



N° d'ordre : UTMB/FSE/P.....

Filière : Mathématiques.

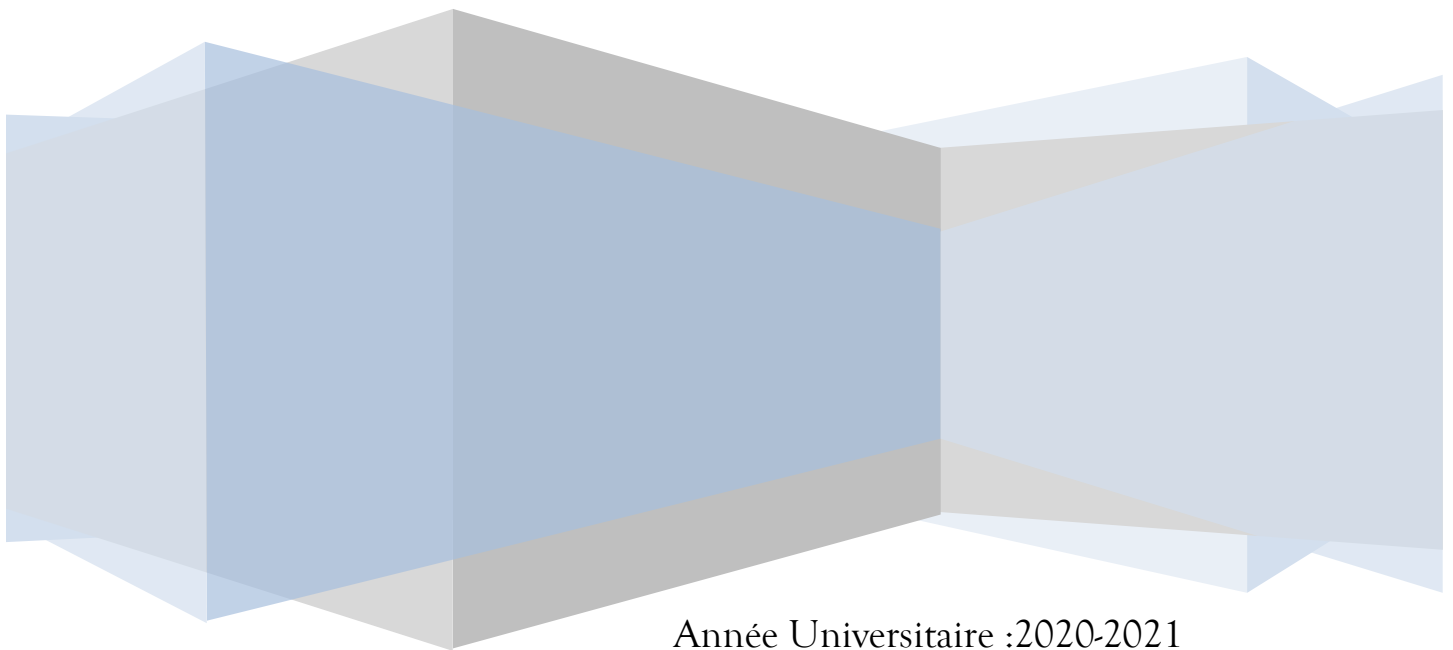
Spécialité : Master Analyse Mathématiques.

Module : Analyse sur les variétés.

# Analyse sur les variétés

Cours complet

EL HENDI Hichem



Année Universitaire :2020-2021

**EL HENDI Hichem**

**Maître de conférence classe "A" à université Tahri Mohammed Béchar**

**Email : [elhendi.hichem@univ-bechar.dz](mailto:elhendi.hichem@univ-bechar.dz)**

*Béchar 2020-2021*

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Fibré tangent, Fibré vectoriel</b>	<b>7</b>
1.1 Variété différentiable . . . . .	7
1.1.1 Variété différentiable . . . . .	7
1.1.2 Exemples des variétés différentiables . . . . .	8
1.1.3 Application différentiable . . . . .	10
1.2 Espace tangente et Cotangent : . . . . .	11
1.2.1 Vecteurs tangents . . . . .	11
1.2.2 Espace tangent . . . . .	13
1.2.3 Espace cotangent . . . . .	15
1.2.4 Application tangente et cotangente : . . . . .	16
1.3 Fibrés vectoriels . . . . .	18
1.3.1 Section sur un fibré vectoriel . . . . .	19
1.3.2 Fibré dual d'un fibré vectoriel. . . . .	21
1.3.3 Section sur un fibré vectoriel dual . . . . .	21
1.3.4 Produit tensoriel de fibré . . . . .	23
1.3.5 Section sur le fibré produit tensoriel. . . . .	25
1.3.6 Fibré inverse (Pull-back) . . . . .	26
1.3.7 Section sur un fibré inverse . . . . .	27
<b>2 Formes différentielles</b>	<b>28</b>
2.1 Formes différentielles . . . . .	28
2.1.1 Forme différentielle de degré 1 . . . . .	28
2.1.2 Forme différentielle de degré 2 . . . . .	28
2.1.3 Forme différentielle de degré 3 . . . . .	29
2.1.4 Formes différentielles exactes . . . . .	29
2.1.5 Formes différentielles fermées . . . . .	30
2.1.6 Théorème de Poincaré . . . . .	31
2.2 Métrique Riemannienne . . . . .	32

2.2.1	Métrie Riemannienne sur un fibré vectoriel. . . . .	32
2.2.2	Métrie induite sur le fibré dual . . . . .	36
2.2.3	Métrie induite sur le produit tensoriel . . . . .	37
2.2.4	Métrie induite sur le fibré inverse . . . . .	37
2.3	Connexion de Levi-Civita . . . . .	38
2.3.1	Connexion linéaire sur un fibré vectoriel. . . . .	38
2.3.2	Connexion induite sur le fibré dual . . . . .	44
2.3.3	Connexion induite sur le produit tensoriel . . . . .	45
2.3.4	Connexion induite sur le fibré inverse . . . . .	48
2.4	Tenseur de courbure. . . . .	58
2.4.1	Courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire . . . . .	60
2.5	L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne . . . . .	63
2.6	L'opérateur divergence sur une variété Riemannienne . . . . .	65
2.7	L'opérateur laplacien sur une variété Riemannienne . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Intégration des formes</b>	<b>72</b>
3.1	Intégrales curvilignes . . . . .	72
3.1.1	Intégrale d'une 1-formes sur d'un arc orienté . . . . .	72
3.1.2	Intégrale d'une 2-formes sur une surface . . . . .	74
3.1.3	Intégrale d'une 3-formes sur un volume . . . . .	76
3.2	Formule de Green-Riemann . . . . .	77
3.2.1	Formule de Green-Riemann pour les 0-formes . . . . .	77
3.2.2	Formule de Green-Riemann pour les 1-formes . . . . .	78
3.2.3	Formule de Green-Riemann pour les 2-formes . . . . .	80
3.3	Théorème de divergence . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Champs de vecteurs</b>	<b>84</b>
4.1	Formule de Green-Riemann dans le langage des champs de vecteurs . . . . .	84
4.1.1	Flux d'un champ de vecteurs : . . . . .	86
4.2	Formule de Stokes-Ampère . . . . .	88
4.3	Théorème de Ostrogradski-Gauss . . . . .	90
4.4	Théorème de Frobenius et applications . . . . .	91
4.4.1	Formule du gradient . . . . .	91

4.5	Formule de rotationnel . . . . .	92
4.6	Formule de Kelvin . . . . .	93
4.7	Les équations de Maxwell . . . . .	94
4.7.1	Equation de Maxwell-Gauss . . . . .	95
4.7.2	Equation de Maxwell-Thomson . . . . .	96
4.7.3	Equation de Maxwell-Faraday . . . . .	97
4.7.4	Equation de Maxwell-Ampère . . . . .	100

<b>Bibliographie</b>	<b>100</b>
----------------------	------------

Béchar 2020-2021

Ce polycopié est destiné aux étudiants de troisième semestre master analyse mathématiques. Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné (Analyse sur les variétés) de master analyse mathématiques. Il est rédigé sous forme de cours détaillés. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

De nombreux ouvrages fondant cet axe, parfois très opulents et fournis, existent. Néanmoins dans le présent travail, on a cherché, en prenant en ligne de compte les réserves impérativement imposées par un volume horaire souvent pas très suffisant, à pourvoir l'étudiant d'un support pédagogique répondant aux exigences du programme en vigueur. Ce manuscrit a la particularité de dégager les points essentiels qui permettent d'orienter le travail personnel de l'étudiant. Il est structuré en trois chapitres ; chacun comporte un cours contenant les définitions, propriétés et théorèmes dont les preuves simples sont laissées à titre d'application au soin de l'étudiant. On y trouve aussi des exemples illustratifs, des remarques pertinentes ainsi qu'une série d'exercices résolus de façon détaillée visant l'assimilation du cours et l'acquisition des techniques. Dans ce contexte, nous conseillons l'étudiant d'essayer de résoudre avant de regarder la solution. On y trouvera aussi des exercices sans solutions proposés dans le but de stimuler l'étudiant à fournir un effort personnel. Ceci étant il pourra faire son auto évaluation voire deviner le type de question auxquelles il devrait s'attendre lors des contrôles et examens.

Ce polycopié n'a pas été conçu pour exempter les étudiants de leurs cours, il est loin d'être exhaustif, on y trouvera certainement des imperfections ; par conséquent nous serons très attentifs à toute suggestions susceptibles d'apporter amélioration.

## **Objectifs :**

Ce polycopié se départage en quatre parties : Fibré tangent, Formes différentielles, Intégration des formes, Champs de vecteurs.

L'objectif de la première partie du cours sera l'étude des Variété différentiable, Application différentiable, on étudie la notion du fibré vectoriel, on définit les structures géométrique du fibré vectoriel telles que les sections différentiables .

L'objectif de la deuxième partie du cours sera l'étude les formes différentielles, la métrique Riemannienne, la connexion linéaire et le tenseur de courbure. Comme exemple important du fibré vectoriel on

examine en détail dans ce chapitre la structure du fibré inverse.

L'objectif de la troisième partie est d'introduire la notion de l'intégrale curviligne ainsi que la formule de Green-Riemann pour les formes différentielles de degré 0, de degré 1, 2 et 3. Le chapitre est illustré par le Théorème de divergence.

L'objectif de la quatrième partie est consacré à l'étude des champs de vecteurs et comment appliquer la formule de Green-Riemann dans le langage des champs de vecteurs. Dans ce chapitre, on caractérise le flux d'un champ de vecteurs ainsi que la formule de Stokes-Ampère et la formule de Ostrogradski-Gauss.

Béchar 2020-2021



# 1 Fibré tangent, Fibré vectoriel

## 1.1 Variété différentiable

### 1.1.1 Variété différentiable

#### Définition 1

$M$  est une variété topologique si :

- 1)  $M$  est un espace topologique séparé .
- 2) Pour tout  $p \in M$  il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $p$ , est un homéomorphisme.

$$\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

où  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

Nous dirons que  $n$  est la dimension de  $M$ . Le couple  $(U, \phi)$  est une carte locale.

#### Définition 2

Un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue .

#### Définition 3

On dit que  $f : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme de classe  $\mathbb{C}^\infty$  si  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $\mathbb{C}^\infty$  .

#### Définition 4

Une carte de dimension  $n$  sur  $V$  est un couple  $(U, \phi)$  formé de

1. un ouvert  $U \subseteq V$ .
2. un homéomorphisme  $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

L'ouvert  $U$  est le domaine de la carte. Pour  $p \in U$ ,  $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$  :  $\phi$  est ce que l'on appelle une fonction coordonnées. Un point de  $V$  peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes  $(U, \phi)$  et  $(w, \Psi)$ .

**Définition 5**

Deux cartes  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  sont dit compatibles si l'une des deux conditions suivantes est vérifie :

1.  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
2. l'application de changement de cartes

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ .

**Définition 6**

Un **atlas**  $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$  est une famille de cartes telle que

1.  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
2. Toutes les cartes ont même dimension  $n$ .
3. Toutes les cartes sont compatible entre eux.

**Définition 7**

Une structure différentiable de dimension  $n$  sur  $V$  est une classe d'équivalence d'atlas de dimension  $n$  de  $V$ .

**Définition 8**

$M$  est une **variété différentiable** de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) si  $M$  est une variété topologique. et tous les cartes sont compatibles.

### 1.1.2 Exemples des variétés différentiables

1. **L'espace  $\mathbb{R}^n$**  :  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$  pour l'atlas à une seule carte  $(\mathbb{R}^n, id)$
2. **L'espace  $\mathbb{R}$**  : Tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie ( $\dim(E) \leq \infty$ ) est une variété différentiable.  $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$  définit un atlas  $(E, \psi)$ . De même tout ouvert  $U \leq E$  de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant  $(U, \psi)$ .

### 3. Les projection stéréographiques : La sphère standard $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble

$$\mathbb{S}^n = \{U \in \mathbb{R}^{n+1} / \|U\| = 1\}$$

En tant que sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , elle est muni de la topologie induit par celle de  $\mathbb{R}^{n+1}$  : c'est la topologie dont les ouverts sont de la forme  $U = \Omega \cap \mathbb{S}^n$ , où  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On obtenir un atlas différentiable, nous considérons les projections stéréographiques

$$\varphi_N : U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_S : U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de centre  $N = (0, \dots, 0, 1)$  et  $S(0, \dots, 0, -1)$  respectivement. Ces projections sont illustrées la figure suivante où l'espace  $\mathbb{R}^n$  est identifier avec l'ensemble  $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus x_{n+1} = 0\}$ . Les equations pour  $x = \varphi_N(u)$  et  $y = (\varphi_S(u))$  sont (1)

$$x_i = \frac{u_i}{1 - u_{n+1}}, y_i = \frac{u_i}{1 + u_{n+1}}, i = 1, \dots, n$$

.Les application  $\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\varphi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sont des homéomorphismes pour  $u = \varphi_N^{-1}(x)$  et  $u = \varphi_S^{-1}(y)$  on a

$$u_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} = -\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$

$$u_i = \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1} = \frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1}, i = 1, \dots, n$$

(Utilise que  $1 - u_{n+1}^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)(1 - u_{n+1})^2$ ). Les application de changement de cartes sont données par

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{1}{\|x\|^2} x, \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2} y, x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

l'atlas  $A$  formé par les deux cartes  $(\varphi_N, U_N)$  et  $(\varphi_S, U_S)$  est donc différentiable.

### 4. Variété produit $M \times N$ :

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables de dimension  $m$  et  $n$  et d'atlas  $(U_a, \phi_a), (V_b, \psi_b)$  respectivement. Alors l'espace produit  $M \times N$  est une variété de dimension  $m + n$  dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme  $U_a \times V_b, \phi_a \psi_b$ , ou  $(\phi_a \times \psi_b)(p, q) = (\phi_a(p), \psi_b(q)) \in \mathbb{R}^{n+m}$ .

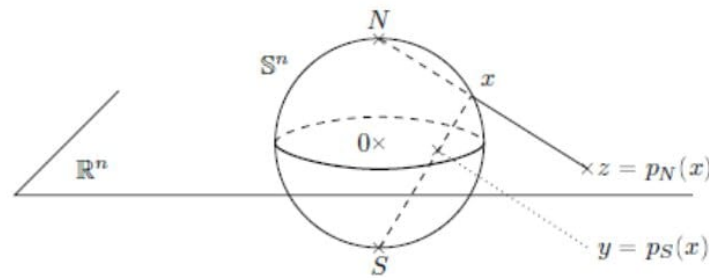


FIGURE 1.1: Projection stéréographiques

### 1.1.3 Application différentiable

#### Définition 9

Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux variétés est différentiable si pour tout  $x$  dans  $X$  il existe des cartes  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  autour de  $x$  et  $f(x)$  respectivement telles que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable. On dit que :

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^p$$

est l'application lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ .

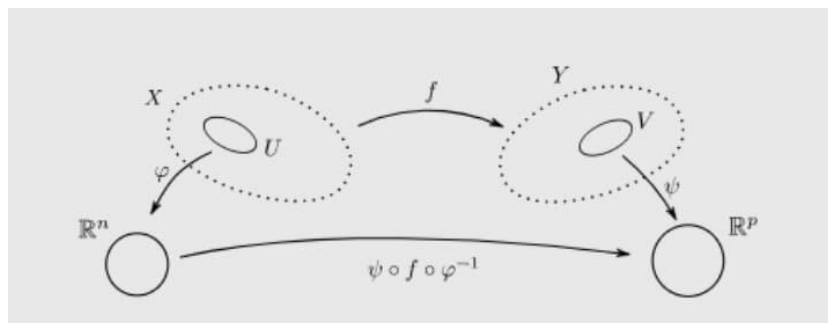


FIGURE 1.2: Applications différentiables

**Propriétés 1**

- Toute application différentiable est continue.  
(Car sur tout ouvert de carte  $U$  on a  $F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$ ).
- Soit  $\bigcup_{i \in I} U_i$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Alors  $f$  est différentiable si et seulement si chaque restriction  $F|_{U_i}$ ,  $i \in I$ , l'est
- La composition d'applications différentiables est différentiable. En effet, soient  $f : M \rightarrow M'$ ,  $G : M' \rightarrow M''$ , et  $G \circ f : M \rightarrow M''$ .  
Alors, dans des cartes de  $M, M'$  et  $M''$ ,  $\varphi'' \circ (G \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\varphi'' \circ G \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})$

## 1.2 Espace tangente et Cotangent :

### 1.2.1 Vecteurs tangents

**Dans une variété :** Considérons maintenant une variété différentielle  $M$  et un point  $p$  de  $M$ . On s'intéresse aux courbes dans  $M$  qui sont différentiables et qui passent par  $p$

$$\begin{aligned} c : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\rightarrow M \\ t &\mapsto c(t) \quad c(0) = p \end{aligned}$$

Béchar 2020-2021

**Définition 1**

Deux courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont tangentes au point  $p$  si  $c_1(0) = c_2(0) = p$  et s'il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  telle que  $p \in U$  et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0)$$

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si  $(V, \psi)$  est une autre carte autour de  $p$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence (c'est-à-dire une relation qui est transitive, symétrique et réflexive) sur l'ensemble des courbes passant par  $p$  :  $c_1 \sim c_2$  si elles sont tangentes en  $p$ .

**Définition 2**

Un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  est une classe d'équivalence de courbes tangentes en  $p$ . L'espace tangent à  $M$  en  $p$ , noté  $T_p M$ , est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

**Exemple**

1. Dans  $\mathbb{R}^n$  il est clair que deux courbes  $c_1, c_2$  sont tangentes au point  $x$  des que

$$\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$$

Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes  $T_x \mathbb{R}^n$  et l'ensemble des directions  $\dot{c}(0)$ . Ce qui est propre à  $\mathbb{R}^n$  c'est que cet isomorphisme ne dépend pas du point  $x$ . On peut montrer que  $T_p M$  est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparaît cependant pas clairement. De plus la définition de  $T_p M$  fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par  $p$ , qui n'est pas aisé à manipuler.

Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition équivalente des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.

**Définition 3****Dérivation :**

On note  $\mathbb{C}_p^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ , ou  $f$  de classe  $C^\infty$ .

Une dérivation en  $p$  est une application linéaire

$$D_p : \mathbb{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz . Autrement dit ,  $D_p$  est une dérivation si pour tous réel  $\alpha$  et  $\beta$  et toute fonction  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  dans  $\mathbb{C}_p^\infty(M)$  on a :

- $D_p(\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$  (linéarité)
- $D_p(\tilde{f}\tilde{g}) = \tilde{g}(p)D_p(\tilde{f}) + \tilde{f}(p)D_p\tilde{g}$  Leibniz

où  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont les classes d'équivalence de  $f$  et  $g$

**1.2.2 Espace tangent****Définition 4**

L'espace tangent en  $p$  à  $M$  ,  $T_p M$  est l'espace vectoriel des dérivation sur  $\mathbb{C}_p^\infty(M)$

**Une base de l'espace tangent :**

Puisqu'on a un espace vectoriel il est utile d'en trouver une base.

soient  $(x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées au voisinage de  $p$ . Une base de  $T_p M$  est donnée par les  $n$  dérivations  $\frac{\partial}{\partial x^i(p)}$  , pour  $1 \leq i \leq n$  dont les courbes associées sont les  $\gamma_i$  définies par

$$\begin{cases} x^j \gamma_i(t) = 0 & \text{pour } j \neq i \\ x^i \gamma_i(t) = t \end{cases}$$

En particulier la dimension de  $T_p M$  en tant qu'espace vectoriel est la dimension de  $M$  en tant que variété.

Donc tout vecteur  $X_p \in T_p M$  s'écrit  $X_p = X_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i(p)}$  où les  $X_i(p)$  sont des réels .

Cette écriture a l'avantage de suggérer que  $X(p)$  est un vecteur puisqu'il a  $n$  composantes  $(X^1(p), \dots, X^n(p))$  et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe  $\gamma$  définit ce vecteur, avec bien sûr  $\gamma(0) = p$  alors on

a :

$$X^i(p) = \left( \frac{\gamma^i(t)}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

On utilise cette relation qu'on écrit  $\gamma(0) = X(p)$  .

On considère l'effet d'un changement de coordonnées sur les  $n$  nombres  $X^i(p)$  si on passe les coordonnées  $(x^i)$  aux coordonnées  $(y^j(x^i))$  alors si :

$$X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^i(p) \frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

On a

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) X^i(p)$$

### Proposition 1

L'espace Tangent  $T_p M$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  et l'ensemble  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mid i = 1, \dots, n \right\}$  forme une base de  $T_p M$  en coordonnées locales .

### Exemple

**2.** soit  $\gamma : I \rightarrow S^n$  une courbe sur la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = X$ .  
La courbe satisfait à  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$  , alors :

$$\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

donc  $\langle p, X \rangle = 0$  , c'est-à-dire tout vecteur tangent  $X \in T_p S^n$  est orthogonal à  $p$  . D'autre part , si  $X \neq 0$  tel que  $\langle p, x \rangle = 0$  , alors  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^n$  avec

$$\gamma : t \rightarrow \cos(t|X|).p + \sin(t|X|). \frac{X}{|X|}$$

est une courbe sur  $S^n$  avec  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = x$  . Par conséquent :

$$T_p S^n = \{ X \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle p, x \rangle = 0 \}$$



### 1.2.3 Espace cotangent

#### Définition 5

une forme (ou covecteur) en  $p \in M$  est une forme linéaire sur  $T_p M$ , c'est-à-dire une application linéaire :

$$\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_p \mapsto \omega_p(X_p)$$

On note  $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$  le crochet étant ici le crochet de dualité.

#### Définition 6

**L'espace cotangent** à  $M$  en  $p$ , noté  $T_p^* M$  est l'espace vectoriel des formes en  $p$ . C'est l'espace vectoriel dual de  $T_p M$  ( C'est-à-dire  $T_p^* M = (T_p M)^*$  )

#### Exemple

**3.** Soit  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $M$ . Alors, en identifiant  $T_t \mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}$ , la différentielle de  $g$  en  $p$ ,  $dg_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , peut être vue comme une 1-forme.

Cet exemple justifie les notations ci-dessous en coordonnées. Rappelons d'abord que, si  $e_1, \dots, e_n$  est la base d'un espace vectoriel  $V$ , il existe une unique base duale  $e_1^*, \dots, e_n^*$  du dual  $V^*$  telle que  $e^{*i}(e_j) = \delta_{ij}$ .

Considérons maintenant des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  en  $p$  et  $dx_p^i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  la différentielle de la  $i$ -ème coordonnées (on identifie de nouveau  $T_t \mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}$ ). Par définition  $dx_p^i(X_p) = X_p \cdot x^i$ . En particulier, pour tout couple  $i, j$  :

$$\langle dx_p^i, \frac{\partial}{\partial x^j} |_p \rangle = dx_p^i(\frac{\partial}{\partial x^j} |_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} |_p = \delta_{ij}$$

Ainsi  $dx_p^1, \dots, dx_p^n$  est une base de  $T_p^* M$  duale de la base  $\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p$  de  $T_p M$ .

Dans cette base, toute forme de  $T_p^* M$  s'écrit :

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_p^i, \quad \text{où } \omega_i = \omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i} |_p)$$

$$\text{puisque : } \omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i} |_p) = \sum_{j=1}^n \omega_j \langle dx_p^j, \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \rangle \text{ de même tout vecteur de } T_p M$$

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \quad \text{tel que } X^i = dx_p^i(X_p). \text{ Les formules de changement de coordonnées pour les}$$

1-formes s'obtiennent comme les formules matricielles pour les vecteurs tangents :

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)} \right) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

On choisit des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  et  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  et on note  $\varphi \circ \psi^{-1} = (x^1(y), \dots, x^n(y))$ , l'application  $\varphi$  lue dans la carte  $\psi$ . Soit  $\omega_p$  une 1-forme  $\omega_1, \dots, \omega_n$  ses coordonnées dans la base de  $T_p^*M$  associée

### Une base de l'espace cotangent :

Localement, au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte locale  $(U, \phi)$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$  est une base de  $T_pM$  pour tout  $p \in U$ . On note  $\{dx^i|_p\}$  sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les  $x^i$  sont  $n$  fonctions définies localement sur  $M$  et puisqu'on a par définition même de la différentielle

$$\langle dx^i|_p, \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j$$

Alors dans cette base ,

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p$$

### 1.2.4 Application tangente et cotangente :

Soit  $\phi$  une application de classe  $C^1$  définie au voisinage d'un point  $p$  d'une variété  $M$  à valeurs dans une variété  $N$ .

**Définition 7**

On définit une unique application linéaire, appelée application tangente à  $\phi$  et notée  $T_p\phi$  définie de  $T_pM$  à valeurs dans  $T_{\phi(p)}N$ , vérifiant

$$d_{\phi(p)}f \circ T_p\phi = d_p(f \circ \phi)$$

pour toute fonction  $f \in \mathbb{C}^\infty(N)$

De même, on définit une unique application linéaire, appelée application cotangente à  $\phi$  et notée  $T_p^*\phi$  définie de  $T_{\phi(p)}^*N$  à valeurs dans  $T_p^*M$ , vérifiant :

$$T_p^*\phi(d_{\phi(p)}\phi = dp(f \circ \phi)$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

La proposition suivante résume aussi les propriétés importantes de l'application tangente.

**Proposition 2**

Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux applications différentiables.

- i) On a  $T_p(\phi \circ \psi) = T_{\psi(p)}\phi T_p\psi$
- ii) Si  $c$  est une courbe, alors  $T_{c(t_0)}\phi(c(t_0)) = (\phi \circ c)(t_0)$
- iii) Soit  $X = (x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées locales au voisinage de  $p$ . Soit  $Y = (y^1, \dots, y^p)$  sont des coordonnées locales au voisinage de  $\phi(p)$ . posons  $\phi_j = y_j(\phi)$  Alors les coefficients de la matrice de  $T_p\phi$  dans les bases associées aux coordonnées sont  $\frac{\partial \phi_j}{\partial x}$ .

## 1.3 Fibrés vectoriels

### Définition 1

On appelle fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$ , le triplet  $(E, \pi, M)$  où  $E$  et  $M$  sont des variétés de classe  $C^\infty$ , et  $\pi : E \rightarrow M$  une application surjective de classe  $C^\infty$  telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout  $x \in M$ ,  $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $k$ .

2. (Condition de trivialization locale.)

Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $M$  et un homéomorphisme  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tels que :

i)  $P_1 \circ \varphi = \pi$ ,

où  $P_1 : (x, y) \in U \times \mathbb{R}^k \mapsto x \in U$  désigne la première projection.

ii) L'application  $\varphi_x = \varphi|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$  est linéaire bijective pour tout  $x \in M$ .

La variété  $M$  est appelée base du fibré,  $E$  l'espace total et  $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$  la fibre au-dessus de  $x$ .

### Exemple

#### 4. Fibré tangent.

Soient  $M$  une variété de classe  $C^\infty$ , de dimension  $n$ ,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

(réunion disjointe de tous les espaces tangents à  $M$ ), et

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ v &\mapsto x \quad (v \in T_x M) \end{aligned}$$

la projection canonique.

Le triplet  $(TM, \pi, M)$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^n$ ; En effet :

- $TM$  est une variété  $C^\infty$  de dimension  $2n$ .
- Pour tout  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(\{x\}) = T_x M \simeq \mathbb{R}^n$

- Si  $(V, \psi) \in \text{atl}(M, x)$ , alors la carte de trivialization locale est définie par :

$$\begin{aligned}\varphi : \pi^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) &\longmapsto (y, d_y \psi(v))\end{aligned}$$

### Exemple

5. *Fibré trivial.*

Soit  $M$  est une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ . on pose :

$$E = M \times \mathbb{R}^k$$

$$\begin{aligned}\pi : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longmapsto x\end{aligned}$$

$(E, \pi, M)$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$ .

### 1.3.1 Section sur un fibré vectoriel

#### Définition 2

Une section sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  est une application,

$\sigma : M \longrightarrow E$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\pi \circ \sigma = Id_M$ . C'est à dire  $\sigma(x) \in E_x$  pour tout  $x \in M$ .

Une section locale au-dessus d'un ouvert  $U \subset M$  de  $E$  est une application  $\sigma : U \longrightarrow E$  telle que  $\pi \circ \sigma = Id_U$ .

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$ , noté  $\Gamma(E)$ , est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; C'est également un  $C^\infty(M)$ -module ; La multiplication d'une section  $\sigma \in \Gamma(E)$  par une fonction  $f \in C^\infty(M)$  est donnée par

$$(f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x) \quad , x \in M$$

**Proposition 1**

Soit  $(E, \pi, M)$  un fibré vectoriel de type fibre  $\mathbb{R}^k$ , si  $(U, \varphi)$  est une carte vérifiant la condition de trivialization locale, alors

1. pour tout  $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned}\sigma_i^\varphi : U &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \sigma_i^\varphi(x) = \varphi_x^{-1}(e_i)\end{aligned}$$

est une section de classe  $C^\infty$

2.  $(\sigma_1^\varphi, \dots, \sigma_k^\varphi)$  est une base locale des sections de  $E$

où  $(e_1, \dots, e_k)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ .

Inversement.

Si  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  est une base de sections sur  $E$  définis sur un ouvert  $U \subset M$ , alors

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : U \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (x, y^1, \dots, y^k) &\longmapsto \sum_{i=1}^k y^i \sigma_i(x)\end{aligned}$$

est un difféomorphisme tel que  $(\pi^{-1}(U), \varphi)$  est une carte de trivialization locale.

**Exemples**

1. *Un champ de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ , est une section du fibré tangent associé  $TM$ .*

### 1.3.2 Fibré dual d'un fibré vectoriel.

#### Définition 3

Soit  $(E, \pi, M)$  un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$ . Nous définissons le fibré dual de  $E$ , noté  $E^*$  par

$$E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$$

$$\pi^* : E^* \longrightarrow M$$

$$\omega \in E_x^* \longmapsto x$$

$(E^*, \pi^*, M)$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$ .

#### Carte de trivialization locale

Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $E$  vérifiant la condition de trivialization locale, on pose

$$\varphi^* : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

$$\omega \in E_x^* \longmapsto (x, \omega(\varphi_x^{-1}(e_1)), \dots, \omega(\varphi_x^{-1}(e_k)))$$

où  $(e_1, \dots, e_k)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ .

Alors  $(U, \varphi^*)$  est une carte sur  $E^*$  vérifiant la condition de trivialization locale.

### 1.3.3 Section sur un fibré vectoriel dual

#### Définition 4

Une section sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$  est une application,  $\omega : M \longrightarrow E^*$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\pi^* \circ \omega = Id_M$  (c'est à dire  $\omega(x) \in E_x^*$  pour tout  $x \in M$ ).

#### Remarque

1. Une section  $\omega$  sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$  est de classe  $C^\infty$  si et seulement si pour toute carte  $(U, \varphi)$  vérifiant la condition de trivialization locale sur  $E$ ; On a

$$\omega(\sigma_1), \dots, \omega(\sigma_k) \in C^\infty(U).$$

De la remarque (1.1.1) on déduit la proposition suivante :

**Proposition 2**

Toute section  $\omega \in \Gamma(E^*)$  sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$  définit une application  $C^\infty(M)$ -linéaire

$$\begin{aligned}\omega : \Gamma(E) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \sigma &\longmapsto \omega(\sigma)\end{aligned}$$

tel que pour tout  $x \in M$ , on a  $\omega(\sigma)(x) = \omega_x(\sigma(x))$  et réciproquement.

**Exemple**

**6. Fibré cotangent.**

Soient  $M$  une variété différentiable  $C^\infty$  de dimension  $n$ ,  $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$  ( $T_x^*M$  étant le dual de l'espace tangent  $T_xM$ ) et

$$\begin{aligned}\pi^* : T^*M &\longrightarrow M \\ \omega \in T_x^*M &\longmapsto x\end{aligned}$$

la projection canonique.

Le triplet  $(T^*M, \pi, M)$  est un fibré vectoriel, de fibre type  $\mathbb{R}^n$  et de carte de trivialisation locale associée à  $(U, \psi) \in \text{atl}(M)$  définie par :

$$\begin{aligned}\varphi : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n, \\ (y, \omega) &\longmapsto (y, \omega(\partial_1|_y), \dots, \omega(\partial_n|_y))\end{aligned}$$

où  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  désigne la base des champs de vecteurs relative à la carte  $(V, \psi)$ .

$(T^*M, \pi^*, M)$  est le fibré dual du fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ , appelé fibré cotangent.



### 1.3.4 Produit tensoriel de fibré

#### Définition 5

Soient  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$  deux fibrés vectoriels de fibre type  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$  respectivement. Nous définissons le produit tensoriel de  $E$  et  $F$ , noté  $E \otimes F$  par

$$E \otimes F = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes F_x,$$

où,  $E_x$  ( resp.  $F_x$  ) la fibre au-dessus de  $x$  sur  $E$  ( resp. sur  $F$  ) et l'application  $\pi$  par

$$\begin{aligned} \pi : E \otimes F &\longrightarrow M \\ v \otimes w &\longmapsto \pi(v \otimes w) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors  $(E \otimes F, \pi, M)$  est un fibré vectoriel sur  $M$  de fibre type  $\mathbb{R}^{k.l}$ , appelé fibré produit tensoriel de  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$ .

Béchar 2020-2021

## Carte de trivialization locale

**Définition 6**

Soient  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  deux cartes vérifiant la condition de trivialization locale sur  $E$  et  $F$  respectivement avec  $U \cap V \neq \emptyset$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \\ v \otimes w \in E_x \otimes F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v) \otimes \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définie une carte sur  $E \otimes F$  vérifiant la condition de trivialization locale, où

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi, \quad \psi_x = \tilde{Pr}_2 \circ \psi,$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{Pr}_2 : N \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

### 1.3.5 Section sur le fibré produit tensoriel.

#### Définition 7

Soient  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$  deux fibrés vectoriels de fibre type  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$  respectivement. Une section sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  est une application,  $T : M \rightarrow E \otimes F$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\pi \circ T = Id_M$  (i.e  $T(x) \in E_x \otimes F_x$  pour tout  $x \in M$ ).

Soit  $(U, \varphi)$  (resp  $(V, \psi)$ ) une carte vérifiant la condition de trivialisation locale sur  $E$  (resp  $F$ ) de base locale de sections  $(\sigma_i^\varphi)_{i=1}^k$  (resp  $(\sigma_j^\psi)_{j=1}^l$ ).

Si  $T \in \Gamma(E \otimes F)$  est une section sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  on a

$$T|_{U \cap V} = T^{ij} \sigma_i^\varphi \otimes \sigma_j^\psi,$$

où  $T^{ij}$  sont des fonctions différentiables de classe  $C^\infty$  sur  $M$  pour tout  $i = 1..k$  et  $j = 1..l$ .

#### Remarque

2. La définition (1.1.5) peut être prolongée au produit tensoriel quelconque de fibrés :

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = E_1 \otimes \dots \otimes E_n.$$

#### Exemple

7. Soient  $M$  une variété différentiable, de dimension  $m$  et  $x \in M$ , on note :

$$\begin{aligned} T_x^{(p,q)} M &= \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-fois}} \otimes \underbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}_{q\text{-fois}}. \\ T^{(p,q)} M &= \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-fois}} \otimes \underbrace{T^* M \otimes \dots \otimes T^* M}_{q\text{-fois}} \\ T^{(p,q)} M &= \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)} M \end{aligned} \quad (1.1)$$

$T^{(p,q)} M$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^{m^{p+q}}$ . Si  $\mathfrak{T}_p^q(M)$  désigne l'espace des sections sur le fibré  $T^{(p,q)} M$ , on a alors :

$$\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M) \quad , \quad \mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}(M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}^*(M).$$

Relativement à une carte  $(U, x^i) \in \text{atl}(M)$ , un champ de tenseur  $T \in \mathfrak{T}_p^q(M)$  s'écrit en coordonnée locale

$$T = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}, \quad (1.2)$$

où,  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  sont des fonctions différentiables de classe  $C^\infty$  sur  $U$ .

La formule (1.2) nous permet d'identifier  $\mathfrak{T}_p^q(M)$  à l'espace  $C^\infty(M)$ -module

$$\{ B : \bigotimes^q \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \bigotimes^p \mathfrak{X}(M) \mid C^\infty(M)\text{-}q \text{ linéaire} \},$$

où,  $\bigotimes^s \mathfrak{X}(M) = \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-fois}}$  pour  $s \geq 1$  et  $\bigotimes^0 \mathfrak{X}(M) = C^\infty(M)$ .

### 1.3.6 Fibré inverse (Pull-back)

#### Définition 8

Soient  $M, N$  deux variétés différentiables,  $(F, \pi_N, N)$  un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$  sur  $N$  et  $f : M \longrightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ .

On pose

$$\begin{aligned} E_x &= \{x\} \times F_{f(x)} = \{(x, v) \mid v \in F_{f(x)}\}, \quad x \in M \\ E &= \bigcup_{x \in M} E_x. \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned} \tag{1.4}$$

la projection naturelle. Alors le triplet  $(E, \pi, M)$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$  sur  $M$ , appelé fibré inverse (*Pull-back*); On le note par  $f^{-1}F$ .

### Carte de trivialization locale

#### Remarque

**3.** Si  $(W, \psi)$  est une carte sur  $F$  vérifiant la condition de trivialization locale et  $U$  un ouvert de  $M$  tel que  $f(U) \subset W$ , on pose

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k, \\ (x, v) &\longmapsto (x, \psi_{f(x)}(v)) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Alors,  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $E$ , vérifiant la condition de trivialization locale.

$E$  est une variété de dimension égale à  $\dim(M) + k$ .

### 1.3.7 Section sur un fibré inverse

#### Définition 9

Une section sur un fibré inverse  $(f^{-1}F, \pi, M)$  est une application  $V : M \longrightarrow F$  de classe  $C^\infty$  telle que pour tout  $x \in M$ ,  $V_x \in F_{f(x)}$ .

Si  $(W, \psi)$  est une carte sur  $F$  vérifiant la condition de trivialization locale de base locale associés  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ , et  $U$  un ouvert de  $M$  tel que  $f(U) \subset W$ , alors toute section  $V \in \Gamma(f^{-1}F)$  s'écrit

$$V|_U = \sum_{i=1}^k V^i \cdot \sigma_i \circ f,$$

où  $V^i \in C^\infty(U)$ , pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

Béchar 2020

## 2.1 Formes différentielles

### 2.1.1 Forme différentielle de degré 1

Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine bornée.

#### Définition 1

Une forme différentielle de degré 1 sur  $D$  est une expression de la forme :

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$$

où les  $f_j$  sont des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

On supposera souvent que les fonctions  $f_j$  sont régulières (infiniment dérivables sur  $D$ ).

#### Exemple

8. .

$\omega = (x^2 + \sin y)dx + (e^x - y)dy$  est une forme différentielle de degré 1 sur  $\mathbb{R}^2$

$\omega = \cos(xyz)dx + (x^2 - y)dy + \tan(xz)dz$  est une forme différentielle de degré 1 sur  $\mathbb{R}^3$

### 2.1.2 Forme différentielle de degré 2

#### Définition 2

Une forme différentielle de degré 2 sur  $D$  est une expression de la forme :

$$\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{jk}(x) dx_j \wedge dx_k$$

où les  $f_{jk}$  sont des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

On supposera souvent que les fonctions  $f_{jk}$  sont régulières (infiniment dérivables sur  $D$ ).

#### Exemple

9. .

$\omega = (x^2 \cos y)dx \wedge dy + (x - 2xy)dy \wedge dz$  est une forme différentielle de degré 2 sur  $\mathbb{R}^3$

### 2.1.3 Forme différentielle de degré 3

#### Définition 3

Une forme différentielle de degré 3 sur  $D$  est une expression de la forme :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ijk}(x) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

Où les  $f_{ijk}$  sont des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

On supposera souvent que les fonctions  $f_{ijk}$  sont régulières (infiniment dérivables sur  $D$ ).

#### Exemple

10. .

$\omega = dx \wedge dy \wedge dz$  est une forme différentielle de degré 3 sur  $\mathbb{R}^3$

#### Remarques

1. .

1- Une forme différentielle de degré 0 sur  $D$  est simplement une fonction continue

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . on supposera souvent que la fonction  $f$  est régulière (infiniment dérivable sur  $D$ ).

2- Une forme différentielle de degré  $n$  sur  $D$  est une expression de la forme

$$\omega = f_{i_1 \dots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Où les  $f_{i_1 \dots i_n}$  sont des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$

### 2.1.4 Formes différentielles exactes

#### Définition 4

Soit  $\omega$  une forme différentielle de degré  $n$  de classe  $C^k$ ,  $\omega$  est dite exacte s'il existe fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{k+1}$  telle que

$$\omega = df$$

#### Exemple

11. La forme différentielle  $\omega = e^y dx + (xe^y - 2y)dy$  est-elle exacte ?

Il suffit d'en trouver une primitive  $f$ .

Celle-ci doit vérifier  $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y$ .

En intégrant la première équation, il vient  $f(x, y) = xe^y + g(y)$ . La deuxième équation donne alors

$$xe^y + g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y$$

donc  $g'(y) = -2y$  et  $g(y) = -y^2 + a$  puis

$$f(x, y) = xe^y - y^2 + a, a \in \mathbb{R}$$

### 2.1.5 Formes différentielles fermées

#### Définition 5

Soit  $\omega$  une forme différentielle de degré  $n$  de classe  $C^k$ ,  $\omega$  est dite fermée si et seulement si  $d\omega = 0$ .

#### Proposition 1

Toute forme différentielle exacte est fermée.

#### Preuve .

Soit  $\omega = df = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  une forme différentielle exacte est de classe  $C^1$  sur  $U$ . Comme  $\omega$  est de classe  $C^1$ ,  $f$  est de classe  $C^2$  donc on peut appliquer le théorème de Schwartz et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  d'où le résultat.

La réciproque est fautive. ■

#### Exemple

12. .

Il existe des fonctions fermées n'est pas exactes :

on pose  $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Ainsi,  $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ,  $\omega$  est de classe  $C^\infty$  et fermée sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mais n'est pas exacte.

En effet,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



donc  $\omega$  est fermée.

Mais  $\omega$  n'est pas exacte car si c'était le cas, l'intégrale de  $\omega$  sur le cercle unité serait nulle. Or

$$\int_{c_1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi$$

### 2.1.6 Théoreme de Poincaré

Rappel :

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite **étoilée** par rapport à  $M_0 \in A$  si  $\forall M \in A$ , le segment  $[M_0, M] \subset A$ .

#### Théorème 1

Soit  $U$  un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega$  une forme différentielle de degré  $n$  et de classe  $C^k (k \geq 1)$ .  
alors  $\omega$  est exacte sur  $U$  si et seulement si elle est fermée sur  $U$ .

#### Preuve .

Le sens direct est déjà vu.

Pour l'autre. On se place dans le cas  $n = 2$  (pour simplifier les notations).

Soit  $M_0 \in U$  de sorte que  $U$  soit étoilé par rapport à  $M_0(x_0, y_0)$ .

Soit  $\omega : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$  une forme différentielle fermée de classe  $C^1$ .  $(x, y) \mapsto P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Pour  $M \in U$ , on pose

$$f(M) = \int_0^1 xP(tM + (1-t)M_0) + yQ(tM + (1-t)M_0)dt$$

On va montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  et que  $\omega = df$ . ■

#### Exemple

13. .

Soit la forme différentielle

$$\omega = xyz dx \wedge dy \wedge dz$$

On a  $d\omega = 0$ , est comme  $\omega$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  donc elle est exacte.

## 2.2 Métrique Riemannienne

### 2.2.1 Métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel.

#### Définition 1

Une métrique Riemannienne  $g$  sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$  est une application,

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

#### Remarques

2. Soit  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$ , pour tout  $V, W \in \Gamma(E)$ , on a :

1. –  $g(V, W) = g(W, V)$ . (symétrique)
- $\forall V \in \Gamma(E), \quad g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$  (définie)
- $g(V, V) \geq 0$  (positive)
- non dégénérée si le seul vecteur  $V$  tel que  $g(U, V) = 0, \forall U \in \Gamma(E)$  est le vecteur nul (autrement dit, seul le vecteur nul est orthogonal (selon  $g$ )).

2.  $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$

Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $E$  vérifiant la condition de trivialisation locale de base associé  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  et de base dual associé  $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$ , alors

$$g = \sum_{i,j=1}^k g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j,$$

où  $g_{ij}$  sont des fonctions différentiables sur  $U$  appelé composantes du tenseur métrique relativement à la carte  $(U, \varphi)$ .

Si  $V = V^i \sigma_i$  et  $W = W^j \sigma_j$  on a

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. Pour tout  $x \in M$  on a

$$g_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où  $E_x$  la fibre au-dessus de  $x$ .

**Définition 2**

Une variété Riemannienne est un couple  $(M, g)$ , où  $M$  est une variété différentiable et  $g$  une métrique Riemannienne sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ .

**Exemple**

14. L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire standard

$$g_0(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

où  $v = (v_1, \dots, v_n)_x$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)_x \in T_x \mathbb{R}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple**

15. Dans la boule

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

on considère le tenseur  $g_H$  défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w), \quad v, w \in T_x \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{D}^n.$$

$g_H$  est appelée la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{D}^n$ .

**Exemple**

16. Soit  $M$  une sous-variété différentiable de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in M$ , on a  $T_x M \subset T_x \mathbb{R}^n$ . En posant

$$g(v, w) = g_0(v, w) \quad v, w \in T_x M.$$

on obtient la métrique Riemannienne induite par  $g_0$  sur  $M$ .

**Remarque**

4. Soient  $(M, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $n$  et  $(U, \varphi)$  (resp  $(V, \psi)$ ) une carte de  $M$  avec les champs de bases associés  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  (resp  $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ ). Si  $g_{ij}$  (resp  $\tilde{g}_{kl}$ ) désignent les composantes de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$  (resp  $(V, \psi)$ ), alors pour tout  $x \in \varphi(U \cap V)$ , le changement de coordonnées est donné par

$$y = y(x) = (y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl},$$

pour la preuve, remarquons que pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

### Définition 3

Image inverse d'une métrique

Soient  $(N, h)$  une variété Riemannienne, de dimension  $n$ ,  $M$  une variété différentiable, de dimension  $m$ , et  $f : M \rightarrow N$  une immersion. Alors

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $x \in M$  par

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_x f(X_x), d_x f(Y_x)),$$

est une métrique sur  $M$ , appelée métrique inverse

### Expression locale de la métrique $f^*h$

Soient  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  de base associée  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$  et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  de base associée  $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$ , alors

$$\begin{aligned} (f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \circ f \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} (h_{\alpha\beta} \circ f). \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Définition 4**

Étant donné une métrique Riemannienne  $g$  sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$ , on définit la longueur  $\|V\|_g$  d'une section  $V \in \Gamma(E)$  par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V, V)}$$

En coordonnées locales, si  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  est une base locale de  $\Gamma(E)$ ,  $g_{ij} = g(\sigma_i, \sigma_j)$  et  $V = V^i \sigma_i$  alors,

$$\|V\|_g^2 = g_{ij} V^i V^j$$

**Proposition 1**

Soit  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$ . L'application,

$$\sharp : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E),$$

définie par,

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V),$$

pour tout  $\omega \in \Gamma(E^*)$  et  $V \in \Gamma(E)$ , est un isomorphisme  $C^\infty(M)$ -linéaire.

**Lemme 2**

Soit  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$ . Pour tout  $x \in M$  la métrique  $g$  induit un isomorphisme linéaire entre  $E_x^*$  et  $E_x$

$$\sharp_x : E_x^* \longrightarrow E_x,$$

définit par,

$$g_x(\sharp_x \omega, v) = \omega(v),$$

pour tout  $\omega \in E_x^*$  et  $v \in E_x$ .

**Remarque**

**5.** Soit  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  une base locale de  $\Gamma(E)$  et  $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$  une base locale du dual  $\Gamma(E^*)$ . Si  $\omega = \omega_i \sigma^i$  et  $g = g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j$  on a

$$\sharp\omega = g^{ij} \omega_i \sigma_j$$

où  $(g^{ij})$  désigne la matrice inverse de  $(g_{ij})$ .

## 2.2.2 Métrique induite sur le fibré dual

### Définition 5

Soit  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  de fibre type  $\mathbb{R}^k$ . Alors  $g$  induit une métrique Riemannienne sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$ ,

$$g^* : \Gamma(E^*) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$g^*(\omega, \eta) = g(\sharp\omega, \sharp\eta),$$

pour tout  $\omega, \eta \in \Gamma(E^*)$ .

### Expression locale de la métrique $g^*$

Soient  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  une base locale de  $\Gamma(E)$  et  $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$  la base dual locale de  $\Gamma(E^*)$  associée, alors pour  $\omega, \eta \in \Gamma(E^*)$  tels que  $\omega = \omega^i \sigma^i$  et  $\eta = \eta^j \sigma^j$  on a

$$g^* = \sum_{ij} g^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

$$g^*(\omega, \eta) = \sum_{ij} g^{ij} \omega^i \eta^j$$

avec  $(g^{ij})$  est la matrice inverse de  $(g_{ij})$ ,

### 2.2.3 Métrique induite sur le produit tensoriel

#### Définition 6

Soient  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi_E, M)$  et  $h$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(F, \pi_F, M)$ , on définit la métrique produit tensoriel

$$g \otimes h : \Gamma(E \otimes F) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow C^\infty(M),$$

l'unique métrique vérifiant,

$$(g \otimes h)(V \otimes A, W \otimes B) = g(V, W)h(A, B)$$

pour tout  $V, W \in \Gamma(E)$  et  $A, B \in \Gamma(F)$ .

#### Remarque

6. Soient  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi_E, M)$  et  $h$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(F, \pi_F, M)$ , alors

$$g \otimes h \in \Gamma(E^* \otimes F^* \otimes E^* \otimes F^*) \simeq \Gamma(E^* \otimes E^* \otimes F^* \otimes F^*).$$

### 2.2.4 Métrique induite sur le fibré inverse

#### Définition 7

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables,  $(F, \pi_N, N)$  un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$  sur  $N$  et  $f : M \longrightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ .

Si  $h$  est une métrique sur le fibré vectoriel  $(F, \pi_N, N)$ , alors  $h$  induit une métrique sur  $f^{-1}F$ ,

$$h_f : \Gamma(f^{-1}F) \times \Gamma(f^{-1}F) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$h_f(V, W)_x = h_{f(x)}(V_x, W_x),$$

pour tout  $x \in M$  et  $V, W \in \Gamma(f^{-1}F)$ .

## 2.3 Connexion de Levi-Civita

### 2.3.1 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.

#### Définition 1

Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$  est une application

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V\end{aligned}$$

vérifiant :

1.  $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2.  $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3.  $\nabla_{X+fY}V = \nabla_X V + f\nabla_Y V$ ,

pour tout  $V, W \in \Gamma(E)$ ,  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

#### Définition 2

Une section  $V \in \Gamma(E)$  est dite parallèle par rapport à la connexion  $\nabla$  si

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ .

#### Définition 3

Soit  $g$  une métrique Riemannienne sur le fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$ , alors  $\nabla$  est dite compatible avec la métrique  $g$  si

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W),$$

pour tout  $V, W \in \Gamma(E)$  et  $X \in \Gamma(TM)$ .



**Définition 4**

Soient  $M$  une variété différentiable et  $\nabla$  une connexion linéaire sur le fibré vectoriel tangent  $(TM, \pi, M)$ . La torsion de  $\nabla$  est une application  $C^\infty(M)$

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

La connexion  $\nabla$  est dite sans torsion si  $T \equiv 0$ .

**Remarques 3.**

1.  $T$  est un champ de tenseur de type  $(1, 2)$
2.  $T(X, Y) = -T(Y, X)$  pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  ( $T$  est antisymétrique)
3. La connexion  $\nabla$  est sans torsion ssi pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a :

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

**Théorème 1**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, l'application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par la formule de Koszul,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]), \end{aligned} \quad (2.2)$$

est une connexion linéaire sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ , appelée connexion de Levi-Civita.

**Preuve .**

Pour tout  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  et  $f \in C^\infty(M)$  on a,

1.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{fX}Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) + g(Z, [fX, Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) + fg(Z, [X, Y]) \\
&\quad + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) + fg(Z, [X, Y]) \\
&\quad + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

et comme  $g$  est non dégénérée on a ,  $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

2.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{X+W}Y, Z) &= (X+W)(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X+W)) - Z(g(X+W, Y)) \\
&\quad + g(Z, [X+W, Y]) + g(Y, [Z, X+W]) - g(X+W, [Y, Z]) \\
&= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) + W(g(Y, Z)) + Y(g(Z, W)) \\
&\quad - Z(g(W, Y)) + g(Z, [W, Y]) + g(Y, [Z, W]) - g(W, [Y, Z]) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\
&= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où ,  $\nabla_{X+W}Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$  .

3.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) + g(Z, [X, fY]) \\
&\quad + g(fY, [Z, X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) + X(f)g(Z, Y) + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) \\
&\quad + Z(f)g(X, Y) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où  $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ .

4. De même manière on obtient,  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ . Donc  $\nabla$  est une connexion linéaire sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ . ■

### Théorème 2

( Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne ) Si  $(M, g)$  est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec  $g$ .

**Preuve .** On a

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{g(Z, [X, Y]) - g(Z, [Y, X])\} \\
&= g(Z, [X, Y]),
\end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. Et,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + X(g(Z, Y))\} \\
&= X(g(Y, Z)),
\end{aligned}$$

celà prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique  $g$  sur  $M$ . Comme  $g$  est non

dégénérée, cette relation (2.2) détermine complètement la connexion  $\nabla$ , ce qui donne l'unicité. ■

### Exemple

**17.** Une connexion linéaire  $\nabla$  sur  $M$  est une connexion linéaire sur le fibré tangent  $(TM, \pi, M)$ .

Dans un système de coordonnées  $(x^i)$  sur  $M$ ,  $\nabla$  est complètement définie par les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En effet, si  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  alors

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

### Proposition 1

Soient  $(M^m, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $m$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita. Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $M$  avec les champs de bases  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  associés, alors les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\},$$

où,  $g_{ij}$  sont les coordonnées de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$ .

### Preuve .

Comme  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  pour tout  $i, j = 1, \dots, m$ , où  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  on a,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) &= 2 \sum_{s=1}^m g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2 \sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} \\ &= \partial_i(g(\partial_j, \partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l, \partial_i)) - \partial_l(g(\partial_i, \partial_j)), \end{aligned}$$

donc,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \}$$

d'où,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \},$$

et,

$$\sum_{s,l=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \},$$

et comme  $(g^{ij})$  est la matrice inverse de  $(g_{ij})$  on a  $\sum_{l=1}^m g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks}$ , où  $\delta_{ks}$  est le symbole de Kronecker, d'où

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}.$$

■

### Exemple

**18.** On considère la paramétrisation de la sphère  $S^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\}$  et soit la projection stéréographique,  $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  donnée par

$$\psi(x) = \left( \frac{2x^1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x^n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les composantes du tenseur métrique relativement à  $\psi$  sont

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour la preuve, en utilisant la formule 2.1.

Les symboles de Christoffel sont,

$$\Gamma_{ii}^i(x) = \Gamma_{ij}^j(x) = \Gamma_{ji}^i(x) = -\Gamma_{jj}^i(x) = \frac{-2x^i}{1 + \|x\|^2},$$

$$\Gamma_{ij}^k(x) = 0, \quad \text{pour } i, j \text{ et } k = 1, \dots, n \text{ distincts.}$$

pour la preuve en utilisant la proposition 1.

Béchar 2020-2021

### 2.3.2 Connexion induite sur le fibré dual

#### Définition 5

Soit  $\nabla$  une connexion linéaire sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$ , alors  $\nabla$  induit une connexion linéaire sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$ ,

$$\nabla^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E^*),$$

définie par,

$$(\nabla_X^* \omega)(V) = X(\omega(V)) - \omega(\nabla_X V),$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $V \in \Gamma(E)$  et  $\omega \in \Gamma(E^*)$ . On vérifie aisément que  $\nabla^*$  est une connexion linéaire sur  $E^*$ , on la note par  $\nabla$ .

#### Proposition 2

Soient  $\nabla$  une connexion linéaire et  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi, M)$ . Si  $\nabla$  est compatible avec la métrique  $g$  alors la connexion induite  $\nabla^*$  est compatible avec la métrique induite  $g^*$  sur le fibré vectoriel dual  $(E^*, \pi^*, M)$ .

#### Preuve .

Si  $\nabla$  est compatible avec la métrique  $g$  on a, pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  et  $\omega, \eta \in \Gamma(E^*)$ ,

$$\begin{aligned} X(g^*(\omega, \eta)) &= X(g(\sharp\omega, \sharp\eta)) \\ &= g(\nabla_X \sharp\omega, \sharp\eta) + g(\sharp\omega, \nabla_X \sharp\eta) \end{aligned}$$

Et pour tout  $V \in \Gamma(E)$  on a,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \sharp\omega, V) &= X(g(\sharp\omega, V)) - g(\sharp\omega, \nabla_X V) \\ &= X(\omega(V)) - \omega(\nabla_X V) \\ &= (\nabla_X^* \omega)(V) \\ &= g(\sharp\nabla_X^* \omega, V), \end{aligned}$$

d'où,  $\nabla_X \sharp \omega = \sharp \nabla_X^* \omega$ , donc

$$\begin{aligned} X(g^*(\omega, \eta)) &= g(\sharp \nabla_X^* \omega, \sharp \eta) + g(\sharp \omega, \sharp \nabla_X^* \eta) \\ &= g^*(\nabla_X^* \omega, \eta) + g^*(\omega, \nabla_X^* \eta). \end{aligned}$$

■

### 2.3.3 Connexion induite sur le produit tensoriel

#### Proposition 3

Soient  $\nabla^E$  et  $\nabla^F$  deux connexions linéaire sur  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$  respectivement. Alors il existe une unique connexion,

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow \Gamma(E \otimes F)$$

tel que

$$\nabla_X(V \otimes A) = (\nabla_X^E V) \otimes A + V \otimes (\nabla_X^F A),$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $V \in \Gamma(E)$  et  $A \in \Gamma(F)$ .

$\nabla$  est appelé connexion tensoriel produit, notée  $\nabla^E \otimes \nabla^F$ .

#### Proposition 4

Soient  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$  deux fibrés vectoriels muni respectivement des connexions  $\nabla^E$  et  $\nabla^F$ , et des métriques  $g_E$  et  $g_F$ . Si  $\nabla^E$  ( resp.  $\nabla^F$  ) est compatible avec la métrique  $g_E$  ( resp.  $g_F$  ), alors la connexion  $\nabla^E \otimes \nabla^F$  et la métrique  $g_E \otimes g_F$  induites sur le produit tensoriel  $E \otimes F$  sont compatibles.

**Preuve .**

Pour tout  $V, W \in \Gamma(E)$  et  $A, B \in \Gamma(F)$  on a,

$$\begin{aligned}
 X(g_E \otimes g_F(V \otimes A, W \otimes B)) &= X(g_E(V, W)g_F(A, B)) \\
 &= X(g_E(V, W))g_F(A, B) + g_E(V, W)X(g_F(A, B)) \\
 &= [g_E(\nabla_X^E V, W) + g_E(V, \nabla_X^E W)]g_F(A, B) \\
 &\quad + g_E(V, W)[g_F(\nabla_X^F A, B) + g_F(A, \nabla_X^F B)] \\
 &= g_E \otimes g_F(\nabla_X^E V \otimes A, W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, \nabla_X^E W \otimes B) \\
 &\quad + g_E \otimes g_F(V \otimes \nabla_X^F A, W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, W \otimes \nabla_X^F B) \\
 &= g_E \otimes g_F(\nabla_X(V \otimes A), W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, \nabla_X(W \otimes B)).
 \end{aligned}$$

■

**Cas des formes vectoriels****Définition 6**

Soient  $(E, \pi_E, M)$  et  $(F, \pi_F, M)$  deux fibrés vectoriels de fibre type  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$  respectivement. Une 1-forme vectoriel  $\omega$  est une application  $C^\infty(M)$ -linéaire

$$\begin{aligned}
 \omega : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(F) \\
 V &\longmapsto \omega(V)
 \end{aligned}$$

tel que pour tout  $x \in M$

$$\begin{aligned}
 \omega_x : E_x &\longrightarrow F_x \\
 V_x &\longmapsto \omega_x(V_x) = \omega(V)(x).
 \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**Expressions locales :**

Soit  $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$  une 1-forme vectoriel. Si  $(U, \varphi)$  ( resp.  $(V, \psi)$  ) est une carte vérifiant la condition de trivialization locale sur  $E$  ( resp. sur  $F$  ) de base locale  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  ( resp.  $(\rho_1, \dots, \rho_l)$  ) de  $\Gamma(E)$  ( resp.



de  $\Gamma(F)$  ) et  $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$  une base dual locale de  $\Gamma(E^*)$ . Alors

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} \omega_i^j \sigma^i \otimes \rho_j,$$

où,  $\omega_i^j$  sont des fonctions différentiables sur  $U \cap V$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq l$ .

Si de plus  $V = V^i \sigma_i$ , alors

$$\omega(V) = \omega_i^j V^i \rho_j.$$

### Remarque

**7.** Si  $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$ , une 1-forme vectoriel, alors pour  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $\nabla_X \omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$  est une 1-forme vectoriel définie par

$$(\nabla_X \omega)(V) = \nabla_X \omega(V) - \omega(\nabla_X V)$$

pour tout  $V \in \Gamma(E)$ .

### Remarque

**8.** On générale, soient  $(F, \pi, M)$ ,  $(E_i, \pi_i, M) (i = 1, \dots, p)$  des fibrés vectoriels. Si  $\omega \in \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_p^* \otimes F)$ , alors pour tout  $(V_1, \dots, V_p) \in \Gamma(E_1) \times \dots \times \Gamma(E_p)$ , on a

$$(\nabla_X \omega)(V_1, \dots, V_p) = \nabla_X \omega(V_1, \dots, V_p) - \sum_{j=1}^p \omega(V_1, \dots, \nabla_X^{E_j} V_j, \dots, V_p).$$

### Norme de Hilbert Schmidt.

Soient  $g$  une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel  $(E, \pi_E, M)$  et  $h$  une métrique sur un fibré vectoriel  $(F, \pi_F, M)$ ; On définit la *norme de Hilbert Shmidt*  $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$  par

$$|\omega|^2 = (g^* \otimes h)(\omega, \omega).$$

En coordonnées locales relativement à  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  base de  $\Gamma(E^*)$ ,  $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$  base de  $\Gamma(E^*)$ ,  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  base de  $\Gamma(F)$  et  $(\rho^1, \dots, \rho^k)$  base de  $\Gamma(F^*)$  on a :

$$|\omega|^2 = g^{ij} \omega_i^a \omega_j^b h_{ab}.$$

où,  $\omega = \omega_i^a \sigma^i \otimes \rho_a$ ,  $g = g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j$  et  $h = h_{ab} \rho^a \otimes \rho^b$ .

**Exemple**

19. Si  $E = F = TM$  et  $\phi : M \longrightarrow M$  de classe  $C^\infty$ , on a

$$d\phi : TM \longrightarrow TM$$

est une 1-forme vectorielle, définie en coordonnées locale par

$$d\phi = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_i.$$

et de norme

$$\begin{aligned} |d\phi|^2 &= (g^* \otimes g) \left( \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} dx^i \otimes \partial_s, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_k \right) \\ &= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^*(dx^i, dx^j) g(\partial_s, \partial_k) \\ &= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^{ij} g_{sk} \end{aligned}$$

### 2.3.4 Connexion induite sur le fibré inverse

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables,  $(F, \pi_N, N)$  un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}^k$  sur  $N$  et  $f : M \longrightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ . Si  $\nabla^N$  est une connexion linéaire sur  $(F, \pi_N, N)$ , on définit la connexion sur le fibré inverse (Pull-back)  $f^{-1}F$ ,

$$\nabla^f : \Gamma(TM) \times \Gamma(f^{-1}F) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}F),$$

par

$$(\nabla_X^f V)_x = (\nabla_{d_x f(X_x)}^N \tilde{V})_{f(x)} \quad (2.3)$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $V \in \Gamma(f^{-1}F)$ ,  $x \in M$  et  $\tilde{V} \in \Gamma(F)$  tel que  $\tilde{V} \circ f = V$  au voisinage de  $x$ .

**Remarque**

9. La relation (1.8) est indépendante du choix de  $\tilde{V}$ . En effet, soient  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$  une base locale de  $\Gamma(TM)$ ,  $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$  une base locale de  $\Gamma(TN)$  et  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  base locale de  $\Gamma(F)$ ,

pour  $X = X^i \partial_i \in \Gamma(TM)$ ,  $V = V^\beta (\sigma_\beta \circ f) \in f^{-1}F$ ,  $\tilde{V} = \tilde{V}^\beta \sigma_\beta \in \Gamma(F)$  et  $x \in M$  on a

$$\begin{aligned} (\nabla_X^f V)_x &= (\nabla_{d_x f(X_x)}^N \tilde{V})_{f(x)} \\ &= X_x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x (\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^N \tilde{V}^\beta \sigma_\beta)_{f(x)} \\ &= X_x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x \left\{ \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha} \sigma_\beta + \tilde{V}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma \right\} \Big|_{f(x)}, \end{aligned}$$

où,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  sont des fonctions différentiables sur  $N$ , définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \sigma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma$$

Remarquons que  $\tilde{V}_{f(x)}^\beta = V_x^\beta$  et  $\frac{\partial V^\beta}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{V}^\beta \circ f) \Big|_x = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha} \Big|_{f(x)}$ , pour tout  $\beta = 1, \dots, k$ , d'où

$$(\nabla_X^f V) = X^i \left( \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} V^\beta (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ f) \right) (\sigma_\gamma \circ f),$$

### Exemple

**20.** Soient  $M, N$  deux variétés différentiables et  $\varphi : M \longrightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ . Si  $\nabla^N$  est une connexion linéaire sur le fibré tangent  $(TN, \pi_N, N)$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}TN &= \{ (x, v) \mid x \in M, v \in T_{\varphi(x)}N \} \\ &= \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_{\varphi(x)}N, \end{aligned}$$

et

$$\Gamma(\varphi^{-1}TN) = \{ V : M \longrightarrow TN \mid \forall x \in M, V_x \in T_{\varphi(x)}N \}$$

Localement pour tout  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$  et  $\varphi^\beta = y^\beta \circ \varphi$ , on a

$$d\varphi(X) = X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi \right\} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi$$

En effet

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \\
 &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \\
 &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^N \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) \circ \varphi \\
 &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\alpha\beta}^N \circ \varphi \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \quad \square
 \end{aligned}$$

### Remarque

**10.** Soient  $M, N$  deux variétés différentiables,  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $V, W \in \Gamma(TN)$  et  $\varphi : M \rightarrow N$  une application différentiable ; Si  $X$  et  $V$  ( resp.  $Y$  et  $W$  ) sont  $\varphi$ -conjugué (i.e.  $d\varphi(X) = V \circ \varphi$  et  $d\varphi(Y) = W \circ \varphi$ ), alors

$$\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) = (\nabla_V^N W) \circ \varphi.$$

### Proposition 5

Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $\nabla^N$  une connexion linéaire compatible avec une métrique  $h$  sur  $N$ , alors la connexion linéaire  $\nabla^\varphi$  est compatible avec la métrique  $h_\varphi$  sur  $\varphi^{-1}TN$ . C'est à dire, pour tous  $X \in \Gamma(TM)$  et  $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$  on a

$$X(h_\varphi(V, W)) = h_\varphi(\nabla_X^\varphi V, W) + h_\varphi(V, \nabla_X^\varphi W).$$

### Preuve .

Soient  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$  et  $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \Gamma(TN)$ , tels que

$$d\varphi(X) = \tilde{X} \circ \varphi, \quad \tilde{V} \circ \varphi = V \quad \text{et} \quad \tilde{W} \circ \varphi = W$$

alors,

$$\begin{aligned}
 X(h_\varphi(V, W)) &= X(h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi) \\
 &= \tilde{X}(h(\tilde{V}, \tilde{W})) \circ \varphi \\
 &= h(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi + h(\tilde{V}, \nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{W}) \circ \varphi \\
 &= h_\varphi(\nabla_X^\varphi V, W) + h_\varphi(V, \nabla_X^\varphi W).
 \end{aligned}$$

■

**Proposition 6**

Soit  $\nabla^N$  une connexion sans torsion sur  $N$ , alors

$$\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) = \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]),$$

pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

**Preuve .**

Soit  $V, W \in \Gamma(TN)$  deux champs de vecteurs  $\varphi$ -conjugué avec  $X$  et  $Y$  respectivement . On a

$$[V, W] \circ \varphi = d\varphi \circ [X, Y]$$

$$\nabla_V^N W = \nabla_W^N V + [V, W]$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) &= (\nabla_V^N W) \circ \varphi \\ &= (\nabla_W^N V + [V, W]) \circ \varphi \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]) \end{aligned}$$

**Définition 7**

(Seconde forme fondamentale)

Soient  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  deux variétés Riemannienne et  $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  une application différentiable de classe  $C^\infty$ . La seconde forme fondamentale de l'application  $\varphi$  est la dérivée covariante de la 1-forme vectoriel  $d\varphi$ , définie par

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y),$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

**Propriété 7**

Soit  $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  une application différentiable, la seconde forme fondamentale de l'application  $\varphi$  est symétrique. C'est à dire

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla d\varphi(Y, X) \quad , \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) .$$

**Preuve .**

En utilisant la proposition (1.3.6) on a

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi(X, Y) &= \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) - d\varphi(\nabla_Y^M X) \\ &= \nabla d\varphi(Y, X) , \end{aligned}$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . ■

**Proposition 8**

Soient  $\varphi : M \longrightarrow N$  et  $\psi : N \longrightarrow P$  deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors

$$\nabla d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi) .$$

**Preuve .**

Soit  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla d(\psi \circ \varphi)(X, Y) &= \nabla_X^{\psi \circ \varphi} d(\psi \circ \varphi)(Y) - d(\psi \circ \varphi)(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_X^{\psi \circ \varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla_{d\psi(d\varphi(X))}^P d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla_{d\varphi(X)}^\psi d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)) . \end{aligned}$$
■

**Définition 8**

Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  des variétés Riemanniennes. Une application  $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  est dite totalement géodésique si  $\nabla d\varphi = 0$ .

**Définition 9**

Soit  $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  une application de classe  $C^\infty$ . La trace de la seconde forme fondamentale de l'application  $\varphi$  est appelé champ de tension de l'application  $\varphi$ , noté par

$$\tau(\varphi) = \text{tr}_g \nabla d\varphi.$$

Relativement à une base orthonormée  $(e_i)$  sur  $M$  on a

$$\tau(\varphi) = \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i),$$

Si  $(\frac{\partial}{\partial x^i})$  (resp  $(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})$ ) est une base locale de champs de vecteurs sur  $M$  (resp sur  $N$ ), on a

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= g^{ij} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - d\varphi\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^M \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right) \\ &= g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \circ \varphi \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Proposition 9**

Soient  $\varphi : M \longrightarrow N$  et  $\psi : N \longrightarrow P$  deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + \text{tr}_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi).$$

**Cas des sous-variétés**

Soient  $(N, h)$  une variété Riemannienne et  $M$  une sous-variété de  $N$ . Alors le champ de tenseur  $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$  défini pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $p \in M$  par

$$g(X, Y)_p = h_p(X_p, Y_p),$$

est une métrique Riemannienne sur  $M$ , appelé la métrique induite sur  $M$  par  $h$ .

Pour tout  $p \in M$  on a

$$T_p N = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

où,

$$T_p M^\perp = \{v \in T_p N \mid h_p(v, w) = 0, \forall w \in T_p M\}$$

$$\forall v \in T_p N \quad \exists ! v^\top \in T_p M \quad \exists ! v^\perp \in T_p M^\perp \quad | \quad v = v^\top + v^\perp.$$

### Remarque

**11.** Soient  $X \in \Gamma(TM)$  et  $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$  un prolongement de  $X$  (i.e.  $\tilde{X}|_M = X$ ). Si  $\nabla^N$  (resp  $\nabla^M$ ) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $h$  sur  $N$  (resp sur  $M$ ), alors

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\top, \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$

est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $g$  sur  $M$ , qui indépendant de choix de prolongement.

La deuxième forme fondamentale de  $M$  sur  $N$  est donnée par

$$B(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp, \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$

et la courbure moyenne est donnée par

$$H = \text{trace } B.$$

### Définition 10

Une sous variété  $M$  d'une variété  $N$  est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle ( $H = 0$ ).

### Remarques

**4.** .

1) Soit  $i : M \hookrightarrow N$  l'injection canonique, alors la deuxième forme fondamentale de  $i$  coïncide avec la deuxième forme fondamentale de  $M$  sur  $N$ , c'est à dire

$$\nabla di(X, Y) = B(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$



2) Soit  $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^\perp)$ , on a

$$g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) = -g(\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}^N \mathcal{N}) \quad X, Y \in \Gamma(TM). \quad (2.5)$$

3) Dans le cas où  $M$  est une hyper-surface de  $N$  et  $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^\perp)$ , on a

$$\nabla di(X, Y) = g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) \mathcal{N}.$$

En effet, pour prouver (2), soit  $p \in M$  on a

$$\begin{aligned} g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) &= g((\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y}, \mathcal{N}) - g((\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\top, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y}, \mathcal{N}) \\ &= \tilde{X}(g(\tilde{Y}, \mathcal{N})) - g(\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}^N \mathcal{N}), \end{aligned}$$

Si  $(\varphi_t(p))_t$  est une courbe sur  $M$ , définie au voisinage de  $0 \in \mathbb{R}$ , telle que  $\tilde{X}_p = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(p)|_{t=0}$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(g(\tilde{Y}, \mathcal{N})) &= \frac{d}{dt} g(\tilde{Y}, \mathcal{N}) \circ \varphi_t(p)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} g_{\varphi_t(p)}(\tilde{Y}_{\varphi_t(p)}, \mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} h_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, \mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) découle immédiatement de (1) et (2).

### Exemple

**21.** Si  $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  désigne la sphère unité et  $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  le champ de vecteur normal à la sphère, alors

$$\nabla di(X, Y)_p = -g(X, Y)_p \mathcal{N}_p \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad , \quad \forall p \in M. \quad (2.6)$$

$$g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N})_p = -g(X, Y)_p \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad , \quad \forall p \in M,$$

en effet, ceci découle de la formule 2.5 et de la relation

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{N} = \tilde{X}, \quad \forall \tilde{X} \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}).$$

**Définition 11****Troisième forme fondamentale**

Soit  $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$  une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

La troisième forme fondamentale de  $\varphi$  est la dérivée covariante de  $\nabla d\varphi$ , elle est définie par :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla_X(\nabla d\varphi(Y, Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla_X Z), \quad (2.7)$$

où  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

**Proposition 10**

Contrairement à la seconde forme fondamentale, la troisième forme fondamentale n'est pas symétrique, nous avons :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) + d\varphi(R^M(Z, X)Y) - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y). \quad (2.8)$$

**Preuve :**

par définition nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) - \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) &= \nabla_X(\nabla d\varphi(Y, Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - \nabla_Z(\nabla d\varphi(X, Y)) + \nabla d\varphi(\nabla_Z Y, X) + \nabla d\varphi(Y, \nabla_Z X), \end{aligned}$$

en utilisant la deuxième forme fondamentale, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) - \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) &= \nabla_X(\nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_Z X)) - \nabla_Z^\varphi d\varphi(\nabla_X Y) \\ &\quad + d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) \\ &\quad - \nabla_Z(\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X Y)) + \nabla_X^\varphi d\varphi(\nabla_Z Y) \\ &\quad - d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) + \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y), \end{aligned}$$

il suit que :

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi d\varphi(\nabla_Z Y) - \nabla_Z^\varphi d\varphi(\nabla_X Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) \\
&- d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) + \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&- \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) - \nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) \\
&+ \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{\nabla_X Z} Y \\
&- \nabla_X \nabla_Z Y) - (\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) \\
&+ \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y)) - \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y) - (\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) \\
&- \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{[Z,X]}^\varphi d\varphi(Y)).
\end{aligned}$$

Du fait que :

$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y = R^M(Z, X)Y,$$

et :

$$\begin{aligned}
&\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{[Z,X]}^\varphi d\varphi(Y) = R^\varphi(Z, X)d\varphi(Y) \\
&= R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y),
\end{aligned}$$

nous obtenons le résultat :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) + d\varphi(R^M(Z, X)Y) - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y).$$

## 2.4 Tenseur de courbure.

### Définition 1

Soit  $(E, \pi, M)$  un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire  $\nabla$ . On définit le tenseur de courbure,  $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ , associé à  $\nabla$ , par :

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V$$

pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $V \in \Gamma(E)$ .

### Propriétés 1

1. La courbure  $R$  est  $C^\infty(M)$ -3 linéaire
2.  $R(X, Y)V = -R(Y, X)V$  pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $V \in \Gamma(E)$  (antisymétrie)

### Définition 2

Sur une variété Riemannienne  $(M, g)$ , le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne.

Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \{\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m\},$$

où,  $(\partial_i)_{i=1..n}$  est une base locale de champs de vecteurs sur  $M$ .

**Proposition 2**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne  $R$  a les propriétés suivantes :

1.  $R$  est un champ de tenseurs de type  $(3, 1)$ .
2.  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$ .
3.  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ .
4.  $R$  vérifie l'identité de Bianchi algébrique

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

5.  $R$  vérifie l'identité de Bianchi différentielle

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

$$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

### 2.4.1 Courbure sectionnelle, courbure de Ricci et courbure scalaire

#### Définition 3

Soient  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $n \geq 2$  et  $P$  un 2-plan de  $T_x M$  de base  $\{X, Y\}$ . On appelle courbure sectionnelle en  $x$  de  $P$

$$K_x(P) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer  $X$  par  $\lambda X$  pour  $\lambda \neq 0$  et  $Y$  par  $Y - g(X, Y)X$ . On peut donc supposer que  $\{X, Y\}$  est une base orthonormale. Dans ce cas

$$K_x(P) = g(R(X, Y)Y, X)$$

On vérifie que  $K_x(P)$  ne dépend pas de la base orthonormée de  $P$  : En effet, si  $\{Z, T\}$  est une autre base orthonormale, il existe  $a, b \in \mathbb{R}$ , tels que  $a^2 + b^2 = 1$  avec

$$Z = aX + bY, \quad T = -bX + aY.$$

Une simple vérification montre que  $g(R(X, Y)Y, X) = g(R(Z, T)T, Z)$ .

#### Définition 4

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $n$ . On dit que  $M$  est une variété à courbure constante s'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in M$  et tout 2-plan  $P$  de  $T_x M$ , on a

$$K_x(P) = k.$$

**Définition 5**

La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne  $(M^m, g)$  de dimension  $m$  est un tenseur de type  $(0, 2)$  défini par

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= trace(Z \mapsto R(Z, X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i), \end{aligned}$$

pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$ , où  $(e_i)$  une base orthonormée locale sur  $M$ .

La courbure de Ricci est symétrique, en effet

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(Y, e_i)e_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Y)X, e_i) \\ &= Ric(Y, X) \end{aligned}$$

Relativement à la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..m}$ , les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned} R_{ij} &= Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= trace(Z \mapsto R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})Z) \\ &= g^{kl} g(R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \\ &= g^{kl} R_{ijk}^s g_{sl} \\ &= \delta_{ks} R_{ijk}^s \\ &= R_{ijk}^k \end{aligned}$$

Béchar 2020-2021

**Définition 6**

Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne  $(M^m, g)$ , est un tenseur de type  $(1, 1)$ , défini par

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i$$

pour tout  $X \in \Gamma(TM)$ , où  $(e_i)_{i=1..m}$  est une base orthonormée locale sur  $M$ .

**Remarque**

**12.** Soit  $(M^m, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $m$ . Pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a

$$Ric(X, Y) = g(Ricci(X), Y)$$

**Définition 7**

On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne  $(M^m, g)$  la fonction définie sur  $M$  par

$$S = trace_g Ric = \sum_{i,j=1}^m g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

où  $(e_i)_{i=1..m}$  une base orthonormée locale sur  $M$ .

**Remarques**

**5.** Soient  $(M, g)$  une variété Riemannienne, de dimension  $n$ ,  $x \in M$  et  $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)_{i=1..n}$  une base (resp  $(e_i)_{i=1..n}$  base orthonormée) de  $T_x M$ . Si  $A : T_x M \rightarrow T_x M$ ,  $B : T_x M \rightarrow T_x^* M$ , sont des applications linéaire et  $C : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , une application bilinéaire, alors

$$\diamond trace A = \sum_{i=1}^n g(A(e_i), e_i) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(A(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j})|_x$$

$$\diamond trace B = \sum_{i=1}^n B(e_i)(e_i) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} B(\frac{\partial}{\partial x^i})(\frac{\partial}{\partial x^j})|_x$$

$$\diamond trace C = \sum_{i=1}^n C(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} C(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})|_x$$

**Proposition 3**

Une variété Riemannienne  $(M, g)$  est de courbure sectionnelle constante  $k$  si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

pour tout  $X, Y$  et  $Z \in \Gamma(TM)$ .



**Corollaire 1**

Si  $(M^m, g)$  est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante  $k$ , alors pour tout  $X, Y \in \Gamma(TM)$  on a

1.  $\text{Ricci}(X) = (m-1)kX$ ,
2.  $\text{Ric}(X, Y) = (m-1)kg(X, Y)$ ,
3.  $S = m(m-1)k$ .

**Exemple**

**22.** L'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni du repère canonique  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ , du produit scalaire euclidien  $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$ , où  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . On vérifie immédiatement que  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ,  $R_{ijk}^l = 0$  donc  $R = 0$ . En particulier, la courbure sectionnelle de  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  est nulle.

## 2.5 L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne

**Définition 1**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto \text{grad } f = \sharp df \end{aligned}$$

où  $df$  est la différentielle de la fonction  $f$ , tel que pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  on a

$$g(\text{grad } f, X) = df(X) = X(f)$$

**Proposition 1**

( Expression du gradient en coordonnées locales ). Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ ,  $(U, \varphi)$  une carte sur  $M$  avec les champs de base associée  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ , alors pour tout  $f \in C^\infty(M)$  on a

$$(\text{grad } f)|_U = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (2.9)$$

**Preuve .**

On applique directement la définition de l'application  $\sharp$  (voir proposition 1.2.1), et la définition de la différentielle la fonction  $f \in C^\infty(M)$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$  sur  $M$ , on a

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\begin{aligned} \sharp df &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

où  $dx^1, \dots, dx^m$  est la base duale. ■

**Propriétés 2**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f, h \in C^\infty(M)$  on a

1.  $\text{grad}(f + h) = \text{grad } f + \text{grad } h$
2.  $\text{grad}(fh) = h \text{grad } f + f \text{grad } h$
3.  $(\text{grad } f)(h) = (\text{grad } h)(f)$

**Preuve .**

Soit  $f, h \in C^\infty(M)$ , pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  on a :

1).

$$\begin{aligned} g(\text{grad}(f + h), X) &= X(f + h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= g(\text{grad} f, X) + g(\text{grad} h, X) \\ &= g(\text{grad} f + \text{grad} h, X), \end{aligned}$$

2).

$$\begin{aligned} g(\text{grad}(fh), X) &= X(fh) \\ &= hX(f) + fX(h) \\ &= hg(\text{grad} f, X) + fg(\text{grad} h, X) \\ &= g(h \text{grad } f + f \text{grad } h, X), \end{aligned}$$

3).

$$\begin{aligned}
 (\text{grad } f)(h) &= g(\text{grad } h, \text{grad } f) \\
 &= g(\text{grad } f, \text{grad } h) \\
 &= (\text{grad } h)(f)
 \end{aligned}$$

■

## 2.6 L'opérateur divergence sur une variété Riemannienne

Soit  $X \in \Gamma(TM)$  un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne  $(M, g)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \nabla X : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\
 Z &\longmapsto \nabla_Z X
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

est une application  $C^\infty(M)$  linéaire ( $\nabla X$  est un tenseur de type  $(1,1)$ ).

si  $x \in M$ , alors

$$\begin{aligned}
 (\nabla X)_x : T_x M &\longrightarrow T_x M \\
 v &\longmapsto (\nabla_v X)_x
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Béchar 2020-2021

**Définition 1**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs  $X \in \Gamma(TM)$ , notée  $\operatorname{div} X$  est une fonction sur  $M$  définie par

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}_g(\nabla X)$$

$$(\operatorname{div} X)(x) = \operatorname{tr}_g((\nabla X)_x) \quad x \in M$$

En coordonnée locale on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\ &= g^{ij} g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

Si  $(e_i)$  est une base orthonormée locale sur  $M$  on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

La divergence d'une 1-forme  $\omega$  sur  $M$  est définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \omega &= \operatorname{tr}_g(Z \mapsto \nabla_Z \omega) \\ &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

Dans la définition de  $\operatorname{div} X$  nous pouvons également définir la divergence de  $(1, r)$ -tenseur  $T$  pour être  $(0, r)$ -tenseur

$$(\operatorname{div} T)(X_1, \dots, X_r) = \operatorname{tr}_g(Z \mapsto (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_r)).$$

**Proposition 1**

( première expression de la divergence en coordonnées locales ). Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ , pour tout  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$  on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i \right)$$

**Preuve .**

Sur une carte locale sur  $M$  nous avons,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m dx_i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m dx^i \left( \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i \right) \end{aligned}$$

■

**Propriétés 2**

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tous  $X, Y \in \Gamma(TM)$  et  $f \in C^\infty(M)$  on a

1.  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$
2.  $\operatorname{div}(f X) = f \operatorname{div} X + X(f)$

**Preuve .**

On applique directement la définition du divergence, soit  $(e_i)$  une base orthonormée locale sur  $M$ , on a

1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X + Y) &= g(\nabla_{e_i}(X + Y), e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i} X, e_i) + g(\nabla_{e_i} Y, e_i) \\ &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y, \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= g(\nabla_{e_i} fX, e_i) \\
&= g(e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i) \\
&= e_i(f)g(X, e_i) + fg(\nabla_{e_i} X, e_i) \\
&= X(f) + f \operatorname{div} X
\end{aligned}$$

■

**Lemme 3**

Sur une variété Riemannienne  $(M, g)$  on a

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{\det(g_{ij})}) = \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{l=1}^m \Gamma_{lk}^l$$

**Proposition 4**

( deuxième expression de la divergence en coordonnées locales ).

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $X \in \Gamma(TM)$  on a

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\det(g_{ij})} X^k)$$

**Preuve .**

D'après la proposition de première expression de la divergence en coordonnées locales nous avons,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m X^j \Gamma_{ij}^i \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m X^j \sum_{i=1}^m \Gamma_{ij}^i
\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 3, avec  $G = (g_{ij})$ , alors un calcul direct donne,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left( \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n X^j \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^i \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left( \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\det G}) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G} X^i)
 \end{aligned}$$

en utilisant la convention d'Einstein on a

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G} X^i)$$

■

## 2.7 L'opérateur laplacien sur une variété Riemannienne

### Définition 1

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté  $\Delta$ , sur  $M$  par

$$\begin{aligned}
 \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
 f &\longmapsto \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)
 \end{aligned}$$

### Propriétés 1

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f, h \in C^\infty(M)$  on a

1.  $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
2.  $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$

### Preuve .

Soit  $f, h \in C^\infty(M)$ , en utilisant les propriétés des opérateurs  $\operatorname{grad}$  et  $\operatorname{div}$  et le fait que  $X(f) = g(\operatorname{grad}(f), X)$ , on obtient

1.

$$\begin{aligned}
\Delta(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h)) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \\
&= \Delta(f) + \Delta(h),
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f) \\
&= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\
&= f \Delta(h) + h \Delta(f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h).
\end{aligned}$$

**Proposition 2**

( Première expression du Laplacien en coordonnées locales ). Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, pour tout  $f \in C^\infty(M)$  on a

$$\Delta(f) = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \quad (2.12)$$

**Preuve .**

Soit  $f \in C^\infty(M)$ , alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= g^{ij} g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g \left( \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - g \left( \operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\
&= g^{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \Gamma_{ij}^k g \left( \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) \\
&= g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)
\end{aligned}$$



**Exemple**

**23.** Soit  $\mathbb{R}^m$  muni du produit scalaire standard  $g_0$ , ( $g_{ij} = \delta_{ij}$ ), alors pour toute fonction différentiable  $f$  sur  $\mathbb{R}^m$  et  $X = (X^1, \dots, X^m)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^m$  on a

1.

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

## 3.1 Intégrales curvilignes

### 3.1.1 Intégrale d'une 1-forme sur d'un arc orienté

#### Définition 1

Soit  $\widehat{\gamma}$  un arc orienté dans  $\mathbb{R}^2$  (c'est à dire une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un sens de parcours) et  $\omega = a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy$  une 1-forme dans  $\mathbb{R}^2$ .

On définit l'intégrale de  $\omega$  le long de  $\widehat{\gamma}$  de la manière suivante :

on choisit un paramétrage de  $\widehat{\gamma}$  :

$$[a, b] \ni t \longmapsto \theta(t) = (x(t), y(t))$$

compatible avec l'orientation de  $\widehat{\gamma}$ . On a :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \omega := \int_a^b a_1(x(t), y(t))x'(t) + a_2(x(t), y(t))y'(t)dt$$

#### Remarque

13. .

On voit que  $\int_{\widehat{\gamma}} a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy$  est égal à la circulation le long de  $\widehat{\gamma}$  du champ de vecteurs

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$$

On déduit de cette remarque que  $\int_{\widehat{\gamma}} \omega$  est indépendant du choix du paramétrage, tant qu'il est compatible avec l'orientation. De plus on a :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \omega = - \int_{\widehat{\gamma}} \omega$$

On peut aussi définir l'intégrale d'une 1-forme sur un arc orienté dans  $\mathbb{R}^3$ . Les arcs orientés dans  $\mathbb{R}^3$  sont définis exactement de la même manière que dans  $\mathbb{R}^2$  : on fixe une fonction :

$$[a, b] \ni t \longmapsto \theta(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

de classe  $C^1$ . L'ensemble

$$C = \{\theta(t) | t \in [a, b] \subset \mathbb{R}^3\}$$

est une courbe (ou un arc géométrique) tracée dans  $\mathbb{R}^3$ . Si on choisit un sens de parcours sur  $C$ , on obtient un arc orienté, noté encore  $\widehat{\gamma}$ . Un paramétrage  $[a, b] \ni t \mapsto \theta(t)$  est compatible avec l'orientation de  $\widehat{\gamma}$ , si  $\theta(t)$  parcourt  $\widehat{\gamma}$  dans le sens de la flèche quand  $t$  varie de  $a$  à  $b$ .

### Définition 2

Soit  $\gamma$  un arc orienté dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $\omega := a_1(x, y, z)dx + a_2(x, y, z)dy + a_3(x, y, z)dz$  une 1-forme dans  $\mathbb{R}^3$ . On définit l'intégrale de  $\omega$  le long de  $\widehat{\gamma}$  de la manière suivante : on choisit un paramétrage de  $\text{arc}(\gamma)$  :

$$[a, b] \ni t \mapsto \theta(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

compatible avec l'orientation de  $\widehat{\gamma}$ . On pose :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \omega := \int_a^b a_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt$$

A nouveau l'intégrale est indépendante du paramétrage, tant qu'il reste compatible avec l'orientation.

### Exemple

24.

Soit  $\omega = (x + y)dx + xydy$  une forme différentielle orientée par :

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} -(\cos(t) + \sin(t)) \sin(t) + \cos^2(t) \sin(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos(t) \sin(t) dt + \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin(t) dt \\ &= \pi \end{aligned}$$

### 3.1.2 Intégrale d'une 2-forme sur une surface

On commence par le cas de  $\mathbb{R}^2$ . Dans  $\mathbb{R}^2$  une surface est simplement un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . On a vu plus haut que dans  $\mathbb{R}^2$ , une 2-forme est toujours une expression

$$\omega = a(x, y)dx \wedge dy$$

#### Définition 3

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\omega = a(x, y)dx \wedge dy$  une 2-forme sur  $D$ . On définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $D$  par :

$$\int \int_D \omega = \int \int_D a(x, y) dx dy$$

on remplace simplement  $dx \wedge dy$  par  $dx dy$ .

#### Remarque

14. .

Attention comme  $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ , le symbole  $dy \wedge dx$  devient  $-dx dy$  quand on calcule l'intégrale d'une 2-forme dans  $\mathbb{R}^2$ .

Passons maintenant au cas des 2-formes dans  $\mathbb{R}^3$ .

Béchar 2020-2021

**Définition 4**

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface orientée, c'est à dire une surface dans  $\mathbb{R}^3$  avec un choix continu d'un vecteur normal unitaire. Soit

$$\omega = a_{12}dx \wedge dy + a_{23}dy \wedge dz + a_{31}dz \wedge dx$$

une 2-forme définie dans un voisinage de  $S$ . On définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $S$  de la manière suivante :

1. On choisit un paramétrage de  $S$  :

$$\Omega \ni (t, s) \longmapsto \theta(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s)) \in \mathbb{R}^3$$

$\Omega$  étant un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (domaine des paramètres  $(t, s)$ ), compatible avec l'orientation de  $S$ . On rappelle que ceci signifie que le choix du vecteur normal à  $S$  est donné par :

$$\vec{v}(t, s) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, s) \wedge \frac{\partial \theta}{\partial s}(t, s)$$

où ici le symbole  $\wedge$  désigne le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

2. On remplace dans l'expression de  $\omega$  :

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &\longrightarrow f_{ij}(x(t, s)) \\ dx &\longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t}(t, s)dt + \frac{\partial x}{\partial s}(t, s)ds \\ dy &\longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}(t, s)dt + \frac{\partial y}{\partial s}(t, s)ds \\ dz &\longrightarrow \frac{\partial z}{\partial t}(t, s)dt + \frac{\partial z}{\partial s}(t, s)ds \end{aligned}$$

3. On a donc remplacé  $\omega$  par :

$$F(t, s)dt \wedge ds$$

pour une certaine fonction  $F$ .

4. On définit alors :

$$\int \int_S \omega := \int \int_{\Omega} F(t, s)dt ds$$

### 3.1.3 Intégrale d'une 3-formes sur un volume

Comme les 3-formes sont nulles dans  $\mathbb{R}^2$ , on ne peut intégrer une 3-forme que sur un domaine (volume) de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Définition 5

Soit  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domaine et  $\omega$  une 3-forme sur  $D$ . On a vu que  $\omega$  s'écrit sous la forme :

$$\omega = a_{123}(x)dx \wedge dy \wedge dz$$

On pose alors :

$$\int \int \int_D \omega := \int \int \int_D a_{123}(x, y, z) dx dy dz$$

Comme pour l'intégrale d'une 2-forme dans  $\mathbb{R}^2$ , la règle est très simple : on remplace simplement le symbole  $dx \wedge dy \wedge dz$  par  $dx dy dz$ .

#### Exemple

**25.** Calculons l'intégrale  $\int \int \int_V z dx dy dz$  étendue sur le domaine  $V$  limité par l'hémisphère supérieure de centre  $O = (0, 0, 0)$  et de rayon  $R > 0$ . Puisque le domaine d'intégration  $V \subset \mathbb{R}^3$  peut être défini analytiquement par l'expression :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq R^2 - x^2 - y^2, \forall (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

avec  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2\}$  désigne la projection du domaine  $V$  sur le plan  $Oxy$ , en appliquant la formule de Fubini on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int \int \int_V z dx dy dz &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left( \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z dz \right) dx dy \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} (R^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r dr \right) d\theta = \frac{R^4 \pi}{4} \end{aligned}$$

## 3.2 Formule de Green-Riemann

### 3.2.1 Formule de Green-Riemann pour les 0-formes

#### Définition 1

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ ,  $n = 2, 3$  est  $\widehat{\gamma}$  un arc orienté. Quand le paramètre  $t$  parcourt  $[a, b]$  le point  $x(t)$  parcourt de  $A$  vers  $B$  la circulation du champ de vecteurs  $\nabla f$  le long de  $\widehat{\gamma}$  est définie par :

$$\text{circ}(\nabla f, \widehat{AB}) = \int_{\widehat{\gamma}} df$$

Où

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

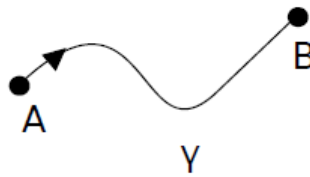


FIGURE 3.1: l'arc orienté  $\widehat{\gamma}$

#### Théorème 1

(Formule de Green-Riemann pour les 0-formes)

Soit  $\widehat{\gamma} = AB$  un arc orienté dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  au voisinage de  $\widehat{\gamma}$ . Alors

$$\int_{\widehat{\gamma}} df = f(B) - f(A)$$

#### Preuve .

Si on calcule la 1-forme  $df$ , on obtient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{\gamma}} df &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) dt = f(x(b)) - f(x(a)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

■

### 3.2.2 Formule de Green-Riemann pour les 1-formes

#### Le cas dans $\mathbb{R}^2$

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné et  $\partial D$  son bord, qui est une courbe fermée. On suppose le bord orienté par  $D$ , c'est à dire que quand on parcourt  $\partial D$  dans le sens de la flèche, le domaine  $D$  reste à gauche. Il peut arriver que le domaine  $D$  ait des trous, dans ce cas le bord de  $D$  est la réunion de plusieurs courbes fermées. On applique alors la même convention pour orienter chaque courbe .

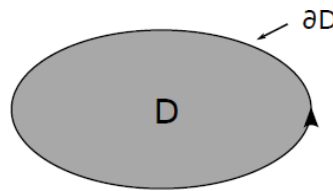


FIGURE 3.2: le domaine  $D$  et son bord orienté  $\partial D$

Béchar 2020-2021



**Théorème 2****(Formule de Green-Riemann pour les 1-formes)**

Soit  $\omega$  une 1-forme de classe  $C^1$  définie au voisinage du domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\int_{\partial D} \omega = \int \int_D d\omega$$

De manière plus concrète :

$$\int_{\partial D} a_1(x)dx + a_2(x)dy = \int \int_D \frac{\partial a_2}{\partial x}(x) - \frac{\partial a_1}{\partial y} dxdy$$

ou encore :

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

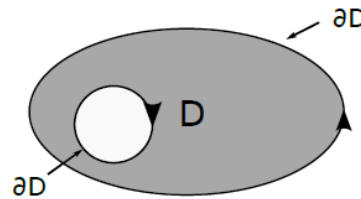


FIGURE 3.3: le domaine  $D$  et son bord orienté  $\partial D$

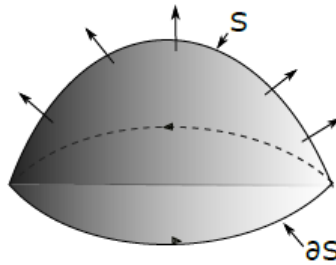
**Le cas dans  $\mathbb{R}^3$** 

Regardons maintenant le cas  $n = 3$ . On se donne une surface orientée  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Le bord  $\partial S$  de  $S$  est une courbe fermée. On oriente  $\partial S$  de manière compatible avec l'orientation de  $S$ . On se donne une 1-forme  $\omega$  de classe  $C^1$  définie au voisinage de  $S$ .

**Théorème 3****(Formule de Green-Riemann pour les 1-formes)**

Soit  $\omega$  une 1-forme de classe  $C^1$  définie au voisinage de la surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ . On a :

$$\int_{\partial S} \omega = \int \int_S d\omega$$

FIGURE 3.4: la surface  $S$  et son bord orienté  $\partial S$ 

### 3.2.3 Formule de Green-Riemann pour les 2-formes

On se place en dimension 3. Soit  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domaine (volume) borné. Son bord  $\partial D$  est une surface fermée. On suppose que  $\partial D$  est orienté par  $D$ , c'est à dire que le vecteur normal en un point de  $\partial D$  pointe vers l'extérieur de  $D$

#### Théorème 4

(Formule de Green-Riemann pour les 2-formes)

Soit  $\omega$  une 2-forme de classe  $C^1$  définie au voisinage du domaine  $D \subset \mathbb{R}^3$ . On a :

$$\int_{\partial D} \omega = \int \int_D d\omega$$

#### Exemple

26. .

Soit  $V$  un champ de vecteur de  $\mathbb{R}^2$  de composantes respectives notées

$$P(x, y) = -yx^2 \text{ et } Q(x, y) = xy^2$$

On définit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2y < 0\}$

Notons  $\Gamma_+$  le bord de  $D$  orienté dans le sens trigonométrique

1. Calculer  $\int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy$ .
2. Calculer  $\int \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y))dxdy$ .
3. Conclusion .

$$1. x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre  $A(0, 1)$  et de rayon 1,  $D$  est donc le disque de

centre  $A$  et de rayon 1 privé de sa frontière.

2. Une paramétrisation admissible de  $\Gamma_+$  est donc  $t \in [0, 2\pi]$ ,

$$x(t) = \cos(t), y(t) = 1 + \sin(t)$$

On obtient alors

$$dx = -\sin(t)dt$$

$$dy = \cos(t)dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} -((1 + \sin(t)) \cos^2(t) \sin(t) + \cos^2(t)(1 + \sin(t))^2)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t)(1 + \sin(t))(1 + 2\sin(t)))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + \int_0^{2\pi} 3\cos^2(t)\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t)\sin^2(t)dt \\ &= \left[ \frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[ -\cos^2(t) \right]_0^{2\pi} + \left[ \frac{\cos(t)\sin(t) + t - 2\sin(t)\cos^3(t)}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi + 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

3. On passe en coordonnée polaire et on obtient

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = 1 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

ou  $(\rho, \theta) \in \Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ . On rappelle que le Jacobien est

$$|J(\rho, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho$$

Après calcul, on obtient

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

Notons  $f(x, y) = x^2 + y^2$  alors on a

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(\rho \cos(\theta), 1 + \rho \sin(\theta)) |J(\rho, \theta)| d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} f(\rho \cos(\theta), 1 + \rho \sin(\theta)) |J(\rho, \theta)| d\rho d\theta &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2(\theta) + (1 + \rho \sin(\theta))^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^3 + \rho + 2\rho^2 \sin(\theta)) d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 (2\pi(+\rho) + 2\rho^2 [-\cos(\theta)]_0^{2\pi}) d\rho \\ &= \int_0^1 2\pi(\rho + \rho^3) d\rho \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Le résultat était bien sur attendu . C'est la formule de Green-Riemann .

### 3.3 Théorème de divergence

#### Définition 1

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $n$ . On appelle mesure de volume Riemannienne, notée  $v^M$  ou  $v^g$ , la mesure définie localement dans un repère par

$$v^M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

#### Exemples

2. On considère la variété  $\mathbb{R}^2$  muni des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  on a

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et,

$$v^{g_0} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

On considère la sphère  $S^2$  munie de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

alors,

$$v^g = \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta| d\theta \wedge d\varphi$$

### Proposition 1

(Théorème de divergence). Soit  $D$  un domaine compact à bord dans une variété Riemannienne  $(M, g)$ . Soit  $\omega$  1-forme et  $X$  un champ de vecteurs, définies sur un voisinage inclue dans  $D$ .

Alors

$$\int_D (\operatorname{div} \omega) v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathbf{n}) v^{\partial D} \quad \text{et} \quad \int_D (\operatorname{div} X) v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathbf{n}) v^{\partial D},$$

où  $\partial D$  est le bord de  $D$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$  est le vecteur unitaire normale à  $\partial D$ .

### Corollaire 1

Pour tout  $\omega$  une 1-forme et  $X$  un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine  $D$ , alors

$$\int_D (\operatorname{div} \omega) v^M = 0 \quad \text{et} \quad \int_D (\operatorname{div} X) v^M = 0$$

## 4.1 Formule de Green-Riemann dans le langage des champs de vecteurs

### Identifications

On suppose dans cette section que  $n = 3$ . On fixe les identifications suivantes :

1. on identifie une 0-forme (une fonction) avec elle même.
2. on identifie une 1-forme

$$\omega = a_1(x)dx + a_2(x)dy + a_3(x)dz$$

avec le champ de vecteurs :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ a_3(x) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

3. on identifie une 2-forme :

$$\omega = a_{12}(x)dx \wedge dy + a_{23}(x)dy \wedge dz + a_{31}(x)dz \wedge dx$$

avec le champ de vecteurs :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{12}(x) \\ a_{23}(x) \\ a_{31}(x) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

4. on identifie une 3-forme :

$$\omega = a_{123}(x)dx \wedge dy \wedge dz$$

avec la fonction

$$x \longrightarrow a_{123}(x) \quad (4.3)$$

## Divergence et rotationnel

Sur les champs de vecteurs il existe deux opérations naturelles, la divergence et le rotationnel. Si

$$x \mapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$$

est un champ de vecteurs de classe  $C^1$ , la divergence de  $\vec{v}$  est donnée par :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

qui est une fonction de  $\mathbb{R}^3$ . On utilise aussi souvent la notation naturelle

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \vec{v}$$

où il faut comprendre le symbole  $\nabla$  comme le 'vecteur' d'opérateurs de dérivées partielles :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel de  $\vec{v}$  est donné par :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

qui est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . La notation naturelle correspondante est :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v}$$

ou le symbole  $\wedge$  désigne ici le produit vectoriel des deux vecteurs  $\nabla$  et  $\vec{v}$ .

### 4.1.1 Flux d'un champ de vecteurs :

Soit  $\vec{V} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  un champ de vecteurs. On appelle Flux de  $\vec{V}$  à travers la surface  $\Sigma$  l'intégrale :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N} du dv$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal associé à la paramétrisation et  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$

#### Exemple

27. .

Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z)$  sortant à travers la demi-sphère  $\Sigma$  d'équation  $z \geq 0$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

On paramétrise la demi sphère par

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \\ u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Le vecteur normal sortant se calcule par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \sin^2 v \\ \sin u \sin^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

On obtient pour le flux :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \sin v du dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = 2\pi$$

#### Exemple

28. .

Calculons le flux sortant du champ de vecteur  $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  à travers le tétraédre  $\Sigma$  limité par les plans  $x = 0, y = 0, z = 0$  et  $x + y + z = 1$ . Puisque le tétraédre  $\Sigma$  admet quatre faces  $\Delta_{xy}, \Delta_{xz}, \Delta_{yz}$  et  $\Delta$  ; le flux sortant du champ de vecteurs  $V$  est donc égal à la somme des flux sortants



à travers les quatre faces du tétradière  $\Sigma$  :

$$\int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\Delta_{xy}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta_{xz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta_{yz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

1. Flux sortant à travers les faces  $\Delta_{xy}$ ,  $\Delta_{xz}$  et  $\Delta_{yz}$

Puisque le vecteur normal unitaire sortant de la surface  $\Delta_{xy}$  est égal à  $-\vec{k}$  et comme l'élément infinitésimal de surface de  $\Delta_{xy}$  est donné par  $d\vec{S} = -\vec{k}dxdy$ , on déduit donc que le flux sortant du champ de vecteurs  $V$ , travers  $\Delta_{xy}$  est donné par,

$$\int \int_{\Delta_{xy}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{x+y \leq 1, z=0} -z dxdy = 0$$

parce que sur  $\Delta_{xy}$ ,  $z = 0$

De la même façon, on montre que le flux sortant du champ  $\vec{V}$  à travers les faces  $\Delta_{xz}$  et  $\Delta_{yz}$  sont donnés par :

$$\int \int_{\Delta_{yz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{y+z \leq 1, x=0} -x dxdy = 0$$

$$\int \int_{\Delta_{xz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{x+z \leq 1, y=0} -y dxdy = 0$$

2. Flux à travers la face  $\Delta$  d'équation  $x + y + z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  et  $z \geq 0$ .

En paramétrisant la face  $\Delta$  par  $\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$  on voit que son élément infinitésimal de surface est égal à,

$$d\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dxdy = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})dxdy \implies \vec{V} d\vec{S} = (x + y + z)dxdy = dxdy$$

Ainsi, en conséquence de ci qui précède, on conclut que le flux à travers la face  $\Delta$  du tétraédre  $\Sigma$  est égal à,

$$\int \int_{\Delta} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{x+y \leq 1} (x + y + z)dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} dy \right) dx = \frac{1}{2}$$

3. Le flux total sortant du champ de vecteur  $\vec{V}$  à travers le tétraédre  $\Sigma$  est donc égal à,

$$\int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\Delta_{xy}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta_{xz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta_{yz}} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int \int_{\Delta} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}$$

## 4.2 Formule de Stokes-Ampère

### Théorème 1

.(Stockes-Ampère)

Soit  $\partial S$  le bord orienté de la surface  $\Sigma$  de paramétrisation  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  alors on a la formule dite de Stokes-Ampère :

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma}' dt = \int \int_{\Sigma} (\vec{rot} \vec{V} \cdot \vec{N}) du dv$$

Cette formule dit que la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long du bord orienté d'une surface  $\Sigma$  est égale au flux du rotationnel de  $\vec{V}$  à travers cette surface  $\Sigma$ .

### Exemple

29. Calculons l'intégrale curviligne de la forme différentielle,

$$\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

le long de la courbe fermée  $C$  définie comme l'intersection du plan  $x+y+z=1$  et le cylindre  $x^2+y^2=2x$ . Pour calculer l'intégrale curviligne  $\oint_C \omega$ , nous allons appliquer au champ de vecteurs, et à la surface orientable  $\Sigma$  découpée par le cylindre  $x^2+y^2=2x$  sur le plan  $x+y+z=1$ . Notons bien que le bord  $\partial \Sigma = C$ .

Si on applique la formule de Stokes à ces données on obtient :

$$\begin{aligned} \oint_C \omega &= \oint_C \vec{A} d\vec{r} = \int \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{A}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \int_{\Delta} [(y-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}] [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] dx dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \int_{\Delta} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

où  $\Delta$  désigne la projection de la surface  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ .

**Théorème 2****Formule de Green-Ostrogradsky**

Soit  $K$  un domaine fermé et borné de  $\mathbb{R}^3$  et limité par une surface orientée  $\Sigma$  qui est précisément le bord orienté de  $K$  :  $\partial K = \Sigma$ .

Soit  $\vec{V}$  un champ vectoriel de classe  $C^1$  sur  $K$ . On a la formule dite d'Ostrogradsky :

$$\int \int_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \int \int \int_K \text{Div} \vec{V} dx dy dz$$

Cette formule dit que le flux de  $\vec{V}$  sortant à travers la surface fermée  $\Sigma$  est égal à la l'intégrale de la divergence de  $\vec{V}$  dans le volume délimité par la surface.

**Exemple**

**30.** Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x^3, y^3, z^3)$  sortant à travers la sphère  $\Sigma$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en passant par le calcul d'une intégrale triple.

On calcule d'abord

$$\text{Div} \vec{V} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\int \int \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

sur la boule  $V$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . En passant en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \\ r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \phi &= \int \int \int_V 3r^2 r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ \phi &= \int_0^1 3r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{12}{5} \pi \end{aligned}$$

## 4.3 Théoreme de Ostrogradski-Gauss

### Théorème 1

Soit  $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un ouvert non vide  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $D \subset U$  est un domaine élémentaire dont le bord (frontière)  $\partial D = \Sigma$  est une surface fermée orientable alors le flux sortant du champ de vecteurs  $\vec{V}$  à travers la surface  $\Sigma = \partial V$  est égal à l'intégrale triple de la divergence du champ  $\vec{V}$  au-dessus du domaine  $D$  :

$$\int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V \text{Div}(\vec{V}) dx dy dz$$

### Exemple

**31.** Calculons le flux du champ de vecteurs  $\vec{V} = (z^2 - x)\vec{i} - xy\vec{j} + 3z\vec{k}$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  limitée par les surfaces d'équations cartésiennes :

$$z = 4 - y^2, x = 0, x = 3$$

et

$$z = 0$$

. Pour calculer le flux demandé nous allons appliquer la formule de Gauss-Ostrogradski.

Considérons le sous-ensemble  $H = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq 4 - y^2$  dont le bord est égal à la surface fermée orientable  $\Sigma = \partial V$ , et puis ; appliquons la formule de Gauss-Ostrogradski aux données  $V, \Sigma$  et  $\vec{V}$  :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \int \int \int_V \text{Div}(\vec{V}) dx dy dz \\ &= \int \int \int_V (2 - x) dx dy dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{4-y^2} (2 - x) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^2 (2 - x)(4 - y^2) dy \right) dx \\ &= \left( 6 - \frac{9}{2} \right) \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = 8 \end{aligned}$$

## 4.4 Théorème de Frobenius et applications

### 4.4.1 Formule du gradient

On rappelle que l'élément d'aire le long de la surface  $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est

$$dS = \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$$

où les  $(u, v)$  sont les éléments de  $D$ , c'est à dire les paramètres de la surface. On rappelle aussi que l'élément vectoriel de surface est

$$d\vec{S} = \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} du dv$$

Cet élément permet aux physiciens d'écrire une formule concise du flux

$$\Phi(\vec{E}, r) = \int_r \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

et permet de définir des intégrales vectorielles de la forme  $\int_r f \cdot d\vec{S}$ .

#### Définition 1

Soient  $D$  une partie quarrable de  $\mathbb{R}^2$ ,  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application de classe  $C^1$  et  $f : r(D) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On définit l'intégrale vectorielle surfacique de  $f$  par

$$\int_r f \cdot d\vec{S} = \int_D f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$$

#### Théorème 1

Soient  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  orientée de dimension 3,  $\partial M$  le bord orienté de  $M$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Alors

$$\int_M \text{grad}(f) dV = \int_{\partial M} f \cdot d\vec{S}$$

Comme d'habitude,  $dV = dx dy dz$ .

**Preuve .**

Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$\left( \int_{\partial M} f d\vec{S} \right) \cdot \vec{u} = \int_{\partial M} f \vec{u} d\vec{S} = \int_M \operatorname{div}(f \vec{u}) dV$$

A la première étape on a fait entrer le vecteur dans l'intégrale (le lecteur vérifiera que cela est correct). On fait ainsi apparaître le flux de  $f \vec{u}$ . La deuxième ligne est l'application de la formule d'Ostrogradski. La formule de Leibniz donne ici

$$\operatorname{div}(f \vec{u}) = \operatorname{grad}(f) \vec{u} + f \operatorname{div}(\vec{u}) = \operatorname{grad}(f) \vec{u}$$

d'où

$$\left( \int_{\partial M} f d\vec{S} \right) \cdot \vec{u} = \int_M \operatorname{grad}(f) \vec{u} dV = \left( \int_M \operatorname{grad}(f) dV \right) \vec{u}$$

Le résultat découle alors du fait que cette égalité est vraie pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ . ■

## 4.5 Formule de rotationnel

### Théorème 1

Soient  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  orientée de dimension 3,  $\partial M$  le bord orienté de  $M$  et  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$ . Alors

$$\int_{\partial M} F \wedge d\vec{S} = - \int_M \operatorname{rot} F dV$$

**Preuve .**

C'est la même démarche que pour la formule du gradient. Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$\left( \int_{\partial M} F \wedge d\vec{S} \right) \cdot \vec{u} = \int_{\partial M} (F \wedge d\vec{S}) \cdot \vec{u}$$

or

$$\begin{aligned} (F \wedge d\vec{S}) \cdot \vec{u} &= [F, d\vec{S}, \vec{u}] \\ &= -[F, \vec{u}, d\vec{S}] \\ &= -(F \wedge \vec{u}) d\vec{S} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 (F \wedge d\vec{S}).\vec{u} &= - \int_{\partial M} (F \wedge \vec{u})d\vec{S} \\
 &= - \int_M \text{div}(F \wedge \vec{u})dV \\
 &= - \int_M (\vec{u} \text{rot} F - F \text{rot} \vec{u})dV \\
 &= - \int_M \vec{u} \text{rot} F dV \\
 &= - \left( \int_M \text{rot} F dV \right). \vec{u}
 \end{aligned}$$

■

## 4.6 Formule de Kelvin

### Théorème 1

Soient  $\Sigma$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial\Sigma$  le bord orienté de  $\Sigma$  et  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Alors

$$\int_{\partial\Sigma} f d\vec{l} = - \int_{\Sigma} \text{grad} f \wedge d\vec{S}$$

### Preuve .

La méthode est la même que pour les formules du gradient et du rotationnel. Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\partial\Sigma} f d\vec{l} \right). \vec{u} &= \int_{\partial\Sigma} f \vec{u} d\vec{l} \\
 &= c(f\vec{u}, \partial\Sigma) \\
 &= \int_{\Sigma} \text{rot}(f\vec{u}).d\vec{S} \\
 &= \int_{\Sigma} (\text{grad} f \wedge \vec{u} + f \text{rot}(\vec{u}))d\vec{S} \\
 &= \int_{\Sigma} (\text{grad} f \wedge \vec{u})d\vec{S} \\
 &= - \int_{\Sigma} (\text{grad} f \wedge d\vec{S})\vec{u} \\
 &= - \left( \int_{\Sigma} \text{grad} f \wedge d\vec{S} \right) \vec{u}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat (à la troisième ligne on a utilisé la formule de Stokes, et à la sixième nous sommes passés par le produit mixte  $[gradf, \vec{u}, d\vec{S}]$  ■

## 4.7 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell peuvent être considérées comme les postulats de l'électromagnétisme. Ces équations traduisent le comportement des champs électrique et magnétique. Nous noterons

- $m = (x, y, z)$  un point de l'espace physique identifié à  $\mathbb{R}^3$ ,
- $t$  un instant donné (on suppose qu'un chronomètre a été déclenché à l'instant zéro),
- $\rho(m, t)$  la densité volumique de charge en m à l'instant  $t$ ,
- $j(m, t)$  le vecteur densité de courant en  $m$  à l'instant  $t$ ,
- $E(m, t)$  le champ électrique en  $m$  à l'instant  $t$ ,
- $B(m, t)$  le champ magnétique en  $m$  à l'instant  $t$  (les physiciens utilisent un pseudo-vecteur),
- $\varepsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,
- $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide

Rappelons les relations élémentaires permettant de comprendre à quoi correspondent ces quantités :

1. Force et champ  $E$  :

$$F(m) = qE(m)$$

$F(m)$  est la force due au champ  $E$  s'exerçant sur une particule située en  $m = (x, y, z)$  dont la charge électrique est notée  $q$ .

2. Charge totale : la charge électrique d'un volume  $M$  est égale à

$$Q(M) = \int_M \rho dx dy dz$$

3. Intensité : si  $\Sigma$  est une surfac (penser à la section d'un fil électrique par exemple), l'intensité de



courant  $I$  traversant  $\Sigma$  est égale à

$$I = \int_{\Sigma} j \cdot d\vec{S} = \Phi(j, \Sigma)$$

4. Travail et tension : la tension électrique  $U$  est égale au travail  $W$  de la force électrique sur une particule chargée, divisé par la valeur  $q$  de la charge :

$$U = \frac{W}{q}$$

Les équations de Maxwell sont :

1. Maxwell-Gauss :  $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2. Maxwell-Thomson :  $\operatorname{div} B = 0$
3. Maxwell-Faraday :  $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
4. Maxwell-Ampère :  $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B = j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

#### 4.7.1 Equation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nous allons voir deux conséquences de l'équation de Maxwell-Gauss. Soit  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . On oriente  $\partial M$  grâce à la normale sortante. Alors, d'après la formule d'Ostrogradski, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} E \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial M} \operatorname{div} E dV \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \frac{Q(M)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

##### Théorème 1

. **Théorème de Gauss.** Le flux électrique sortant d'une surface fermée  $\partial M$  est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface divisée par  $\varepsilon_0$ .

On déduit aussi le

**Théorème 2**

. **Loi de Coulomb.** Le champ électrique crée en le point  $m = (x, y, z)$  par une charge ponctuelle  $q$  située à l'origine est

$$E(m) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} e_r$$

où  $r = Om$  et  $e_r = \frac{\vec{Om}}{Om}$

**Preuve .**

La symétrie sphérique implique que  $E$  s'écrit

$$E(m) = f(r)e_r$$

où  $r = r(m) = Om$ . Autrement dit  $E$  est radial et ne dépend que de la distance à  $O$ . Soit  $S$  la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . D'après le théorème de Gauss, le flux sortant à travers  $S$  est

$$\int_S E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Nous savons par ailleurs que  $dS = dSe_r$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_S E \cdot d\vec{S} &= \int_S (f(r)e_r) \cdot (dSe_r) \\ &= \int_S f(r) dS \\ &= f(r) \int_S dS \\ &= f(r) \times 4\pi r^2 \end{aligned}$$

On en déduit le résultat par identification. ■

**4.7.2 Equation de Maxwell-Thomson**

$$\operatorname{div} B = 0$$

La divergence de  $B$  étant nulle, on a forcément  $\Phi(B, \partial M) = 0$ , d'après la formule d'Ostrogradski.

Autrement dit : il y a autant de flux entrant que de flux sortant à travers une surface fermée.

Ainsi, il ne peut pas y avoir de sources ponctuelle pour le champ  $B$ , contrairement au champ électrique.

Ceci exclue l'existence d'un monopôle magnétique. D'ailleurs nous savons tous qu'un aimant ordinaire

possède deux pôles (un nord et un sud) et que le fait de le couper en deux crée deux nouveaux aimants avec deux pôles chacun.

On déduit aussi de cette équation que  $B$  dérive d'un champ de vecteurs :

$$B = \text{rot} A$$

Nous savons que  $A$  n'est pas unique et que tout potentiel vectoriel de  $B$  s'écrit  $A + \text{grad} f$ , où  $f$  est une fonction de classe  $C^2$ .

### 4.7.3 Equation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Si on remplace  $B$  par  $\text{rot} A$ , cette équation s'écrit

$$\text{rot} E = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} A$$

et puisque les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\text{rot}$  commutent (le lecteur devra le vérifier), cela équivaut à

$$\text{rot} \left( E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

d'où l'on déduit l'existence d'un potentiel scalaire  $V$  tel que

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad} V$$

#### Proposition 1

. Expression de  $E$ . Si  $A$  est un potentiel vectoriel du champ magnétique, alors il existe un potentiel scalaire  $V$  tel que

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad} V$$

Cette formule montre que la variation du champ magnétique crée du champ électrique.

**Proposition 2**

. Si on remplace  $A$  par  $A + \text{grad}f$ , il faut remplacer  $V$  par  $V + \frac{\partial f}{\partial t}$  dans la proposition (3.4.1)

**Preuve .** Posons

$$A' = A + \text{grad}f$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday on a

$$\text{rot}(E + \frac{\partial A'}{\partial t}) = 0$$

c'est à dire

$$\text{rot}(E + \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}(\frac{\partial f}{\partial t})) = 0$$

d'où l'existence d'un potentiel scalaire  $W$  tel que

$$\text{grad}W = E + \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}(\frac{\partial f}{\partial t})$$

c'est à dire

$$\text{grad}W = \text{grad}V + \text{grad}(\frac{\partial f}{\partial t})$$

d'où

$$W = V + \frac{\partial f}{\partial t} + \text{constante}$$

■ Lorsque l'on change de potentiel  $A$ , on dit que i'on change de jauge :

$$\begin{aligned} A &\rightsquigarrow A + \text{grad}f \\ V &\rightsquigarrow V + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Il existe une théorie de jauge. Les physiciens choisissent souvent le potentiel  $A$  vérifiant la condition

$$\text{div}A = 0$$

Cette équation est appelée contrainte de jauge de Coulomb.

**Proposition 3**

. Effectuer le changement de jauge de Coulomb équivaut à chercher  $f$  telle que

$$\Delta f = -\operatorname{div} A$$

Cette équation s'appelle : « équation de Poisson du potentiel vecteur ».

**Preuve .**

On suppose que  $A$  est un potentiel vectoriel de  $B$ . On cherche à remplacer  $A$  par  $A' = A + \operatorname{grad} f$  vérifiant la contrainte de Coulomb, à savoir  $\operatorname{div} A' = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A' &= \operatorname{div}(A + \operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div} A + \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div} A + \Delta f \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Nous savons que toute particule de charge  $q$  placée dans un champ électrique  $E$  est soumise à la force

$$F(m) = qE(m)$$

où  $m = (x, y, z)$  est la position. Le travail de cette force le long d'un chemin  $\alpha$  est

$$\begin{aligned} W &= \int_{\alpha} F \cdot d\vec{l} \\ &= q \int_{\alpha} E \cdot d\vec{l} \\ &= q \int_{\Sigma} \operatorname{rot} E \cdot d\vec{l} \\ &= -q \int_{\Sigma} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{l} \\ &= -q \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \cdot d\vec{l} = q \frac{d\Phi(B, \Sigma)}{dt} \end{aligned}$$

où  $\Sigma$  est une surface bordée par  $\alpha$  et  $\Phi(B, \Sigma)$  est le flux de  $B$  à travers cette surface. Or nous savons que

$$W = qU$$

si  $U$  désigne la différence de potentiel. Ainsi la variation de  $B$  dans le temps équivaut à une différence de potentiel égale à  $-\frac{d\Phi(B, \Sigma)}{dt}$ , ou si l'on préfère :

### Théorème 3

**Loi de Faraday.** La variation du champ magnétique engendre la force électromotrice

$$U = -\frac{d\Phi(B, \Sigma)}{dt}$$

Cette loi explique que la rotation d'une dynamo engendre un courant électrique.

#### 4.7.4 Equation de Maxwell-Ampère

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} B = j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Cette équation permet de trouver une expression de la circulation de  $B$  le long du bord  $\partial\Sigma$  d'une surface  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} B \cdot d\vec{l} &= \int_{\Sigma} \text{rot} B \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\Sigma} \left( \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \int_{\Sigma} j \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\Sigma} \frac{\partial E}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(E, \Sigma)}{dt} \end{aligned}$$

- [1] **Boothoby, W.**, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975.
- [2] **DoCarmo, M.P.**, Riemannian Geometry, Birkhauser, 1993.
- [3] **Helgason, S.**, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York(1978).
- [4] **Hicks, N.**, Notes on Differential geometry.
- [5] **Kobayashi, S.** and **Nomizu, K.**, Foundations of differential geometry, Tracts in Mathematics, 15, vol. I+II, Interscience, 1963 and 1969.
- [6] **Matsushima, Y.**, Differentiable manifolds, Marcel Dekker, Inc. New York 1972.
- [7] **Millman, S., Parker, D.**, Elements of differential geometry.

Béchar 2020-2021