Cours Master1:Variétés différentiables

Dr. El hendi Hichem

Université Tahri Mohammed Bechar

Sommaire

Variétés différentiables

Définition

M est une variété topologique si:

1) M est un espace topologique séparé .

2) Pour tout $p \in M$ il existe un ouvert U de M contenant p, est un homéomorphisme.

$$\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

où W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Nous dirons que n est la dimension de M. Le couple (U, ϕ) est une carte locale.

Définition

Un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue .

On dit que $f : M \to N$ est un difféomorphisme de classe $\mathbb{C}^\infty$ si f et f^{-1} sont de classe $\mathbb{C}^\infty$.

Une carte de dimension n sur V est un couple (U, ϕ) formé de

1. un ouvert $U \subseteq V$.
2. un homéomorphisme $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq R^n$.

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U, \phi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p)) \in R^n$: ϕ est ce que l'on appelle une fonction coordonnées. Un point de V peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, ϕ) et (w, Ψ).

variété différentiable

Définition

Deux cartes (U_i, φ_i),(U_j, φ_j) sont dit compatibles si l'une des deux conditions suivantes est vérifie:

1. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
2. l'application de changement de cartes

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

Définition

Un **atlas** $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de M est une famille de cartes telle que

1. $M = \bigcup_{i\in I} U_i$.
2. Toutes les cartes ont même dimension n.
3. Toutes les cartes sont compatible entre eux.

Une structure différentiable de dimension n sur V est une classe d'équivalence d'atlas de dimension n de V .

Exemples

L'espace $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}^n, id)$ **L'espace $\mathbb{R}$:**

Tout espace vectoriel E de dimension finie $(dim(E) \leq \infty)$ est une variété différentiable .

$\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un atlas (E, ψ).De même tout ouvert $U \leq E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, ψ) .

Exemples

Les projection stéréographiques:

La sphére standard $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble

$$\mathbb{S}^n = \{U \in \mathbb{R}^{n+1} / \|U\| = 1\}$$

En tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$, elle est muni de la topologie induit par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$: c'est la topologie dont les ouverts sont de la forme $U = \Omega \bigcap \mathbb{S}^n$, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$.On obtenir un atlas différentiable, nous considérons les projections stéréographiques

$$\varphi_N : U_N = \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_S : U_S = \mathbb{S}^n \backslash \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de centre $N = (0, ...0, 1)$ et $S(0, ..., 0, -1)$ respectivement. Ces projections sont illustrées la figure suivante où l'espace $\mathbb{R}^n$ est identifier avec l'ensemble $\{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash x_{n+1} = 0\}$.Les equations pour $x = \varphi_N(u)$ et $y = (\varphi_S(u)$ sont (1)

$$x_i = \frac{u_i}{1 - u_{n-1}}, y_i = \frac{u_i}{1 + u_{n+1}}, i = 1, ..., n$$

.

Exemples

Les application de changement de cartes sont données par

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{1}{\|x\|^2}x, \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2}y, x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

l'atlas A formé par les deux cartes (φ_N, U_N) et (φ_S, U_S) est donc différentiable.

Exemples

Variété produit $M \times N$:

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n et d'atlas $(U_a, \phi_(a)$,(V_b, ψ_b) respectivement. Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $m+n$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $U_a \times V_b, \phi_a \psi_b$,ou $(\phi_a \times \psi_b)(p,q) = (\phi_a(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Variétés différentiables

Définition

Une application $f : X \to Y$ entre deux variétés est différentiable si pour tout x dans X il existe des cartes $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ autour de x et $f(x)$ respectivement telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable . On dit que :

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \in \mathbb{R}^n \to \psi(V) \in \mathbb{R}^p$$

est l'application lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ).

Propriétés

- Toute application différentiable est continue.

  (Car sur tout ouvert de carte U on a $F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$).

- Soit $\bigcup_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M. Alors f est différentiable si et seulement si chaque restriction $F|U_i$, $i \in U_i$, l'est

- La composition d'applications différentiables est différentiable. En effet, soient $f : M \longrightarrow M^{'}$, $G : M^{'} \longrightarrow M^{''}$,et $G \circ f : M \longrightarrow M^{''}$.

  Alors, dans des cartes de $M, M^{'}$ et$M^{''}$,

  $\varphi^{''} \circ (G \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\varphi^{''} \circ G \circ \varphi^{'-1}) \circ (\varphi^{'} \circ f \circ \varphi^{-1})$

Référence

- **F.Lamourie**. *Géométrie différentielle*, 25 Septembre 2013.
- **F.JEAN**.*Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*,2011/2012.
- **M. BERGER, B. GOSTIAUX**.*Géométrie différentielle:Deuxième édition*,Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- **H. Cartan**.*Calcul différentiel Hermann*, 1967.
- **S. Gudmundsson** . *An introduction to Riemannian geometry*, Lund University ,2000.