Cours Master1:Espace tangent et Cotangent

Dr. El hendi Hichem

Université Tahri Mohammed Bechar

Sommaire

Espace tangante

Dans une variété : Considérons maintenant une variété différentielle M et un point p de M. On s'intéresse aux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par p

$$c :]-\epsilon,\epsilon[\to M \quad , \qquad c(0)=p$$

$$t \to c(t)$$

Définition

Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes au point p si $c_1(0)=c_2(0)=p$ et s'il existe une carte locale (U,φ) telle que $p \in U$ et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0)$$

Définition

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de p, on a :

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)](0)$$

$$= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0)$$

$$= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0)$$

On définit ainsi une relation d'équivalence (c'est-à-dire une relation qui est transitive, symétrique et réflexive) sur l'ensemble des courbes passant par p :$c_1 \sim c_2$ si elles sont tangentes en p .

Définition

Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p. L'espace tangent à M en p, noté T_pM ,est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$ il est clair que deux courbes c_1, c_2 sont tangentes au point x des que

$$\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$$

Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes $T_x\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des directions $\dot{c}(0)$. Ce qui est propre à $\mathbb{R}^n$ c'est que cet isomorphisme ne dépend pas du point$x$.

On peut montrer que T_pM est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparait cependant pas clairement. De plus la définition de T_pM fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par p , qui n'est pas aisé à manipuler.

Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition équivalente des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.

Définition

Dérivation :

Une dérivation en p est une application linéaire

$$D_p : \mathbb{C}_p^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz . Autrement dit , D_p est une dérivation si pour touts réel α et β et toute fonction $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ dans $\mathbb{C}_p^{\infty}(M)$ on a :

- $D_p(\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}) = \alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$ (linéarité)
- $D_p(\tilde{f}.\tilde{g} = g(x)D_p(\tilde{f}) + f(x)D_p\tilde{g}$ Leibniz

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les classes d'équivalence de f et g

Définition

L'espace tangent en p à M , T_pM est l'espace vectoriel des dérivation sur $\mathbb{C}_p^\infty(M)$

Définition

Puisqu'on a un espace vectoriel il est utile d'un trouver une base.

soient $(x^1, ..., x^n)$ des coordonnées au voisinage de p. Une base de T_pM est donnée par les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i(p)}$, pour $1 \leq i \leq n$ dont les courbes associées sont les γ_i définies par

$$\begin{cases} x^j\gamma_i(t) = 0 \quad pour \qquad j \neq i \\ x^j\gamma_i(t) = t \end{cases}$$

Définition

En particulier la dimension de T_pM en tant qu'espace vectoriel est la dimension de$M$ en tant que variété. Donc tout vecteur $X_p \in T_pM$ s'écrit $X_p = X_i(p)\frac{\partial}{\partial X^i(p)}$ où les $X^i(p)$ sont des réels .

Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(p)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $(X^1(p), ..., X^n(p))$et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe γ définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = p$ alors on a :

$$X^i(p) = (\frac{\gamma^i(t)}{dt}_{|} t = 0$$

On utilise cette relation qu'on écrit $\gamma(0) = X(p)$.

On considère l'effet d'un changement de coordonnées sur les n nombres $X^i(p)$ si on passe les coordonnées (x^i) aux coordonnées $(y^j(x^i))$ alors si :

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

On a

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^j}(p)X^i(p)$$

Proposition

L'espace Tangent T_pM est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p i = 1, ..., n\}$ forme une base de T_pM en coordonnées locales .

Exemple

Soit $\gamma : I \to S^n$ une courbe sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. La courbe satisfait à $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$, alors :

$$\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

donc $\langle p, X \rangle = 0$, c'est-à dire tout vecteur tangent $X \in T_pS^n$ est orthogonal à p . D'autre part , si $X \neq 0$ tel que $\langle p, x \rangle = 0$, alors $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ avec

$$\gamma : t \to \cos(t|X|).p + \sin(t|X|).\frac{X}{|X|}$$

est une courbe sur S^n avec $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = x$. Par conséquent :

$$T_pS^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle p, x \rangle = 0\}$$

Définition

Une forme (ou covecteur) en $p \in M$ est une forme linéaire sur T_pM , c'est-à-dire une application linéaire :

$$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

$$X_p \mapsto \omega_p(X_p)$$

On note $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$ le crochet étant ici le crochet de dualité.

Définition

L'espace cotangent à M en p , noté T_p^*M est l'espace vectoriel des formes en p. C'est l'espace vectoriel dual de T_pM (C'est-à-dire $T_p^*M = (T_pM)^*$)

Exemple

Soit $g : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M. Alors, en identifiant $T_t\mathbb{R}$ avec R, la différentielle de g en$p$, $dgp : T_pM \to \mathbb{R}$, peut etre vue comme une 1-forme.

Cet exemple justifie les notations ci-dessous en coordonnées. Rappelons d'abord que, si $e_1, ..., e_n$ est la base d'un espace vectoriel V , il existe une unique base duale $e_1^*, ..., e_n^*$ du dual V^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Considérons maintenant des coordonnées locales $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ en p et $dx_p^i : T_pM \to \mathbb{R}$ la différentielle de la i-ème coordonnées (on identifie de nouveau $T_t\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}$). Par définition $dx_p^i(X_p) = X_p.x^i$. En particulier, pour tout couple i, j :

$$\langle dx_p^i, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle = dx_p^i(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = \delta_{ij}$$

Ainsi $dx_p^1, ..., dx_p^n$ est une base de T_p^*M duale de la base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ de T_pM .

Définition

Une base de l'espace cotangent :

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale $(U, \phi), \{\frac{\partial}{x^i}(p)\}$ est une base de T_pM pour tout $p \in U$. On note $\{dx^i_{|}p\}$ sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les x^i sont$n$ fonctions définies localement sur M et puisqu'on a par définition même de la différentielle

$$\langle dx^i_{|}p, \frac{\partial}{x^i}(p)\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta^j_i$$

Alors dans cette base ,

$$df_{|}p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i_{|}p$$

Soit ϕ une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point p d'une variété M à valeurs dans une variété N .

Définition

On définit une unique application linéaire, appelée application tangente à ϕ et notée $T_p\phi$ définie de T_pM à valeurs dans $T_{\phi(p)}N$, vérifiant

$$d_\phi(p)f \circ T_p\phi = d_p(f \circ \phi)$$

pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^\infty(N)$

De même, on définit une unique application linéaire, appelée application cotangente à ϕ et notée $T_p^*\phi$ définie de $T_\phi^*(p)N$ à valeurs dans T_p^*M , vérifiant :

$$T_p^*\phi(d_{\phi(p)}\phi = dp(f \circ \phi)$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

Proposition

Soient ϕ etψ deux applications différentiables.

i) On a $T_p(\phi \circ \psi) = T_{\psi(p)}\phi T_p\psi$

ii) Si c est une courbe, alors $T_{c(t_0)}\phi(c(t_0)) = (\phi \circ c)(t_0)$

iii) Soit $X = (x^1, ..., x^n)$ des coordonnées locales au voisinage de p. Soit $Y = (y^1, ..., y^p)$ sont des coordonnées locales au voisinage de $\phi(p)$. posons $\phi_j = y_j(\phi)$ Alors les coefficients de la matrice de $T_p\phi$ dans les bases associées aux coordonnées sont $\frac{\partial \phi_j}{\partial_x}$.

Définition

L'ensemble $\{TM = (p, X_p), p \in M, X_p \in T_pM\}$ est appelé le fibré tangent de la variété M .

de même l'ensemble $\{T^*M = (p, \omega_p), p \in M, \omega_p \in T_p^*M\}$ est appelé le fibré cotangent de M .

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents :

$$TM = \cup_{p \in M} p \times T_pM \quad ou \quad simplement \quad \cup_{p \in M} pT_pM$$

mais il faut bien préciser que cette union est disjointe : on ne peut pas additionner des éléments X_p et Y_{p_0} appartenant à des espaces tangents différents.

On appelle projection canonique sur TM la projection :

$$\pi : \quad TM \to M \qquad (p, X_p) \mapsto p$$

et la fibre au-dessus de p la pré-image $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ d'un point p

Référence

- **F.Lamourie**. *Géométrie différentielle*, 25 Septembre 2013.
- **F.JEAN**.*Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*,2011/2012.
- **M. BERGER, B. GOSTIAUX**.*Géométrie différentielle:Deuxième édition*,Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- **H. Cartan**.*Calcul différentiel Hermann*, 1967.
- **S. Gudmundsson** . *An introduction to Riemannian geometry*, Lund University ,2000.