الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طاهري محمد بشار

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوع موجه لطلبة السنة الأولى (LMD) جذع مشترك

بعنوان:

الإحصاء -1-: دروس وتمارين

من إعداد الأستاذ:

بودية بشـــير

السنة الجامعية: 2020 – 2021

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الواحد الأحد السيد الصمد

وأصلي وأسلم على نبينا محمد بن عبد الله ﷺ

وعلى آله وصحبه ومن سار على دربه واتبع هداه أما بعد:

أضع بين يدي طلبة السنة الأولى جذع مشترك نظام (LMD)

في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، مطبوع

" الإحصاء -1- : دروس وتمارين "

بحيث تم إعداده وفق البرنامج الوزاري، لغرض تمكين الطلبة من الإلمام بدروس مقياس الإحصاء -1-المبرمج خلال السداسي الثاني، ويكون معين لهم في تذليل الصعوبات التي يواجهونها في فهم واستيعاب المقياس.

الأستاذ: بودية بشير

فهــرس المحتــويات

مقدمــة

يعتبر علم لإحصاء من العلوم الشائعة الاستخدام في جميع المجالات. فهو أداة للتعبير الكمي عن مختلف الظواهر الاقتصادية والاجتماعية. يستعمل في جمع ومعالجة وتحليل البيانات والوصول إلى نتائج تعتمد الموضوعية وتتسم بالمصداقية، تساعد على اتخاذ القرارات المناسبة.

تتضمن هذه المطبوعة محاضرات في الإحصاء الوصفي، مقدمة لطلبة السنة الأولى جدع مشترك العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، الهدف منها إكساب الطالب المهارات اللازمة التي تمكنه من استخدام المؤشرات والأساليب الإحصائية في تحليل البيانات الخاصة بالظواهر قيد الدراسة.

سعيا إلى تقديم ما هو مقرر دراسته في مقياس الإحصاء -**1**-تم تقسيم محتوى هذه المطبوعة إلى خمسة فصول، يتضمن الفصل الأول مفاهيم حول الإحصاء، والفصل الثاني عرض البيانات الإحصائية، والفصل الثالث مقاييس النزعة المركزية، ثم الفصل الرابع مقاييس التشتت، أما الفصل الخامس مقاييس الشكل.

أولا: نبذة تاريخية عن تطور علم الإحصاء

يعتبر الإحصاء من العلوم التي صاحبت الإنسان في تطوره وإدارة شؤونه. وكانت فكرة الإحصاء قديما، تقوم على فكرة التعداد فقط، لمعرفة عدد سكان وتكاثرهم وأحوالهم الشخصية ومقدار ثرواتهم الزراعية والمعدنية، لتقدير حاجاتهم في حالتي السلم والحرب، وتدل الأثار التي وجدت على استخدام الإحصاء من قبل عدد من الحضارات القديمة كالحضارة الصينية والهندية واليابانية واليونانية والرومانية وغيرها. حيث استخدم الحكام والأمراء الإحصاء كوسيلة للرقابة، وأداة لإدارة المملكة أو المدينة أو المقاطعة، واستخدموا في ذلك تعداد السكان وجرد السلع والموارد المختلفة.

في العهد الإسلامي كان الخليفة عثمان (رضي الله عنه) أول من أمر بالتدوين لإحصاء المستفيدين من عطايا بيت المال، أما في أوربا فنجد أن أول الآثار عن عمليات التعداد ترجع إلى 1086فقط وبالتحديد في بريطانيا. أما في فرنسا فإن عمليات التعداد ترجع إلى القرن 14الذي شهد ميلاد أول تسجيلات عقود الحالة المدنية وإجبارية تسجيل عقود الازدياد في عهد فرنسوا الأول.

ومع ظهور نظرية الاحتمالات بداية القرن السابع عشر التي ساهمت بشكل كبير في تطور علم الإحصاء، حيث وضعت أسسها من قبل عالم الرياضيات والفيزياء باسكال B،Pascal (1662 1623) والفيلسوف الفرنسي فرمات. Fermat (1608 – 1665) [1]

قد ظهرت كلمه إحصاء (statistics) لأول مره عام 1749وهى مشتقه من الكلمة اللاتينية (status)، أو لإيطالية (statista) وتعني كلاهما الدولة السياسية.[2] ومن الطبيعي أن تكون الدولة أول من اهتم بجمع البيانات وذلك لإدارة شؤون البلاد خاصة عن السكان لأغراض حربية وضريبية، وتطور علم الإحصاء من مجرد فكره الحصر والعد إلى أن أصبح علما له قواعده ونظرياته ويرجع المجهود في ذلك إلى كثير من العلماء من أمثال برنوليBernoulli ، ولابلاس Laplace، وفردريك جاوس F.Gauss ، وكيتليه Quetlet ، وجولتون Galton.F، كارل بيرسون Karl Pearson، وبوليA.bowley ، ويول U.Yule، وفيشر fisher وغيرهم.[3]

وقد أصبح الإحصاء في الوقت الحاضر يعالج بشكل رئيسي النواحي الكمية للظواهر الاقتصادية والاجتماعية والسكانية وغير ذلك باستخدام الطرائق لأدوات الإحصائية المناسبة، حيث أن التقدم

---

[1] زياد رشاد الراوي، تطور علم الإحصاء بين النظرية والتطبيق، قسم الإحصاء، جامعة اليرموك، الأردن، المؤتمر الإحصائي العربي الأول 2007، ص 05-06

[2] موسى محمد أماني، التحليل الإحصائي للبيانات، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث، جامعة القاهرة، 2007، ص05

[3] زياد رشاد الراوي، مرجع سبق ذكره، ص 06-07

التقني وفر الآلات البسيطة والمعقدة التي أدى استخدامها إلى توفير الوقت والجهد في استخلاص النتائج الحسابية.

ثانيا: تعريف علم الإحصاء

1- التعريف اللغوي:

من الناحية اللغوية تعني كلمة إحصاء عملية العد أو الحصر للأشياء فهي مشتقة من كلمة يحصي، وهو في اللغة العد الشامل، ومن القران الكريم: قول الله عز وجل " ليعلم أن قد ابلغوا رسالات ربهم وأحاط بما لديهم واحصى كل شيء عددا"[4].

2- التعريف الاصطلاحي:

يعرف الإحصاء على انه العلم الذي يهتم بجمع وتنظيم وتلخيص وعرض البيانات العددية أو الرقمية، ثم تحليل النتائج واتخاذ القرارات المبررة والمناسبة، أي هو الطريقة التي تهدف إلى التجميع المنهجي والأعداد العلمي، للوقائع التي يمكن تقييمها عدديا.

وقد وردت عدة تعريفات الإحصاء نذكر منها ما يلي:

الإحصاء هو "العلم الذي يوفر لنا جملة من المبادئ والقوانين والطرق العلمية المختلفة لجمع البيانات وتبويبها وتلخيصها وعرضها وتحليلها ثم استخلاص الاستنتاجات وتعميمات والتوصل إلى أحسن القرارات لحل المشاكل المختلفة على أساس من التحليل العلمي للبيانات المتاحة".[5]

الإحصاء هو العلم "الذي يبحث في الأساليب والطرق العلمية المناسبة لجمع البيانات، وتبويبها وتنظيمها وتحليلها وتفسيرها بهدف الوصول إلى النتائج اللازمة لزيادة المعرفة أو اتخاذ القرارات المناسبة وتعميمها".[6]

الإحصاء هو العلم " الذي يدرس مختلف طرق ووسائل جمع البيانات الكمية عن مختلف الظواهر الاقتصادية والاجتماعية وغيرها، وترتيب هذه البيانات وتبويبها وتحليلها وتفسيرها وتقديمها بأشكال وصور ملائمة بهدف تسهيل اتخاذ القرار على أساس سليم ".[7]

ويجب التفريق بين كلمة الإحصاء بالمفرد والإحصائيات بالجمع والتي تعني بانها مجموع المعلومات العددية أو الرقمية التي تجمعها الهيئات المتخصصة حول موضوع معين مثل: البيانات المتعلقة

[4] سورة الجن الآية 28

[5] مروان عبد المجيد، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، دار الفكر، عمان. الأردن ،2000، ص30

[6] إبراهيم مراد الدعمة ومازن حسن الباشا، أساسيات في علم الإحصاء مع تطبيقات SPSS، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى، 2013، ص 16.

[7] محمد راتول، الإحصاء الوصفي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر الطبعة الثانية، 2006، ص 07.

بتعداد السكان (العدد الإجمالي للسكان، توزيع السكان حسب العمر أو الجنس، التوزيع الجغرافي للسكان حسب الولايات)، الإحصائيات الاقتصادية التي تعبر عن المعلومات العددية التي تتعلق بالأسعار، الأجور، الإنتاج، وغيرها، وهي تعد المادة الأولية التي تستخدم في علم الإحصاء.

ثالثا: فروع علم الإحصاء

إن مجالات استخدام الإحصاء واسعة جدا حيث يستخدم في جميع العلوم الاجتماعية والطبيعية وقد تم تقسيم ميدان علم الإحصاء إلى فرعين رئيسين هما:

1- الإحصاء الوصفي:

هو الذي يهتم بجمع وتنظيم وتلخيص وعرض البيانات للظاهرة المدروسة من أجل تبسيط فهمها، من خلال الجداول التكرارية، والرسوم البيانية، وحساب المقاييس الإحصائية المختلفة لها مثل النزعة المركزية، والتشتت، ومقاييس الشكل.

2- الإحصاء الاستدلالي:

يعتمد الإحصاء الاستدلالي على فكرة اختيار جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم إختيارها بطريقة علمية مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة[8]، فنقول لقد استدللنا على خواص المجتمع على أساس خواص العينة، وهذا عكس الاستنباط الذي يعني استخراج خواص الجزء انطلاقا من خواص الكل، ومن تطبيقاته التقدير والاختبارات والتنبؤ.

رابعا: المصطلحات الأساسية في الإحصاء

1- المجتمع الإحصائي

هو المجموعة التي تقوم عليها الدراسة الإحصائية، والتي تشترك فيما بينها في الصفة المراد دراستها مثل: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الأسر، مجتمع من المؤسسات.

وينقسم إلى قسمين:

- مجتمع محدود: هو المجتمع الذي يكون عدد عناصره محدودة (منته) مثل: عدد وحدات المصنعة في اليوم، عدد طلبة في المدرج .... الخ
- مجتمع غير محدود: هو المجتمع الذي يكون عدد عناصره غير محدودة (غير منته) مثل عدد النجوم في السماء، عدد حبات الرمل، عدد الفيروسات في حقل ما ...الخ

[8] خليل شرف الدين، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، ص 08

2- الوحدة الإحصائية:

هي كل عنصر من المجتمع الإحصائي، وهي التي تجرى عليها الدراسة الإحصائية، ويشترط في الوحدة أن تكون خاضعة لتعريف دقيق وواضح.

3- العينة الإحصائية:

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة، تمثل المجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويختلف حجمها حسب أهمية الدارسة والإمكانيات البشرية والمادية المتاحة. والاعتماد عليها نتيجة استحالة جمع المعلومات عن كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس.

ويمكن تقسيم العينات وفقا لأسلوب اختيارها إلى نوعين هما:

3-1 العينات الاحتمالية: هي العينات التي يتم اختيار مفرداتها وفقا لقواعد الاحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم اختيار مفردتها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية، بهدف تجنب التحيز الناتج عن اختيار المفردات، ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية، ما يلي:

أ- العينة العشوائية البسيطة: هي العينة التي تسحب من المجتمع بحيث يكون لكل فرد من أفراد المجتمع فرصة متساوية لأن يكون ضمن العينة المختارة، ويكون هذا النوع من العينات مفيد ومؤثر في حالة وجود تجانس وصفات مشتركة بين جميع أفراد المجتمع الأصلي المعني بالدراسة.[9]

ب- العينة العشوائية الطبقية: تخص المجتمعات غير المتجانسة أي المجتمعات المكونة من عدة فئات اجتماعية وهذا بناء على عدة اعتبارات منها: المستوى التعليمي، مستوى الدخل، مستوى الإنفاق. وفي هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع إلى فئات متجانسة حيث تحدد نسبة كل فئة بالنسبة للمجتمع، ليصبح حجم كل منها $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \ldots \ldots \mathrm{N}_i$ على التوالي حيث i هي عدد الفئات التي يتكون منها المجتمع. ولأجل سحب عينة طبقية نتبع الخطوات التالية :[10]

- نحدد نسبة كل فئة بالنسبة للمجتمع N_i/N .
- -نحدد حجم العينة التي نريد سحبها n
- -نحدد عدد الوحدات الإحصائية التي يجب سحبها من كل فئة n_i حسب النسب المحددة في الخطوة الأولى حيث: $n_i = n * N_i/N$

---

[9] - مصطفى يوسف كافي وآخرون ، الإحصاء في الإدارة والاقتصاد"، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى ، 2012ص.34

[10] جيلالي جلاطو، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، الطبعة الثامنة، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر، 2002، ص 10.

- -نقوم بسحب n_i من N_i بالطريقة العشوائية باستعمال جدول الأرقام العشوائية، وبعد الانتهاء من العملية يتم ضم كل الوحدات الإحصائية المسحوبة إلى بعضها البعض لتكون عينة عشوائية طبقية

ج- **العينة العشوائية المنتظمة**: تستخدم العينة العشوائية المنتظمة لاختيار عينة من مجتمع عدد عناصره محدود أو معلوم، ففي هذه الحالة يتم تحديد الزيادة المنتظمة (المجموعة)التي ستعتمد لاختيار أفراد العينة، ونبدأ باختيار رقم عشوائي من المجموعة الأولى، ثم نضيف للرقم الذي تم اختياره حجم الزيادة المنتظمة التي تم اعتمادها.[11] فمثلا إذا تم اختيار عينة حجمها 250 من مجتمع حجمه 7500 بطريقة العينة العشوائية المنتظمة، فانه يتم أولا معرفة الزيادة المنتظمة بتقسيم حجم المجتمع على حجم العينة: 250/7500 =30.

نختار الرقم الأول عشوائيا من بين (1...9) مثلا: الرقم 7 ثم نضيف إليه حجم الزيادة المنتظمة 30 في كل مرة حتى نحصل على 250 رقم، فتكون الأرقام المختارة هي (7، 37، 67، 97، ....)

د- **العينة العشوائية العنقودية**: وهي عينة تؤخذ للضرورة أكثر منها للاختيار، حيث يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة يسمى كل منها عنقودا، ويتم سحب عينة عشوائية بسيطة من بين تلك العناقيد، أي لا يتم الاختيار من كل عنقود عناصر بل يتم اختيار عينة تتكون من عنقود أو أكثر فمثلا عند بحث ميزانية الأسرة، يقسم كل حي إلى مجموعة من العمارات السكنية فتصبح لدينا قائمة من العمارات تغطي المدينة، وتعتبر هذه المجموعات هي عناصر المجتمع الإحصائي حيث تؤلف كل وحدة منها عنقودا ، ثم نقوم عشوائيا باختيار تلك المجموعة من العمارات التي تجري عليها الدراسة.[12]

2-3 **العينات غير الاحتمالية**: يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير عشوائية، حيث يقوم الباحث باختيار مفردات العينة بالصورة التي تحقق الهدف من المعاينة، فهي لا تخضع لقوانين موضوعية، وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة.[13]

أ- **العينة العرضية**: يعتمد في اختيارها على المصادفة المحضة، وتمتاز هذه الطريقة بتوفير الوقت والتكاليف، كما يمكن من خلالها الحصول على معلومات موثوقة إذا كان المجتمع المستهدف

[11] عدنان حسين الجادري، الإحصاء الوصفي في العلوم التربوية، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2003، ص 33

[12] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال، زمزم ناشرون وموزعون، الأردن، الطبعة الأولى ،2010ص. 55

[13] عزام صبري، الحصاء الوصفي ونظام SPSS، الطبعة الأولى، جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006، ص 24

بالدراسة على جانب كبير من التجانس، أما إذا كانت عناصر المجتمع غير متجانسة فذلك قد يؤدي إلى التحيز في اختيار العناصر المشكلة للعينة .

ب- **العينة الحصصية:** تقسيم مجتمع الدراسة إلى طبقات استنادا إلى معايير تقسيم معينة تتعلق بطبيعة الدراسة ثم يتم اختيار عدد من المفردات من كل طبقة بشكل شخصي (غير عشوائي) بحيث أن عدد مفردات هذه العينات تشكل حجم العينة المطلوبة لتلك الدراسة. فلو كنا بصدد استطلاع راي الجمهور ببرامج التلفزيون فانه يمكن تقسيم مجتمع الدراسة إلى ذكور وإناث ثم يتم اختيار عينة من الذكور وأخرى من الإناث تتناسب كل منهما مع عدد الذكور وعدد الإناث في مجتمع المدروس ومجموع مفردات هاتين العينتين تكون حجم العينة المطلوب.

خامسا: المتغير الإحصائي

1- تعريف المتغير الإحصائي:

هو الخاصة أو الصفة (الكمية أو النوعية) المشتركة لكل الوحدات الإحصائية التي تشكل المجتمع الإحصائي، مثل: الطول، السن، اللون، المستوى التعليمي، الإنتاج، .... إلخ.

2- أنواع المتغيرات الإحصائية:

تنقسم المتغيرات الإحصائية إلى قسمين[14]:

2-1 متغيرات كيفية (نوعية): هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها كميا، إنما تأخذ أوصافا، وتنقسم المتغيرات النوعية إلى قسمين:

أ- **متغيرات كيفية قابلة للترتيب**: وهي تصنف البيانات من حيث الأهمية أو الدرجة، بحيث القيم التي يأخذها المتغير تتبع ترتيب وتسلسل منطقي معد مسبقا أو متفق عليه. مثل المستوى التعليمي (ابتدائي، متوسط، ثانوي، جامعي)، المناصب الإدارية (مدير، نائب مدير ....) .

ب- **متغيرات كيفية غير قابلة للترتيب**: والتي تعرف أحيانا بالمتغيرات الاسمية، حيث تصنف البيانات بدون ترتيب منطقي. مثل الحالة المدنية (أعزب، متزوج، مطلق، أرمل)، الجنس (ذكور، إناث)، اللون (أسود، أبيض،....).

2-2 متغيرات كمية: هي تلك المتغيرات التي يمكن قياسها، وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء هي لغة الأرقام، والمتغيرات الكمية تنقسم بدورها إلى قسمين:

[14] جيلالي جلاطو، مرجع سبق ذكره، ص 6-7

أ- **متغيرات كمية متقطعة**: هي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة لا يمكن تجزئتها، مثل عدد الأطفال في الأسرة الواحدة، عدد قطع الوحدات المنتجة.... إلخ. والحالة الأكثر شيوعا في المتغيرات المتقطعة هي عندما تكون القيم أعداد صحيحة (0، 1، 2، ....)

ب- **متغيرات كمية مستمرة**: هي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، ونظرا للعدد غير المتناهي لهذه القيم، فانه يتم تقسيم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات. مثل الطول، السن، الوزن، إلخ، وللمتغير الكمي المستمر وحدة قياس (كلغ، ليتر، متر مربع، سنتمتر، الدينار)

مثال (1-1): ميز الصفات التالية مع تحديد نوع المتغير

العبارة	نوع المتغير
عدد الطلبة في المدرج	متغير كمي متقطع
الجنسية	متغير كيفي غير قابل للترتيب
أجور العمال	متغير كمي مستمر
المستوى التعليمي	متغير كيفي قابل للترتيب
عدد أفرد الأسرة	متغير كمي متقطع

سادسا: خطوات البحث الإحصائي

تتطلب منهجية البحث الإحصائي من الباحث اتباع مراحل يمكن إيجازها فيمايلي:[15]

1- تحديد الظاهرة المدروسة :

يتم تحديد الهدف من الدراسة، ثم المجتمع الإحصائي، والمكان والوقت المناسب لجمع البيانات حول الظاهرة المدروسة، والصفات المطلوب معرفتها ووحدات القياس المستخدمة.

2- جمع البيانات الإحصائية:

يتم جمع البيانات الإحصائية بطرق مختلفة، وذلك حسب الهدف من الدراسة وأسلوب التحليل المتبع، وتكون مصداقية نتائج الدراسة الإحصائية مبنية على مدى صحة ودقة البيانات المستخدمة. ومن بين الطرق المتبعة في جمع البيانات نذكر ما يلي:

[15] محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 10

1-2 المصادر غير المباشرة: وتسمى أيضا طريقة البيانات الثانوية، وهي تشمل جميع البيانات والمعلومات الإحصائية المتوفرة من وثائق ومطبوعات ونشرات إحصائية التي تصدرها الهيئات والدواوين المختلفة، وكذلك الهيئات الدولية ومنظماتها المختلفة، ولهذه الطريقة فوائد متعددة أهمها أنها تؤدي إلى اقتصاد كبير في وقت الباحث ونفقاته، إلا أنها تشكو أيضا من عدد من العيوب منها :

- عدم التطابق في بعض الأحيان بين البيانات التي يوفرها المصدر الثانوي والبطانات التي يرغب الباحث في الحصول عليها.
- نقص كمية البيانات ودرجة الدقة.
- قد تكون الوحدة الإحصائية المستعملة لا تتطابق وخطة البحث.

2-2 المصادر المباشرة: وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر (مصادر أولية)، حيث يقوم الباحث نفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة، فعندما يهتم الباحث بجمع بيانات عن الأسرة، يقوم بإجراء مقابلة مع رب الأسرة، ويتم الحصول منه مباشرة على بيانات خاصة بأسرته، مثل بيانات المنطقة التابع لها، والحي الذي يسكن فيه، والجنسية، والمهنة، والدخل الشهري، وعدد أفراد الأسرة، والمستوى التعليمي، وغيرها. ويتميز هذا النوع من المصادر بالدقة والثقة في البيانات، لأن الباحث هو الذي يقوم بنفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة، ولكن أهم ما يعاب عليها إنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير، ومن ناحية أخرى أنها كلفة من الناحية المادية.[16]

إن عملية جمع البيانات من مصادرها الأولية يتم باتباع أحد الأسلوبين:[17]

أ- أسلوب الحصر الشامل: يستخدم هذا الأسلوب إذا كان الغرض من البحث هو حصر جميع مفردات المجتمع، وفي هذه الحالة يتم جمع بيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع بلا استثناء كحصر جميع المزارع التي تنتج التمور، ويتميز أسلوب الحصر الشامل بالشمول وعدم التحيز، ودقة النتائج، ولكن يعاب عليه أنه يحتاج إلى الوقت المجهود، والتكلفة العالية.

ب- أسلوب العينات: تستخدم هذه الطريقة إذا كان من الصعوبة إجراء الدراسة على كافة أفراد المجتمع أو يمكن الاكتفاء بمعلومات عن جزء من المجتمع بدلا من المجتمع ككل. وبتحليل بيانات العينة إحصائيا يمكن تعميم نتائجها على المجتمع ككل، مع ملاحظة أن نتائج العينة المختارة

---

16 خليل شرف الدين، مرجع سبق ذكره، ص 11.

17 خليل شرف الدين، مرجع سبق ذكره، ص 12.

تكون قريبة من حقائق المجتمع كلما زاد حجم العينة وكلما تم إتباع الأسلوب العلمي السليم في اختيارها. ويتميز هذا الأسلوب بالآتي:

- تقليل الوقت والجهد، والتكلفة.
- الحصول على بيانات أكثر تفصيلا، وخاصة إذا جمعت البيانات من خلال استمارة استبيان.

كما أن أسلوب المعاينة يفضل في بعض الحالات التي يصعب فيها إجراء حصر شامل، مثل معاينة دم المريض، أو إجراء تعداد لعدد الأسماك في البحر. ولكن يعاب على أسلوب المعاينة أن النتائج التي تعتمد على هذا الأسلوب أقل دقة من نتائج أسلوب الحصر الشامل، وخاصة إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا

3- عرض البيانات الإحصائية:

بعد عملية جمع البيانات الإحصائية التي يمكن أن تكون أعدادها كبيرة، فذلك لا يعطينا فكرة واضحة عن نتائج جمع البيانات، لذا يلجأ الإحصائي إلى تصنيف وتبويب هذه البيانات عن طريق وضعها في مجموعات متجانسة تشترك في صفة واحدة أو عدة صفات، ويقدمها في شكل جداول أو أشكال مناسبة حتى تصبح هذه المعلومات عملية يستخدمها الباحث في حد ذاته أو تستخدم من طرف باحثين آخرين، بعد أن يتم تقديمها في نشريات خاصة أو دوريات عامة

4- تحليل البيانات واستقراء النتائج :تعد عملية تحليل البيانات ضرورية لإجابة على إشكالية البحث الإحصائي، حيث يقوم الباحث بالتحليل الإحصائي لجوانب الظاهرة المدروسة عن طريق استخدام الأدوات الإحصائية المناسبة، والتي تسمح باستقراء النتائج واستخلاص مدلولها، واتخاذ القرارات المناسبة على أساس النتائج المتوصل إليها. [18]

---

[18] محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 27.

عرض البيانات الإحصائية

بعد جمع البيانات لدراسة معينة، فإنها تكون غير منظمة ويصعب دراستها أو استنتاج أي شيء منها. لذلك دعت الحاجة إلى تنظيم وتلخيص هده البيانات بصورة يسهل فهمها واستنتاج النتائج منها. ويتم عرض هذه البيانات وفق طريقتين هما:

العرض الجدولي للبيانات: والذي يقصد به وضع البيانات الأولية الخاصة بالظاهرة بعد جمعها في جداول نهائية تتكون في الأساس من عمودين، أحدهما به مستويات قيم الظاهرة أو المتغير المدروس، وتكون هذه القيم على شكل صفات أو قيم نقطية أو مجالات (فئات)، والثاني به عدد المفردات (تكرارات) هذه الصفات أو القيم أو المجالات.

العرض البياني للبيانات: بواسطة الرسوم بيانية، والأشكال الهندسية، التي تمكن من إعطاء صورة سريعة عن الظاهرة المدروسة، وتختلف طرق عرض البيانات بيانيا حسب نوع البيانات.

أولا: التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المستمر

1- جدول التوزيع التكراري لمتغير المستمر:

هناك قواعد عامة في تكوين جداول التوزيع التكراري ومعالجة السلاسل الإحصائية هي:

- لا يوجد طول أو عدد متفق عليه من الفئات في توزيع تكراري معين.
- يتحدد عدد الفئات وطولها حسب أهمية الدراسة، وحجم العينة أو المجتمع.
- للحفاظ على توازن الجدول من الأفضل أن يكون عدد الفئات من 5 إلى 15 فئة
- يستحسن أن تكون أطوال الفئات متساوية حتى يمكن مقارنة الظاهرة من مجال إلى مجال أخر.

ولتكوين جدول التوزيع التكراري للمتغير المستمر نتبع الخطوات التالية:

1-1 حساب المدى العام: المدى العام هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في البيانات

$$E = X\,max - X\,min$$

2-1 تحديد عدد الفئات :يتم تحديد عدد الفئات المطلوبة لتشكيل جدول التوزيع التكراري بتقسيم المدى العام على عدد مناسب من الفئات متساوية طول. ويوجد معادلتين تقريبيتين لتحديد عدد الفئات هما:

- **معادلة ستيرجيس. Sturges** : اذا كانت $N > 100$ تطبق العلاقة التالية:

$$K = 1 + 3.322\,log(N)$$

K: عدد الفئات،: Nعدد القيم

- **معادلة يول Yule**: إذا كانت $N \leq 100$ تطبق العلاقة التالية:

$$K = 2.5 * \sqrt[4]{N}$$

K: عدد الفئات،: Nعدد القيم

3-1 تحديد طول الفئة: يتم تحديد طول الفئة بالعلاقة التالية

$$C = \frac{E}{K}$$

C: طول الفئة ،:E المدى العام ، K : عدد الفئات

ملاحظة: عند تحديد عدد الفئات وأطوالها يجب مراعاة المتباينة التالية

طول الفئة × عدد الفئات ≤ المدى العام

4-1 تحديد حدود للفئات: الحد الأدنى للفئة الأولى يجب أن يكون أصغر أو مساوي لأصغر قيمة في البيانات، أما الحد الأعلى فهو عبارة عن الحد الأدنى مضاف اليه طول الفئة. وبنفس طريقة يتم تحديد جميع الفئات المطلوبة.

ملاحظة: الحدود الفعلية للفئة هي عبارة عن الحد الأدنى للفئة مطروح منه $0.5 * 10^{-d}$ حيث :**d** عدد الأعداد العشرية التي قربت اليها البيانات الإحصائية. أما الحد الأعلى الفعلي هو الحد الأدنى الفعلي مضاف اليه طول الفئة. فمثلا:

الفئة [17، 20 [حدودها الفعلية (d=0) [16.5 ، 19.5 [

الفئة [20.6 ، 23.8 [حدودها الفعلية (d=1) [20.55 ، 23.75 [

5-1 مراكز الفئات: هي القيمة التي تقع في وسط الفئة، والتي يتم حصول علها بالصيغة التالية:

$$x_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}$$

L_i : الحد الأدنى للفئة i، L_{i+1} : الحد الأعلى للفئة i

2- التكرار المطلق:

وهو يمثل عدد المرات التي تتكرر فيها نفس القيمة، أما تكرار الفئة هو عدد القيم التي تنتمي اليها . ويرمز له بالرمز n_i . مجموع التكرارات المطلقة n_i تساوي حجم العينة او المجتمع

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

3- التكرار النسبي:

هو حاصل قسمة التكرار المطلق لكل قيمة n_i على مجموع التكرارات N.

$$f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

مجموع التكرارات النسبية يساوي واحد. $\sum f_i = 1$

4- التكرار النسبي المئوي:

هو التكرار النسبي مضروب في مئة.

$$f_{i\%} = \frac{n_i}{\sum n_i} * 100$$

مجموع التكرارات المئوية يساوي مئة . $\sum f_{i\%} = 100$

مثال(2-1): البيانات التالية تمثل أوزان مجموعة من التلاميذ عددهم 50، أخذت من احدى المدارس، وكانت كالاتي:

26	23	27	21	17	29	34	25	26	32
20	24	37	28	34	26	24	28	21	30
30	23	35	25	30	29	27	25	28	30
32	22	22	26	31	28	29	19	25	31
27	21	24	20	20	26	22	26	24	25

المطلوب:

1) إعداد الجدول التوزيع التكراري؟
2) ماهي نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أقل من 23 كغ؟
3) ماهي نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أكبر أو تساوي 26 كغ وأقل 32 كغ؟
4) ماهي نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أكبر من 35 كغ؟

الحل:

1) إعداد جدول التوزيع التكراري:

أ- الصفة: كمية، المتغير: مستمر لأنه يعبر عن الوزن، الوحدة الإحصائية: تلميذ، المجتمع الإحصائي: مجموعة من التلاميذ.

ب- ترتيب البيانات لتسهيل عملية قراءتها على النحو الاتي:

17	19	20	20	20	21	21	21	22	22
22	23	23	24	24	24	24	25	25	25
25	25	26	26	26	26	26	26	27	27
27	28	28	28	28	29	29	29	30	30
30	30	31	31	32	32	34	34	35	37

ج- المدى العام:

$$E = X\,max - X\,min = 37 - 17 = 20$$

د- عدد الفئات: لدينا $N = 50 \leq 100$ ومنه نطبق معادلة يول Yule:

$$K = 2.5 * \sqrt[4]{N} = 2.5 * \sqrt[4]{50} = 6.647 \approx 7$$

ومنه عدد الفئات 7

هـ- طول الفئة:

$$C = \frac{E}{K} = \frac{20}{7} = 2.85 \approx 3$$

ومنه طول كل فئة يساوي 3 كغ.

التأكد من: طول الفئة × عدد الفئات ≤ المدى العام

3 × 7 =21 ≤ المدى العام

و- الحد الأدنى للفئة الأولى هو:

$$L_1 \leq \mathrm{X\,min} \Rightarrow L_1 = 17$$

أما الحد الأعلى هو:

$$L_2 = L_1 + 3 = 17 + 3 = 20$$

ز- تفريغ البيانات على الفئات كما يلي:

الجدول(2-1): توزيع 50 تلميذ حسب الوزن بالكيلوغرام.

فئات أوزان التلاميذ	عدد التلاميذ n_i	التكرار النسبي f_i	التكرار المئوي $f_i\%$
[17 ، 20 [	2	0.04	4
[20 ، 23 [	9	0.18	18
[23 ، 26 [	11	0.22	22
[26 ، 29[	13	0.26	26
[29 ، 32 [	9	0.18	18
[32 ، 35 [	4	0.08	8
[35 ، 38 [	2	0.04	4
المجموع	50	1	100

2) نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أقل من 23 كغ هي: 22=4+18 %

3) نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أكبر أو تساوي 26 كغ وأقل 32 كغ هي 44 %

4) ماهي نسبة عدد التلاميذ الذين أوزانهم أكبر من 35 كغ هي: 4 %

5- التكرار المتجمع الصاعد:

التكرار المتجمع الصاعد لأية قيمة هو تكرار هذه القيمة أو الفئة مضاف اليه مجموع التكرارات السابقة لها.

1-5 التكرار المتجمع الصاعد المطلق: $N_i^{\uparrow}$

ويحسب كما يلي:

$N_1^{\uparrow} = n_1$
$N_2^{\uparrow} = n_1 + n_2 = N_1^{\uparrow} + n_2$
$N_3^{\uparrow} = n_1 + n_2 + n_3 = N_2^{\uparrow} + n_3$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$N_i^{\uparrow} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_i = N_{i-1}^{\uparrow} + n_i$

ملاحظة :التكرار المتجمع الصاعد المطلق الأول يساوي دائما التكرار المطلق الأول $N_1^{\uparrow} = n_1$
والتكرار المتجمع الصاعد المطلق الأخير يساوي دائما مجموع التكرارات

$$N_k^{\uparrow} = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

2-5 التكرار المتجمع الصاعد النسبي: $F_i^{\uparrow}$

ويحسب كما يلي:

$$F_i^{\uparrow} = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i = F_{i-1}^{\uparrow} + f_i$$

أو

$$F_i^{\uparrow} = \frac{N_i^{\uparrow}}{\sum n_i}$$

3-5 التكرار المتجمع الصاعد النسبي المئوي: $F_i^{\uparrow}\%$

ويحسب كما يلي:

$$F_i^{\uparrow}\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% + \cdots + f_i\% = F_{i-1}^{\uparrow}\% + f_i\%$$

أو

$$F_i^{\uparrow}\% = F_i^{\uparrow} * 100$$

6- التكرار المتجمع النازل:

التكرار المتجمع النازل لأية قيمة هو مجموع التكرارات (جميع البيانات) مطروح منه تكرارات الفئات أو القيم السابقة لها.

1-6 التكرار المتجمع النازل المطلق: $N_i^{\downarrow}$

ويحسب كما يلي:

$N_1^{\downarrow} = N$
$N_2^{\downarrow} = N - n_1 = N_1^{\downarrow} - n_1$
$N_3^{\downarrow} = N - n_1 - n_2 = N_2^{\downarrow} - n_2$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$N_i^{\downarrow} = N - n_1 - n_2 \ldots - n_{i-1} = N_{i-1}^{\downarrow} - n_{i-1}$

ملاحظة :التكرار المتجمع النازل المطلق الأول يساوي دائما مجموع التكرارات المطلقة

$$N_1^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

والتكرار المتجمع النازل المطلق الأخير يساوي دائما التكرار المطلق الأخير $N_k^{\downarrow} = n_k$

2-6 التكرار المتجمع النازل النسبي: $F_i^{\downarrow}$

ويحسب كما يلي:

$$F_i^{\downarrow} = 1 - f_1 - f_2 - f_3 - \cdots - f_{i-1} = F_{i-1}^{\downarrow} - f_{i-1}$$

أو

$$F_i^{\downarrow} = \frac{N_i^{\downarrow}}{\sum n_i}$$

3-6 التكرار المتجمع النازل النسبي المئوي: $F_i^{\downarrow}\%$

ويحسب كما يلي:

$$F_i^{\downarrow}\% = 100 - f_1\% - f_2\% - \cdots - f_{i-1}\% = F_{i-1}^{\downarrow}\% - f_{i-1}\%$$

أو

$$F_i^{\downarrow}\% = F_i^{\downarrow} * 100$$

من المثال (2-1) السابق:

1) حساب كلا من: $N_i^{\uparrow}$ ، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}$ ، $F_i^{\downarrow}$ ، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$ ؟

2) اشرح كلا من: n_3 ، $N_3^{\uparrow}$ ، $N_6^{\downarrow}$، $F_3^{\uparrow}\%$ ، $F_6^{\downarrow}\%$ ؟

جدول(2-2): التوزيع التكراري المطلق والنسبي والمئوي والتكرار المتجمع الصاعد والنازل لأوزان 50 تلميذ بالكيلوغرام.

فئات أوزان التلاميذ	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow}\%$
] 20 ، 17]	2	0.04	4	4	50	0.04	1	4	100
] 23 ، 20]	9	0.18	18	11	48	0.22	0.96	22	96
] 26 ، 23]	11	0.22	22	22	39	0.44	0.78	44	78
]29 ، 26]	13	0.26	26	35	28	0.70	0.56	70	56
] 32 ، 29]	9	0.18	18	44	15	0.88	0.30	88	30
] 35 ، 32]	4	0.08	8	48	6	0.96	0.12	96	12
] 38 ، 35]	2	0.04	4	50	2	1	0.04	100	4
المجموع	50	1	100	/	/	/	/	/	/

الشرح:

$n_3 = 11$: تكرار الفئة الثالثة والذي يعني وجود احدى عشر تلاميذ أوزانهم تساوي 23 واقل من 26 كلغ.

$N_3^{\uparrow} = 22$ هناك 22 تلميذ من بين 50 تلميذ أوزانهم أقل من 26كلغ.

$N_6^{\downarrow} = 6$ هناك 6 تلميذ من بين 50 تلميذ أوزانهم أكبر أو تساوي 32كلغ.

$F_3^{\uparrow}\% = 44$ هناك نسبة 44 % من تلاميذ أوزانهم أقل من 26كلغ.

$F_6^{\downarrow}\% = 12$ هناك نسبة 12 % من تلاميذ أوزانهم أكبر أو تساوي 32كلغ

ثانيا: التمثيل البياني للمتغير الإحصائي المستمر:

1- الفئات المنتظمة (لها نفس الطول):

عندما تكون الفئات متساوية الطول فإن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية، ولا يتم تعديل التكرار المطلق أو النسبي. ويمثل بواسطة:

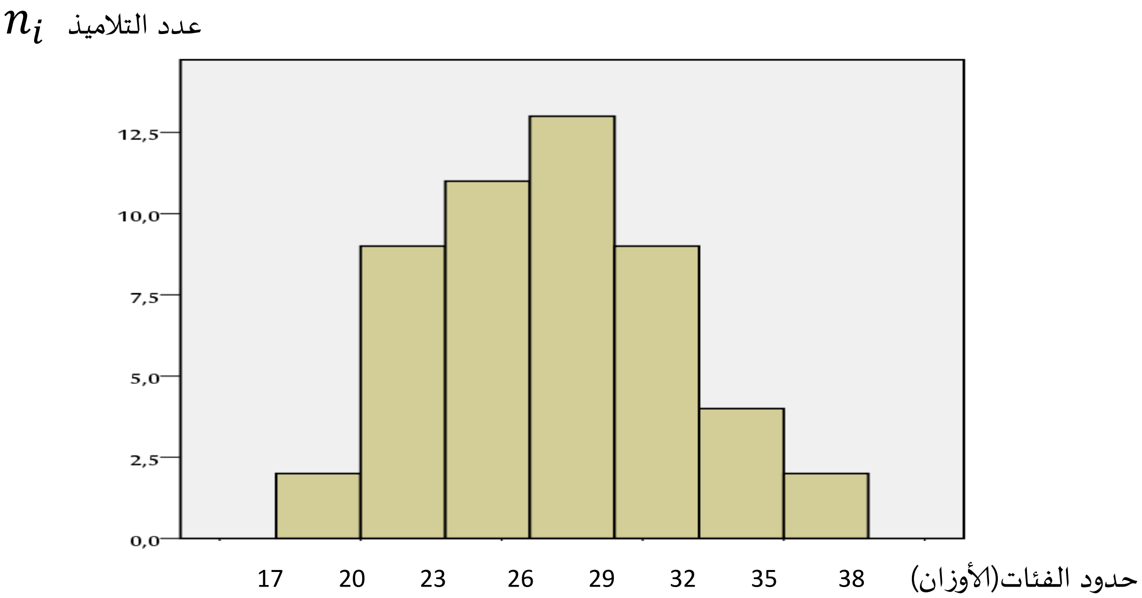
1-1 المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة مع بعضها البعض، قاعدتها طول الفئة C_i ، وارتفاعها تكرار الفئة (تكرار المطلق، النسبي، المئوي)، المدرج التكراري يمثل المساحات.

2-1 المضلع التكراري: هو عبارة عن قطع مستقيمة تصل بين مراكز الفئات للخطوط العلوية لمستطيلات المدرج التكراري. ولغلق المضلع التكراري نعتبر هناك فئتين متطرفتين تكرارهما معدوم (0)، بأخذ مركز هاتين الفئتين نغلق المضلع.

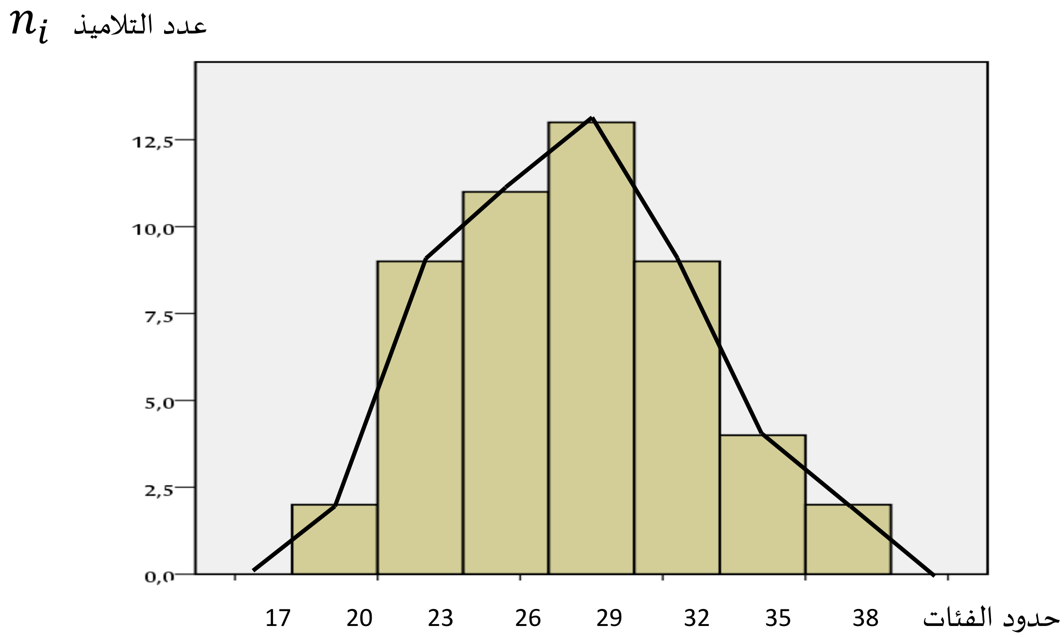
3-1 المنحنى التكراري: للحصول على المنحنى التكراري يتم وصل نقاط يدويا، أي مكان قطع المستقيمة يكون منحنى.

التمثيل البياني للمثال (2-1): الخاص بالتوزيع التكراري لأوزان التلاميذ.

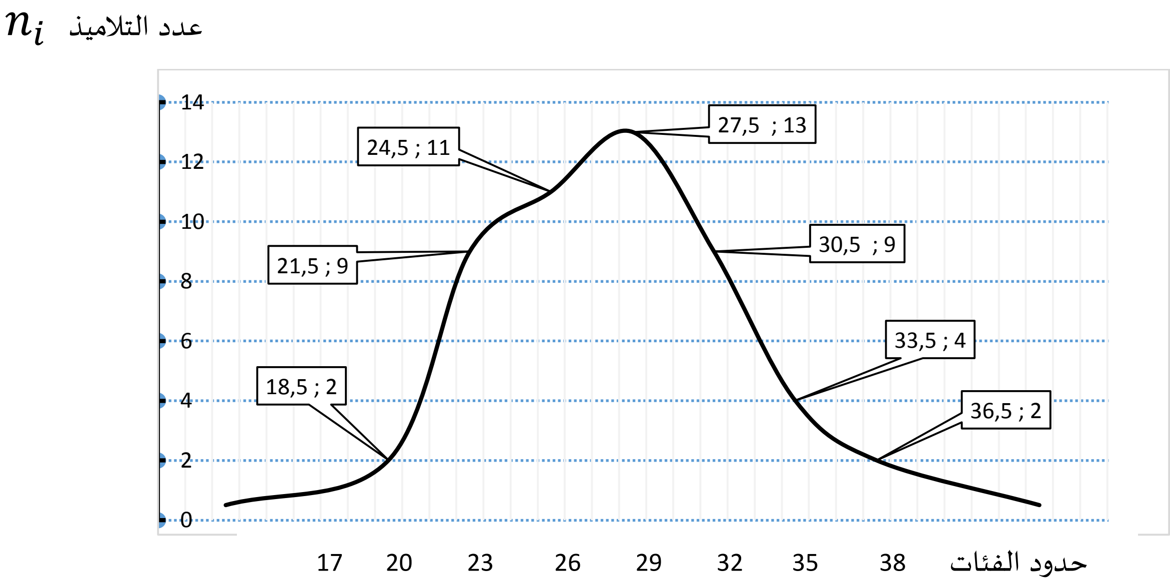
الشكل (2-1): المدرج التكراري لتوزيع أوزان التلاميذ



الشكل (2-2): المضلع التكراري لتوزيع أوزان التلاميذ



الشكل (3-2): المنحنى التكراري لتوزيع أوزان التلاميذ



ملاحظة: يمكن عرض الأشكال الثلاثة على نفس الرسم

2- فئات غير منتظمة (أطولها غير متساوية):

إذا كانت فئات التوزيع غير متساوية الطول يتم تعديل التكرار المطلق، النسبي، المئوي (لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة)، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها. والتكرار المعدل: هو عبارة عن النسبة بين تكرار المطلق (النسبي، المئوي)، وطول الفئة المقابلة.

$$n_i^* = \frac{n_i}{c_i} \qquad f_i^* = \frac{f_i}{c_i} \qquad f_i^*\% = \frac{n_i}{c_i}$$

ملاحظة: يتم تعديل التكرارات في حالة فئات غير متساوية الطول في حالتين:

- رسم المدرج التكراري.
- تحديد الفئة المنوالية وحساب المنوال

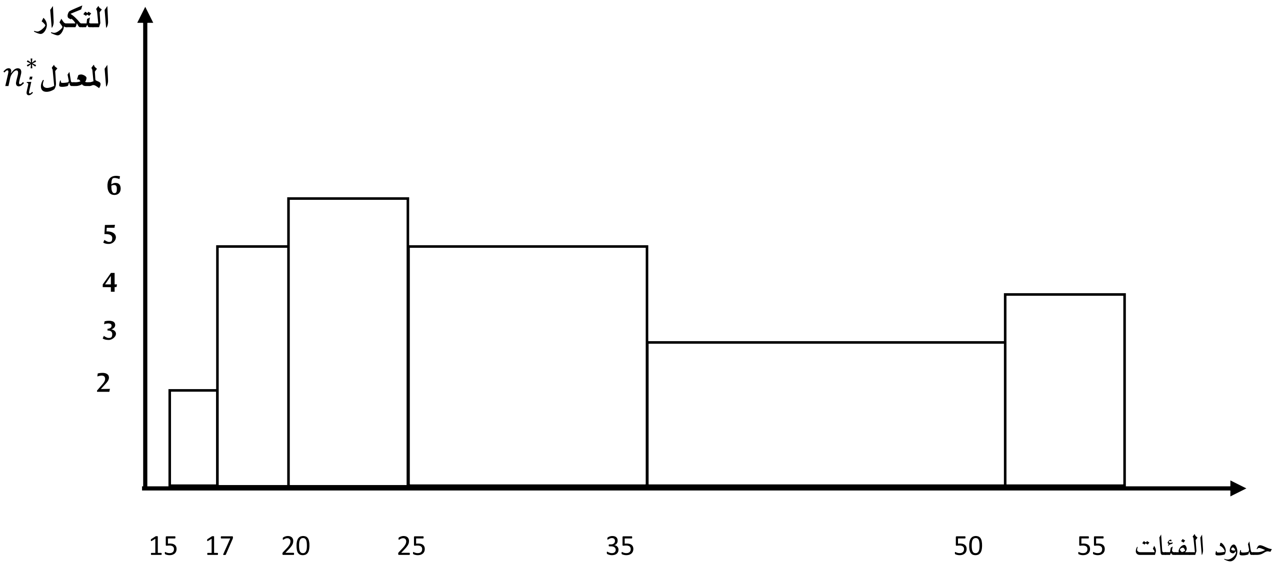
مثال (2-2): البيانات التالية تمثل توزيع أعمار العمال في أحد المصانع.

الجدول (2-3): توزيع أعمار العمال في أحد المصانع

فئات الأعمار	التكرار n_i	طول الفئة c_i	التكرار المعدل $n_i^* = \frac{n_i}{c_i}$
[15 ، 17 [	4	02	2
[17 ، 20 [	15	03	5
[20 ، 25 [	30	05	6
[25 ، 35[	50	10	5
[35 ، 50 [	45	15	3
[50 ، 55 [	20	5	4
المجموع	164	/	/

المطلوب: التمثيل البياني لهذا التوزيع

الشكل (2-4): المدرج التكراري لتوزيع أعمار العمال (التكرار المعدل)

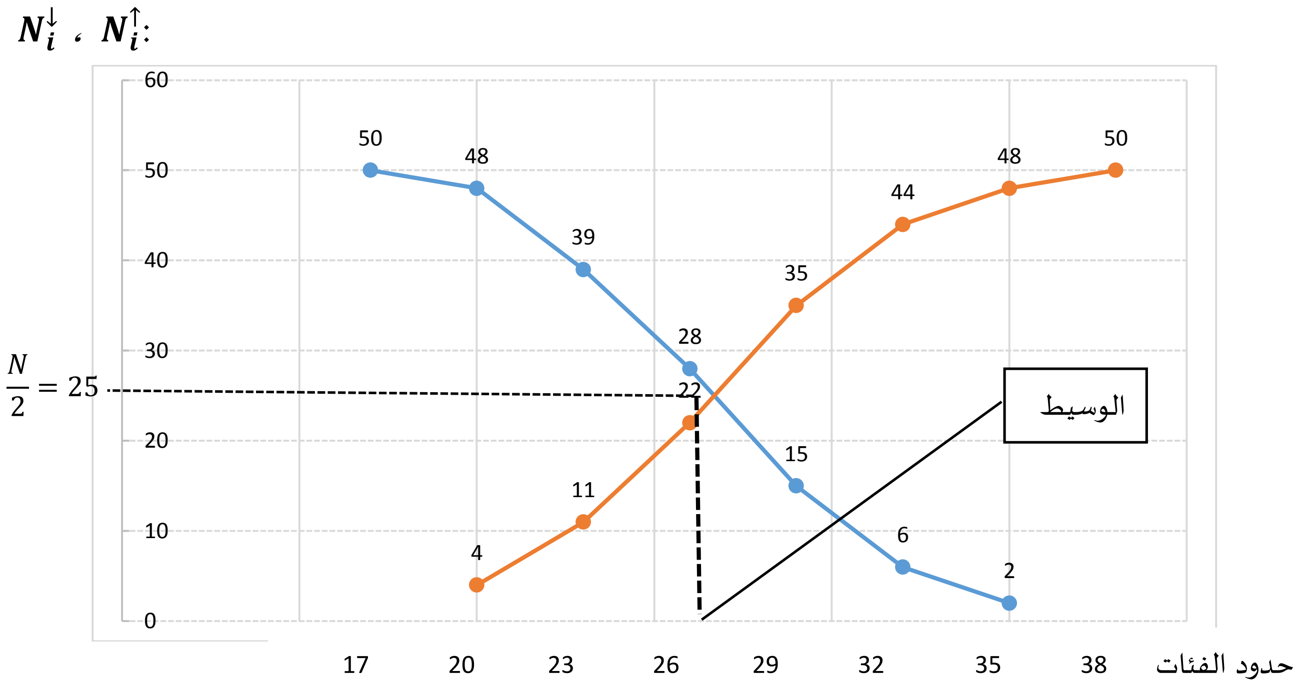


3- المنحنى المتجمع الصاعد والنازل:

يمثل التكرار المتجمع الصاعد والنازل للمتغير الإحصائي المستمر عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد والنازل، حيث يتم إيصال كل قيمة للتكرار المتجمع الصاعد مع الحد الأعلى للفئة الموافقة لها، وكل قيمة للتكرار المتجمع النازل مع الحد الأدنى للفئة الموافقة لها.

التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل للمثال (2-1)

الشكل (2-5): المنحنى الصاعد والنازل لتوزيع أوزان التلاميذ



ثانيا: التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي المتقطع

1- جدول التوزيع التكراري للمتغير المتقطع

مثال (2-3): قام صاحب مكتبة باستجواب عينة عشوائية من الطلبة حجمها 30، حول عدد الكتب التي استعاروها خلال السداسي الأول من السنة الدراسية، لمعرفة نسبة المقروئية عند الطلبة. وكانت الإجابات كالاتي:

2	3	4	4	5	4	0	1	5	0
3	3	0	1	3	2	3	3	1	2
1	4	3	4	4	2	5	2	2	3

المطلوب:

1) كون جدول التوزيع التكراري

2) أحسب كلا من : : $N_i^{\uparrow}$ ، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}$ ، $F_i^{\downarrow}$ ، $F_i^{\uparrow}\,\%$ ، $F_i^{\downarrow}\,\%$ ؟

3) اشرح كلا من: n_4 ، $N_3^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$ ، $F_4^{\downarrow}\,\%$ ؟

الجدول (2-4): توزيع التكراري للطلبة حسب عدد الكتب

عدد الكتب	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow\uparrow}\%$
0	3	0.1	10	3	30	0.1	1	10	100
1	4	0.133	13.3	7	27	0.233	0.9	23.3	90
2	6	0.2	20	13	23	0.433	0.767	43.3	76.7
3	8	0.267	26.7	21	17	0.7	0.567	70	56.7
4	6	0.2	20	27	9	0.9	0.3	90	30
5	3	0.1	10	30	3	1	0.1	100	10
المجموع	30	1	100	/	/	/	/	/	/

الشرح:

$n_4 = 8$: تكرار الفئة الرابعة والذي يعني أن 8 من هؤلاء الطلبة، استعاروا ثلاثة كتب خلال سداسي الأول.

$N_3^{\uparrow} = 23$ هناك 23 طالب من مجموع الطلبة، استعاروا كتابين على الأكثر.

$N_5^{\downarrow} = 9$ هناك 9 من الطلبة استعاروا على الأقل أربعة كتب.

$F_2^{\uparrow}\% = 23.3$ هناك نسبة 23.3 % من الطلبة استعاروا كتاب على الأكثر.

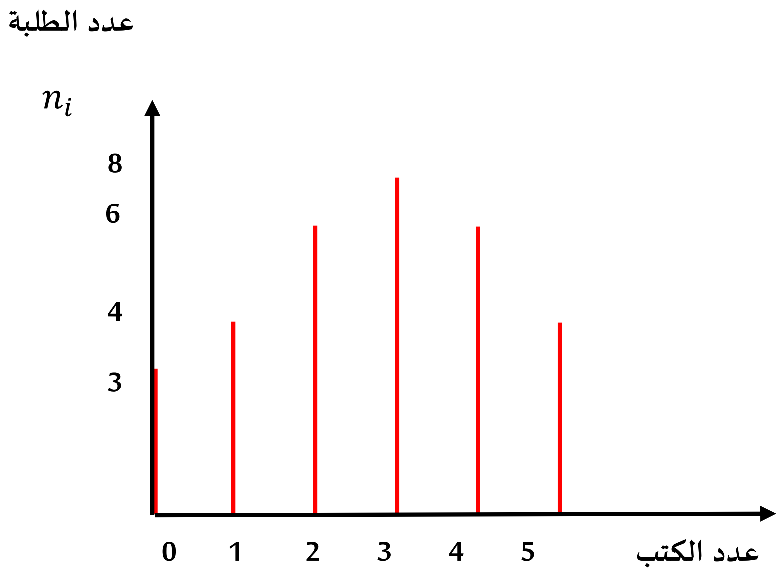
$F_4^{\downarrow}\% = 56.7$ هناك نسبة 56.7 % من الطلبة استعاروا على الأقل ثلاثة كتب.

2- التمثيل البياني للمتغير الإحصائي المتقطع:

2-1 الأعمدة البيانية:

يمثل التكرار المطلق أو النسبي للمتغير الإحصائي المتقطع عن طريق الأعمدة، حيث بتناسب طول العمود مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له.

الشكل (2-6): توزيع الطلبة حسب عدد الكتب



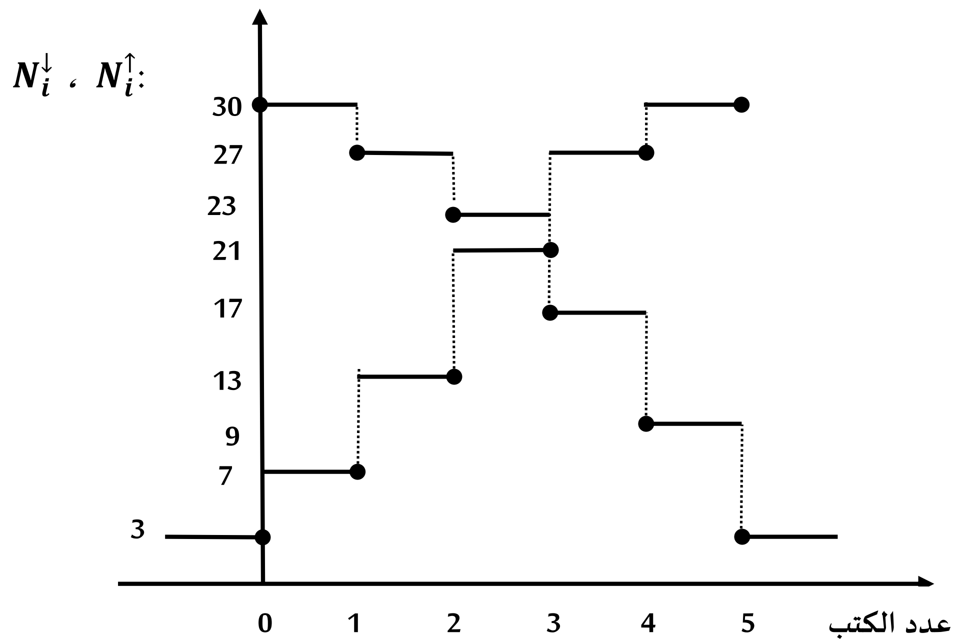
2-2 التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل:

يمثل التكرار المتجمع الصاعد والنازل المطلق أو النسبي للمتغير الإحصائي المتقطع عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد والنازل يأخذ شكل السلم. دلالة على أن المتغير من النوع المتقطع.

فالصاعد هو عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس، أما النازل هو عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب تنازل التكرارات التجميعية النازلة، حيث أن القطعة المستقيمة الأولى تقابل مجموع التكرارات وأصغر قيمة للمتغير المدروس ...وهكذا.

التمثيل البياني عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد والنازل خاص بالمثال (2-3)

الشكل (2-7): التكرار المتجمع الصاعد والنازل لتوزيع الطلبة حسب عدد الكتب



ثالثا: التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي.

1- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي القابل للترتيب:

1-1 جدول التوزيع التكراري: لتكوين جدول التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي القابل للترتيب، فان العمود الأول يدرج فيه أنواع المتغير بعد ترتيبها، والعمود الثاني للتكرار المطلق n_i وكذلك التكرار النسبي والنسبي المئوي، وكذلك التكرار المتجمع الصاعد والنازل المطلق والنسبي.

مثال (2-4): قام باحث بتوزيع 40 استبانة تقيس مستوى أداء تقديم الخدمات الاستعجالية في احدى المراكز الطبية وكانت إجابات الأفراد الذين تم استجوابهم كالاتي:

ممتاز	جيد	متوسط	ضعيف	ممتاز	ضعيف جدا	جيد	ضعيف جدا
جيد	متوسط	ممتاز	ضعيف جدا	جيد	ضعيف	ممتاز	متوسط
ممتاز	جيد	ضعيف	ممتاز	ممتاز	جيد	ضعيف	جيد
متوسط	ضعيف جدا	ممتاز	جيد	متوسط	جيد	ممتاز	ضعيف
ضعيف	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد	ممتاز	ضعيف	متوسط

المطلوب:

1) ضع جدول التوزيع التكراري

2) أحسب كلا من : : $N_i^{\uparrow}$ ، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}$ ، $F_i^{\downarrow}$ ، $F_i^{\uparrow}$ % ، $F_i^{\downarrow}$ % ؟

3) اشرح كلا من: n_4 ، $N_3^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$ ، $F_4^{\downarrow}\%$ ؟

الحل:

الجدول (2-5): توزيع التكراري للإجابات الأفراد حسب مستوى الأداء

مستوى الأداء	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow\uparrow}\%$
ممتاز	12	0.30	30	12	40	0.3	1	30	100
جيد	10	0.25	25	22	28	0.55	0.7	55	70
متوسط	6	0.15	15	28	18	0.70	0.45	70	45
ضعيف	8	0.20	20	35	12	0.90	0.30	90	30
ضعيف جدا	4	0.10	10	40	4	1	0.10	100	10
المجموع	40	1	100	/	/	/	/	/	/

الشرح:

$n_4 = 8$: تكرار الفئة الرابعة والذي يعني أن 8 أشخاص من بين الأفراد الذين تم استجوبهم، كانت إجابتهم حول مستوى الأداء ضعيف.

$N_3^{\uparrow} = 28$ هناك 28 شخص من بين الأفراد الذين تم استجوبهم، كانت إجابتهم حول مستوى الأداء متوسط فما فوق. (متوسط، جيد، ممتاز)

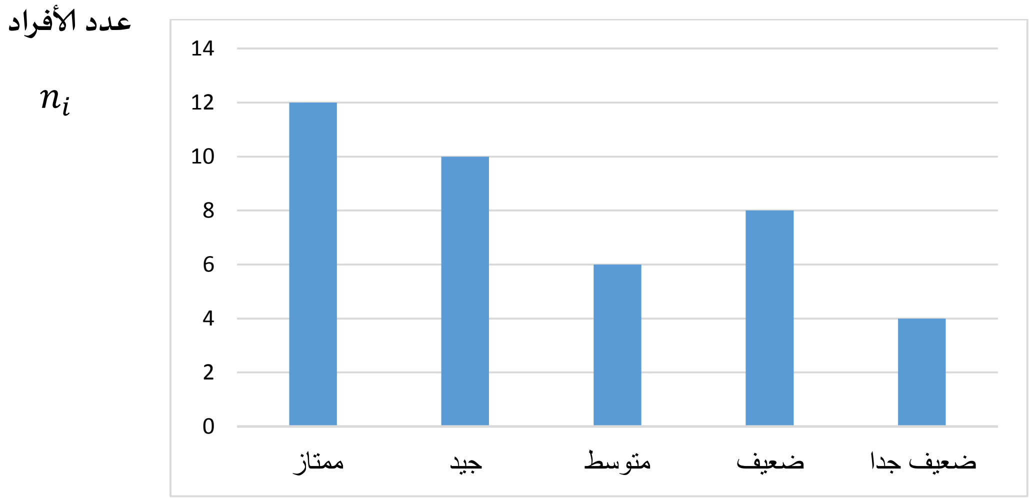
$N_5^{\downarrow} = 4$ هناك أربعة أشخاص من بين الأفراد الذين تم استجوبهم، كانت إجابتهم حول مستوى الأداء ضعيف جدا.

$F_2^{\uparrow}\% = 55$ هناك نسبة 55 % من بين الأفراد الذين تم استجوبهم، كانت إجابتهم حول مستوى الأداء جيد فما فوق. (جيد، ممتاز)

$F_4^{\downarrow}\% = 30$ هناك نسبة 30 % من بين الأفراد الذين تم استجوبهم، كانت إجابتهم حول مستوى الأداء ضعيف على الأكثر. (ضعيف، ضعيف جدا)

2-1 التمثيل البياني: يمثل التكرار المطلق، النسبي، المئوي للمتغير الكيفي عن طريق المستطيلات البيانية، تكون متباعدة بمسافات ثابتة ولها قواعد متساوية، تتناسب أطوالها مع التكرارات المقابلة لمكونات الخاصية المدروسة.

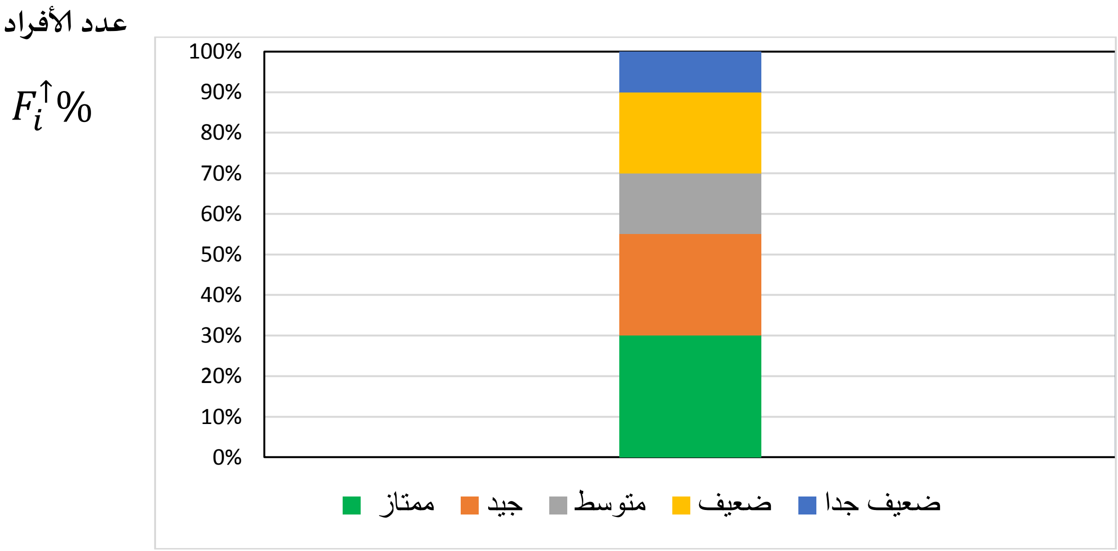
الشكل (2-8): توزيع الأفراد حسب إجابتهم حول مستوى الأداء.



3-1 التمثيل البياني للمتجمع الصاعد والنازل:

ويمثل بواسطة العمود المجزأ، هو عبارة عن مستطيل مقسم إلى عدة أجزاء، كل جزء منه يقابل تكرار معين للخاصية المدروسة، ومن الأفضل عند رسم العمود المجزأ استعمال النسب المئوية المقابلة لكل تكرار حيث أن طول المستقيم 100 %

الشكل (2-9): التكرار المتجمع الصاعد والنازل لتوزيع الأفراد حسب إجابتهم حول مستوى الأداء.



2- التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي غير قابل للترتيب:

1-2 جدول التوزيع التكراري: لتكوين جدول التوزيع التكراري للمتغير الإحصائي الكيفي القابل للترتيب، فان العمود الأول يدرج فيه أنواع المتغير، والعمود الثاني للتكرار المطلق n_i وكذلك التكرار النسبي والنسبي المئوي، أما التكرار المتجمع الصاعد والنازل المطلق والنسبي ليس له معنى.

مثال (2-5): الجدول التالي يمثل توزيع التلاميذ الناجحون في شهادة البكالوريا حسب الشعب في احدى الثانويات.

الشعب	الأدب	الرياضيات	علوم الطبيعة والحياة	تسير واقتصاد
عدد التلاميذ	18	14	20	16

المطلوب:

1) أحسب كلا من f_i ، $f_i\%$ ؟

2) اشرح كلا من: n_1 ، $f_3\%$ ؟

الحل:

الجدول (2-6): توزيع التكراري للتلاميذ الناجحون في شهادة البكالوريا حسب الشعب

الشعب	n_i	f_i	$f_i\%$	الزاوية المركزية θ_i
الأدب	18	0.2647	26.47	95,292 °
الرياضيات	14	0.2059	20.59	74,124 °
علوم طبيعة والحياة	20	0.2941	29.41	105,876 °
تسير واقتصاد	16	0.2353	23.53	84,708 °
المجموع	68	1	100	360 °

الشرح:

$n_1 = 18$ التكرار الأول ويعني أن عدد التلاميذ الناجحين في شعبة الأدب 18 من بين 60 تلميذ الناجحين على مستوى الثانوية.

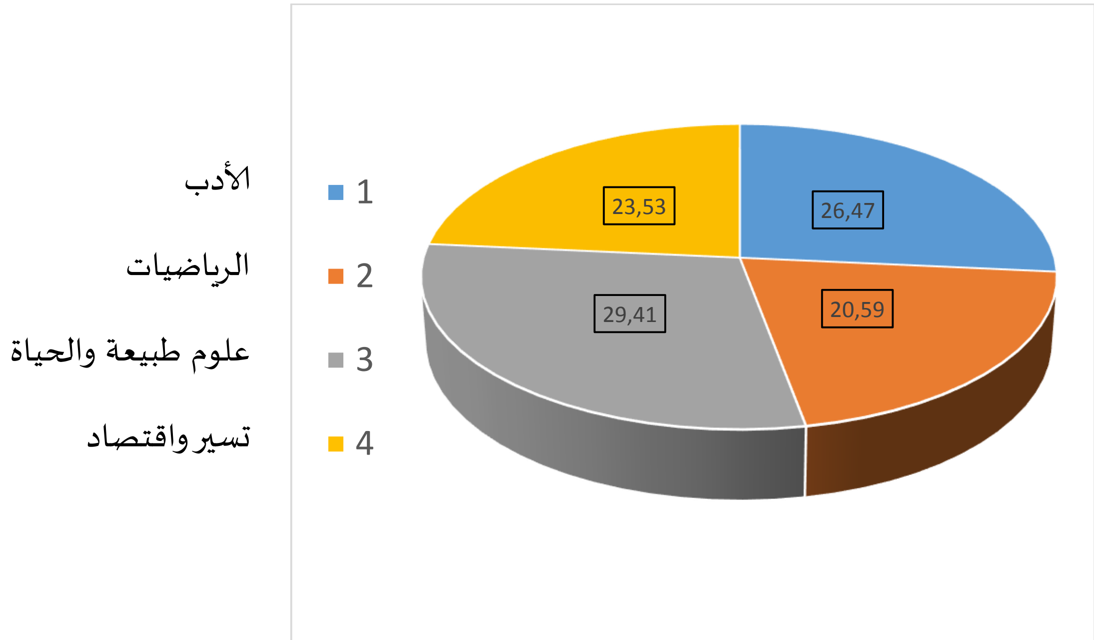
$f_3\% = 29.41$ تعني أن التلاميذ الناجحين في شعبة العلوم الطبيعة والحياة يشكلون نسبة 29.41 % من التلاميذ الناجحين على مستوى الثانوية.

2-2 التمثيل البياني للمتغير الكيفي غير قابل للترتيب: تمثل التكرارات المطلقة للمتغير الكيفي غير قابل للترتيب عن طريق الدائرة النسبية، حيث يتناسب قياس كل زاوية مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له.

يتم حساب الزاوية المركزية باستخدام العلاقة التالية:

$$\theta_i = f_i\% \times 360 \ , \ \theta_i = f_i \times 360 \ , \ \theta_i = \frac{n_i}{\sum n_i} \times 360$$

الشكل (2-10): توزيع التلاميذ الناجحين في البكالوريا حسب الشعب



تمارين الفصل الثاني

تمارين محلولة

التمرين الأول:

الجدول التالي يمثل بيانات استهلاك الكهرباء بالكيلوواط/الساعة في مدة شهر من قبل 75 أسرة مقيمة في حي من أحياء مدينة ما.

62	75	84	133	79	87	37	80	60	157	50	118	58	117	86
88	58	71	83	53	84	70	128	8	66	126	130	57	28	90
40	61	56	96	51	54	68	91	73	52	111	90	19	114	82
75	75	78	125	41	83	61	98	76	64	89	74	10	158	94
77	36	72	115	67	135	93	59	9	81	95	121	94	105	38

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟
2) إعداد جدول التوزيع التكراري؟ ثم حساب كلا من: f_i ، $f_i\%$، $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$ ؟
3) اشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_4^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_4^{\downarrow}\%$ ؟
4) أرسم المدرج التكراري والمضلع التكراري؟
5) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

الحل:

1- الصفة: كمية، المتغير: مستمر لأنه يعبر عن استهلاك الكهرباء بالكيلوواط/الساعة، الوحدة الإحصائية: أسرة، المجتمع الإحصائي: مجموعة أسر الحي.

2- جدول التوزيع التكراري

أ- ترتيب البيانات

8	9	10	19	28	36	37	38	40	41	50	51	52	53
54	56	57	58	58	59	60	61	61	62	64	66	67	68
70	71	72	73	74	75	75	75	76	77	78	79	80	81
82	83	83	84	84	86	87	88	89	90	90	91	93	94
94	95	96	98	105	111	114	115	117	118	121	125	126	128
130	133	135	157	158									

ب- المدى العام:

$$E = X\,max - X\,min = 158 - 8 = 150$$

ج- عدد الفئات: لدينا $N = 75 \leq 100$ ومنه نطبق معادلة يول Yule:

$$K = 2.5 * \sqrt[4]{N} = 2.5 * \sqrt[4]{75} = 7.357 \approx 8$$

ومنه عدد الفئات 8

د- طول الفئة:

$$C = \frac{E}{K} = \frac{150}{8} = 18.75 \approx 19$$

ومنه طول كل فئة يساوي 19 كيلوواط/الساعة.

التأكد من: طول الفئة × عدد الفئات ≤ المدى العام

19 × 8 =152 ≤ المدى العام

هـ- الحد الأدنى للفئة الأولى هو:

$$L_1 \leq \mathrm{X\,min} \Rightarrow L_1 = 8$$

أما الحد الأعلى هو:

$$L_2 = L_1 + 19 = 8 + 19 = 27$$

و- تفريغ البيانات على الفئات كما الاتي:

الجدول(2-7): توزيع 75 أسرة حسب الاستهلاك الشهري للكهرباء بالكيلوواط/الساعة.

فئات	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow\uparrow}\%$
] 27 ، 8]	4	0.053	5.3	4	75	0.053	1	5.3	100
] 46 ، 27]	6	0.08	8	10	71	0.133	0.947	13.3	94.7
] 65 ، 46]	15	0.2	20	25	65	0.333	0.867	33.3	86.7
]84 ، 65]	20	0.267	26.7	45	50	0.6	0.667	60	66.7
] 103 ، 84]	15	0.2	20	60	30	0.8	0.4	80	40
] 122 ، 103]	7	0.094	9.4	67	15	0.894	0.2	89.4	20
] 141 ، 122]	6	0.08	8	73	8	0.974	0.106	97.4	10.6
] 160 ، 141]	2	0.026	2.6	75	2	1	0.026	100	2.6
المجموع	75	1	100	/	/	/	/	/	/

3- الشرح:

$n_2 = 6$: تكرار الفئة الثانية ويعني أن 6 أسر من مجموع أسر الحي، استهلاكهم من الكهرباء محصورة بين 27 واقل من 46 كيلوواط/الساعة.

$N_2^{\uparrow} = 10$ هناك 10 أسر من مجموع 75 أسرة، استهلاكهم من الكهرباء أقل من46 كيلوواط/الساعة.

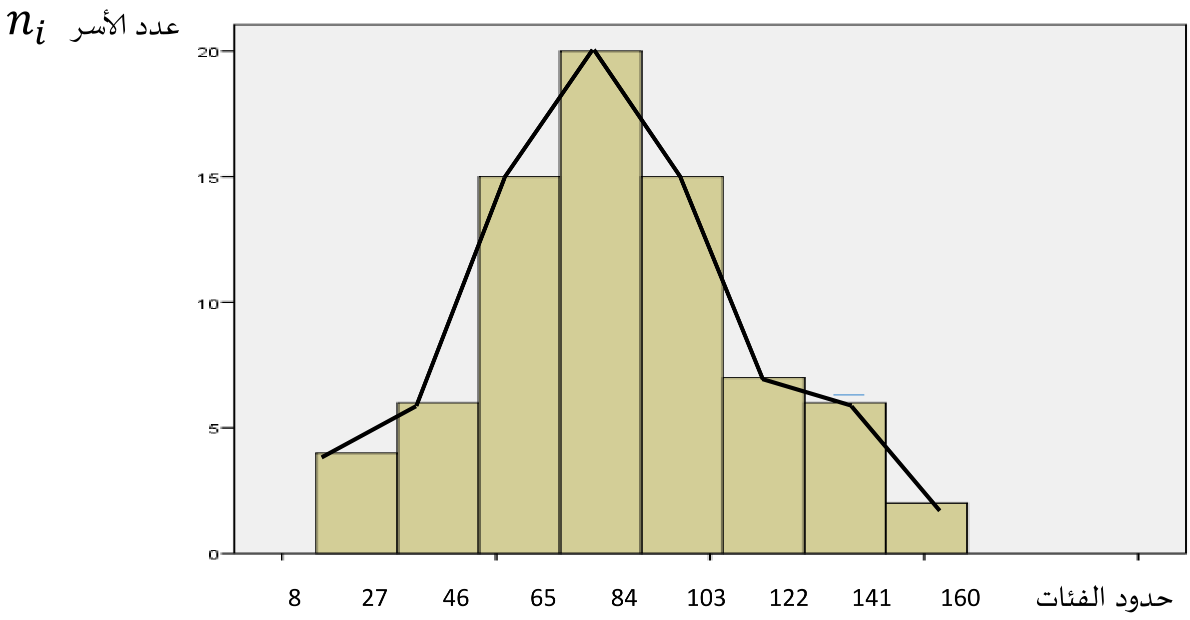
$N_4^{\downarrow} = 50$ هناك 50 من مجموع 75 أسرة، استهلاكهم من الكهرباء أكبر أو تساوي 65 كيلوواط/الساعة.

$F_2^{\uparrow}\% = 13.3$ هناك نسبة 13.3 % من مجموع الأسر استهلاكهم من الكهرباء أقل من46 كيلوواط/الساعة.

$F_4^{\downarrow}\% = 66.7$ هناك نسبة 66.7 % من مجموع الأسر استهلاكهم من الكهرباء أكبر أو تساوي 65 كيلوواط/الساعة.

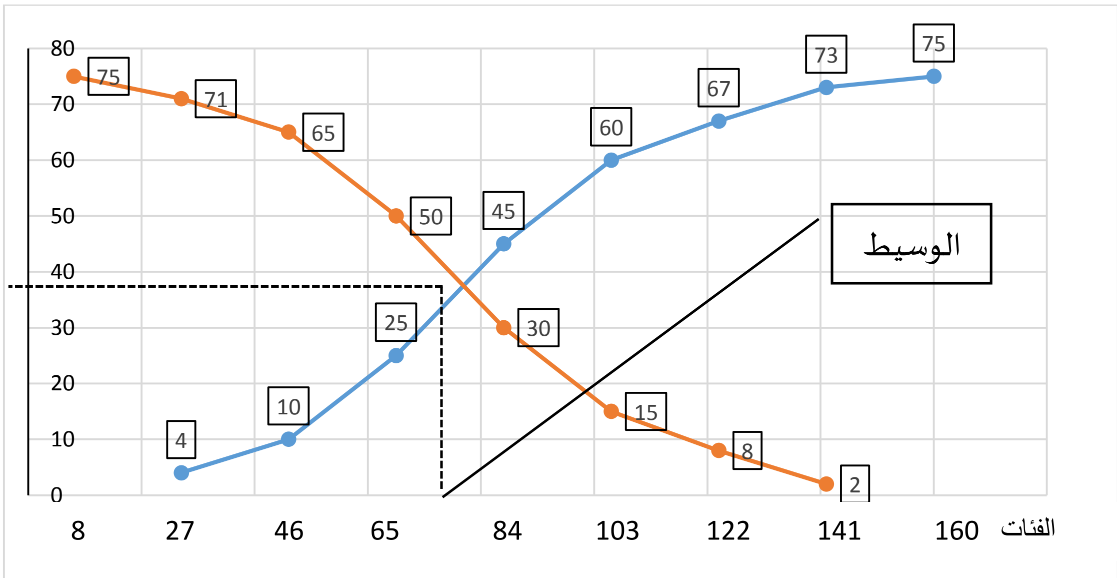
4- رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري.

الشكل (2-11): المدرج والمضلع التكراري لتوزيع الأسر حسب حسب الاستهلاك الشهري للكهرباء بالكيلوواط/الساعة



5- رسم المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل.

الشكل (2-12): المنحنى الصاعد والنازل لتوزيع الأسر حسب حسب الاستهلاك الشهري للكهرباء بالكيلوواط/الساعة



التمرين الثاني:

بيّن الجدول التالي عدد الأطفال في العائلة لعينة تتكون من 100أسرة.

عدد الأطفال	1	2	3	4	5	المجموع
عدد الأسر	25	28	20	15	12	100

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟

2) ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري واحسب كلا من: f_i ، $f_i\%$، $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$.

3) اشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$

4) مثل بيانات جدول التوزيع التكراري بالأعمدة البيانية؟

5) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

الحل :

1- الصفة: كمية، المتغير: متقطع لأنه يعبر عدد الأطفال، الوحدة الإحصائية: طفل، المجتمع الإحصائي: مجموعة أطفال 100 أسر.

2- جدول التوزيع التكراري.

الجدول(2-8): توزيع 100 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow\uparrow}\%$
1	25	0.25	25	25	100	0.25	1	25	100
2	28	0.28	28	53	75	0.53	0.75	53	75
3	20	0.2	20	73	47	0.73	0.47	73	47
4	15	0.15	15	88	27	0.88	0.27	88	27
5	12	0.12	12	100	12	1	0.12	100	12
المجموع	100	1	100	/	/	/	/	/	/

3- الشرح:

$n_2 = 28$: تكرار الفئة الثانية ويعني أن 28 أسر من مجموع أسر الحي، عندهم طفلين

$N_2^{\uparrow} = 53$ هناك 53 أسر من مجموع 100 أسرة، عندهم طفلين على الأكثر.

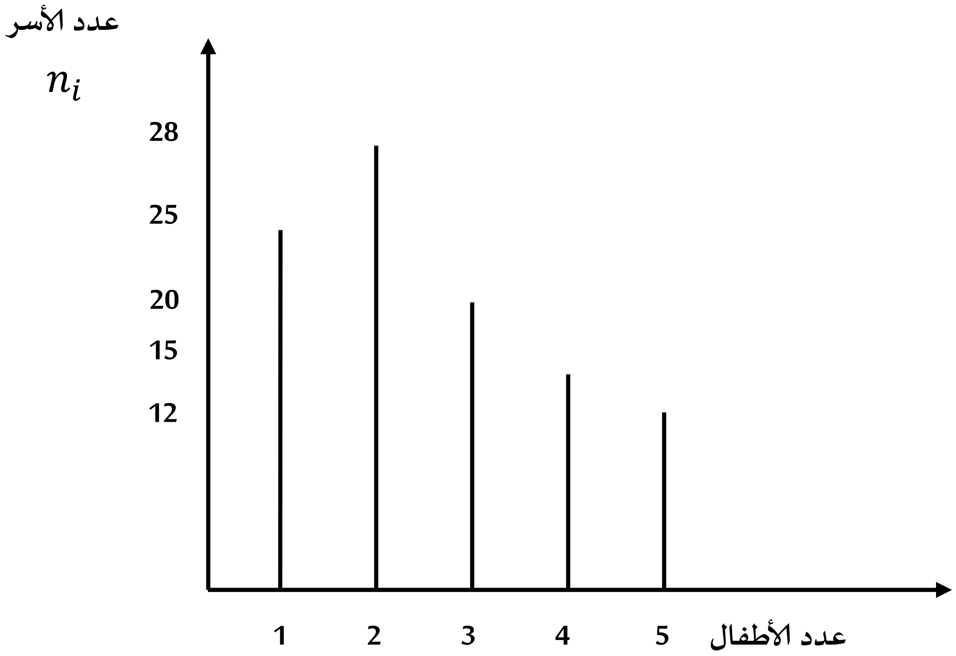
$N_5^{\downarrow} = 12$ هناك 12 من مجموع 100 أسرة، عندهم على أقل 5 أطفال

$F_2^{\uparrow}\% = 53$ هناك نسبة 53 % من مجموع الأسر عندهم طفلين على الأكثر.

$F_5^{\downarrow}\% = 12$ هناك نسبة 12 % من مجموع الأسر عندهم على أقل 5 أطفال.

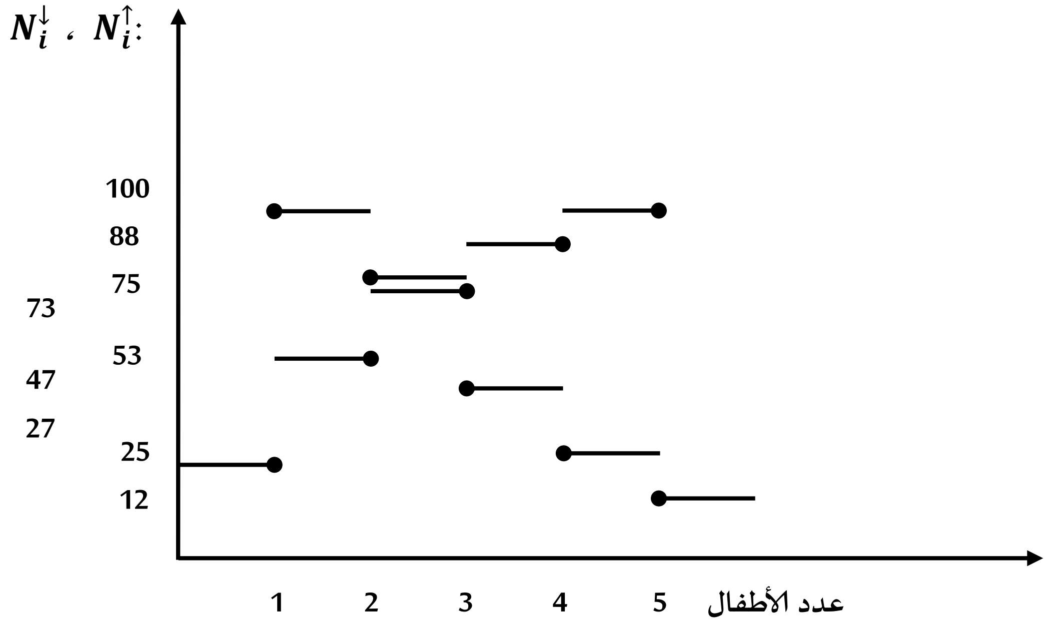
4- تمثيل بيانات جدول التوزيع التكراري بالأعمدة البيانية

الشكل (2-13): توزيع الأسر حسب عدد الأطفال



5- المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل

الشكل (2-14): التكرار المتجمع الصاعد والنازل لتوزيع الأسر حسب عدد الأطفال



التمرين الثالث:

يمثل الجدول التالي توزيع 50أستاذ حسب درجة الأستاذية في جامعة من احدى الولايات.

الدرجة	أستاذ مساعد قسم ب	أستاذ مساعد قسم أ	أستاذ محاضر	أستاذ التعليم العالي
العدد	20	14	10	6

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟

2) ضع جدول التوزيع التكراري ثم حساب كلا من: f_i ، $f_i\%$، $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$ ؟

3) اشرح كلا من: $F_3^{\uparrow}\%$، $F_2^{\downarrow}\%$.

4) مثل بيانيا هذا التوزيع؟

الحل:

1- الصفة: نوعية، المتغير: كيفي قابل للترتيب لأنه يعبر دراجات المناصب غير قابل للقياس، الوحدة الإحصائية: أستاذ، المجتمع الإحصائي: أساتذة الجامعة المدروسة.

2- جدول التوزيع التكراري.

جدول (2-9): توزيع 50 أستاذ حسب درجة الأستاذية

الدرجة	n_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$	$N_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}$	$F_i^{\downarrow}$	$F_i^{\uparrow}\%$	$F_i^{\downarrow\uparrow}\%$
أستاذ مساعد قسم ب	20	0.4	40	20	50	0.4	1	40	100
أستاذ مساعد قسم أ	14	0.28	28	34	30	0.68	0.6	68	60
أستاذ محاضر	10	0.2	20	44	16	0.88	0.32	88	32
أستاذ التعليم العالي	6	0.12	12	50	6	1	0.12	100	12
المجموع	50	1	100	/	/	/	/	/	/

3- الشرح:

$F_3^{\uparrow}\% = 88$ هناك نسبة 88 % من الأساتذة، درجتهم العلمية أقل من أستاذ التعليم العالي.

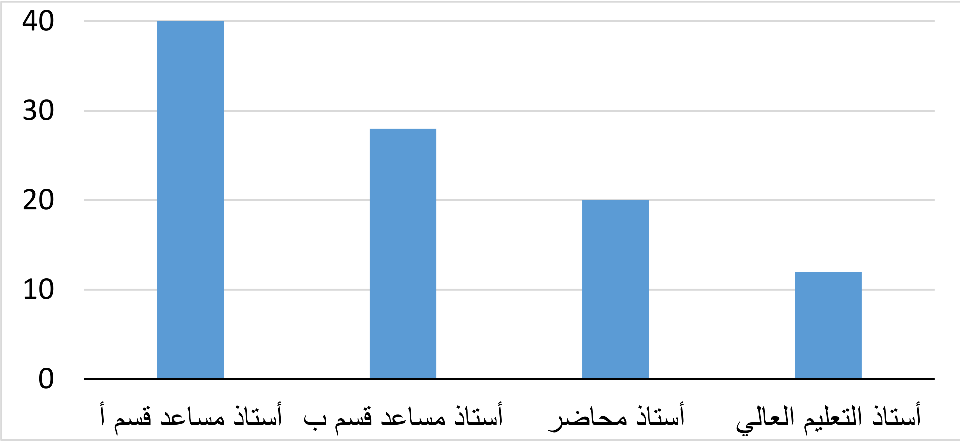
$F_2^{\downarrow}\% = 60$ هناك نسبة 60 % من الأساتذة درجتهم العلمية تفوق أستاذ مساعد قسم ب

4- التمثيل البياني:

الشكل (2-15): توزيع 50 أستاذ حسب درجة الأستاذية

نسبة الأساتذة

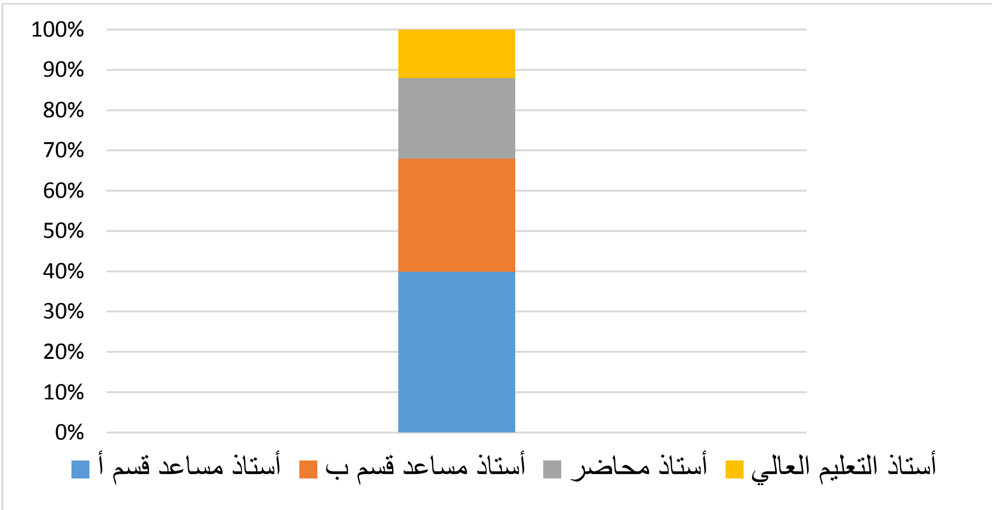
$f_i\%$



الشكل (2-16): التكرار المتجمع الصاعد والنازل لتوزيع 50 أستاذ حسب درجة الأستاذية

نسبة الأساتذة

$F_i^{\uparrow}\%$



تمارين المقترحة

التمرين الأول:

البيانات التالية تمثل إنتاج الحليب باللترات في اليوم بـ 60 مزرعة في احدى ولايات الوطن.

63	71	36	29	17	63	52	97	87	67	72	31	25	62	77	57	46	21	93	87
33	21	54	36	71	65	57	73	92	62	54	72	81	83	73	62	66	89	29	68
91	51	62	56	36	49	46	89	58	42	96	88	83	73	14	73	62	58	81	57

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟
2) إعداد جدول التوزيع التكراري ثم حساب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم شرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_4^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_4^{\downarrow}\%$ ؟
3) رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري؟
4) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

التمرين الثاني:

البيانات التالية تمثل عدد الأسهم المملوكة من قبل 50 شخص، في شركة ما.

6	3	8	13	11	9	7	6	5	2	12	12		10	8	6	5	2
12	9	7	6	3	9	7	13	11	8	7	5		3	4	12	10	8
	6	4	10	12	9	7	5	3	6	13	11		9	7	5	3	12

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟
2) ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري واحسب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$، ثم اشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$
3) مثل بيانات جدول التوزيع التكراري بالأعمدة البيانية؟
4) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

التمرين الثالث:

يمثل الجدول التالي توزيع عينة من 50 فرد حسب التأهيل العلمي، في احدى المؤسسات.

التأهيل العلمي	المستوى الابتدائي	المستوى المتوسط	المستوى الثانوي	المستوى الجامعي	دراسات عليا
n_i	4	14	20	10	2

المطلوب:

1) حساب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم اشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_4^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_4^{\downarrow}\%$.

2) مثل بيانيا هذا التوزيع؟

التمرين الرابع:

الجدول التالي يمثل مبيعات وحدة شركة ما للأجهزة الإلكترو منزلية خلال سنة 2016

نوع الجهاز	تلفزيون	راديو	ثلاجة	طباخة	غسالة
عدد الأجهزة	1200	600	800	700	500

المطلوب :

1) حساب كلا من: f_i ، $f_i\%$ مع شرح n_2 وn_4 و$f_2\%$ ؟.

2) مثل بيانيا هذا التوزيع

التمرين الخامس:

الجدول التالي يبين 100 عامل موزعين حسب أجورهم الشهرية في شركة ما.

الأجر الشهري	] 25 ,20]	] 35, 25]	] 40, 35]	] 50 , 40]	] 60 , 50]	] 65 , 60]
عدد العمال	5	15	20	25	30	5

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟

2) إعداد جدول التوزيع التكراري ثم حساب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$، $F_i^{\downarrow}\%$ ، ثم اشرح كلا من: $N_3^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_3^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$.

3) مثل بيانات جدول التوزيع التكراري؟

4) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

التمرين السادس:

من أجل دراسة الحالة العائلية لعمال مؤسسة ما، قام باحث بتوزيع استمارات خاصة على العمال وقد تحصل على النتائج التالية:

متزوج	متزوج	مطلق	متزوج	متزوج	مطلق	مطلق	أعزب	أعزب	متزوج
أرمل	مطلق	متزوج	أعزب	أعزب	متزوج	مطلق	أرمل	متزوج	أعزب
أعزب	أعزب	متزوج	متزوج	متزوج	مطلق	أعزب	متزوج	مطلق	أرمل
أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب	متزوج	أرمل	مطلق	متزوج	متزوج

المطلوب :

1) ما نوع هذه المتغير ؟ ولماذا ؟
2) حساب كلا من: f_i ، $f_i\%$ مع شرح n_2 وn_4 و$f_2\%$ ؟.
3) مثل بيانيا هذا التوزيع؟

التمرين السابع:

البيانات التالية تمثل عدد الغرف المملوكة من قبل 60 أسرة في حي من أحياء مدينة ما .

1	3	2	4	5	3	2	3	2	3	3	1	4	3	2
4	3	2	3	4	5	2	3	3	3	1	3	4	2	3
2	3	2	5	4	1	3	2	3	3	3	4	5	1	3
3	2	3	3	5	4	1	2	3	3	4	2	3	3	1

المطلوب:

1) ما هو نوع المتغير؟ ولماذا؟
2) ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري واحسب كلا من: $N_i^{\uparrow}$، $N_i^{\downarrow}$، f_i ، $f_i\%$، $F_i^{\uparrow}\%$ ، $F_i^{\downarrow}\%$، ثم اشرح كلا من: n_2 ، $N_2^{\uparrow}$ ، $N_5^{\downarrow}$، $F_2^{\uparrow}\%$، $F_5^{\downarrow}\%$ ؟
3) مثل بيانات جدول التوزيع التكراري؟
4) المنحنى البياني للتكرار المتجمع الصاعد والنازل؟

مقاييس النزعة المركزية

إن تلخيص البيانات العددية في جداول إحصائية وعرضها في صورة أشكال بيانية يعطي للباحث صف عام وسريع حول الظاهرة المدروسة غير أن لهذه الطريقة حدو د تتمثل في:

- عدم استخدامها في تحليل المعطيات
- عدم الاستفادة منها في التنبؤ واتخاذ القرارات

ولهذه الأسباب وضعت مقايس عددية وصفية يمكن أن تستخدم في التحليل واتخاذ القرار تسمى بمقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات (مقاييس الموضع).

مفهوم النزعة المركزية: ويقصد بها ميل البيانات الإحصائية إلى التمركز حول قيمة معينة وكلما ابتعدنا عن هذه القيمة فان عدد المعطيات يبدا في التناقص وتسمى هذه الظاهرة بالنزعة المركزية.[1]
ومن خلال ملاحظة البيانات الخاصة بأي ظاهرة سواء في صورتها الأولية أو بعد تلخيصها وتبويبها في جداول توزيع تكراري نجد أن معظم مفردتها تتمركز حول قيمة معينة، وهذه القيمة تمثل مركز التوزيع لذا فإن الحصول عليها ضروري ومهم في دراسة خصائص التوزيع والمقارنة بين التوزيعات التكرارية المختلفة لنفس الظاهرة.

هناك عدة مقاييس للتعبير عن هذه الظاهرة تختلف من ناحية الدقة والمدلول الإحصائي وكيفية الحساب، من أهمها:

- المنوال
- الوسيط ومشتقاته (الربيعيات، العشيريات، والمئويات.)
- المتوسط الحسابي ومشتقاته (المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي)

[1] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق ذكره، ص 30.

أولا: المنوال Le Mode

يعبر المنوال عن قيمة الأكثر تكرارا أو شيوعا من بين قيم المشاهدات،[2] وقد يكون للبيانات منوال واحد أو لأكثر، ويمكن ألا يوجد منوال لمجموعة من البيانات، ويعتبر المنوال أفضل مقياس لوصف البيانات النوعية، ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{M_o}$.

1- البيانات على شكل سلسلة إحصائية:

عندما تكون بيانات على شكل سلسلة إحصائية، فان المنوال هو قيمة أو صفة المتغير الإحصائي x_i الأكثر تكرار في السلسلة الإحصائية.[3]

مثال (3-1):

حدد المنوال في السلاسل الإحصائية التالية:

1) ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، متوسط، فوق المتوسط، جيد، ضعيف، جيد جدا، جيد
2) 14 ، 13 ، 07، 12 ، 14 ، 05 ، 15، 10 ، 14
3) 8.5، 13.5 ، 16 ، 11.6 ، 8.5 ، 13.5 ، 14، 10.2
4) 06، 09 ، 11 ، 07 ، 01 ، 05 ، 14 ، 13

الحل:

السلسلة الأولى: المنوال هو القيمة الأكثر تكرار $M_o =$ جيد

السلسلة الثانية: المنوال هو القيمة الأكثر تكرار $M_o = 14$

السلسلة الثالثة: المنوال هو القيمة الأكثر تكرار $M_o = 8.5$ ، $M_o = 13.5$

السلسلة الرابعة: ليس لها منوال.

2- البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

يستخرج المنوال مباشرة من جدول التوزيع التكراري، وهو القيمة التي تقابل أكبر تكرار في الجدول، يمكن أن يكون أكثر من منوال، كما يمكن أن لا يوجد أي منوال.

مثال (3-2): يمثل الجدول التالي عدد أيام التغيب لعمال مؤسسة ما.

عدد الأيام	0	1	2	3	4
عدد العمال	18	20	16	17	15

المطلوب: أوجد المنوال، مع الشرح؟

[2] عزام صبري، مرجع سبق ذكره ص 124.

[3] عبد الرزاق عزوز، مرجع، سبق ذكره، ص 115.

الحل: المنوال في هذا التوزيع هو $M_o = 1$ **الشرح:** أغلبية العمال تغيبوا يوم واحد

3- البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن حساب المنوال يتم وفق الخطوات التالية:

أ- تحديد الفئة المنوالية: وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار عندما تكون أطوال الفئات متساوية، أو الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية

ب- حساب المنوال باستخدام العلاقة التالية:

$$M_o = L_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times A_{M_O}$$

وتسمى بطريقة الفروقات أو طريقة بيرسون Pearson

L_{min} : الحد الأدنى للفئة المنوالية.

Δ_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها.

A_{M_O} : طول الفئة المنوالية

مثال (3-3): الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب فئات الأجر

فئات الأجور(10^3 دج)	عدد العمال
]110 ، 100]	02
]120 ، 110]	05
]130 ، 120]	14
]140 ، 130]	20
]150 ، 140]	16
]160 ، 150]	08
المجموع	65

المطلوب: أوجد المنوال حسابيا وبيانيا، مع الشرح؟

الحل:

1) لدينا الفئات متساوية الطول ومنه فان:

2) الفئة المنوالية هي [130، 140[لأنها تقابل أكبر تكرار

3) حساب المنوال:

$$\Delta_1 = 20 - 14 = 6$$
$$\Delta_2 = 20 - 16 = 4$$
$$M_o = L_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times A_{M_O} = 130 + \frac{6}{6+4} \times 10 = 136$$

الشرح: أغلبية العمال أجورهم تقدر ب 136 ألف دج.

4- تحديد المنوال بيانيا:

يحدد المنوال بيانيا بواسطة المدرج التكراري، وهذا بإتباع الخطوات التالية:

أ- رسم المدرج التكراري للتوزيع.

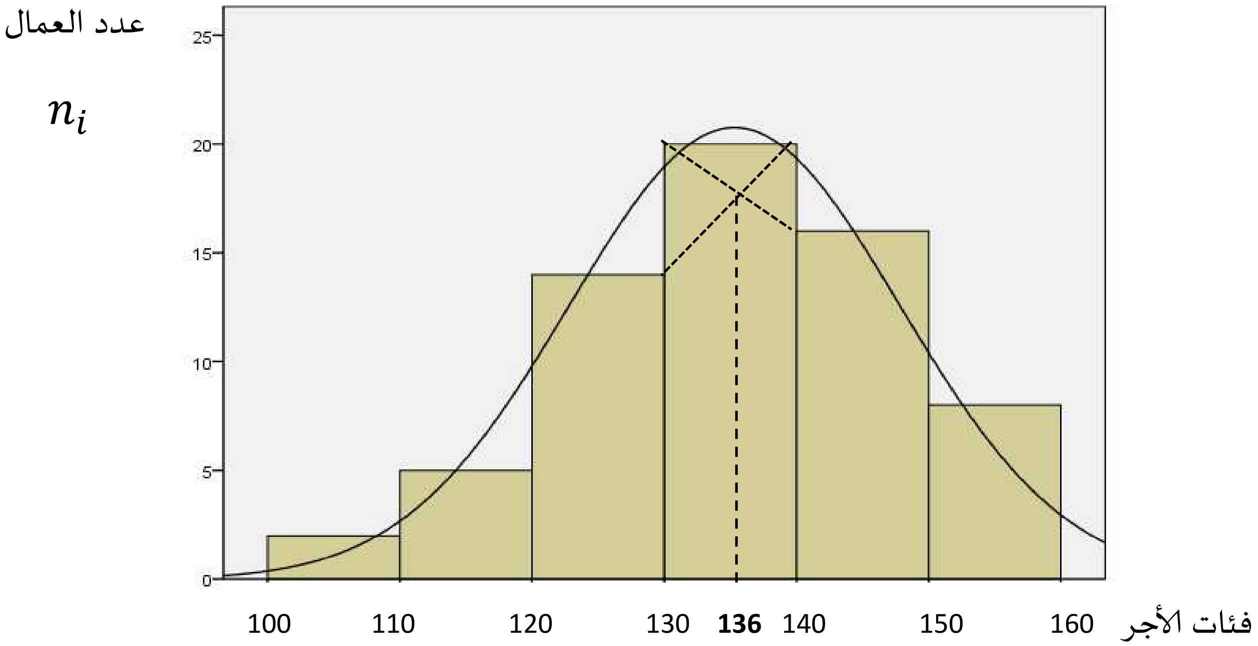
ب- وصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة لها.

ج- وصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها.

د- من تقاطع الخطين السابقين يتم إسقاط عمودا على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع المحور الأفقي تمثل قيمة المنوال

4) تحديد قيمة المنوال بيانيا:

الشكل (3-1): التمثيل البياني لتوزيع العمال حسب الأجر يحدد كيفية إيجاد المنوال



مثال (3-4): الجدول التالي يبين توزيع 60 مؤسسة اقتصادية حسب رقم أعمالها

رقم الأعمال (10^6)	عدد المؤسسات	طول الفئة	التكرار المعدل
]15 ، 10]	5	05	1
]25 ، 15]	10	10	1
]30 ، 25]	15	05	3
]40 ، 30]	20	10	2
]50 ، 40]	10	10	1
المجموع	60	/	/

المطلوب: أوجد المنوال حسابيا وبيانيا؟

الحل:

1) لدينا فئات غير متساوية الطول ومنه نحسب التكرار المعدل
2) الفئة المنوالية هي [25، 30[لأنها تقابل أكبر تكرار معدل.
3) حساب المنوال:

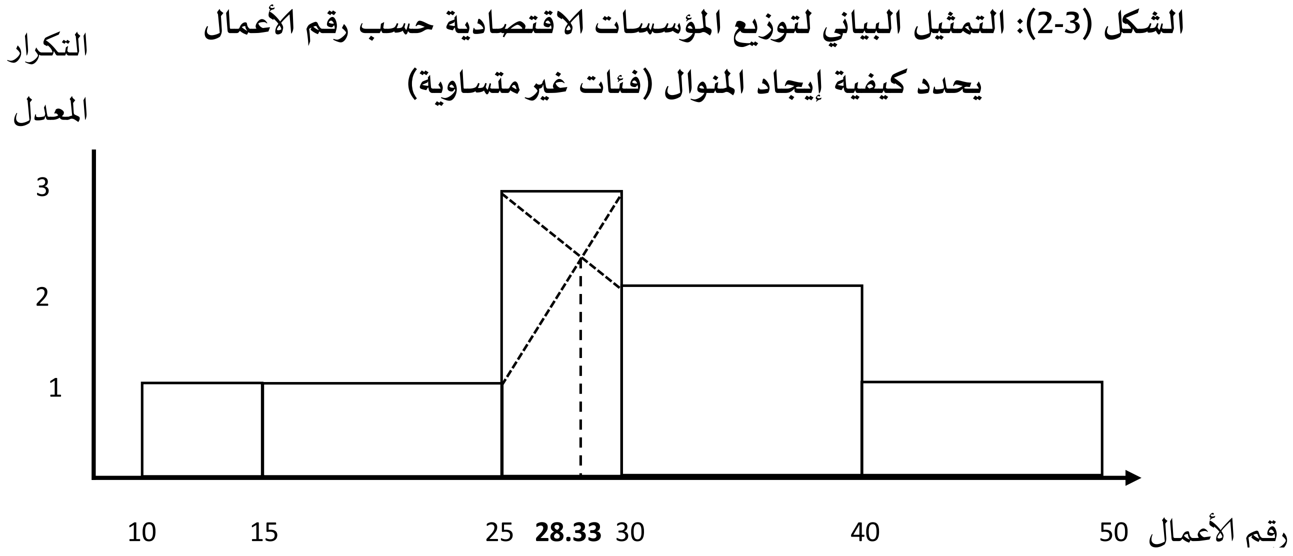
$$\Delta_1 = 3 - 1 = 2 \quad , \quad \Delta_2 = 3 - 2 = 1$$

$$M_o = L_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times A_{M_O} = 25 + \frac{2}{2+1} \times 5 = 28.33$$

الشرح: أغلبية المؤسسات المدروسة رقم أعمالها يقدر ب 28.33 مليون. دج.

4) تحديد قيمة المنوال بيانيا:

الشكل (3-2): التمثيل البياني لتوزيع المؤسسات الاقتصادية حسب رقم الأعمال يحدد كيفية إيجاد المنوال (فئات غير متساوية)



5- خواص المنوال:[4]

- أسهل مقاييس النزعة المركزية.
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة وغير قابل للعمليات الجبرية.
- يمكن حسابه بيانيا.
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة.
- يعتبر أفضل المتوسطات لوصف الظواهر النوعية (الكيفية)

ثانيا: الوسيط La Médiane

الوسيط لمجموعة من البيانات هو القيمة التي تقسم تلك البيانات المرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا إلى قسمين متساويين، حيث يكون عدد القيم الأكبر منه مساويا لعدد القيم الأصغر منه،[5] ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{M_e}$

1- البيانات على شكل سلسلة إحصائية:

عندما تكون بيانات على شكل سلسلة إحصائية، فان عملية حساب الوسيط تتطلب أولا ترتيب البيانات (القيم) تصاعديا أو تنازليا، ثم نميز بين حالتين:

أ- إذا كان عدد المفردات N عدد فردي: فإن الوسيط هو القيمة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ أي:

$$M_e = x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$$

إذا كان عدد المفردات N عدد زوجي : فإن الوسيط هو متوسط القيمة التي رتبتها $\frac{N}{2}$ والقيمة التي رتبتها $\frac{N}{2}+1$ أي :

$$M_e = \frac{x_{\left(\frac{N}{2}\right)} + x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}}{2}$$

مثال (3-5):

أحسب الوسيط للسلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

1) 14 ، 13 ، 07، 12 ، 14 ، 05 ، 15، 10 ، 14

2) 8.5، 13.5 ، 16 ، 11.6 ، 8.5 ، 13.5 ، 14، 10.2

[4] علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي، الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، منشورات، ELGA، مالطا، 2000، ص67 .

[5] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، مرجع سابق، ص 11.

الحل:

السلسلة الأولى: 05، 07، 10، 12، 13، 14، 14، 14، 15

عدد المفردات فردي: $N = 9$ ، رتبة الوسيط هي $\frac{9+1}{2} = 5$ ومنه قيمة الوسيط هي :

$$M_e = x_{(5)} = 13$$

السلسلة الثانية: 8.5، 8.5، 10.2، 11.6، 13.5، 13.5، 14، 16

عدد المفردات زوجي: $N = 8$ ، رتب الوسيط هي $\frac{8}{2} = 4$ و $\frac{8}{2} + 1 = 5$ ومنه قيمة الوسيط هي:

$$M_e = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{11.6 + 13.5}{2} = 12.55$$

2- البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

يتم حساب الوسيط من الجدول التوزيع التكراري للمتغير متقطع وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة الوسيط $R_{M_e} = \frac{N}{2}$
- تحديد قيمة الوسيط وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الوسيط $N_{M_e}^{\uparrow} \geq \frac{N}{2}$

مثال (3-6): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4
عدد الأسر	3	7	10	6	4

المطلوب: أوجد قيمة الوسيط؟

الحل:

1) رتبة الوسيط: $R_{M_e} = \frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30
$N_i^{\uparrow}$	3	10	20	26	30	/

2) تحديد قيمة الوسيط وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الوسيط $15 = \frac{N}{2} \geq N^{\uparrow}_{M_e}$ وهي القيمة $M_e = 2$

3- البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن حساب الوسيط يتم وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة الوسيط $R_{M_e} = \frac{N}{2}$
- تحديد الفئة الوسيطية: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الوسيط $N^{\uparrow}_{M_e} \geq \frac{N}{2}$
- حساب الوسيط باستخدام العلاقة التالية:

$$M_e = L_{min} + \frac{\frac{N}{2} - N^{\uparrow}_{M_e-1}}{n_{M_e}} \times A_{M_e}$$

L_{min} : الحد الأدنى للفئة الوسيطية .

$\frac{N}{2}$: رتبة الوسيط (N مجموع التكرارات)

$N^{\uparrow}_{M_e-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة الوسيطية.

n_{M_e} : تكرار الفئة الوسيطية.

A_{M_O} : طول الفئة الوسيطية.

مثال (3-7): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما.

فئات الأجور (10^3 دج)	عدد العمال	$N_i^{\uparrow}$
]100 ، 90]	3	3
]110 ، 100]	14	17
]120 ، 110]	**11**	**28**
]130 ، 120]	16	44
]140 ، 130]	4	48
]150 ، 140]	3	51

المطلوب: أحسب الوسيط واشرح النتيجة؟

الحل:

1) حساب التكرار المتجمع الصاعد

2) رتبة الوسيط: $R_{M_e} = \frac{N}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

3) تحديد الفئة الوسيطية : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الوسيط $N^{\uparrow}_{M_e} \geq \frac{N}{2} = 25.5$ وهي **]110 ، 120]** لان تكرارها المتجمع الصاعد $28 \geq 25.5$

4) حساب الوسيط:

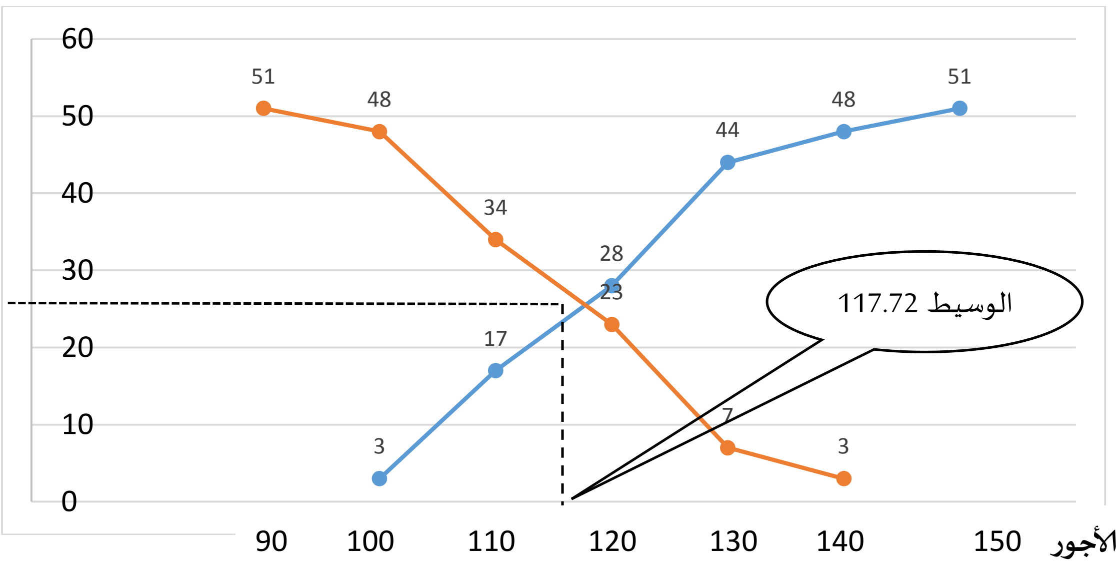
$$M_e = L_{min} + \frac{\frac{N}{2} - N^{\uparrow}_{M_e-1}}{n_{M_e}} \times A_{M_e} = 110 + \frac{25.5-17}{11} \times 10 = 117.72$$

5) **الشرح** :هناك 50%من العمال أجورهم أقل من 117.72 ألف دينار و 50%من العمال أجورهم أكبر من 117.72 ألف دينار.

ملاحظة: الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل.

مثال(3-8): حدد الوسيط للمثال (3-7)

الشكل (3-3): الوسيط بيانيا



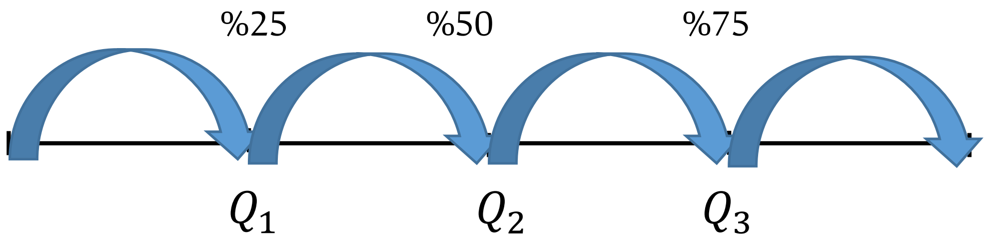
خواص الوسيط:[6]

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة وهو غير قابل للعمليات الجبرية.
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة.
- يمكن حسابه بيانيا.
- لا يدخل في حسابه جميع القيم ويتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها.
- يتغير الوسيط كلما تغيرت أطوال الفئات لنفس التوزيع التكراري (إذ يتميز بعدم الثبات)
- يقسم المدرج التكراري إلى مساحتين متساويتين.

ثالثا: مشتقات الوسيط:

1- الربيعيات: Les Quartiles

وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى أربع أقسام متساوية،[7] و كل قسم يمثل 25 % من البيانات



2-5 الربيع الأول:وهو القيمة التي يسبقها ربع القيم %25، ويليها ثلاثة أرباع القيم %75 تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز Q_1

2-6 الربيع الثاني : وهو القيمة التي يسبقها نصف القيم 50 %، ويليها نصف القيم 50 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز Q_2 ، $Q_2 = M_e$

2-7 الربيع الثالث: وهو القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع القيم 75 %، ويليها ربع القيم 25 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز Q_3

---

[6] علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص64

[7] سالم عيسى بدر ، عماد غصاب عبابنة، مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي ، الطبعة الأولى ، دار الميسرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن، 2007 ، ص 76

8-2 حساب الربيعيات:

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية: فان قيمة الربيع Q_k هي:

$$Q_k = x_{k\left(\frac{N+1}{4}\right)} \qquad ; k = 1,2,3$$

- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{4}\right)$ بدون فواصل نأخذ القيمة مباشرة.
- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{4}\right)$ فيه فواصل نأخذ متوسط القيمتين

مثال(3-9): أوجد الربيع الأول والثالث للسلسلتين التاليتين

1) 3، 5، **7**، 10 ،11، 14 ، 15 ، 17 ، **18** ، 20 ،23

2) 10 ، **12**، **14** ، 17 ، 19 ، 20، **22**، **23** ،25

الحل:

السلسلة الأولى:

الربيع الأول: $k = 1$: وتكون الرتبة $R_{Q_1} = 1\left(\frac{11+1}{4}\right) = 3$ ومنه قيمة الربيع الأول هي $Q_1 = 7$

الربيع الثالث : $k = 3$: وتكون الرتبة $R_{Q_3} = 3\left(\frac{11+1}{4}\right) = 9$ ومنه قيمة الربيع الثالث هي $Q_3 = 18$

السلسلة الثانية:

$R_{Q_1} = \frac{9+1}{4} = 2.5$ الربيع الأول هو:متوسط القيمة التي رتبتها 2 والقيمة التي رتبتها 3 أي $Q_1 = \frac{12+14}{2} = 13$

$R_{Q_3} = 3\left(\frac{9+1}{4}\right) = 7.5$ الربيع الثالث هو : متوسط القيمة التي رتبتها 7 والقيمة التي رتبتها 8 أي $Q_1 = \frac{22+23}{2} = 22.5$

ب- البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

يتم حساب الربيع من الجدول التوزيع التكراري للمتغير متقطع وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة الربيع $R_{Q_k} = \frac{k \times N}{4} \quad ; \; k = 1,2,3$

- تحديد قيمة الربيع Q_k وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N_{Q_k}^{\uparrow} \geq \frac{k \times N}{4}$

مثال(3-10): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30
$N_i^{\uparrow}$	3	10	20	26	30	/

أوجد قيمة الربيع الأول والثالث؟

الحل:

1) الربيع الأول: رتبته هي $R_{Q_1} = \frac{1 \times 30}{4} = 7.5$ ، قيمة الربيع Q_1 وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N_{Q_1}^{\uparrow} \geq 7.5$ ومنه $Q_1 = 1$

2) الربيع الثالث: رتبته هي $R_{Q_3} = \frac{3 \times 30}{4} = 22.5$ ، قيمة الربيع Q_3 وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N_{Q_1}^{\uparrow} \geq 22.5$ ومنه $Q_1 = 3$

ج- البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن حساب الربيع يتم وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة الربيع $R_{Q_k} = \frac{k \times N}{4} \quad ; \quad k = 1,2,3$
- تحديد الفئة الربيعية Q_k: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N_{Q_k}^{\uparrow} \geq \frac{k \times N}{4}$
- حساب الربيع باستخدام العلاقة التالية: [8]

$$Q_k = L_{min} + \frac{\frac{k \times N}{4} - N_{Q_{k-1}}^{\uparrow}}{n_{Q_k}} \times A_{Q_k} \qquad ; k = 1,2,3$$

[8] عبد الرزاق عزوز، مرجع سبق ذكره ، ص 125.

L_{min} : الحد الأدنى للفئة الربيعية

$\frac{k\times N}{4}$: رتبة الربيع (N مجموع التكرارات)

$N^{\uparrow}_{Q_k-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة الربيعية.

n_{Q_k} : تكرار الفئة الربيعية

A_{Q_k} : طول الفئة الربيعية

مثال (3-11): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما.

فئات الأجور (10^3 دج)	عدد العمال	$N_i^{\uparrow}$
[90 ، 100[	3	3
[100 ، 110[	14	17
[110 ، 120[	11	28
[120 ، 130[	16	44
[130 ، 140[	4	48
[140 ، 150[	3	51
المجموع	51	/

المطلوب: أحسب الربيع الأول والثالث واشرح النتيجة؟

الحل:

1) حساب التكرار المتجمع الصاعد

الربيع الأول:

2) رتبة الربيع الأول : $R_{Q_1}=\frac{1\times N}{4}=\frac{51}{4}=12.75$

3) تحديد فئة الربيع الأول : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N^{\uparrow}_{Q_1}\geq\frac{1\times N}{4}=12.75$ وهي [100 ، 110[لان تكرارها المتجمع الصاعد $17\geq 12.75$

4) حساب الربيع الأول:

$$Q_1=L_{min}+\frac{\frac{1\times N}{4}-N^{\uparrow}_{Q_1-1}}{n_{Q_1}}\times A_{Q_1}=100+\frac{12.75-3}{14}\times 10=106.96$$

الشرح :هناك 25%من العمال أجورهم أقل من 106.96 ألف دينار و 75 %من العمال أجورهم أكبر من 106.96 ألف دينار.

الربيع الثالث:

1) رتبة الربيع الثالث : $R_{Q_3} = \frac{3\times N}{4} = \frac{3\times 51}{4} = 38.25$

2) تحديد فئة الربيع الثالث : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الربيع $N_{Q_3}^{\uparrow} \geq \frac{3\times N}{4} = 38.25$ وهي]120 ، 130] لان تكرارها المتجمع الصاعد $44 \geq 38.25$

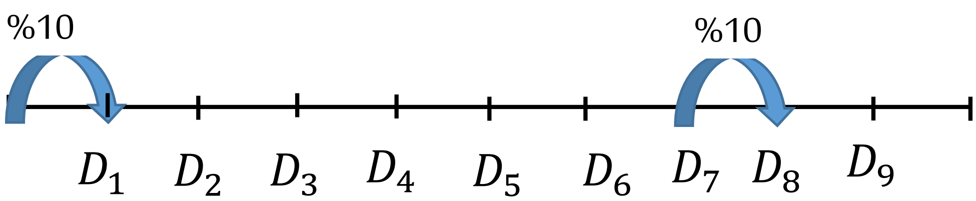
3) حساب الربيع الثالث :

$$Q_3 = L_{min} + \frac{\frac{3\times N}{4} - N_{Q_3-1}^{\uparrow}}{n_{Q_3}} \times A_{Q_3} = 120 + \frac{38.25-28}{16} \times 10 = 126.40$$

الشرح :هناك 75 %من العمال أجورهم أقل من 126.40 ألف دينار و 25 %من العمال أجورهم أكبر من 126.40ألف دينار.

2- **العشيرات :**Les Déciles

وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى عشرة أقسام متساوية، و كل قسم يمثل 10 % من البيانات



1-2 **العشير الأول**:وهو القيمة التي يسبقها عشر القيم 10 %، ويليها تسعة أعشار القيم 90 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز D_1

2-2 **العشير الخامس :** وهو القيمة التي يسبقها نصف القيم 50 %، ويليها نصف القيم 50 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز D_5 ، $D_5 = M_e$

3-2 **الربيع التاسع :** وهو القيمة التي يسبقها تسعة أعشار القيم 90 %، ويليها عشر القيم 10 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز D_9

وهكذا بالنسبة لباقي العشيريات

4-2 حساب العشيرات:

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية: فان قيمة العشير D_k هي

$$D_k = x_{k\left(\frac{N+1}{10}\right)} \qquad ; k = 1,2,3,\ldots\ldots,9$$

- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{10}\right)$ بدون فواصل نأخذ القيمة مباشرة.
- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{10}\right)$ فيه فواصل نأخذ متوسط القيمتين

مثال(3-12): أوجد العشير الثالث والسابع للسلسلتين التاليتين

1) 3، 5، 7، 10، 11، 14، 15، 17، 18، 20، 23

2) 10، 12، 14، 17، 19، 20، 22، 23، 25

الحل:

السلسلة الأولى:

العشير الثالث : $k = 3$: وتكون الرتبة $R_{D_3} = 3\left(\frac{11+1}{10}\right) = 3.6$ ومنه العشير الثالث : هو متوسط القيمة التي رتبتها 3 والقيمة التي رتبتها 4 أي $D_3 = \frac{7+10}{2} = 8.5$

العشير السابع : $k = 7$: وتكون الرتبة $R_{D_7} = 7\left(\frac{11+1}{10}\right) = 8.4$ ومنه العشير السابع : هو متوسط القيمة التي رتبتها 8 والقيمة التي رتبتها 9 أي

$$D_3 = \frac{17+18}{2} = 17.5$$

السلسلة الثانية:

$R_{D_3} = 3\left(\frac{9+1}{10}\right) = 3$ ومنه قيمة العشير الثالث هي : $D_3 = 14$

$R_{D_7} = 7\left(\frac{9+1}{10}\right) = 7$ ومنه قيمة العشير السابع هي : $D_7 = 22$

ب- البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

يتم حساب العشير من الجدول التوزيع التكراري للمتغير متقطع وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة العشير $R_{D_k} = \frac{k \times N}{10} \qquad ; k = 1,2,3,\ldots\ldots,9$

- تحديد قيمة العشير D_k وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_k}^{\uparrow} \geq \frac{k\times N}{10}$

مثال(3-13): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30
$N_i^{\uparrow}$	3	10	20	26	30	/

أوجد قيمة العشير الأول ، السادس ؟

الحل:

1) العشير الأول : رتبته هي $R_{D_1} = 1\left(\frac{30}{10}\right) = 3$ ، قيمة العشير D_3 وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_1}^{\uparrow} \geq 3$ ومنه $D_1 = 0$

2) العشير السادس : رتبته هي $R_{D_6} = 6\left(\frac{30}{10}\right) = 18$، قيمة العشير D_6 وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_6}^{\uparrow} \geq 18$ ومنه $D_6 = 2$

ج- البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن حساب العشير يتم وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة العشير $R_{D_k} = \frac{k\times N}{10} \quad ; k = 1,2,3,\ldots\ldots,9$
- تحديد الفئة العشيرية D_k: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_k}^{\uparrow} \geq \frac{k\times N}{10}$
- حساب العشير باستخدام العلاقة التالية: [9]

$$D_k = L_{min} + \frac{\frac{k\times N}{10} - N_{D_{k-1}}^{\uparrow}}{n_{D_k}} \times A_{D_k} \qquad ; k = 1,2,3,\ldots,9$$

[9] عبد الرزاق عزوز، مرجع سبق ذكره ، ص 129.

L_{min} : الحد الأدنى للفئة العشيرية

$\frac{k\times N}{10}$: رتبة العشير (N مجموع التكرارات)

$N^{\uparrow}_{D_k-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة العشيرية

n_{D_k} : تكرار الفئة العشيرية

A_{D_k} : طول الفئة العشيرية

مثال (3-14): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما

فئات الأجور(10^3 دج)	عدد العمال	$N_i^{\uparrow}$
[90 ، 100[	3	3
[100 ، 110[	14	17
[110 ، 120[	11	28
[120 ، 130[	16	44
[130 ، 140[	4	48
[140 ، 150[	3	51
المجموع	51	/

المطلوب: أحسب العشير الأول والسادس واشرح النتيجة؟

الحل:

1) حساب التكرار المتجمع الصاعد

العشير الأول:

2) رتبة العشير الأول: $R_{D_1}=\frac{1\times N}{10}=\frac{1\times 51}{10}=5.1$

3) تحديد فئة العشير الأول : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير

$N^{\uparrow}_{D_1}\geq\frac{k\times N}{10}=5.1$ وهي [100 ، 110[لان تكرارها المتجمع الصاعد $17\geq 5.1$

4) حساب العشير الأول:

$$D_1=L_{min}+\frac{\frac{1\times N}{10}-N^{\uparrow}_{D_1-1}}{n_{D_1}}\times A_{D_1}=100+\frac{5.1-3}{14}\times 10=101.5$$

الشرح :هناك 10 % من العمال أجورهم أقل من 101.5 الف دينار و 90 % من العمال أجورهم أكبر من 101.5 الف دينار.

العشير السادس

1) رتبة العشير السادس: $R_{D_6}=\frac{6\times N}{10}=\frac{6\times 51}{10}=30.6$

2) تحديد فئة العشير السادس: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_6}^{\uparrow}\geq\frac{k\times N}{10}=30.6$ وهي [120، 130[لان تكرارها المتجمع الصاعد $44\geq 30.6$

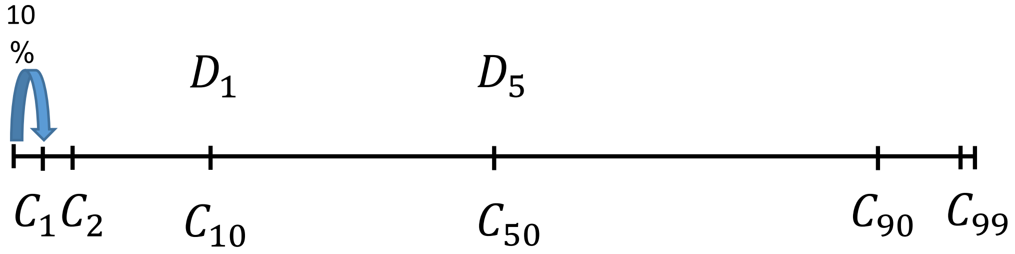
3) حساب العشير السادس:

$$D_6=L_{min}+\frac{\frac{6\times N}{10}-N_{D_6-1}^{\uparrow}}{n_{D_6}}\times A_{D_6}=120+\frac{30.6-28}{16}\times 10=126.625$$

الشرح :هناك 60 % من العمال أجورهم أقل من 126.625 الف دينار و 40 % من العمال أجورهم أكبر من 126.625 الف دينار.

3- المئويات: Les Centiles

وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى مائة قسم متساوي، وبالتالي كل قسم يمثل 1 % من البيانات.



1-3 المئوي الأول :وهو القيمة التي يسبقها عشر القيم 1 %، ويليها تسعة أعشار القيم 99 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز C_1

2-3 المئوي الخامسون : وهو القيمة التي يسبقها نصف القيم 50 %، ويليها نصف القيم 50 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز C_{50} ، $C_{50}=M_e$

3-3 المئوي تسع وتسعون : وهو القيمة التي يسبقها تسعة أعشار القيم 99 %، ويليها عشر القيم 1 % تكون القيم مرتبة ترتيب تصاعديا ويرمز له بالرمز C_{99}

وهكذا بالنسبة لباقي المئويات.

4-3 حساب المئويات:

أ- إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية: فان قيمة المئوي C_k هي

$$C_k = x_{k\left(\frac{N+1}{100}\right)} \qquad ; k = 1,2,3,\ldots\ldots,99$$

- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{100}\right)$ بدون فواصل نأخذ القيمة مباشرة.
- إذا كان ناتج $k\left(\frac{N+1}{100}\right)$ فيه فواصل نأخذ متوسط القيمتين

مثال(3-15): أوجد المئوي عشرون و ثمانون للسلسلتين التاليتين

1) 3، 5، 7، 10، 11، 14، 15، 17، 18، 20، 23

2) 10، 12، 14، 17، 19، 20، 22، 23، 25

الحل:

السلسلة الأولى:

المئوي عشرون : $k = 20$: وتكون الرتبة $R_{C_{20}} = 20\left(\frac{11+1}{100}\right) = 2.4$ ومنه المئوي عشرون: هو متوسط القيمة التي رتبتها 2 والقيمة التي رتبتها 3 أي

$$C_{20} = \frac{7+5}{2} = 6$$

المئوي ثمانون : $k = 80$: وتكون الرتبة $R_{C_{80}} = 80\left(\frac{11+1}{100}\right) = 9.6$ ومنه العشير السابع : هو متوسط القيمة التي رتبتها 9 والقيمة التي رتبتها 10 أي

$$C_{80} = \frac{20+18}{2} = 19$$

السلسلة الثانية:

$R_{C_{20}} = 20\left(\frac{9+1}{10}\right) = 2$ ومنه قيمة المئوي عشرون هي : $C_{20} = 12$

$R_{C_{80}} = 80\left(\frac{9+1}{10}\right) = 8$ ومنه قيمة المئوي ثمانون هي : $C_{80} = 23$

ب- البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

يتم حساب المئوي من الجدول التوزيع التكراري للمتغير متقطع وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة المئوي $; k = 1,2,3,\ldots\ldots,99$ $\quad R_{C_k} = \frac{k \times N}{100}$
- تحديد قيمة المئوي C_k وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة المئوي $N_{C_k}^{\uparrow} \geq \frac{k \times N}{100}$

مثال(3-16): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30
$N_i^{\uparrow}$	3	10	20	26	30	/

أوجد قيمة المئوي ثلاثون و المئوي خمسة وستون؟

الحل:

1) المئوي ثلاثون : رتبته هي $R_{C_{30}} = 30\left(\frac{30}{100}\right) = 9$ ، قيمة العشير C_{30} وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{C_{30}}^{\uparrow} \geq 9$ومنه$C_{30} = 1$

2) المئوي خمسة وستون : رتبته هي $R_{C_{65}} = 65\left(\frac{30}{100}\right) = 19.5$، قيمة العشير C_{65} وهي أول قيمة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{C_{65}}^{\uparrow} \geq 19.5$ ومنه $C_{65} = 2$

ج- البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن حساب المئوي يتم وفق الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- تحديد رتبة المئوي $; k = 1,2,3,\ldots\ldots,99$ $\quad R_{C_k} = \frac{k \times N}{100}$
- تحديد الفئة المئوي C_k: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة المئوي $N_{C_k}^{\uparrow} \geq \frac{k \times N}{100}$

▪ حساب المئوي العشير باستخدام العلاقة التالية:[10]

$$C_k = L_{min} + \frac{\frac{k \times N}{100} - N^{\uparrow}_{C_k-1}}{n_{C_k}} \times A_{C_k} \qquad ; k = 1,2,3, \dots ,99$$

L_{min} : الحد الأدنى للفئة المئوي العشيرية

$\frac{k \times N}{100}$: رتبة المئوي (N مجموع التكرارات)

$N^{\uparrow}_{C_k-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة المئوي العشيرية

n_{C_k} : تكرار الفئة المئوية

A_{C_k} : طول الفئة المئوية

مثال (3-17): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما

فئات الأجور (10^3 دج)	عدد العمال	$N_i^{\uparrow}$
[90 ، 100[	3	3
[100 ، 110[	14	17
[110 ، 120[	11	28
[120 ، 130[	16	44
[130 ، 140[	4	48
[140 ، 150[	3	51
المجموع	51	/

المطلوب: أحسب المئوي المئوي ثلاثون ،و المئوي خمسة وستون واشرح النتيجة؟

الحل:

1) حساب التكرار المتجمع الصاعد

المئوي ثلاثون :

2) رتبة المئوي ثلاثون : $R_{C_{30}} = \frac{30 \times N}{100} = \frac{30 \times 51}{100} = 15.3$

[10] عبد الرزاق عزوز ، مرجع سبق ذكره ، ص 133.

3) تحديد فئة المئوي المئوي ثلاثون العشير الاول : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة المئوي $N^{\uparrow}_{C_{30}} \geq \frac{k\times N}{100} = 15.3$ وهي [100 ، 110[لان تكرارها المتجمع الصاعد $17 \geq 15.3$

4) حساب المئوي المئوي ثلاثون :

$$C_{30} = L_{min} + \frac{\frac{30\times N}{100} - N^{\uparrow}_{C_{30-1}}}{n_{C_{30}}} \times A_{C_{30}} = 100 + \frac{15.3-3}{14} \times 10 = 108.8$$

الشرح :هناك 30 %من العمال أجورهم أقل من 108.8 الف دينار و 70 %من العمال أجورهم أكبر من 108.8 الف دينار.

المئوي خمسة وستون

1) رتبة المئوي خمسة وستون : $R_{C_{65}} = \frac{65\times N}{100} = \frac{65\times 51}{100} = 33.15$

2) تحديد فئة المئوي خمسة وستون : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة المئوي $N^{\uparrow}_{C_{65}} \geq \frac{k\times N}{100} = 33.15$ وهي [120 ، 130[لان تكرارها المتجمع الصاعد $44 \geq 33.15$

3) حساب المئوي خمسة وستون:

$$C_{65} = L_{min} + \frac{\frac{65\times N}{100} - N^{\uparrow}_{C_{65-1}}}{n_{C_{65}}} \times A_{C_{65}} = 120 + \frac{33.15-28}{16} \times 10 = 126.22$$

الشرح :هناك 65 %من العمال أجورهم أقل من 126.22 الف دينار و 35 %من العمال أجورهم أكبر من 126.22 الف دينار.

رابعا: المتوسط الحسابي La Moyenne Arithmétique

يعتبر المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية، وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية، ويعرف المتوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها،[11] ويرمز له بالرمز $\bar{X}$

1- الطريقة المباشرة

1-1 إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما، فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم هو مجموع هذه القيم مقسوما على عددها، وتعطى علاقة المتوسط الحسابي (غير مرجح) بالصيغة التالية:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots\cdots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

مثال(3-18): تبين السلسلة التالية أجور ثمانية عمال بالدينار، أوجد المتوسط الحسابي.

1) 15000، 13000 ، 18000، 7000، 10000، 11000 ، 8000، 9000

الحل:

$$\bar{X} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$$
$$= \frac{15000 + 13000 + 18000 + 7000 + 10000 + 11000 + 8000 + 9000}{8}$$
$$= 11375$$

الأجر المتوسط للعمال هو 11375 دج

[11] شرف الدين خليل، مرجع سبق ذكره، ص 31

2-1 البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

تكون البيانات مرفقة بالترجيحات أو تكرارات او الأوزان، مثل معاملات بالنسبة لنقاط الامتحانات، أو التكرارات التي ترفق المتغيرات. إذا كانت $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_k$ تمثل قيم ظاهرة ما، مقرونة بالتكرارات التالية $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\cdots\cdots n_k$ فإن المتوسط الحسابي المرجح يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \cdots\cdots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots\cdots\cdots + n_k}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i فان $\bar{X}$:

لدينا : $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ بتعويض في صيغة $\bar{X}$ التالية :

$$\bar{X} = \frac{n_1x_1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \frac{n_2x_2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \cdots + \frac{n_kx_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

نجد:

$$\bar{X} = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots\cdots + f_kx_k$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i$$

مثال(3-19): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30

المطلوب: أحسب متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة؟

الحل:

عدد الأطفال x_i	عدد الأسر n_i	$n_i x_i$	f_i	$f_i x_i$
0	3	0	0.1	0
1	7	7	0.24	0.24
2	10	20	0.33	0.66
3	6	18	0.2	0.6
4	4	16	0.13	0.52
المجموع	30	61	1	2.02

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{61}{30} = 2.02$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 2.02$$

متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة هو 2.02

1-3 البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن قيمة x_i تساوي مركز الفئة، المتوسط الحسابي المرجح يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i فان $\bar{X}$:

$$\bar{X} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots\cdots + f_k x_k$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

مثال (3-20): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما

فئات الأجور 10^3 (دج)	]90 ، 100]	]100 ، 110]	]110 ، 120]	]120 ، 130]	]130 ، 140]	]140 ، 150]
عدد العمال	3	14	11	16	4	3

المطلوب: أحسب المتوسط الحسابي؟

الحل:

فئات الأجور	عدد العمال n_i	x_i	n_ix_i	f_i	f_ix_i
]90 ، 100]	3	95	285	0.06	5.6
]100 ، 110]	14	105	1470	0.27	28.35
]110 ، 120]	11	115	1265	0.22	25.3
]120 ، 130]	16	125	2000	0.31	38.75
]130 ، 140]	4	135	540	0.08	10.8
]140 ، 150]	3	145	435	0.06	8.7
المجموع	51	/	5995	1	117.5

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{6} n_i} = \frac{5995}{51} = 117.5$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{8} f_i x_i = 117.5$$

متوسط الأجر الشهري للعمال هو 117.5 الف دينار

2- الطريقة غير المباشرة

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون البيانات كبيرة القيم، والغرض منها تصغير قيم البيانات من أجل تسهيل عملية حساب المتوسط الحسابي، وتسمى طريقة الانحراف عن الوسط الفرضي.

2-1 إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما.

فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم بطريقة الوسط الفرضي هو :

أ- نضع: $x_i = x_0 + (x_i - x_0) \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$

ب- حيث : x_0 قيمة ثابتة يتم اختيارها من قيم السلسلة الإحصائية ، ويفضل اختيارها من وسط السلسلة بغد ترتيبها، أو قيمة تكون اقرب من قيم السلسلة.

ج- بتعويض العلاقة (I) في صيغة $\bar{X}$ نجد:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum\left(x_0 + (x_i - x_0)\right)}{N} = \frac{\sum x_0}{N} + \frac{\sum(x_i - x_0)}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{N x_0}{N} + \frac{\sum(x_i - x_0)}{N}$$

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum(x_i - x_0)}{N}$$

مثال(3-21): تبين السلسلة التالية أجور ثمانية عمال بالدينار، أوجد المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

1) 15000، 13000 ، 18000، 7000، 10000، 11000 ، 8000، 9000

الحل:

- نختار القيمة : $x_0 = 10000$ وسط السلسلة
- نحسب الانحرافات عن الوسط الفرضي

الأجر x_i	الانحرافات $x_i - x_0$
7000	-3000
8000	-2000
9000	-1000
10000	0
11000	1000
13000	3000
15000	5000
18000	8000
المجموع	11000

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum(x_i - x_0)}{N} = 10000 + \frac{11000}{8} = 11375$$

الأجر المتوسط للعمال هو 11375 دج

2-2 البيانات المتقطعة على شكل توزيع تكراري:

تكون البيانات مرفقة بالترجيحات أو تكرارات أو الأوزان، مثل معاملات بالنسبة لنقاط الامتحانات، أو التكرارات التي ترفق المتغيرات. إذا كانت $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_k$ تمثل قيم ظاهرة ما، مقرونة بالتكرارات التالية $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\cdots\cdots n_k$ فإن المتوسط الحسابي المرجح لهذه القيم بطريقة الوسط الفرضي هو:

أ- نضع: $x_i = x_0 + (x_i - x_0) \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$

ب- حيث : x_0 قيمة ثابتة يتم اختيارها من قيم البيانات ، ويفضل اختيار القيمة التي تقابل أكبر تكرار أو ترجيح .

ج- بتعويض العلاقة (I) في صيغة $\bar{X}$ نجد:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \big(x_0 + (x_i - x_0)\big)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_0}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\bar{X} = \frac{N x_0}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i **فان** $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i \big(x_0 + (x_i - x_0)\big)$$

$$\bar{X} = x_0 \sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - x_0)$$

$$\bar{X} = x_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - x_0)$$

مثال(3-22): يمثل الجدول التالي توزيع 30 أسرة حسب عدد الأطفال

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الأسر	3	7	10	6	4	30

المطلوب: أحسب متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة بطريقة الوسط الفرضي؟

الحل:

نختار القيمة : $x_0 = 2$

عدد الأطفال x_i	عدد الأسر n_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	f_i	$f_i(x_i - x_0)$
0	3	- 2	- 6	0.1	- 0.2
1	7	- 1	- 7	0.24	- 0.24
2	10	0	0	0.33	0
3	6	1	6	0.2	0.2
4	4	2	8	0.13	0.26
المجموع	30	//	1	1	0.02

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = 2 + \frac{1}{30} = 2.02$$

$$= \bar{X} = x_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0) = 2 + 0.02 = 2.02$$

متوسط عدد الأطفال في الأسرة الواحدة هو 2.02.

3-2 البيانات المستمرة على شكل توزيع تكراري:

إذا كان البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من فئات فإن قيمة x_i تساوي مركز الفئة.

المتوسط الحسابي المرجح القيم بطريقة الوسط الفرضي هو :

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i فان $\bar{X}$:

$$\bar{X} = x_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - x_0)$$

مثال (3-23): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما .

فئات الأجور (10^3) دج	]90 ، 100]	]100 ، 110]	]110 ، 120]	]120 ، 130]	]130 ، 140]	]140 ، 150]
عدد العمال	3	14	11	16	4	3

المطلوب: أحسب المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي؟

الحل: نختار القيمة : $x_0 = 125$

فئات الأجور	n_i	x_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	f_i	$f_i(x_i - x_0)$
]90 ، 100]	3	95	- 30	- 90	0.06	- 1.8
]100 ، 110]	14	105	- 20	- 280	0.27	- 5.4
]110 ، 120]	11	115	- 10	- 110	0.22	- 2.2
]120 ، 130]	16	125	0	0	0.31	0
]130 ، 140]	4	135	10	40	0.08	0.8
]140 ، 150]	3	145	20	60	0.06	1.2
المجموع	51	/	//	- 380	1	- 7.4

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{6} n_i} = 125 + \frac{-380}{51} = 117.5$$

$$\bar{X} = x_0 + \sum_{i=1}^{6} f_i(x_i - x_0) = 125 - 7.4 \approx 117.5$$

متوسط الأجر الشهري للعمال هو 117.5 الف دينار

3- خصائص المتوسط الحسابي:

1-3 الخاصية الأولى: مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$$

البرهان:

$$\sum(x_i-\bar{x})=\sum x_i-\sum\bar{x}=\sum x_i-N\bar{x} \qquad \text{(I)}$$

لدينا : $\sum x_i=N\bar{x}$ من صيغة المتوسط الحسابي بالتعويض في العلاقة (I) نجد

$$\sum(x_i-\bar{x})=N\bar{x}-N\bar{x}=0$$

2-3 الخاصية الثانية : مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل او يساوي مجموع مربع انحرافات هذه القيم عن أي قيمة أخرى x_0 حيث $\bar{x}\neq x_0$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2\leq\sum(x_i-x_0)^2$$

البرهان: انطلاق من الحد الثاني لدينا:

$$(x_i-x_0)=(x_i-\bar{x})-(x_0-\bar{x})$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$(x_i-x_0)^2=[(x_i-\bar{x})-(x_0-\bar{x})]^2$$

$$(x_i-x_0)^2=(x_i-\bar{x})^2-2[(x_i-\bar{x})-(x_0-\bar{x})]+(x_0-\bar{x})^2$$

من اجل المجموع $\sum$ نجد :

$$\sum(x_i-x_0)^2=\sum(x_i-\bar{x})^2-2\sum[(x_i-\bar{x})-(x_0-\bar{x})]+\sum(x_0-\bar{x})^2$$

$$\sum(x_i-x_0)^2=\sum(x_i-\bar{x})^2-2(x_0-\bar{x})\underbrace{\sum(x_i-\bar{x})}_{}+\sum(x_0-\bar{x})^2$$

$\sum(x_i-\bar{x})=0$ من الخاصية الأولى

$$\sum(x_i-x_0)^2=\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(x_0-\bar{x})^2$$

$$\sum(x_i-x_0)^2=\sum(x_i-\bar{x})^2+N(x_0-\bar{x})^2$$

ومنه فان:

$$\sum(x_i-\bar{x})^2 \leq \sum(x_i-x_0)^2$$

وتكون العلاقة متساوية اذا كان $\bar{x}=x_0$ لان: $N(x_0-\bar{x})^2=0$

3-3 الخاصية الثالثة:

ليكن $\bar{X}$ المتوسط الحسابي للمجتمع X، $(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots x_n)$ و $b\,,a\in\mathbb{R}$ مقدران ثابتان حقيقيان . اذا ضربنا كل متغير x_i من المجتمع X في المقدار الثابت a، نحصل على الناتج $(y_i=ax_i)$ ثم أضفنا له أو طرحنا منه المقدار الثابت b ، للحصول على المجتمع Y، $(y_1,y_2,y_3,\cdots\cdots y_n)$ حيث: $y_i=ax_i\pm b$

فان المتوسط الحسابي للمجتمع Y هو:

$$\bar{Y}=a\bar{X}\pm b$$

البرهان:

$$y_i=ax_i\pm b \quad , \quad i=1,2,3,\cdots,n$$

من اجل المجموع $\sum$ نجد:

$$\sum y_i=\sum(ax_i\pm b)=\sum ax_i\pm\sum b$$

$$\sum y_i=a\sum x_i\pm Nb$$

بقسمة الطرفين على N نجد :

$$\frac{\sum y_i}{N}=\frac{a\sum x_i}{N}\pm\frac{Nb}{N}$$

$$\bar{Y}=a\bar{X}\pm b$$

4-3 الخاصية الرابعة: ليكن $(X_1,X_2,X_3,\cdots\cdots X_k)$، K مجتمع إحصائي عدد أفراد هذه المجتمعات على التوالي $N_1,N_2,N_3,\cdots\cdots N_k$ ومتوسطاتها الحسابية على الترتيب $\bar{X}_1,\bar{X}_2,\bar{X}_3,\cdots\cdots,\bar{X}_k$ فان المتوسط الحسابي عند دمج جميع هذه المجتمعات هو:

$$\bar{X}_G=\frac{N_1\bar{X}_1+N_2\bar{X}_2+N_3\bar{X}_3+\cdots\cdots+N_k\bar{X}_k}{N_1+N_2+N_3+\cdots\cdots+N_k}$$

مثال(3-24):

شركة لديها ثلاثة وحدات والجدول التالي يبن متوسط الأجر لكل وحدة. (ألف دج)

	الوحدة الأولى	الوحدة الثانية	الوحدة الثالثة
متوسط الأجر	10000	11500	12500
عدد العمال	2000	1500	3000

المطلوب: احسب متوسط الأجر لعمال الشركة؟

الحل:

$$\bar{X}_G = \frac{N_1\bar{X}_1+N_2\bar{X}_2+N_3\bar{X}_3}{N_1+N_2+N_3} = \frac{10000\times2000+11500\times1500+12500\times3000}{2000+1500+3000}$$

$$\bar{X}_G = \frac{74750000}{6500} = 11500$$

متوسط الأجر لعمال الشركة هو 11500 ألف دينار

ملاحظة:[12]

- المتوسط الحسابي قابل للعمليات الجبرية ولا يمكن حسابه بيانيا؛
- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة أو الشاذة وهي القيم الواقعة في طرفي مجال الدراسة.
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.

[12] جلاطو جيلالي ، مرجع سبق ، ذكره، ص 33-34.

خامسا: مشتقات المتوسط الحسابي

1- المتوسط الهندسي: La Moyenne Géométrique

هو متوسطا رياضيا يستعمل عادة في حساب المعدلات مثل معدل الفائدة، معدل نمو السكان، معدل التضخم، معدل النمو الاقتصادي........الخ، أي يستعمل في الظواهر التي تتزايد بطريقة هندسية. والمتوسط الهندسي لمجموعة من القيم الموجبة هو الجذر النوني لجدائها، ويرمز له بالرمز G

1-1 إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_n$ قيم موجبة تمثل قيم ظاهرة ما، فإن المتوسط الهندسي (غير مرجح) يعطى بالصيغة التالية:

$$G = \sqrt[N]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots\cdots \times x_n}$$

$$G = (x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots\cdots \times x_n)^{\frac{1}{N}}$$

$$G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

ولتسهيل العملية الحسابية نستخدم اللوغاريتم على صيغة المتوسط الهندسي كما يلي:

$$log(G) = log(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots\cdots \times x_n)^{\frac{1}{N}}$$

$$log(G) = \frac{1}{N} log(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots\cdots \times x_n)$$

$$log(G) = \frac{1}{N} [log(x_1) + log(x_2) + \cdots + log(x_n)]$$

$$log(G) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} log(x_i)$$

ومنه فان المتوسط الهندسي هو:

$$G = 10^{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} log(x_i)\right)}$$

مثال(3-25): لتكن السلسلة التالية، أحسب المتوسط الهندسي.

1) 1، 2، 5، 7، 10، 13

الحل:

$$G = \sqrt[6]{1 \times 2 \times 5 \times 7 \times 10 \times 13} = 4.57$$

$$log(G) = \frac{1}{6}[log(1) + log(2) + log(5) + log(7) + log(10) + log(13)]$$

$$G = 10^{(0.65984)} = 4.57$$

1-2 البيانات على شكل توزيع تكراري:

لتكن البيانات التالية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_k$ تمثل قيم ظاهرة ما، مقرونة بالتكرارات (الترجيحات)التالية $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\cdots\cdots n_k$ فإن المتوسط الهندسي **المرجح** يعطى بالعلاقة التالية:

$$G = \sqrt[\sum n_i]{{x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times {x_3}^{n_3} \times \cdots\cdots \times {x_k}^{n_k}}$$

$$G = ({x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times {x_3}^{n_3} \times \cdots\cdots \times {x_k}^{n_k})^{\frac{1}{\sum n_i}}$$

$$G = \sqrt[\sum n_i]{\prod_{i=1}^{k} {x_i}^{n_i}}$$

وبإدخال اللوغاريتم على طرفي صيغة المتوسط الهندسي نجد:

$$log(G) = log({x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times {x_3}^{n_3} \times \cdots\cdots \times {x_k}^{n_k})^{\frac{1}{\sum n_i}}$$

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i} log({x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times {x_3}^{n_3} \times \cdots\cdots \times {x_k}^{n_k})$$

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i}[log({x_1}^{n_1}) + log({x_2}^{n_2}) + \cdots + log({x_k}^{n_k})]$$

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i}[n_1 log(x_1) + n_2 log(x_2) + \cdots + n_k log(x_k)]$$

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i} \sum_{i=1}^{k} n_i log(x_i)$$

ومنه فان المتوسط الهندسي هو:

$$G = 10^{log(G)} = 10^{\left(\frac{1}{\sum n_i}\sum_{i=1}^{k} n_i log(x_i)\right)}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i **فان** G :

$$G = \sqrt[1]{\prod_{i=1}^{k} {x_i}^{f_i}}$$

$$log(G) = \sum_{i=1}^{k} f_i log(x_i)$$

$$G = 10^{log(G)} = 10^{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i log(x_i)\right)}$$

مثال (3-26): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما.

فئات الأجور (10^3) دج	]90 ، 100]	]100 ، 110]	]110 ، 120]	]120 ، 130]	]130 ، 140]	]140 ، 150]
عدد العمال	3	14	11	16	4	3

المطلوب: أحسب المتوسط الهندسي؟

الحل:

فئات الأجور	n_i	x_i	$log(x_i)$	$n_i log(x_i)$	f_i	$f_i log(x_i)$
]90 ، 100]	3	95	1.9777	5.9332	0.06	0.1186
]100 ، 110]	14	105	2.0212	28.2966	0.27	0.5457
]110 ، 120]	11	115	2.0606	22.6676	0.22	0.4533
]120 ، 130]	16	125	2.0969	33.5505	0.31	0.6500
]130 ، 140]	4	135	2.1303	8.5213	0.08	0.1704
]140 ، 150]	3	145	2.1613	6.4841	0.06	0.1297
المجموع	51	/	//	105.4533	1	2.0677

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i}\sum_{i=1}^{6} n_i log(x_i) = \frac{71.9028}{51} = 2.0677$$

$$log(G) = \sum_{i=1}^{k} f_i log(x_i) = 2.0677$$

$$G = 10^{(2.0677)} = 116.87$$

متوسط الهندسي للأجر الشهري للعمال هو 116.87 ألف دينار

مثال (3-27): يبيّن الجدول التالي نسبة زيادة الواردات احدى الدول خلال الفترة 2015-2018.

السنة	2015	2016	2017	2018
النسبة %	% 17	% 18.5	% 16.8	% 20

المطلوب: إيجاد متوسط نسبة زيادة الواردات خلال هذه الفترة؟

الحل:

نستخدم العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{t = \sqrt[n]{(1 + t_1)(1 + t_2) \dots \dots \dots (1 + t_n)} - 1}$$

$$t = \sqrt[4]{(1 + 0.17)(1 + 0.185)(1 + 0.165)(1 + 0.20)} - 1$$
$$t = \sqrt[4]{(1.17)(1.185)(1.165)(1.20)} - 1 = 1.18 - 1 = 0.18$$

ومنه متوسط نسبة زيادة الواردات خلال الفترة (2015-2018) هو: $t = 18\%$

2- المتوسط التوافقي: La Moyenne Harmonique

المتوسط التوافقي هو متوسط نادر الاستعمال، يستخدم في بعض الحالات لحساب القدرة الشرائية المتوسطة لسلعة ما بدلالة سلعة أخرى، وعادة ما تكون هذه الوحدة هي الوحدة النقدية لبلد معين، وكذلك لحساب السرعة المتوسطة لمركبة على مسالك مختلفة. ويعرف على انه مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب القيم x_i ،[13] ويرمزله بالرمز H

1-1 إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_n$ تمثل قيم ظاهرة معينة، فان مقلوبات هذه القيم هي $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \cdots\cdots\cdots \frac{1}{x_n}$ والمتوسط الحسابي لهذه المقلوبات هو:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}{N}$$

ومنه فان المتوسط التوافقي هو:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

مثال(3-28): لتكن السلسلة التالية، أحسب المتوسط التوافقي.

1) 1، 2، 5، 7، 10، 13

الحل:

$$H = \frac{6}{\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{x_i}\right)} = \frac{6}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}} = \frac{6}{2.012} = 2.98$$

[13] محمد راتول ، مرجع سبق ذكره، ص 125

2-1 البيانات على شكل توزيع تكراري:

لتكن البيانات التالية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_k$ تمثل قيم ظاهرة ما، مقرونة بالتكرارات (الترجيحات)التالية $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\cdots\cdots n_k$ فإن المتوسط التوافقي المرجح يعطى بالعلاقة التالية:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{n_i}{x_i}\right)}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i فان H :

$$H = \frac{1}{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}$$

مثال (3-26): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما

فئات الأجور (10^3) دج	]90 ، 100]	]100 ، 110]	]110 ، 120]	]120 ، 130]	]130 ، 140]	]140 ، 150]
عدد العمال	3	14	11	16	4	3

المطلوب: أحسب المتوسط التوافقي؟

الحل:

فئات الأجور	n_i	x_i	$\frac{n_i}{x_i}$	f_i	$\frac{f_i}{x_i}$
]90 ، 100]	3	95	0.032	0.06	0.00063
]100 ، 110]	14	105	0.134	0.27	0.00257
]110 ، 120]	11	115	0.095	0.22	0.00191
]120 ، 130]	16	125	0.128	0.31	0.00248
]130 ، 140]	4	135	0.029	0.08	0.00059
]140 ، 150]	3	145	0.020	0.06	0.00041
المجموع	51	/	0.438	1	0.00859

$$H=\frac{\sum_{i=1}^{6}n_i}{\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{n_i}{x_i}\right)}=\frac{51}{0.438}=116.41$$

$$H=\frac{1}{\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}=\frac{1}{0.00859}=116.41$$

متوسط التوافقي للأجر الشهري للعمال هو 116.41 ألف دينار

3- المتوسط التربيعي: La Moyenne Quadratique

المتوسط التربيعي لأي مجموعة من القيم هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم، [14] ويرمزله بالرمز MQ

3-1 إذا كانت البيانات في شكل سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots\cdots\cdots x_n$ تمثل قيم ظاهرة معينة، فان المتوسط التربيعي هو:

$$MQ=\sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+\cdots+{x_n}^2}{N}}$$

$$MQ=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{N}}$$

مثال(3-28): لتكن السلسلة التالية، أحسب المتوسط التربيعي .

1) 1، 2، 5، 7، 10، 13

الحل:

$$MQ=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{N}}=\sqrt{\frac{1^2+2^2+5^2+7^2+10^2+13^2}{6}}=7.61$$

[14] محمد راتول ، مرجع سبق ذكره، ص 123

4-1 البيانات على شكل توزيع تكراري:

لتكن البيانات التالية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_k$ تمثل قيم ظاهرة ما، مقرونة بالتكرارات (الترجيحات)التالية $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\cdots\cdots n_k$ فإن المتوسط التربيعي المرجح يعطى بالعلاقة التالية:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

عندما تكون التكرارات النسبية f_i فان MQ :

$$MQ = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i {x_i}^2}$$

مثال (3-26): الجدول التالي يبين توزيع 51 عامل حسب الأجر الشهري في مؤسسة ما.

فئات الأجور (10^3) دج	]90 ، 100]	]100 ، 110]	]110 ، 120]	]120 ، 130]	]130 ، 140]	]140 ، 150]
عدد العمال	3	14	11	16	4	3

المطلوب: أحسب المتوسط التربيعي؟

الحل:

فئات الأجور	n_i	x_i	${x_i}^2$	$n_i {x_i}^2$	f_i	$f_i {x_i}^2$
]90 ، 100]	3	95	9025	27075	0.06	541.5
]100 ، 110]	14	105	11025	154350	0.27	2976.75
]110 ، 120]	11	115	13225	145475	0.22	2909.5
]120 ، 130]	16	125	15625	250000	0.31	4843.75
]130 ، 140]	4	135	18225	72900	0.08	1458
]140 ، 150]	3	145	21025	63075	0.06	1261.5
المجموع	51	/	//	712875	1	13991

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} n_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{6} n_i}} = \sqrt{\frac{712875}{51}} = 118.23$$

$$MQ = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} f_i {x_i}^2} = \sqrt{13991} \approx 118.23$$

متوسط التربيعي للأجر الشهري للعمال هو 118.23 ألف دينار

ملاحظة: مهما تكن البيانات فان:

$$MQ > \bar{X} > G > H$$

4- العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال)

عندما يكون التوزيع التكراري له منوال واحد فإن المتوسط والوسيط والمنوال تربطهم إحدى العلاقات التالية:[15]

أ- عندما تكون قيم المقاييس متساوية $\bar{X} = M_e = M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري متماثل أو متناظر. وفي حالة كان الالتواء بسيط (قليل الالتواء)، توجد علاقة لبيرسون Pearson هي: $(\bar{X} - M_o) = 3 \times (\bar{X} - M_e)$ تفيد في حساب أي مقياس بدلالة المقاييس الأخرى.

ب- عندما تكون قيم المقاييس $\bar{X} > M_e > M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري يكون ملتوي ناحية اليمين (موجب الالتواء).

ج- عندما تكون قيم المقاييس $\bar{X} < M_e < M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري يكون ملتوي ناحية اليسار (سالب الالتواء).

[15] جيلالي جلاطو، مرجع سبق ذكره، ص 54.

تمارين الفصل الثالث

تمارين محلولة

التمرين الأول:

الجدول التالي يبين أعمار التلاميذ النادي الرياضي في احدى المدارس.

فئات الأعمار	] 6.5 ,4.5]	] 8.5, 6.5]	] 10.5, 8.5]	] 12.5 , 10.5]	] 14.5 ,12.5]
عدد التلاميذ	2	5	8	4	1

المطلوب:

1) أحسب العمر الذي يستقطب أكثر التلاميذ مع الشرح؟
2) أحسب العمر الوسيطي مع الشرح؟
3) حدد قيمة الربيع الثالث ، العشير السادس ، المئوي 85 ،مع شرح النتائج ؟
4) أحسب متوسط العمر للتلاميذ؟
5) احسب المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي؟

الحل:

فئات الأعمار	n_i	x_i	$N_i^{\uparrow}$	$n_i x_i$	$n_i log(x_i)$	$\frac{n_i}{x_i}$	$n_i {x_i}^2$
] 6.5 ,4.5]	2	5.5	2	11	1.4806	0.363	60.5
] 8.5, 6.5]	5	7.5	7	37.5	4.375	0.666	281.25
] 10.5, 8.5]	8	9.5	15	76	7.8216	0.842	722
]12.5 , 10.5]	4	11.5	19	46	4.2424	0.347	529
]14.5 ,12.5]	1	13.5	20	13.5	1.1303	0.070	182.25
المجموع	20	//	//	184	19.0499	2.292	1775

1) العمر الذي يستقطب أكثر التلاميذ:

لدينا الفئات متساوية الطول ومنه فان: الفئة المنوالية **[10.5, 8.5]** لأنها تقابل أكبر تكرار

حساب المنوال:

$$\Delta_1 = 8 - 5 = 3 \qquad , \qquad \Delta_2 = 8 - 4 = 4$$

$$M_o = L_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times A_{M_O} = 8.5 + \frac{3}{3+4} \times 2 = 9.357$$

أغلبية التلاميذ أعمارهم 9.357 سنة.

2) العمر الوسيطي:

حساب التكرار المتجمع الصاعد

رتبة الوسيط: $R_{M_e} = \frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$

تحديد الفئة الوسيطية : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة الوسيط

$N_{M_e}^{\uparrow} \geq \frac{N}{2} = 10$ وهي [10.5, 8.5] لان تكرارها المتجمع الصاعد $15 \geq 10$

حساب الوسيط:

$$M_e = L_{min} + \frac{\frac{N}{2} - N_{M_e-1}^{\uparrow}}{n_{M_e}} \times A_{M_e} = 8.5 + \frac{10-7}{8} \times 2 = 9.25$$

الشرح :هناك 50% من التلاميذ أعمارهم أقل من 9.25 سنة و 50% من التلاميذ أعمارهم أكبر من 9.25 سنة

3) قيمة الربيع الثالث، العشير السادس، المئوي 85:

الربيع الثالث:

رتبة الربيع الثالث : $R_{Q_3} = \frac{3 \times N}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15$

تحديد فئة الربيع الثالث : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبةالربيع

$N_{Q_3}^{\uparrow} \geq \frac{3 \times N}{4} = 15$ وهي[10.5, 8.5] لان تكرارها المتجمع الصاعد $15 \geq 15$

حساب الربيع الثالث :

$$Q_3 = L_{min} + \frac{\frac{3 \times N}{4} - N_{Q_{k-1}}^{\uparrow}}{n_{Q_3}} \times A_{Q_3} = 8.5 + \frac{15-15}{8} \times 2 = 8.5$$

الشرح :هناك 75 % من التلاميذ أعمارهم أقل من 8.5 سنة و 25 % من التلاميذ أعمارهم أقل من 8.5 سنة.

العشير السادس

رتبة العشير السادس: $R_{D_6} = \frac{6 \times N}{10} = \frac{6 \times 20}{10} = 12$

تحديد فئة العشير السادس: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة العشير $N_{D_6}^{\uparrow} \geq \frac{k \times N}{10} = 12$ وهي [10.5, 8.5] لان تكرارها المتجمع الصاعد $15 \geq 12$

حساب العشير السادس:

$$D_6 = L_{min} + \frac{\frac{6\times N}{10} - N^{\uparrow}_{D_{6-1}}}{n_{D_6}} \times A_{D_6} = 8.5 + \frac{12-7}{8} \times 2 = 9.75$$

الشرح :هناك 60 % من التلاميذ أعمارهم أقل من 9.75 سنة و 40% من التلاميذ أعمارهم أكبر من 9.75 سنة

المئوي خمسة وثامنون:

رتبة المئوي خمسة وثامنون: $R_{C_{85}} = \frac{85\times N}{100} = \frac{85\times 20}{100} = 17$

تحديد فئة المئوي خمسة وستون : وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد يساوي أو أكبر من رتبة المئوي $N^{\uparrow}_{C_{85}} \geq \frac{k\times N}{100} = 17$ وهي [10.5 , 12.5[لان تكرارها المتجمع الصاعد $19 \geq 17$

حساب المئوي خمسة وثامنون:

$$C_{85} = L_{min} + \frac{\frac{85\times N}{100} - N^{\uparrow}_{C_{85-1}}}{n_{C_{85}}} \times A_{C_{85}} = 10.5 + \frac{17-15}{4} \times 2 = 11.5$$

الشرح :هناك 85 % من التلاميذ أعمارهم أقل من 11.5 سنة و 15 % من التلاميذ أعمارهم أكبر من 11.5 سنة.

4) متوسط العمر للتلاميذ:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{184}{20} = 9.2 \quad \text{سنة}$$

5) المتوسط الهندسي لأعمار التلاميذ:

$$log(G) = \frac{1}{\sum n_i} \sum_{i=1}^{5} n_i log(x_i) = \frac{19.0499}{20} = 0.9524$$

$$G = 10^{(0.9524)} = 8.96 \quad \text{سنة}$$

المتوسط التوافقي لأعمار التلاميذ:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i}{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{n_i}{x_i}\right)} = \frac{20}{2.292} = 8.72 \quad \text{سنة}$$

المتوسط التربيعي لأعمار التلاميذ :

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} n_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{5} n_i}} = \sqrt{\frac{1775}{20}} = 9.42 \quad \text{سنة}$$

$$MQ > \bar{X} > G > H$$

$$9.42 > 9.2 > 8.96 > 8.72$$

التمرين الثاني:

يبيّن الجدول التالي نسبة زيادة الصادرات احدى الدول خلال الفترة 2012-2017 .

السنة	2012	2013	2014	2015	2016	2017
النسبة %	% 14	% 15.5	% 16.2	% 14.8	% 15	% 16.5

المطلوب: إيجاد متوسط نسبة زيادة الواردات خلال هذه الفترة؟

الحل:

نستخدم العلاقة التالية:

$$t = \sqrt[n]{(1+t_1)(1+t_2)\dots\dots\dots(1+t_n)} \quad -1$$

$$t = \sqrt[6]{(1.14)(1.155)(1.162)(1.148)(1.15)(1.165)} \; -1 = 0.1533$$

ومنه متوسط نسبة زيادة الصادرات خلال الفترة (2012-2017) هو: $t = 15.33\%$

التمرين الثالث:

اشترى شخص بقيمة 300 دج مجموعة من الأسهم بسعر 10 دينار للسهم واشترى بقيمة 350 دج مجموعة أخرى من الأسهم بسعر 7 دينار للسهم ثم اشترى بقيمة 320 دج مجموعة أخرى من الأسهم بسعر 8 دينار للسهم.

المطلوب: ما هو متوسط السعر للسهم؟

الحل: باستخدام المتوسط التوافقي

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{3} n_i}{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{n_i}{x_i}\right)} = \frac{300 + 350 + 320}{\frac{300}{10} + \frac{350}{7} + \frac{320}{8}} = \frac{970}{120} = 8.08$$

ومنه متوسط السهم هو 8.08 دج

ملاحظة: في حالة استخدام المتوسط الحسابي يجب معرفة عدد الأسهم مشتراة الكلية كما يلي:

المبلغ	سعر السهم	عدد الأسهم المشتراة
300	10	30
350	7	50
320	8	40
970	////	120

متوسط سهم هو:

$$\bar{X} = \frac{\text{الكلفة الاجمالية}}{\text{عدد الاسهم}} = \frac{970}{120} = 8.08$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

الجدول التالي يبين N عامل موزعين حسب أجورهم الشهرية في مؤسسة تعليمية.

الأجر (10^3) دج	]20, 25]	]25, 30]	]30, 35]	]35, 40]
عدد العمال	20	n_2	50	10

المطلوب:

1) إذا كان الوسيط يساوي $M_e = 30.5$ أوجد n_2؟
2) أحسب كلا من: $Q_1 . Q_3 . D_3 . D_7 . C_{15} . C_{92}$

التمرين الثاني:

الجدول التالي يبين توزيع عمال مؤسسة ما، حسب الأجور الشهرية

الأجر (10^3) دج	]10-15]	]15-25]	]25-30]	]30-45]	]45-55]	]55-60]
عدد العمال	10	15	20	15	10	5

المطلوب:

1) أوجد قيمة المنوال؟
2) احسب المتوسط الحسابي والوسيط؟
3) قارن بين قيمة المنوال والمتوسط الحسابي والوسيط؟

التمرين الثالث:

الجدول يبين توزيع 229 أسرة حسب عدد الأطفال في كل أسرة

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	5	6	7	8
عدد الأسر	48	65	44	27	19	15	8	2	1

المطلوب:

1) أوجد قيمة المنوال؟
2) احسب المتوسط الحسابي والوسيط؟
3) قارن بين قيمة المنوال والمتوسط الحسابي والوسيط؟

التمرين الرابع:

ليكن التكرار المتجمع الصاعد للظاهرة (X) على الشكل التالي 10، 30، 70، 90، 100.

فإذا علمت أن طول الفئة عبارة عن جداء التكرار المطلق الأول والتكرار المطلق الأخير، وأن الحد الأعلى للفئة الثالثة عبارة عن جداء تكرار المطلق للفئة الثانية وتكرار المطلق للفئة الرابعة.

المطلوب:

1) إعادة تكوين جدول التوزيع التكراري؟
2) حساب كل من المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال؟

التمرين الخامس:

اشترى شخص بقيمة 30000 دينار مجموعة من الأسهم بسعر 100 دينار للسهم، واشترى بقيمة 40000 دينار مجموعة من الأسهم بسعر 70 دينار للسهم، و اشترى بقيمة 36000 دينار مجموعة من الأسهم بسعر 85 دينار للسهم، ثم اشترى بقيمة 32000 دينار مجموعة من الأسهم بسعر 90 دينار للسهم.

المطلوب: ما هو متوسط السعر للسهم؟

التمرين السادس:

إذا كانت نسبة زيادة الدخل الوطني الخام خلال فترة المخطط الرباعي معطاة في الجدول التالي:

السنة	1970	1971	1972	1973
النسبة %	7.2	6.3	7	4.3

المطلوب: ما هي نسبة الزيادة المتوسطة خلال هذه الفترة؟

التمرين السابع:

يبن الجدول التالية معدل زيادة الأرباح التي حققتها شركة معينة خلال فترة رئاسة ثلاث مديرين.

	المدير الأول			المدير الثاني		المدير الثالث			
فترة الرئاسة	ثلاثة سنوات			سنتين		أربعة سنوات			
معدل زيادة الربح	% 5.8	% 6	% 5.5	% 5	% 4.6	% 7.2	% 7.2	% 8	% 8.5

المطلوب: إيجاد معدل زيادة الأرباح خلال الفترة كاملة؟

التمرين الثامن:

قطع مسافر المسافة الكلية بين مدينتين على ثلاث مراحل، نسبة مسافة كل مرحلة من المسافة الكلية هي: 15 % ، 20 %، 25 %، 40 %، ومتوسط السرعة لكل مرحلة 90 كم/سا ،100 كم/سا، 120 كم/سا ، 130 كم/سا.

المطلوب: أوجد متوسط سرعة هذا المسافر على طول المسافة؟

التمرين التاسع:

وضع تاجر في بنك 2000 دج كوديعة لمدة 9 سنوات، حيث أن معدل فائدة لأربع سنوات الأولى 4 %، وثلاث سنوات التالية 3%، والسنتين الباقيتين 2 %.

المطلوب:

1) معدل سعر الفائدة خلال كل المدة؟
2) ما هي قيمة المبلغ في نهاية المدة الكلية؟

مقاييس التشتت

عند مقارنة مجموعتين من البيانات، يمكن استخدام شكل التوزيع التكراري، أو المنحنى التكراري، وكذلك بعض مقاييس النزعة المركزية، مثل الوسط الحسابي والوسيط، والمنوال، ولكن استخدام هذه الطرق وحدها لا يكفي عند المقارنة، فقد يكون مقياس النزعة المركزية
للمجموعتين متساوي، وربما يوجد اختلاف كبير بين المجموعتين من حيث مدى تقارب وتباعد البيانات من بعضها البعض، أو مدى تباعد أو تقارب القيم عن مقياس النزعة المركزية.

من أجل ذلك لجأ الإحصائيون إلى استخدام مقاييس التشتت لمعرفة مدى تجانس البيانات، أو مدى انتشارها حول مقياس النزعة المركزية، كما يمكن استخدام مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات.[1]

يقصد بالتشتت الانتشار أو تباعد مجموعة من القيم عن بعضها البعض أو عن قيمة مركزية، وتعطي مقاييس التشتت درجة تباعد أو تقارب مفردات البيانات الإحصائية، فكلما كانت متقاربة تكون البيانات متجانسة، وكلما كانت متباعدة تكون البيانات مشتتة.

ومن هذه المقاييس: المدى، والانحراف الربيعي، والانحراف المتوسط، والتباين، والانحراف المعياري، معامل الاختلاف وغيرها.

1- المدى العام: L’étendue

المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة في البيانات ويرمز له بالرمز E ويعطى بالعلاقة التالية:

$$E = X_{max} - X_{min}$$

1-1 خواص المدى العام:

يستخدم في مراقبة الجودة ووصف حالات الطقس، والمناخ الجوي، مثل درجات الحرارة، والرطوبة، والضغط الجوي، وهو بسيط وسهل الحساب.

ومن عيوبه أنه يعتمد على قيمتين فقط، ويتأثر بالقيم الشاذة، لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

[1] خليل شرف الدين، مرجع سبق ذكره، ص 52.

2- المدى الربيعي: l’intervalle interquartile

هو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول، وهو الذي يحذف 25 % من البيانات من الأعلى و25 % من البيانات من الأسفل، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$IQ = Q_3 - Q_1$$

1-2 خواص المدى الربيعي:

- يضم 50 % من الوحدات الإحصائية التي تقع في منتصف التوزيع، مهما كان التوزيع الإحصائي
- استعمالاته محدودة، لكنه أفضل من المدى العام
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة ويمكن حسابه بيانيا.
- يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

3- الانحراف الربيعي: L'écart quartile

يعرف الانحراف الربيعي بنصف المدى الربيعي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$EQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

1-3 خواص الانحراف الربيعي:

من مزايا الانحراف الربيعي، انه يستخدم في حالة وجود قيم شاذة، كما أنه بسيط وسهل في الحساب. ومن عيوبه أنه لا يأخذ كل القيم في الاعتبار.

4- المدى المئيني:

هو الفرق بين المئوي تسعون والمئوي العاشر، وهو الذي يحذف 10 % من البيانات من الأعلى و10 % من البيانات من الأسفل، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$P_{90} - P_{10} = D_9 - D_1$$

5- الانحراف المتوسط: L'écart moyen

هو المتوسط الحسابي لانحرافات أفراد البيانات عن القيمة المركزية $\bar{X}$ أو M_e ، بالقيمة المطلقة، ويعطى بالعلاقة التالية:

1-5 الانحراف المتوسط عن المتوسط الحسابي:

أ- سلسلة إحصائية:

$$EM_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|}{N}$$

ب- توزيع تكراري

$$EM_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i|X_i - \bar{X}|}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$EM_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{k} f_i|X_i - \bar{X}|$$

2-5 الانحراف المتوسط عن الوسيط:

أ- سلسلة إحصائية:

$$EM_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - M_e|}{N}$$

ب- توزيع تكراري

$$EM_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i|X_i - M_e|}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$EM_{M_e} = \sum_{i=1}^{k} f_i|X_i - M_e|$$

3-5 خواص الانحراف المتوسط:

من مزايا الانحراف المتوسط أنه يأخذ كل القيم في الاعتبار، ومن عيوبه يتأثر بالقيم الشاذة، لا يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

مثال (4-1):

الجدول التالي يبين رقم أعمال مجموعة من المؤسسات الاقتصادية، الوحدة (مليون دج)

رقم الأعمال (10^6)	عدد المؤسسات
]10 ، 20]	2
]20 ، 30]	5
]30 ، 40]	10
]40 ، 50]	8
المجموع	25

المطلوب:

1) أحسب المدى العام؟
2) أحسب المدى الربيعي؟
3) أحسب الانحراف الربيعي؟
4) أحسب الانحراف المتوسط؟

الحل:

رقم الأعمال	n_i	x_i	$N_i^{\uparrow}$	n_ix_i	$n_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i-M_e\rvert$
]10 ، 20]	2	15	2	30	39.2	41
]20 ، 30]	5	25	7	125	48	52.5
]30 ، 40]	10	35	17	350	4	5
]40 ، 50]	8	45	25	360	83.2	76
المجموع	25	//	//	865	174.4	174.5

1) المدى العام:

$$E = X_{max} - X_{min} = 45 - 15 = 30$$

2) المدى الربيعي:

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 42.19 - 28.5 = 13.7$$

طول المجال الذي تنتشر فيه 50 % من المؤسسات هو 13.7 مليون دج.

3) الانحراف الربيعي:

$$EQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13.7}{2} = 6.85$$

طول المجال الذي تنتشر فيه 25 % من المؤسسات هو 6.85 مليون دج.

4) الانحراف المتوسط:

$M_e = 35.5$ و $\bar{X} = 34.6$

$$EM_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |X_i - \bar{X}|}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{174.4}{25} = 6.976$$

$$EM_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |X_i - M_e|}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{174.5}{25} = 6.98$$

6- التباين: Variance

هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي ويرمز له بالرمز $V(X)$ ، σ^2 ويعطى بالعلاقة التالية:

أ- سلسلة إحصائية:

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{N} - \bar{X}^2$$

ب- توزيع تكراري (تكرار المطلق)

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} - \bar{X}^2$$

ج- توزيع تكراري (تكرار النسبي)

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = V(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)^2 - \bar{X}^2$$

7- الانحراف المعياري: L'écart-type

يعتبر من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت، وأكثرها استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية، ويرمز له بالرمز σ وهو الجذر التربيعي للتباين.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

أ- سلسلة إحصائية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{N} - \bar{X}^2}$$

ب- توزيع تكراري (تكرار المطلق)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} - \bar{X}^2}$$

ج- توزيع تكراري (تكرار النسبي)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)^2 - \bar{X}^2}$$

د- خصائص الانحراف المعياري:

- الانحراف المعياري للمقدار الثابت a يساوي صفر. $\sigma(a) = 0$
- اذا كان المجتمع X، $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$ وأضفنا له أو طرحنا منه المقدار الثابت b ، للحصول على المجتمع Y، $(y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n)$ حيث: $y_i = x_i \pm b$ فان الانحراف المعياري للمجتمع Y هو:

$$\sigma(\mathrm{Y}) = \sigma(\mathrm{X} \pm \mathrm{b}) = \sigma(\mathrm{X})$$

- اذا كان المجتمع X، $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$ وضربنا كل متغير x_i من المجتمع X في المقدار الثابت a، نحصل على الناتج $(y_i = ax_i)$ فان الانحراف المعياري للمجتمع Y هو:

$$\sigma(\mathrm{Y}) = \sigma(\mathrm{aX}) = |a|\sigma(\mathrm{X})$$

- اذا كانت مجموعتين مكونتان من N_1, N_2 من البيانات و تباينهما معطى ب σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب، والمتوسط الحسابي للمجموعتين متساوي $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ فإن التباين عند دمج هاتين المجموعتين هو:

$$\sigma_{1+2}^2 = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2}$$

- أما إذا كان المتوسط الحسابي للمجموعتين غير متساوي $\bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$فان التباين عند دمج المجموعتين هو:

$$\sigma_{1+2}^2 = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2 + N_1(\bar{X}_1 - \bar{X}_G)^2 + N_2(\bar{X}_2 - \bar{X}_G)^2}{N_1 + N_2}$$

حيث : $\bar{X}_G$ المتوسط الحسابي للمجموعتين معا

مثال (2-4):

الجدول التالي يبين رقم أعمال مجموعة من المؤسسات الاقتصادية، الوحدة (مليون دج)

رقم الأعمال (10^6)	عدد المؤسسات
]20 ، 10]	2
]30 ، 20]	5
]40 ، 30]	10
]50 ، 40]	8
المجموع	25

المطلوب :

1) أحسب الانحراف المعياري؟

الحل:

المتوسط الحسابي يساوي: $\bar{X} = 34.6$

رقم الأعمال	n_i	f_i	x_i	$n_i(x_i-\bar{x})^2$	$n_i(x_i)^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i)^2$
]20 ، 10]	2	0.08	15	768.32	450	30.7328	18
]30 ، 20]	5	0.2	25	460.8	3125	18.432	125
]40 ، 30]	10	0.4	35	1.6	12250	0.064	490
]50 ، 40]	8	0.32	45	865.28	16200	34.6112	648
المجموع	25	1	//	2096	32025	83.84	1281

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{4} n_i}} = \sqrt{\frac{2096}{25}} = \sqrt{83.84} = 9.156$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{32025}{25} - (34.6)^2} = 9.156$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{83.84} = 9.156$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{1281 - 1197.16} = 9.156$$

8- مقاييس التشتت النسبية:

عندما تكون وحدات القياس مختلفة أو المتوسطات الحسابية غير متساوية تستعمل مقاييس أخرى للمقارنة بين المجموعات والتي تلغي وحدات القياس تسمى مقاييس التشتت النسبية،ومن أهمها مايلي:

1-8 معامل الاختلاف المعياري : Coefficient de variation

وهو عبارة عن النسبة المئوية للانحراف المعياري منسوبا إلى المتوسط الحسابي، فكلما كانت قيمة هذا المعامل كبيرة دّل ذلك على وجود تشتت كبير بين مفردات التوزيع والعكس صحيح، ويرمز بالرمز CV ويعطى بالعلاقة التالية:

$$C.V = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} \times 100$$

خواص معامل الاختلاف المعياري :

- يقيس الاختلاف النسبي دون وحدة تمييز.
- ليس له معنى إذا كانت المتوسطات الحسابية معدومة.

2-8 معامل الاختلاف الربيعي: Coefficient de variation quartile

يستخدم هذا المعامل في حالة توزيع تكراري مفتوح، ويرمز له بالرمز C. Q. V، و يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{C.Q.V} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

مثال (4-3):

الجدول التالي يبين نتائج المثال (4-2) ونتائج التمرين الأول فصل الثالث.

	Q_1	Q_3	$\bar{X}$	$\sigma(x)$
المجتمع الأول (رقم الأعمال مليون دج)	28.5	42.19	34.6	9.156
المجتمع الثاني (أعمار تلاميذ بالسنوات)	7.7	8.5	9.2	2.0273

المطلوب: قارن بين المجتمعين.

الحل:

أ- معامل الاختلاف المعياري:

$$C.V_1 = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} \times 100 = \frac{9.156}{34.6} \times 100 = 26.46\ \%$$

$$C.V_2 = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2.0273}{9.2} \times 100 = 22.03\ \%$$

ب- معامل الاختلاف الربيعي:

$$\mathrm{C.Q.V_1} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{42.19 - 28.5}{42.19 + 28.5} = 19.50\ \%$$

$$\mathrm{C.Q.V_2} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{8.5 - 7.7}{8.5 + 7.7} = 4.93\ \%$$

بما أن $C.V_1 > C.V_2$ و $\mathrm{C.Q.V_1} > \mathrm{C.Q.V_2}$ فإن تشتت البيانات في المجتمع الأول أكبر مما هو عليه في المجتمع الثاني، أي أن الفوارق في توزيع البيانات أكبر في المجتمع الأول، وبالتالي فإن بيانات المجتمع الثاني أكثر تقاربا من بيانات المجتمع الأول.

ومنه فان المجتمع الثاني هو الأفضل، لأن الفوارق بين البيانات قليلة. أما المجتمع الأول فان الفوارق بين البيانات كبيرة.

تمارين الفصل الرابع

تمارين محلولة

التمرين الأول:

الجدول التالي يوضح الإنفاق الشهري لعينة من الأسر في مدينتين A و B. الوحدة (ألف دج)

الإنفاق	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	]45-40]	]50-45]
المدينة A	2	15	30	24	19	10
المدينة B	32	35	15	10	6	2

المطلوب: قارن مستوى وتشتت الإنفاق بين المدينتين؟ أيهما أحسن؟ لماذا؟

الحل:

	المدينة A				المدينة B		
الإنفاق	n_i	x_i	n_ix_i	$n_i(x_i-\bar{x})^2$	n_i	n_ix_i	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
]25 ، 20]	2	22.5	45	372.645	32	720	1331.28
]30 ، 25]	15	27.5	412.5	1122.3375	35	962.5	73.5875
]35 ، 30]	30	32.5	975	399.675	15	487.5	189.0375
]40 ، 35]	24	37.5	900	43.74	10	375	731.025
]45 ، 40]	19	42.5	807.5	766.1275	6	255	1101.615
]50 ، 45]	10	47.5	475	1288.225	2	95	688.205
المجموع	100	//	3615	3992.75	100	2895	4114.75

$$\bar{X}_A=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i}=\frac{\sum_{i=1}^{6}n_ix_i}{\sum_{i=1}^{6}n_i}=\frac{3615}{100}=36.15$$ الف دج

$$\bar{X}_B=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i}=\frac{\sum_{i=1}^{6}n_ix_i}{\sum_{i=1}^{6}n_i}=\frac{2895}{100}=28.95$$ الف دج

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{6}n_i}}=\sqrt{\frac{3992.75}{100}}=6.32$$ الف دج

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{6} n_i}} = \sqrt{\frac{4114.75}{100}} = 6.414 \quad \text{الف دج}$$

مقارنة مستوى الإنفاق:

لدينا $\bar{X}_A > \bar{X}_B$ وبالتالي فإن مستوى الإنفاق في المدينة A، أكبر مما هو عليه في المدينة B.

مقارنة تشتت الإنفاق:

بما أن $\bar{X}_A \neq \bar{X}_B$ فإننا نستخدم مقاييس التشتت النسبية لمقارنة تشتت الإنفاق في المدينتين، حيث يتم حساب معامل الاختلاف المعياري كما يلي:

$$C.V_A = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}_A} \times 100 = \frac{6.32}{36.15} \times 100 = 17.48\ \%$$

$$C.V_B = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}_B} \times 100 = \frac{6.414}{28.95} \times 100 = 22.15\ \%$$

بما أن $C.V_B > C.V_A$ فإن تشتت الإنفاق في المدينة B أكبر مما هو عليه في المدينة A ، أي أن الفوارق في توزيع الإنفاق أكبر في المدينة B ، وبالتالي فإن إنفاق أسر المدينة A أكثر تقاربا من إنفاق أسر المدينة B.

ومنه فان مستوى إنفاق أسر المدينة A هو الأفضل، لأن معدل الإنفاق أكبر والفوارق بين إنفاق الأسر قليلة. أما المدينة B فان معدل الإنفاق أقل والفوارق بين إنفاق الأسر كبيرة.

التمرين الثاني

أخذت عينتان (A و B) من مجتمعين X وY فأعطتا النتائج التالية:

العينة A		العينة B	
$\sum_{i=1}^{35} x_i = 245$	$\sum_{i=1}^{35} x_i^2 = 1890$	$\sum_{i=1}^{45} y_i = 405$	$\sum_{i=1}^{45} y_i^2 = 3825$

المطلوب:

1) أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل عينة؟

2) إذا دمجت العينتان، ما هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجموعة الناتجة؟

3) قارن بين العينتين؟

الحل:

1) حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل عينة:

العينة **A**:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{35} x_i}{N} = \frac{245}{35} = 7$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{35} (x_i)^2}{N} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{1890}{35} - (7)^2} = 2.23$$

العينة **B** :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{45} y_i}{N} = \frac{405}{45} = 9$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{45} (y_i)^2}{N} - \bar{Y}^2} = \sqrt{\frac{3825}{45} - (9)^2} = 2$$

2) المتوسط الحسابي للمجموعة الناتجة:

$$\bar{X}_G = \frac{N_1\bar{X} + N_2\bar{Y}}{N_1 + N_2} = \frac{35 \times 7 + 45 \times 9}{35 + 45} = 8.125$$

الانحراف المعياري للمجموعة الناتجة

$$\sigma^2{}_{X+Y} = \frac{N_1\sigma_X{}^2 + N_2\sigma_Y{}^2 + N_1(\bar{X} - \bar{X}_G) + N_2(\bar{Y} - \bar{X}_G)}{N_1 + N_2}$$

$$\sigma^2{}_{X+Y} = \frac{(35\times5)+(45\times4)+35(7-8.125)^2+45(9-8.125)^2}{35+45} = 5.4219$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{5.4219} = 2.328$$

أو

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{35}(x_i)^2+\sum_{i=1}^{45}(y_i)^2}{N_1+N_2} - \bar{X}_G^{\ 2}} = \sqrt{\frac{1890+3825}{80} - (8.125)^2}$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{5.4219} = 2.328$$

3) المقارنة بين العينتين:

أ- مقارنة المعدل :

لدينا $\bar{Y} > \bar{X}$ وبالتالي فإن متوسط العينة Y ، أكبر مما هو عليه في العينة X.

ب- مقارنة تشتت :

بما أن $\bar{X}_A \neq \bar{X}_B$ فإننا نستخدم مقاييس التشتت النسبية لمقارنة تشتت في العينتين، حيث يتم حساب معامل الاختلاف المعياري كما يلي:

$$C.V_X = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} \times 100 = \frac{2.23}{7} \times 100 = 31.85\ \%$$

$$C.V_Y = \frac{\sigma(y)}{\bar{Y}} \times 100 = \frac{2}{9} \times 100 = 22.22\ \%$$

بما أن $C.V_X > C.V_Y$ فإن تشتت البيانات في العينة X أكبر مما هو عليه في العينة Y ، أي أن الفوارق في توزيع البيانات أكبر في العينة X ، وبالتالي فإن بيانات العينة Y أكثر تقاربا من بيانات العينة X.

ومنه فان العينة Y هي الأفضل، لأن المعدل أكبر والفوارق بين البيانات قليلة. أما العينة X فان المعدل أقل والفوارق بين البيانات كبيرة.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

يبين الجدول العمر الذي أصيب فيه 100 شخص بمرض السكري لأول مرة؟

العمر بالسنة	]10-0]	]20-10]	]30-20]	]40-30]	]50-40]	]60-50]	]70-60]	]80-70]	]90-80]
العدد	1	3	10	14	18	34	12	6	2

المطلوب:

1) أحسب المدى العام، المدى الربيعي، نصف المدى الربيعي؟

2) أحسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري؟

التمرين الثاني:

يريد مدرب أن يختار فوج للمشاركة في السباق، الفوز في السباق يكون حسب الأفواج. عند هذا المدرب فوجان **A**، **B**، أجرى اختبارا تجريبيا للفوجين على مسافات مختلفة لتحديد عدد الأشخاص الذين يقطعون هذه المسافات من كل فوج، فكانت النتائج التالية:

المسافة بالمتر	]1500-1000]	]2000-1500]	]2500-2000]	]3000-2500]	]3500-3000]
عدد الأشخاص **A**	3	4	1	1	1
عدد الأشخاص**B**	1	1	3	4	1

المطلوب: ما هو الفوج الذي يختار المدرب لإجراء السباق؟

التمرين الثالث:

الجدول يبين أرباح الشركتين X، **Y** لفترة معينة بملايين دج.

الشركة X	10	50	45	65	10
الشركة Y	40	30	35	40	35

المطلوب: أي الشركتين أفضل في نظرك ولماذا؟

التمرين الرابع:

بصفتك رئيس مصلحة التموين وكلفت بشراء أجهزة من شركتين **A**، **B**. وللقيام بهذه العملية أخذت عينة من كل شركة ثم حسبت العدد الأقصى لساعات تشغيل هذه الأجهزة فتحصلت على البيانات التالية:

عدد الساعات	]500-600]	]600-700]	]700-800]	]800-900]	]900-1000]
عدد الأجهزة في العينة A	8	10	13	11	8
عدد الأجهزة في العينة B هي 50					
التكرار المتجمع المئوي % للعينة B	30	68	88	96	100

المطلوب: حدد الشركة التي تختارها لشراء الأجهزة منها.

التمرين الخامس:

لدينا معدل إنتاج العامل الواحد في معملي إنتاج الأحذية خلال فترة شهر ومقدار الانحراف المعياري.

المعمل A	$\sigma = 500$	$\overline{X} = 1500$
المعمل B	$\sigma = 400$	$\overline{X} = 1400$

المطلوب: أوجد أي من المعملين أقل تشتتاً؟

التمرين السادس :

أخذت عينتان (A و B) من مجتمعين X وY فأعطتا النتائج التالية:

العينة A		العينة B	
$\sum_{i=1}^{25} x_i = 225$	$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 2100$	$\sum_{i=1}^{30} y_i = 300$	$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 3120$

المطلوب:

1) أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل عينة؟
2) إذا دمجت العينتان، ما هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجموعة الناتجة؟
3) قارن بين العينتين؟

مقاييس الشكل

عند تمثيل بيانات الظاهرة في شكل منحني تكراري، فإن هذا المنحني يأخذ أشكالا مختلفة، فقد يكون هذا المنحنى متماثل، بحيث يكون المتوسط والوسيط والمنوال كلهم يقعون على نقطة واحدة، ولكن في كثير من الحالات يكون هناك قيم كبيرة في البيانات تجذب إليها الوسط الحسابي، وهذا معناه أن المنحنى التكراري سوف يكون له التواء جهة اليمين، وكذلك العكس لو أن البيانات بها قيم صغيرة، فإنها تجذب الوسط إليها، ويدل المنحني التكراري على وجود التواء جهة اليسار.

كما يمكن من خلال الشكل البياني معرفة ما إذا كان توزيع البيانات منبسط، أو مدبب، ويتم تحديد شكل التوزيع التكراري بواسطة مقياسي الالتواء، والتفرطح، والتي التي تعتمد على العزوم البسيطة والعزوم المركزية.

1- العزوم: Les Moments

العزوم عبارة عن قيم إحصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر) أو حول المتوسط الحسابي، أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، وعلى هذا الأساس نميز نوعان من العزوم: العزوم البسيطة والعزوم المركزية.

والعبارة العامة للعزوم هي:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots\cdots x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما، ولتكن الدرجة r لهذه السلسلة بالنسبة ل a هو:

أ- البيانات على شكل سلسلة إحصائية:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^r}{N}$$

ب- البيانات على شكل توزيع تكراري:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - a)^r}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

1-1 العزوم البسيطة: $(a = 0)$

العزم البسيط من الدرجة r هو عبارة عن الوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي مرفوعة إلى القوة r.

أ- البيانات شكل سلسلة إحصائية:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^r}{N}$$

ب- البيانات على شكل توزيع تكراري:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i)^r}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ج- وتكون العزوم البسيطة الخاصة كما يلي:

- إذا كان $r = 1$

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^1}{N} = \bar{X}$$

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i)^1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \bar{X}$$

- إذا كان $r = 2$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{N} = MQ$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = MQ$$

2-1 العزوم المركزية: ($a = \bar{X}$)

العزم المركزي من الدرجة r هي قيم إحصائية تتمركز حول الوسط الحسابي.

أ- البيانات على شكل سلسلة إحصائية:

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r}{N}$$

ب- البيانات على شكل توزيع تكراري:

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ج- وتكون العزوم المركزية الخاصة كما يلي:

- إذا كان $r = 1$

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^1}{N} = 0$$

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = 0$$

- إذا كان $r = 2$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^1}{N} = \sigma^2$$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \sigma^2$$

العلاقة بين العزوم البسيطة والعزوم اللامركزية:

يمكن حساب قيم العزوم المركزية الأربعة الأولى بالاعتماد على العزوم البسيطة من خلال العلاقات التالية:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1$$

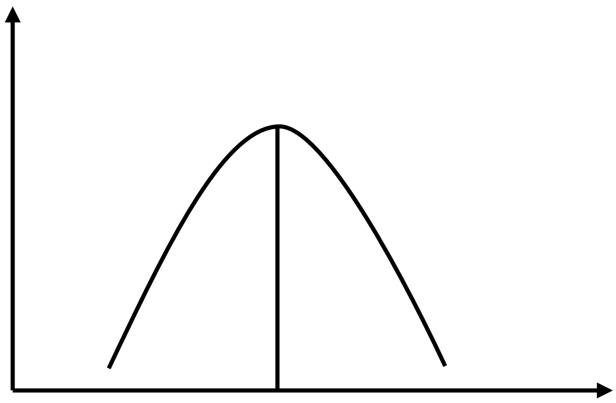
$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

2- الالتواء: L'Asymétrie

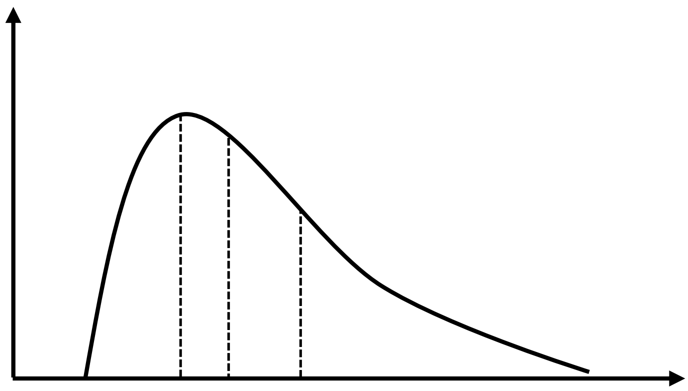
هو انتفاء التماثل أي الحصول على توزيعات غير متناظرة أو ملتوية ويمكن قياسه عن طريق المتوسط والوسيط والمنوال كمايلي:

أ- توزيع متناظر: عندما تكون قيم المقاييس متساوية $\bar{X} = M_e = M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري متماثل أو متناظر. أي تكون 50 % من القيم على يمين هذه المقاييس و50 % على يسارها.



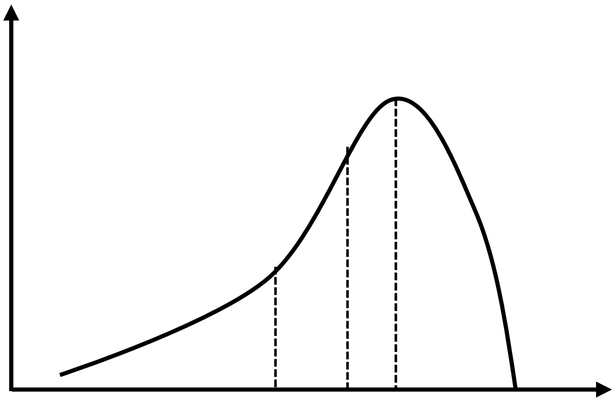
$\bar{X} = M_e = M_o$

ب- توزيع ملتوي نحو اليمين: عندما تكون قيم المقاييس $\bar{X} > M_e > M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري يكون موجب الالتواء. أي أن عدد القيم على يمين المنوال أكبر من عددها على يساره.



$M_o < M_e < \bar{X}$

ج- توزيع ملتوي نحو اليسار: عندما تكون قيم المقاييس $\bar{X} < M_e < M_o$ فان منحنى التوزيع التكراري يكون سالب الالتواء. أي أن عدد القيم على يسار المنوال أكبر من عددها على يمينه.



$\bar{X} < M_e < M_o$

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:

1-2 معامل بيرسون لالتواء:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{X} - M_o)}{\sigma}$$

$$\alpha_2 = \frac{3(\bar{X} - M_e)}{\sigma}$$

- $\alpha = 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متماثل.
- $\alpha > 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليمين.
- $\alpha < 0$ يدل ذلك على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

2-2 معامل يول وكاندال:Yule et Kendal

$$C_{YK} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$C_{YK} = \frac{D_9 + D_1 - 2D_5}{D_9 - D_1}$$

تكون قيم هذا المعامل محصورة بين: -1 و $+1$

- $C_{YK} = 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متماثل.
- $C_{YK} > 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليمين.
- $C_{YK} < 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

3-2 معامل فيشر للالتواء: Fisher

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad , \quad \sigma \neq 0$$

حيث μ_3 هو العزم المركزي من الدرجة الثالثة و σ الانحراف المعياري

- $\gamma_1 = 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متماثل.
- $\gamma_1 > 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليمين.
- $\gamma_1 < 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

مثال (5-1):

الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب فئات الأجر

فئات الأجور(10^3 دج)	عدد العمال
]60 ، 40]	08
]80 ، 60]	12
]100 ، 80]	20
]120 ، 100]	08
]140 ، 120]	02
المجموع	50

المطلوب: حدد شكل التوزيع عن طريق معامل الالتواء؟

الحل:

فئات الأجور	n_i	x_i	$N_i^{\uparrow}$	$n_i x_i$	${x_i}^2$	$n_i {x_i}^2$	$n_i(x_i-\bar{x})^3$
]60 ، 40]	09	50	9	450	2500	22500	- 341397.504
]80 ، 60]	12	70	21	840	4900	58800	- 30185.472
]100 ، 80]	20	90	41	1800	8100	162000	5242.88
]120 ، 100]	07	110	48	770	12100	84700	128798.208
]140 ، 120]	02	130	50	260	16900	33800	199794.688
المجموع	50	//	//	4120	//	361800	- 37747.2

أولا: حساب

1) الوسيط:

$$M_e = L_{min} + \frac{\frac{N}{2} - N^{\uparrow}_{M_e-1}}{n_{M_e}} \times A_{M_e} = 80 + \frac{25-21}{20} \times 20 = 84$$

2) الربيع الأول:

$$Q_1 = L_{min} + \frac{\frac{1\times N}{4} - N^{\uparrow}_{Q_1-1}}{n_{Q_1}} \times A_{Q_1} = 60 + \frac{12.5-9}{12} \times 20 = 65.83$$

3) الربيع الثالث:

$$Q_3 = L_{min} + \frac{\frac{3\times N}{4} - N^{\uparrow}_{Q_3-1}}{n_{Q_3}} \times A_{Q_3} = 80 + \frac{37.5-21}{20} \times 20 = 96.5$$

4) حساب المنوال:

$$M_o = L_{min} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times A_{M_O} = 80 + \frac{8}{8+13} \times 20 = 87.62$$

5) المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{4120}{50} = 82.4$$

6) الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{361800}{50} - (82.4)^2} = 21.12$$

7) العزم المركزي من الدرجة الثالثة:

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{-37747.2}{50} = -754.944$$

ثانيا: معاملات الالتواء

1) معامل بيرسون:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{X} - M_o)}{\sigma} = \frac{82.4 - 87.62}{21.12} = -0.25$$

$$\alpha_2 = \frac{3(\bar{X} - M_e)}{\sigma} = \frac{3(82.4 - 84)}{21.12} = -0.23$$

بما أن $\alpha < 0$ فان منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

2) معامل يول وكاندال:

$$C_{YK} = \frac{Q_3 - 2M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{97.5 - 2(85) + 67.5}{97.5 - 67.5} = -0.17$$

بما أن $C_{YK} < 0$ فأن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

3) معامل فيشر للالتواء:

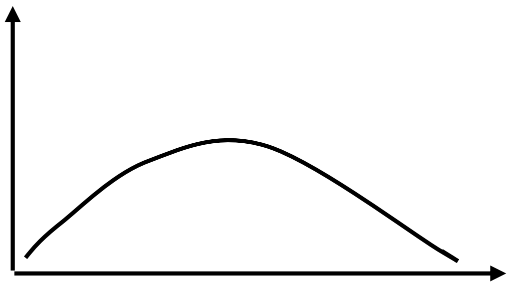
$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-754.944}{(21.12)^3} = \frac{-754.944}{9420.67} = -0.08$$

بما أن $\gamma_1 < 0$ فأن منحنى التوزيع التكراري ملتوي جهة اليسار.

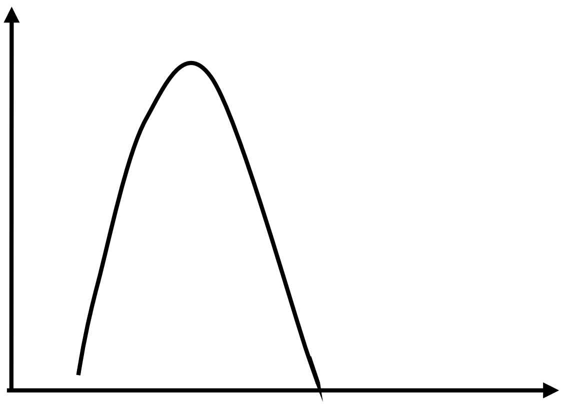
3- التفرطح: L'Aplatissement

التفرطح هو قياس درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي، أي يقصد به مدى انبساط أو تحدب قمة منحنى التوزيع، فكلما كان الشكل أكثر ارتفاعا من الشكل الطبيعي نقول أن الشكل مدبب، أما إذا كان أقل ارتفاع من الشكل الطبيعي فنقول عنه أنه مفرطح، ونميز ثلاث حالات هي:

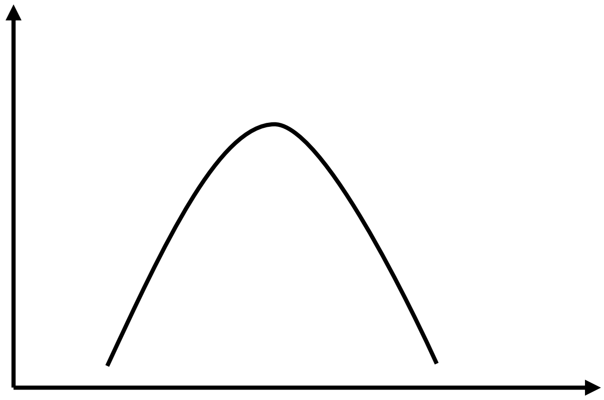
أ- **توزيع مفرطح**: وهو المنحنى الذي يتسع في الوسط، ويكون ذو تشتت قوي، أي أكثر تفرطحا من منحنى التوزيع الطبيعي.



ب- **توزيع متطاول:** وهو المنحنى الذي يكون ضيق في الوسط، وذو تشتت ضعيف، أي أكثر تحدبا من منحنى التوزيع الطبيعي.



ج- **توزيع الطبيعي**: هو المنحنى التكراري المعتدل أو المثالي ويأخذ شكل الجرس، ويعتمد عليه كمقياس تقاس به المنحنيات غير المعتدلة.



ويمكن حساب معامل التفرطح عن طريق:

1-3 معامل بيرسون للتفرطح:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad , \quad \sigma \neq 0$$

حيث μ_4 هو العزم المركزي من الدرجة الرابعة و σ الانحراف المعياري

- $\beta_2 = 3$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري طبيعي (معتدل).
- $\beta_2 > 3$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متطاول (مدبب)
- $\beta_2 < 3$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

2-3 معامل فيشر للتفرطح : Fisher

وهو معامل بيرسون مطروح منه العدد 3

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \ , \quad \sigma \neq 0$$

حيث μ_4 هو العزم المركزي من الدرجة الرابعة و σ الانحراف المعياري

- $\gamma_2 = 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري طبيعي (معتدل)
- $\gamma_2 > 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متطاول (مدبب).
- $\gamma_2 < 0$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

3-3 معامل التفرطح المئوي: Kelly

يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

$$C_K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(D_9 - D_1)}$$

- $C_K = 0.263$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري طبيعي (معتدل)
- $C_K > 0.263$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري متطاول (مدبب).
- $C_K < 0.263$ يدل على أن منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

مثال (2-5): الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب فئات الأجر

فئات الأجور(10^3 دج)	عدد العمال
]60 ، 40]	08
]80 ، 60]	12
]100 ، 80]	20
]120 ، 100]	08
]140 ، 120]	02
المجموع	50

المطلوب: حدد شكل التوزيع عن طريق معامل التفرطح؟

الحل:

فئات الأجور	n_i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$n_i(x_i - \bar{x})^4$
]60 ، 40]	09	50	- 33.6	11470956.1344
]80 ، 60]	12	70	- 13.6	410522.4192
]100 ، 80]	20	90	6.4	33554.43
]120 ، 100]	07	110	26.4	3400272.6912
]140 ، 120]	02	130	46.4	9270473.5232
المجموع	50	//	//	24585779.198

1) العشير الأول:

$$D_1 = L_{min} + \frac{\frac{1 \times N}{10} - N^{\uparrow}_{D_1 - 1}}{n_{D_1}} \times A_{D_1} = 40 + \frac{5-0}{9} \times 20 = 51.11$$

2) العشير التاسع:

$$D_9 = L_{min} + \frac{\frac{9 \times N}{10} - N^{\uparrow}_{D_9 - 1}}{n_{D_9}} \times A_{D_9} = 100 + \frac{45-41}{7} \times 20 = 111.43$$

3) العزم المركزي من الدرجة الرابعة:

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i (x_i - \bar{x})^4}{\sum_{i=1}^{5} n_i} = \frac{24585779.198}{50} = 491715.60$$

4) معامل بيرسون للتفرطح:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{491715.60}{(21.12)^4} = 2.42$$

بما أن $\beta_2 < 3$ فأن منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

5) معامل فيشر للتفرطح : Fisher

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 2.42 - 3 = -0.58$$

بما أن $\gamma_2 < 0$ فأن منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

6) معامل التفرطح المئوي: Kelly

$$C_K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(D_9 - D_1)} = \frac{96.5 - 65.83}{2(111.43 - 51.11)} = 0.254$$

بما أن $C_K < 0.263$ فان منحنى التوزيع التكراري مفرطح (منبسط).

تمارين الفصل الخامس

التمرين الأول:

الجدول يبين توزيع 75 أسرة حسب عدد الأطفال في كل أسرة

عدد الأطفال	1	2	3	4	5	6
عدد الأسر	6	16	20	15	10	8

المطلوب :حساب مقاييس الالتواء والتفرطح؟

التمرين الثاني

الجدول التالي يبن توزيع 100 مؤسسة اقتصادية حسب رقم أعمالها. الوحدة مليون دج

رقم الأعمال	[6 ،8[	[8 ،10[	[10 ،12[	[12 ،14[	[14 ،16[	[16 ،18[	[18 ،20[
عدد المؤسسات	3	10	26	33	14	8	6

المطلوب: حساب مقاييس الالتواء والتفرطح؟

التمرين الثاني:

الجدول يبين توزيع الدخل الشهري لعينة مكونة من 100أسرة. الوحدة :ألف دج

الدخل	[10 ،20[	[20 ،25[	[25 ،30[	[30 ،40[	[40 ،50[	[50 ،60[
عدد الأسر	11	20	30	12	12	10

المطلوب: حساب مقاييس الالتواء والتفرطح؟

قارين بين توزيع تمرين الثاني والثالث؟

المراجع

- إبراهيم مراد الدعمة ومازن حسن الباشا، (2013)، أساسيات في علم الإحصاء مع تطبيقات SPSS، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى، 2013.
- جيلالي جلاطو، (2002)، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، الطبعة الثامنة، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر.
- خليل شرف الدين، (بدون سنة)، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية
- زياد رشاد الراوي، (2007)، تطور علم الإحصاء بين النظرية والتطبيق، قسم الإحصاء، جامعة اليرموك، الأردن، المؤتمر الإحصائي العربي الأول.
- سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، (2007)، مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي، الطبعة الأولى، دار الميسرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن.
- عبد الرزاق عزوز، (2010)، الكامل في الإحصاء، دروس مفصلة، تمارين ومسائل مع الحلول، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
- عبد المجيد عبد المجيد البلداوي، (1997)، الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان.
- عبد مضحي جبار، (2011)، مقدمة في نظرية الاحتمالات، الطبعة الأولى، دار المسيرة، عمان
- عدنان حسين الجادري، (2003)، الإحصاء الوصفي في العلوم التربوية، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن.
- عزام صبري، (2006)، الإحصاء الوصفي ونظام SPSS، الطبعة الأولى، جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
- علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي، (2000)، الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، منشورات، ELGA، مالطا.
- محمد راتول، (2006)، الإحصاء الوصفي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر الطبعة الثانية.
- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، (2008)، مقدمة في الإحصاء، دار المسيرة، عمان
- مروان عبد المجيد، (2000)، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، دار الفكر، عمان. الأردن.

- مصطفى يوسف كافي وآخرون، (2012)، الإحصاء في الإدارة والاقتصاد"، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى.
- موسى محمد أماني، (2007)، التحليل الإحصائي للبيانات، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث، جامعة القاهرة.
- وليد إسماعيل السيفو وآخرون، (2010)، أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال، زمزم ناشرون وموزعون، الأردن، الطبعة الأولى.
- Bernard Candelpergher, (2013), Théorie des probabilités une introduction élémentaire, Calvage –Mounet, Paris.
- Bernard Goldfarb, Catherine Pardoux, (2011), Introduction à la méthode Statistique, 6e édition, Dunod, Paris
- Christophe Hurlin, Valérie Mignon, (2015), Statistique et probabilités en economie-gestion, Dunod, Paris
- F. Bertrand M. Maumy-Bertrand, (2011), Statistique en 80 fiches pour les scientifiques, Dunod, Paris.
- Lucien Leboucher, Marie-José Voisin, (2011), Introduction à la statistique descriptive, Cours et exercices avec tableur, Cépadués-éditions, France
- Renée Veysseyre, (2001), Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur, 2e édition, Dunod, Paris.