Cours Algèbre 1: Ensembles et Applications

Dr. El hendi Hichem

Université Tahri Mohammed Bechar

13 novembre 2021

Sommaire

Ensembles

Généralité

On peut définir un ensemble de deux façons :

- Un ensemble est une collection d'éléments

  Exemples : $A = \{0, 1\}$, $B = \{$ vert , noir$\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

- Un ensemble est une collection d'éléments vérifiant une proptiété commune

  Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-5| < 2\} \\ B &= \{z \in \mathbb{C} / \quad z^3 = 1\} \\ A &= \{x \in \mathbb{R} / \quad 0 \leq x \leq 3\} = [0, 3] \end{aligned}$$

  - ⋆ Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\varnothing$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.
  - ⋆ Si x est un élément de E, on note $x \in E$.
  - ⋆ Si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

- **Inclusion**

On dit que l'ensemble E est inclus dans F, si tout élément de E est aussi un élément de F et on écrit $E \subset F$.

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F$$

et on dit que E est un sous-ensemble de F, ou que E est une partie de F.

- **L'égalité**

On dit que deux ensembles E et F sont égaux si E est inclus dans F et F inclus dans E.

$$\begin{aligned} E = F \quad & \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E \\ & \Leftrightarrow \forall x, \quad x \in E \Leftrightarrow x \in F. \end{aligned}$$

- **Complémentaire**

Soit A une partie d'un ensemble E.

Le complémenaire de A dans E, noté $\complement_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

$$\complement_E A = \{x / \quad x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

Exemples

$$\complement_{\mathbb{Z}}\mathbb{N} = \{-1,\ -2,\ ...,\ -n\},\ n \in \mathbb{N}^*$$

$$\complement_{\mathbb{R}}[0,\ 1] =]-\infty,\ 0[\cup]1,\ +\infty[$$

• Différence

La différence de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B, noté $A - B$

$$A - B = \{x/ \quad x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

• Réunion

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B.

$$A \cup B = \{x/ \quad x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

• Intersection

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

$$A \cap B = \{x/ \quad x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$\star$ A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$

Définition

Soit E un ensemble quelconque.

On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E où $P(E) = \{A / \quad A \subset E\}$,

On dit que A est une partie de E, ou bien un élément de $P(E)$.

Exemples

⋆ $E = \{1, 2, 3\}$

$$P(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

⋆ $E = \varnothing$

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}, \quad P\left(P(\varnothing)\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Définition

On appelle partition d'un ensemble E, toute famille $\mathfrak{F} \subset P(E)$ telle que

$i)$ Les éléments de la famille $\mathfrak{F}$ sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire $\forall A,\ B \in \mathfrak{F},\ A \cap B = \varnothing$.

$ii)$ La fammille $\mathfrak{F}$ recouvre l'ensemble E, c'est-à-dire $\bigcup_{A \in \mathfrak{F}} A = E$.

Exemples

- ⋆ Soit E un ensemble quelconque, $A \subset E$, alors $\mathfrak{F} = \{A,\ \complement_E A\}$ est une partition de E.
- ⋆ Soit $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, alors $\mathfrak{F} = \{\{1, 2\},\ \{3, 5\},\ \{4\}\}$ est une partition de E.

Proposition

Soient A, B, C trois ensembles quelconques, alors on a

- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$ et $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ et $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ et $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ et $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
- $\complement(\complement A) = A$ et $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$.

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Le produit cartésien, noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) / \quad x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Définition

Soient E et F deux ensembles et G une partie de $E \times F$,

soit la relation binaire $f = (E, F, G)$.

• On dit que f est une fonction définie dans E à valeurs dans F, si tout élément x de E a au plus une image y dans F notée $f(x)$.

• On dit que f est une application si tout élément $x \in E$ a exactement une image y dans F, notée $f(x)$.

Exemples

- ⋆ La fonction

$$f: \quad \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

- ⋆ L'application identique notée Id_E

$$Id_E: \quad E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto Id_E(x) = x$$

- ⋆ L'application caractéristique

$$1_A: \quad E \longrightarrow \{0, 1\}, \qquad A \subset E$$
$$x \longmapsto 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si} \quad \text{non} \end{cases}$$

- ⋆ La suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$u: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n) = u_n.$$

Définition

•Deux applications f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

• Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

L'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ définie par : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, pour tout $x \in E$ est appelée fonction composée de f et g.

Définition

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$.

On appelle restriction de f à un sous ensemble non vide A de E, l'application $g : A \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in A, \quad g(x) = f(x)$ et on note $g = \tilde{f}$.

Définition

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$.

On appelle prolongement de l'application f à un sous ensemble $G \subset E$, toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E.

Exemple

Exemple Soit

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \log x \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \log |x| \end{aligned}$$

est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$.

L'image de A par f, notée $f(A)$ est l'ensemble des $f(x)$ quand x décrit A.

$$f(A) = \{f(x), \quad x \in A\}$$

Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto f(x) = |x| + 2 \end{aligned}$$

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, d'où $f(A) = \{f(x), \quad x \in A\} = \{3, 2, 4\}$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $B \subset F$.

L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments x de E

tels que $f(x)$ appartient à B, $f^{-1}(B) = \{x \in E / \quad f(x) \in B\}$

Exemple

Soit

$$f : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto f(x) = |x| + 1, \qquad B = [-3, 2]$$

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / \quad f(x) \in B\}$

$$\begin{aligned} f(x) \in B \quad & \Leftrightarrow |x| + 1 \in B \\ & \Leftrightarrow -3 \leq |x| + 1 \leq 2 \\ & \Leftrightarrow -4 \leq |x| \leq 1 \\ & x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

et donc $f^{-1}(B) = [-1, 1]$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

•f est injective si pour tout x, x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$ on a $x = x'$.

$$\bullet f \text{ est injective} \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x\prime \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in E, \quad x \neq x\prime \Rightarrow f(x) \neq f(x') \end{aligned} .$$

ou encore

f injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.

Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 5x + 3. \end{aligned}$$

Soient x, $x' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$. A-t-on $x = x'$?

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \quad & \Rightarrow 5x + 3 = 5x' + 3 \\ & \Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

•f est surjective si pour tout élément y de F, il existe au moins un élément x de E

tel que $y = f(x)$

$$
\begin{aligned}
\bullet f \text{ est surjective } \quad & \Leftrightarrow \quad \forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x) \\
& \Leftrightarrow \quad f(E) = F
\end{aligned}
.
$$

ou encore,

f surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

Exemple

Soit

$$
\begin{aligned}
f : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
& x \longmapsto f(x) = x^2.
\end{aligned}
$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$?

$$
\begin{aligned}
y = f(x) \quad & \Rightarrow y = x^2 \\
& \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\exists x = \pm\sqrt{y}$ tel que $y = f(x) = x^2$

par suite f est surjective.

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

•f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

•f est bijective $\quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F, \quad \exists$ un unique $x \in E, \quad y = f(x)$.

ou encore,

f bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution.

Exemple

Soit

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 5x - 3.$$

* Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$. A-t-on $x = x'$?

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow 5x - 3 = 5x' - 3 \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

d'où f est injective.

* Soit $y \in \mathbb{R}$, existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$?

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $5x - 3 = y$, on trouve que $x = \dfrac{y+3}{5}$.

Et par suite f est surjective.

D'où f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car elle est à la fois injective et surjective.

Ou encore,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow y = 5x - 3 \\ &\Rightarrow x = \frac{y+3}{5} \end{aligned}$$

l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = \dfrac{y+3}{5}$, donc f est bijective.

Théorème

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

$1)$ L'application f est bijective.

$2)$ Il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

g est appellée application réciproque de f et notée f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a

1. f et g injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective
2. f et g surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ surjective
3. f et g bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective
5. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective
6. $g \circ f$ bijective $\Longrightarrow f$ injective et g surjective.

Définition

Un ensemble E est fini s'il existe une bijection de E

sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$ Le nombre n est unique et s'appelle le cardinal de E noté

Card $E = n$.

Exemple

1. $E = \{1, 2, 3\}$ fini et Card $E = 3$.
2. $\varnothing$ est fini et Card $\varnothing = 0$.
3. $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.

Proposition

- Soit A un ensemble fini et $B \subset A$, alors B est fini et Card $B \leq$ Card A.
- Si A et B deux ensembles finis alors les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et on a Card $(A \cup B) =$ Card $A +$ Card $B -$ Card $(A \cap B)$.

Proposition

Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application, alors on a

1. Si f injective alors Card $E \leq$ Card F
2. Si f surjective alors Card $E \geq$ Card F
3. Si f bijective alors Card $E =$ Card F
4. Si Card $E =$ Card F, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

    $i)$ f est injective

    $ii)$ f est surjective

    $iii)$ f est bijective

Définition

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable

$$
\begin{aligned}
f: \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\
& n \longmapsto f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ -(n+1) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

f est bijective donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Référence

- Baba-Hamed.C et Benhabib.K, Algèbre 1.*Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1985).
- Calvo.A et Calvo.B, *Algèbre générale.* Masson (1996).
- Ferrand.J.L et Arnaudiès, *Cours de Mathématiques Algèbre, tome 1.* Dunod (1978).