :

$$s(x, t) = g(x) \sin \omega t$$

## CHAPITRE 07 : Ondes élastiques dans les solides

- Déterminer la fonction  $g(x)$ , on notera  $a$  l'amplitude de cette fonction spatiale. On prend comme conditions aux limites :

$$s(x = 0, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial s}{\partial x}(x = l, t) = 0$$

Déterminer les fréquences propres du barreau en fonction de  $E$ ,  $l$ ,  $\rho$  et d'un entier  $N$ .

Dans les conditions où le son le plus grave a une fréquence  $f_0 = 2\text{KHz}$ ,

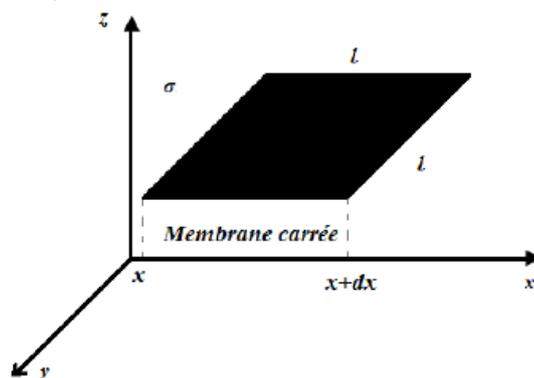
Déterminer :

- La longueur  $l = OA$  du barreau cylindrique.
- L'énergie cinétique moyenne  $\bar{E}_c(t)$  de ce barreau en fonction de sa masse  $M$  et de la vitesse maximale  $V_{max}$  d'un élément du barreau.

### Exercice 03

On se propose d'étudier la propagation d'une onde transversale à la surface  $S$  d'une membrane tendue. On considère une membrane rectangulaire dans l'espace plan  $Oxyz$  et dont les axes sont  $Ox, Oy, Oz$ . Soit un élément  $ds$  dont les cotes sont soumises à des tensions linéaires  $\tau$ , comme le montre la figure ... comme suit :

- Etablir l'équation de propagation de l'onde sachant que la membrane a une masse surfacique  $\sigma$ .
- Trouver les solutions de l'équation différentielle par la méthode des séparations des variables.
- En déduire la forme de la solution générale de l'équation de propagation.



## Références

- [1] H.DJELLOUAH, Vibrations et ondes mécaniques, OPU , (2011).
- [2] T.BECHERRAWY, Vibrations et Ondes, Tomes 1-4, Ed .Hermes –Lavoisier, (2010).
- [3] J.BRUNEAUX , Vibrations et Ondes, Ed. Marketing,( 2010).
- [4] P. DENEVE, « Mécanique », Edition ELLIPSES, ISBN 2-7298-8751-2, (1987).
- [5] M. TAMINE, O. LAMROUS, « Vibrations et Ondes »,Edition OPU, ISBN 1-02-3698, (1993).
- [6] R. GABILLARD, « Vibrations et Phénomène de propagation », Edition Dunod, (1972).
- [7] M. BALKANSKI, C. SEBENE, « Ondes et phénomènes vibratoires », Edition Dunod, (1973).
- [8] C. KING, GEORGE “ Vibrations and waves” ,John Wiley & Sons, (2013).
- [9] KALISKI, SYLWESTER , and L. SOLARZ . “Vibrations and waves”. Elsevier Science, (2013).
- [10] Crowell CROWELL, BENJAMIN . “Vibrations and waves”. Vol. 3. Light and Matter, 2(000).
- [11] T. BECHERRAWY, . "Vibrations, ondes et optique. Vol. 3, ondes électromagnétiques." (2008).
- [12] L. RONAN. « Ondes et vibrations: fondamentaux et applications à l'acoustique et à la diffusion de la chaleur ». Edition Dunod, (2017).
- [13] D.P.TCHOTO, and P. Mathey. “Electromagnétisme: Ondes et propagation guidée ». Edition Dunod, (2017).
- [14] FOUAD BOUKLI HACENE. «Vibrations et Ondes Mécaniques ». Université Hassiba BENBOUALI de CHLEF. Année Universitaire : (2012 /2013).
- [15] JEAN MARC RICHARD, « Ondes et Vibrations », Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie, [http //lpsc.in2p3.fr/théorie/Richard](http://lpsc.in2p3.fr/théorie/Richard), (2009).
- [16] T. FREEGARDE., “Introduction to the Physics of Waves”, Cambridge University Press (2013).