الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طاهري محمد بشار

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوع موجه لطلبة السنة الثانية (LMD) جذع مشترك

بعنوان:

الإحصاء -3-: دروس وتمارين

من إعداد الأستاذ:

بودية بشـــير

السنة الجامعية: 2020 – 2021

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الحمد لله الواحد الأحد السيد الصمد

وأصلي وأسلم على نبينا محمد بن عبد الله ﷺ

وعلى آله وصحبه ومن سار على دربه واتبع هداه أما بعد:

أضع بين يدي طلبة السنة الثانية جذع مشترك نظام (LMD)

في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، مطبوع

" الإحصاء -3-: دروس وتمارين "

بحيث تم إعداده وفق البرنامج الوزاري، لغرض تمكين الطلبة من الإلمام بدروس مقياس الإحصاء -3-المبرمج خلال السداسي الثاني، ويكون معين لهم في تذليل الصعوبات التي يواجهونها في فهم واستيعاب المقياس.

الأستاذ: بودية بشير

فهرس المحتـويات

مقدمة

يعتبر علم لإحصاء من العلوم الشائعة الاستخدام في جميع المجالات. فهو أداة للتعبير الكمي عن مختلف الظواهر الاقتصادية والاجتماعية. حيث أصبحت معظم البحوث والدراسات تعتمد على استخدام الأساليب الإحصائية وطرق القياس الكمية في تحليل متغيرات الظواهر الاقتصادية والاجتماعية وتحديد اتجاهها العام على أساس موضوعي غير متحيز.

والإحصاء الاستدلالي كفرع من الإحصاء يهتم بتحليل البيانات المتوفرة في العينة للتوصل إلى تقدير معالم المجتمع، واختبار الفرضيات لاتخاذ القرارات الصحيحة.

تتضمن هذه المطبوعة محاضرات في الإحصاء الاستدلالي أو التطبيقي، مقدمة لطلبة السنة الثانية جدع مشترك العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، الهدف منها إكساب الطالب المهارات اللازمة التي تمكنه من استخدام الأدوات والأساليب الإحصائية في تحليل البيانات الخاصة بالظواهر قيد الدراسة.

سعيا إلى تقديم ما هو مقرر دراسته في مقياس الإحصاء -3-تم تقسيم محتوى هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول، يتضمن الفصل الأول نظرية توزيع المعاينة، والفصل الثاني نظرية التقدير، ثم الفصل الثالث اختبار الفرضيات.

نظرية توزيع المعاينة

مقدمة

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى الإحصاء الاستدلالي، والذي يعتمد على فكرة اختيار جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم إختيارها بطريقة علمية مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة[1]، فنقول لقد استدللنا على خواص المجتمع على أساس خواص العينة، وهذا عكس الاستنباط الذي يعني استخراج خواص الجزء انطلاقا من خواص الكل، ومن تطبيقاته التقدير والاختبارات والتنبؤ.

أولا: مصطلحات في الإحصاء

1- **المجتمع الإحصائي**: هو المجموعة التي تقوم علها الدراسة الإحصائية، والتي تشترك فيما بينها في الصفة المراد دراستها مثل: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الأسر، مجتمع من المؤسسات.

وينقسم إلى قسمين:

- مجتمع محدود: هو المجتمع الذي يكون عدد عناصره محدودة (منته) مثل: عدد وحدات المصنعة في اليوم، عدد طلبة في المدرج .... الخ
- مجتمع غير محدود: هو المجتمع الذي يكون عدد عناصره غير محدودة (غير منته) مثل عدد النجوم في السماء، عدد حبات الرمل، عدد الفيروسات في حقل ما ...الخ

2- **معالم المجتمع:** يقصد بمعالم المجتمع مجموعة من الخصائص أو المقاييس التي يتم حسابها من هذا المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ، التباين σ^2 ، النسبة P، من خصائص المجتمع أيضا طبيعة توزيعه الاحتمالي $f(x)$ كأن يكون طبيعيا أو غيره.[2] حيث:

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$$

$$P = \frac{X}{N} = \frac{\text{عدد مفردات المجتمع التي تحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{عدد الكلي لمفردات المجتمع}}$$

[1] خليل شرف الدين، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، ص 08

[2] عبد مضحي جبار، مقدمة في نظرية الاحتمالات، الطبعة الأولى، دار المسيرة، عمان، 2011، ص 277

3- العينة الإحصائية: هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة، تمثل المجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويختلف حجمها حسب أهمية الدراسة والإمكانيات البشرية والمادية المتاحة. والاعتماد عليها نتيجة استحالة جمع المعلومات عن كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس. ويمكن تقسيم العينات وفقا لأسلوب اختيارها إلى نوعين هما:

3-1 العينات الاحتمالية: هي العينات التي يتم اختيار مفرداتها وفقا لقواعد الاحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم اختيار مفردتها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية، بهدف تجنب التحيز الناتج عن اختيار المفردات، ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية، ما يلي:

أ- العينة العشوائية البسيطة: هي العينة التي تسحب من المجتمع بحيث يكون لكل فرد من أفراد المجتمع فرصة متساوية لأن يكون ضمن العينة المختارة، ويكون هذا النوع من العينات مفيد ومؤثر في حالة وجود تجانس وصفات مشتركة بين جميع أفراد المجتمع الأصلي المعني بالدراسة.[3]

ب- العينة العشوائية الطبقية: تخص المجتمعات غير المتجانسة أي المجتمعات المكونة من عدة فئات اجتماعية وهذا بناء على عدة اعتبارات منها: المستوى التعليمي، مستوى الدخل، مستوى الإنفاق. وفي هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع إلى فئات متجانسة حيث تحدد نسبة كل فئة بالنسبة للمجتمع، ليصبح حجم كل منها $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \dots \dots \mathrm{N}_i$ على التوالي حيث i هي عدد الفئات التي يتكون منها المجتمع. ولأجل سحب عينة طبقية نتبع الخطوات التالية :[4]

- نحدد نسبة كل فئة بالنسبة للمجتمع N_i/N .
- نحدد حجم العينة التي نريد سحبها n
- نحدد عدد الوحدات الإحصائية التي يجب سحبها من كل فئة n_i حسب النسب المحددة في الخطوة الأولى حيث: $n_i = n * N_i/N$
- نقوم بسحب n_i من N_i بالطريقة العشوائية باستعمال جدول الأرقام العشوائية، وبعد الانتهاء من العملية يتم ضم كل الوحدات الإحصائية المسحوبة إلى بعضها البعض لتكون عينة عشوائية طبقية

ج- العينة العشوائية المنتظمة: تستخدم العينة العشوائية المنتظمة لاختيار عينة من مجتمع عدد عناصره محدود أو معلوم، ففي هذه الحالة يتم تحديد الزيادة المنتظمة (المجموعة)التي ستعتمد لاختيار أفراد العينة، ونبدأ باختيار رقم عشوائي من المجموعة الأولى، ثم نضيف للرقم

[3] - مصطفى يوسف كافي وآخرون ، الإحصاء في الإدارة والاقتصاد"، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى ، 2012ص.34

[4] جيلالي جلاطو، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، الطبعة الثامنة، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر، 2002، ص 10.

الذي تم اختياره حجم الزيادة المنتظمة التي تم اعتمادها.[5] فمثلا إذا تم اختيار عينة حجمها 250 من مجتمع حجمه 7500 بطريقة العينة العشوائية المنتظمة، فانه يتم أولا معرفة الزيادة المنتظمة بتقسيم حجم المجتمع على حجم العينة: 250/7500 =30.

نختار الرقم الأول عشوائيا من بين (1...9) مثلا: الرقم 7 ثم نضيف إليه حجم الزيادة المنتظمة 30 في كل مرة حتى نحصل على 250 رقم، فتكون الأرقام المختارة هي (7، 37، 67، 97، ......)

د- العينة العشوائية العنقودية: وهي عينة تؤخذ للضرورة أكثر منها للاختيار، حيث يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة يسمى كل منها عنقودا، ويتم سحب عينة عشوائية بسيطة من بين تلك العناقيد، أي لا يتم الاختيار من كل عنقود عناصر بل يتم اختيار عينة تتكون من عنقود أو أكثر فمثلا عند بحث ميزانية الأسرة، يقسم كل حي إلى مجموعة من العمارات السكنية فتصبح لدينا قائمة من العمارات تغطي المدينة، وتعتبر هذه المجموعات هي عناصر المجتمع الإحصائي حيث تؤلف كل وحدة منها عنقودا ، ثم نقوم عشوائيا باختيار تلك المجموعة من العمارات التي تجري علها الدراسة.[6]

2-3 العينات غير الاحتمالية: يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير عشوائية، حيث يقوم الباحث باختيار مفردات العينة بالصورة التي تحقق الهدف من المعاينة، فهي لا تخضع لقوانين موضوعية، وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة.[7]

أ- العينة العرضية: يعتمد في اختيارها على المصادفة المحضة، وتمتاز هذه الطريقة بتوفير الوقت والتكاليف، كما يمكن من خلالها الحصول على معلومات موثوقة إذا كان المجتمع المستهدف بالدراسة على جانب كبير من التجانس، أما إذا كانت عناصر المجتمع غير متجانسة فذلك قد يؤدي إلى التحيز في اختيار العناصر المشكلة للعينة .

ب- العينة الحصصية: تقسيم مجتمع الدراسة إلى طبقات استنادا إلى معايير تقسيم معينة تتعلق بطبيعة الدراسة ثم يتم اختيار عدد من المفردات من كل طبقة بشكل شخصي (غير عشوائي) بحيث أن عدد مفردات هذه العينات تشكل حجم العينة المطلوبة لتلك الدراسة. فلو كنا بصدد استطلاع راي الجمهور ببرامج التلفزيون فانه يمكن تقسيم مجتمع الدراسة إلى ذكور وإناث ثم يتم

[5] عدنان حسين الجادري، الإحصاء الوصفي في العلوم التربوية، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2003، ص 33

[6] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال، زمزم ناشرون وموزعون، الأردن، الطبعة الأولى ،2010ص. 55

[7] عزام صبري، الحصاء الوصفي ونظام SPSS، الطبعة الأولى، جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006، ص 24

اختيار عينة من الذكور وأخرى من الإناث تتناسب كل منهما مع عدد الذكور وعدد الإناث في مجتمع المدروس ومجموع مفردات هاتين العينتين تكون حجم العينة المطلوب.

3-3 أسلوب جمع البيانات: وتتم عملية جمع البيانات باتباع أحد الأسلوبين:[8]

أ- أسلوب الحصر الشامل: يستخدم هذا الأسلوب إذا كان الغرض من البحث هو حصر جميع مفردات المجتمع، وفي هذه الحالة يتم جمع بيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع بلا استثناء كحصر جميع المزارع التي تنتج التمور، ويتميز أسلوب الحصر الشامل بالشمول وعدم التحيز، ودقة النتائج، ولكن يعاب عليه أنه يحتاج إلى الوقت المجهود، والتكلفة العالية.

ب- أسلوب العينات: تستخدم هذه الطريقة إذا كان من الصعوبة إجراء الدراسة على كافة أفراد المجتمع أو يمكن الاكتفاء بمعلومات عن جزء من المجتمع بدلا من المجتمع ككل. وبتحليل بيانات العينة إحصائيا يمكن تعميم نتائجها على المجتمع ككل، مع ملاحظة أن نتائج العينة المختارة تكون قريبة من حقائق المجتمع كلما زاد حجم العينة وكلما تم إتباع الأسلوب العلمي السليم في اختيارها. ويتميز هذا الأسلوب بالآتي:

- تقليل الوقت والجهد، والتكلفة.
- الحصول على بيانات أكثر تفصيلا، وخاصة إذا جمعت البيانات من خلال استمارة استبيان.

كما أن أسلوب المعاينة يفضل في بعض الحالات التي يصعب فيها إجراء حصر شامل، مثل معاينة دم المريض، أو إجراء تعداد لعدد الأسماك في البحر. ولكن يعاب على أسلوب المعاينة أن النتائج التي تعتمد على هذا الأسلوب أقل دقة من نتائج أسلوب الحصر الشامل، وخاصة إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا

4- إحصائية العينة: هي كل قيمة تحسب من العينة،[9] مثل المتوسط الحسابي $\bar{X}$، التباين S^2، النسبة $\hat{P}$ ، وتستعمل إحصائية العينة في تقدير معالم المجتمع. حيث:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

[8] خليل شرف الدين، مرجع سبق ذكره، ص 12.

[9] دلال القاضي وأخرون، الإحصاء للإداريين والاقتصاديين، دار ومكتبة حامد، عمان، الأردن، 2005، ص 207

$$\hat{P} = \frac{x}{n} = \frac{\text{عدد مفردات العينة التي تحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{عدد الكلي لمفردات العينة}}$$

5- المعاينة بالإرجاع والمعاينة بدون الإرجاع:

أ- **المعاينة بالإرجاع: هي** التي يتم فيها اختيار عنصر من مجتمع أكثر من مرة، ويُمكن اعتبار هذا المجتمع الذي تمت فيه المعاينة بالإرجاع بالمجتمع غير منته أو المجتمع غير المحدود، وعدد العينات التي يمكن تشكيلها N^n ، وتسمى بالمعاينة غير النفادية. ولمعرفة هل المعاينة تمت بالإرجاع إذا تحقق ما يلي: $n < 0{,}05N$ يعني إذا كان حجم العينة n أقل $0{,}05$ حجم المجتمع N فان المعاينة بالإرجاع.

ب- **المعاينة بدون الإرجاع:** هي التي يتم فيها اختيار كل عنصر من مجتمع مرة واحدة فقط، ويُمكن اعتبار هذا المجتمع الذي تمت فيم المعاينة بدون إرجاع بالمجتمع المنته أو المجتمع المحدود، وعدد العينات التي يمكن تشكيلها C_N^n ، وتسمى بالمعاينة النفادية. وتكون المعاينة تمت بدون إرجاع إذا تحقق ما يلي: $n \geq 0{,}05N$ يعني إذا كان حجم العينة n أكبر أو يساوي $0{,}05$ حجم المجتمع N فان المعاينة بدون الإرجاع.

ثانيا: توزيع المعاينة

ليكن X مجتمع إحصائي حجمه N فرد، سحبت منه عينة حجمها n ومتوسطها الحسابي $\bar{X}_1$، ثم سحبت عينة ثانية لها نفس الحجم n ومتوسطها الحسابي $\bar{X}_2$ ، وهكذا تكرر العملية بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، سنحصل على مجموعة من القيم للمتوسط الحسابي ليس بالضرورة تكون متساوية، هذه القيم تكون مجتمعا من الأوساط الحسابية عدد مفرداته أكبر من عدد مفردات المجتمع الأصلي X .

ويمكن النظر إلى هذا المقياس (المتوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي له توزيع احتمالي. يسمى هذا المجتمع الجديد مجتمع المتوسطات الحسابية (توزيع المعاينة للمتوسطات). وبنفس الطريقة يمكن أن نحصل على توزيع المعاينة للانحرافات المعيارية S.

تعريف توزيع المعاينة: توزيع المعاينة لأية إحصائية من العينة $(\bar{X}$ ، S^2 ، $\hat{P})$هو التوزيع الاحتمالي لجميع القيم الممكنة والمحتملة لهذه الإحصائية، والتي نحصل عليها عند سحب جميع العينات بنفس الحجم والطريقة ومن نفس مجتمع.

مثال(1-1): ليكن المجتمع X مكون من القيم التالية: 14،12،10،8،6

المطلوب:

1) أحسب المتوسط الحسابي μ_X والانحراف المعياري σ_X للمجتمع X

2) احسب المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب بدون إرجاع.

3) احسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}$ ثم استنتج قيمة الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{X}}$

4) تحقق من العلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma_X{}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

5) احسب التباين S^2 لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب مع إرجاع.

6) احسب القيمة المتوقعة للمتغير S^2 .

7) تحقق من العلاقة التالية:

$$E(S^2) = \frac{N}{N-1}\sigma_X^2$$

الحل:

1) الوسط الحسابي μ_X والانحراف المعياري σ_X للمجتمع X

$$\mu_X = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{6+8+10+12+14}{5} = 10$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum (X_i)^2}{N} - (\mu_X)^2 = \frac{36+64+100+144+196}{5} - 100 = 8$$

$$\sigma_X = \sqrt{8} = 2.83$$

2) المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب بدون إرجاع.

عدد العينات المسحوبة بدون إرجاع هي:

$$C_N^n = C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

ويمكن تلخيص جميع العينات المسحوبة مع حساب متوسط الحسابي لكل عينة من خلال الجدول التالي:

الجدول (1-1): يبين جميع العينات المسحوبة مع متوسطاتها الحسابية

رقم العينة	قيم العينة	$\sum x_i$	$\bar{X}_\iota$	رقم العينة	قيم العينة	$\sum x_i$	$\bar{X}_\iota$
01	(6، 8)	14	7	06	(8، 12)	20	10
02	(6، 10)	16	8	07	(8، 14)	22	11
03	(6، 12)	18	9	08	(10، 12)	22	11
04	(6، 14)	20	10	09	(10، 14)	24	12
05	(8، 10)	18	9	10	(12، 14)	26	13

3) القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}_\iota$: من معطيات الجدول السابق يمكن تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي $\bar{X}_\iota$ كما يلي:

الجدول (1-2): التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي $\bar{X}_\iota$

$\bar{X}_\iota$	7	8	9	10	11	12	13	المجموع
$P(\bar{X}_\iota)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10	1
$\bar{X}_\iota P(\bar{X}_\iota)$	0.7	0.8	1.8	2	2.2	1.2	1.3	10
$(\bar{X}_\iota)^2 P(\bar{X}_\iota)$	4.9	6.4	16.2	20	24.2	14.4	16.9	103

أ- التوقع للمتغير $\bar{X}_\iota$:

$$E(\bar{X}) = \sum \bar{X}_\iota P(\bar{X}_\iota) = 10$$

هذا يعني أن المتوسط الحسابي للمتغير $\bar{X}_\iota$ يساوي متوسط المجتمع

$$E(\bar{X}) = \mu_X$$

ب- التباين للمتغير $\bar{X}_\iota$:

$$VAR(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 = 103 - 100 = 3$$

ومنه الانحراف المعياري هو:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{3} = 1.73$$

4) تحقق من العلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma_X{}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 3$$

ومنه العلاقة محققة.

5) احسب التباين S^2 لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب مع إرجاع

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2-1}$$

الجدول (1-1): يبين جميع العينات المسحوبة مع قيم S^2 المقابلة لها

رقم العينة	قيم العينة	$\bar{X}_i$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	S^2	رقم العينة	قيم العينة	$\bar{X}_i$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	S^2
01	(6، 8)	7	1+1	2	06	(8، 12)	10	4+4	8
02	(6، 10)	8	4+4	8	07	(8، 14)	11	9+9	18
03	(6، 12)	9	9+9	18	08	(10، 12)	11	1+1	2
04	(6، 14)	10	16+16	32	09	(10، 14)	12	4+4	8
05	(8، 10)	9	1+1	2	10	(12، 14)	13	1+1	2

6) القيمة المتوقعة للمتغير S^2 :

الجدول (1-2): التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي S^2

S_i^2	2	8	18	32	المجموع
$P(S_i^2)$	4/10	3/10	2/10	1/10	1
$S^2P(S_i^2)$	0.8	2.4	3.6	3.2	10

أ- التوقع للمتغير S_i^2 :

$$E(S^2)=\sum S^2P(S_i^2)=10$$

7) تحقق من العلاقة:

$$E(S^2)=\frac{N}{N-1}\sigma_X^2=\frac{5}{5-1}8=\frac{40}{4}=10$$

ومنه العلاقة محققة.

مثال(1-2): ليكن المجتمع X مكون من القيم التالية: 6، 8، 10

المطلوب:

1) أحسب الوسط الحسابي μ_X والانحراف المعياري σ_X للمجتمع X

2) احسب المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب مع إرجاع.

3) احسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}$ ثم استنتج قيمة الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{X}}$

4) تحقق من العلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma_X{}^2}{n}$$

5) احسب التباين S^2 لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب مع إرجاع.

6) احسب القيمة المتوقعة للمتغير S^2 .

تحقق من العلاقة التالية: $E(S^2) = \sigma_X^2$

الحل:

1) الوسط الحسابي μ_X والإنحراف المعياري σ_X للمجتمع X

$$\mu_X = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{6+8+10}{3} = 8$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum (X_i)^2}{N} - (\mu_X)^2 = \frac{36+64+100}{3} - 64 = 2.66$$

$$\sigma_X = \sqrt{2.66} = 1.63$$

2) المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب بدون إرجاع.

عدد العينات المسحوبة بدون إرجاع هي:

$$N^n = 3^2 = 9$$

ويمكن تلخيص جميع العينات المسحوبة مع حساب متوسط الحسابي لكل عينة كالتالي:

الجدول (1-3): يبين جميع العينات المسحوبة مع متوسطاتها الحسابية

رقم العينة	قيم العينة	$\sum x_i$	$\bar{X}_i$	رقم العينة	قيم العينة	$\sum x_i$	$\bar{X}_i$
01	(6 ،6)	12	6	06	(10 ،8)	18	9
02	(8 ،6)	14	7	07	(6 ،10)	16	8
03	(10 ،6)	16	8	08	(8 ،10)	18	9
04	(6 ،8)	14	7	09	(10 ،10)	20	10
05	(8 ،8)	16	8				

3) القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}_i$: من معطيات الجدول السابق يمكن تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي $\bar{X}_i$ كما يلي:

الجدول (1-4): التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي $\bar{X}_i$

$\bar{X}_i$	6	7	8	9	10	المجموع
$P(\bar{X}_i)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9	1
$\bar{X}_i P(\bar{X}_i)$	6/9	14/9	24/9	18/9	10/9	8= 72/9
$(\bar{X}_i)^2 P(\bar{X}_i)$	36/9	98/9	192/9	162/9	100/9	65.33=588/9

أ- التوقع للمتغير $\bar{X}_i$:

$$E(\bar{X}) = \sum \bar{X}_i P(\bar{X}_i) = 8$$

هذا يعني أن المتوسط الحسابي للمتغير $\bar{X}_i$ يساوي متوسط المجتمع

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu_X$$

ب- التباين للمتغير $\bar{X}_i$:

$$VAR(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 = 65.33 - 64 = 1.33$$

ومنه الانحراف المعياري هو:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{1.33} = 1.15$$

4) تحقق من العلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{X}}{}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} = \frac{2.66}{2} = 1.33$$

ومنه العلاقة محققة.

5) احسب التباين S^2 لجميع العينات المكونة من عنصرين في حالة السحب مع إرجاع.

الجدول (1-1): يبين جميع العينات المسحوبة مع قيم S^2 المقابلة لها

رقم العينة	قيم العينة	$\bar{X}_i$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	S^2	رقم العينة	قيم العينة	$\bar{X}_i$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	S^2
01	(6، 6)	6	0+0	0	06	(8، 10)	9	1+1	2
02	(6، 8)	7	1+1	2	07	(10، 6)	8	4+4	8
03	(6، 10)	8	4+4	8	08	(10، 8)	9	1+1	2
04	(8، 6)	7	1+1	2	09	(10، 10)	10	0+0	0
05	(8، 8)	8	0+0	0					

6) القيمة المتوقعة للمتغير S^2 :

الجدول (1-2): التوزيع الاحتمالي للمتغير الإحصائي S^2

S_i^2	0	2	8	المجموع
$P(S_i^2)$	3/9	4/9	2/9	1
$S^2P(S_i^2)$	0	8/9	16/9	2.66=24/9

ب- التوقع للمتغير S_i^2 :

$$E(S^2) = \sum S^2 P(S_i^2) = 2.66$$

7) تحقق من العلاقة :

$$E(S^2) = \sigma_X^2 =$$

ومنه العلاقة محققة.

مما سبق نستنتج ما يلي:

اذا كان X متغير عشوائي يمثل مجتمع إحصائي متوسطه μ_X و تباينه σ_X^2. اخترنا منه عينات عشوائية بسيطة. وليكن $\bar{X}$ المتغير العشوائي لمتوسطات العينات (مجتمع المتوسطات الحسابية لهذه العينات)، متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$، و تباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$ فإن:

- $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$
- $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ في حالة السحب مع الإرجاع ($n < 0,05N$).
- $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في حالة السحب دون إرجاع ($n \geq 0,05N$).

ثالثا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي

1- حالة تباين المجتمع X معلوم

نظرية (1): إذا كان X مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_X وتباين معلوم σ_X^2، فان توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ يخضع للتوزيع طبيعي متوسطه $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$. أي:

$$\bar{X} \approx N\left(\mu_{\bar{X}}\,, \sigma_{\bar{X}}^2\right) \quad \text{مع} \quad \mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $\bar{X}$ هي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، وذلك مهما كان حجم العينة.

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0{,}05N)$ فان $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

ملاحظة: بعض خصائص حساب احتمال المتغير Z

- $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$
- $P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$
- $P(Z \leq -a) = P(Z \geq a)$
- $P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$
- $P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$

مثال(1-3): يختار مراجع عينة عشوائية حجمها 16من مجتمع من 1000حساب مدين، يتبع التوزيع الطبيعي حيث متوسط قيمة الحساب المدين للمجتمع هي 26000دج بانحراف معياري 4500دج. **المطلوب:**

1) ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250دج؟
2) إذا كان حجم العينة 64 ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أكبر من 27000دج؟

الحل:

$$\mu_X = 26000 \;،\; \sigma_X = 4500 \;،\; \bar{X} = 28250 \;،\; N = 100$$

أ- حالة العينة $n = 16$

1) طبيعة سحب: سحب مع الإرجاع، مجتمع غير محدود

$$\frac{n}{N} = \frac{16}{1000} = 0.016 < 0.05$$

2) حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad \text{ومنه} \quad \mu_{\bar{X}} = 26000$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4500}{\sqrt{16}} = 1125$$

3) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} < 28250)$

نحسب دالة الاختبار Z

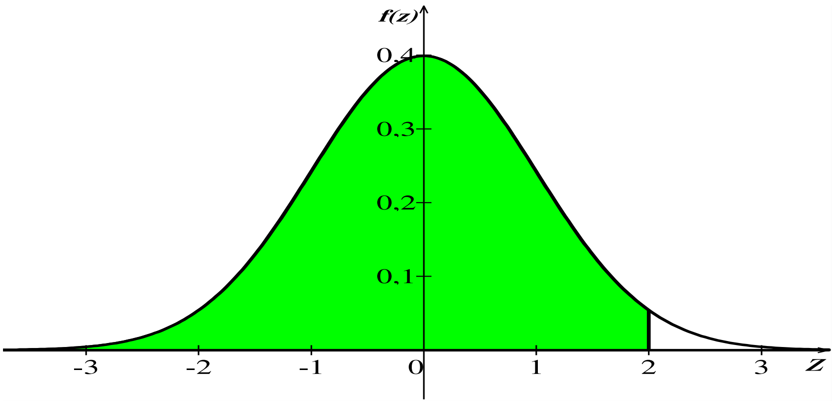
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{28250 - 26000}{1125} = 2$$

$$P(\bar{X} < 28250) = P(z < 2)$$

$$P(\bar{X} < 28250) = 0.9772$$

ومنه احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250هو: 97.72 %

الشكل (1-1): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال: $P(z < 2)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

ب- حالة العينة $n = 64$

4) طبيعة سحب: سحب مع الإرجاع، مجتمع محدود

$$\frac{n}{N} = \frac{64}{1000} = 0.064 \geq 0.05$$

5) حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad \text{ومنه} \quad \mu_{\bar{X}} = 26000$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{4500}{\sqrt{64}} \sqrt{\left(\frac{1000-64}{1000-1}\right)} = 544.47$$

6) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} < 28250)$

نحسب دالة الاختبار Z

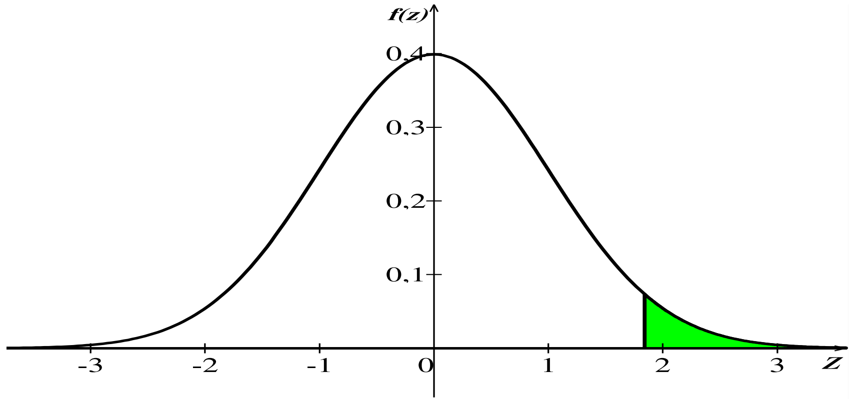
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{27000 - 26000}{544.47} = 1.84$$

$$P(\bar{X} > 28250) = P(z > 1.84) = 1 - P(z < 1.84)$$

$$P(\bar{X} > 28250) = 1 - 0.9671 = 0.0329$$

ومنه احتمال أن يكون متوسط العينة أكبر من 27000و: 03.29 %

الشكل (1-2): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال:$P(z > 1.84)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

نظرية (2): إذا كان X مجتمع له توزيع غير طبيعي بمتوسط μ_X و تباين معلوم σ_X^2، فان توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ يقترب من التوزيع طبيعي متوسطه $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$، عندما يكون حجم العينة أكبر أو يساوي 30 $(n \geq 30)$ ، حسب نظرية النهاية المركزية. أي

$$\bar{X} \approx N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right) \text{ عندما } n \to +\infty$$

مع $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ و $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ ودالة الاختبار Z التي تعبر على $\bar{X}$ هي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0{,}05N)$ فان $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

مثال(1-4): سحبت عينة عشوائية حجمها 49 من مجتمع غير محدود متوسطه 70، وانحرافه المعياري 10 . **المطلوب**:

1) أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة أكبر 68؟
2) أحسب احتمال أن لا يبعد متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 3 %؟

الحل: توزيع المجتمع غير معلوم لكن حجم العينة $n \geq 30$ ، ومنه نستخدم دالة الاختبار Z. في حساب الاحتمال.

1) حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad \text{ومنه} \quad \mu_{\bar{X}} = 70$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{49}} = 1.43$$

2) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} > 68)$

نحسب دالة الاختبار Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{68 - 70}{1.43} = -1.39$$

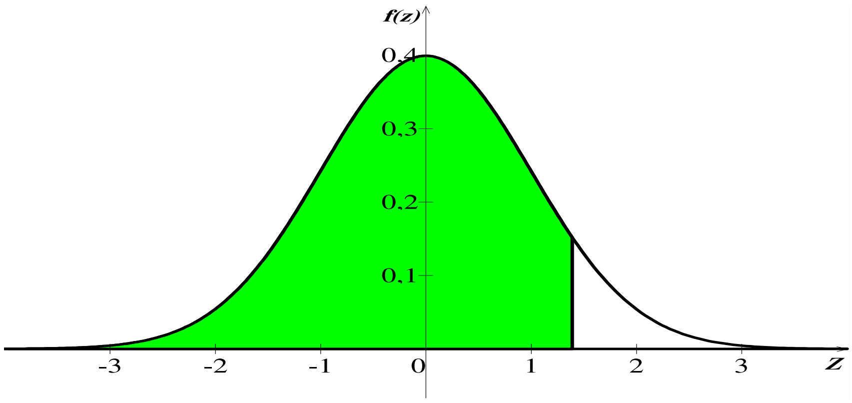
$$P(\bar{X} > 68) = P(z > -1.39)$$

$$P(\bar{X} > 68) = P(z < 1.39)$$

$$P(\bar{X} > 68) = 0.9177$$

ومنه احتمال أن يكون متوسط العينة العينة أكبر 68 هو: 91.77 %

الشكل (1-3): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال: $P(z < 1.39)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

3) احتمال أن لا يبعد متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 3 %:

لدينا : $70 \times 0.03 = 2.1$

حساب الاحتمال التالي: $P(67.9 < \bar{X} < 72.1)$

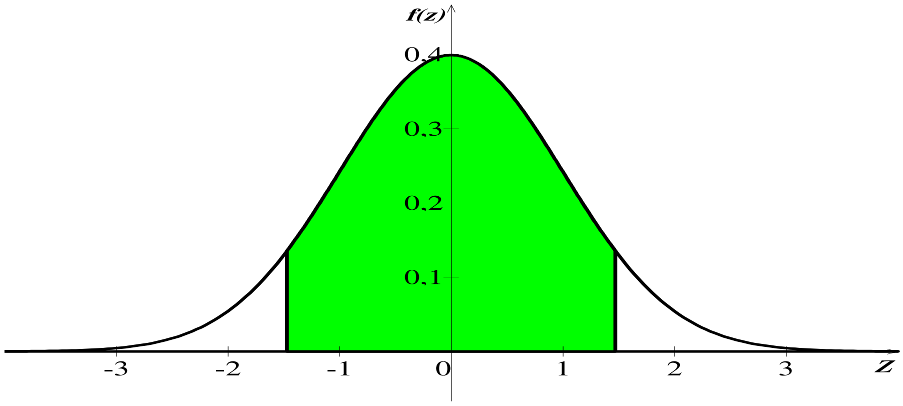
$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = P\left(\frac{67.9 - 70}{1.43} < \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{72.1 - 70}{1.43}\right)$$

$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = P(-1.47 < Z < 1.47)$$

$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = P(Z < 1.47) - P(Z < -1.47)$$
$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = P(Z < 1.47) - (1 - P(Z < 1.47))$$
$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = 2P(Z < 1.47) - 1$$
$$P(67.9 < \bar{X} < 72.1) = 0.8584$$

ومنه احتمال أن لا يبعد متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من 3 %: 85.84 %

الشكل (1-4): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال: $P(-1.47 < z < 1.47)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2- حالة تباين المجتمع X غير معلوم

نظرية (3): إذا كان X مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_X و تباين غير معلوم σ_X^2 ، سحبت منه عينة حجمها $n \geq 30$ ، وتباينها S^2 ، فان توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ يخضع لتوزيع طبيعي متوسطه $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$ ، أي :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \quad \text{و} \quad \mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad \text{مع} \quad \bar{X} \approx N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right)$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $\bar{X}$ هي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

مثال(1-5): إذا كان $X \approx N\left(7, \sigma_X^2\right)$ مجتمع إحصائي غير محدود، سحبت منه عينة عشوائية حجمها 36 وتباينها 9، أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة أكبر 8؟

الحل:

تباين المجتمع غير معلوم لكن تباين العينة معلوم $S^2 = 9$ و حجمها $n \geq 30$ ، ومنه نستخدم دالة الاختبار Z. في حساب الاحتمال.

1) حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \text{ ومنه } \mu_{\bar{X}} = 7$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = 0.5$$

2) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} > 8)$

نحسب دالة الاختبار Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{8-7}{0.5} = 2$$
$$P(\bar{X} > 8) = P(z > 2)$$
$$P(\bar{X} > 8) = P(z < 2)$$
$$P(\bar{X} > 68) = 0.9772$$

ومنه احتمال أن يكون متوسط العينة العينة أكبر 8 هو: 97.72 %

نظرية (3): إذا كان X مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_X و تباين غير معلوم σ_X^2 ، سحبت منه عينة حجمها $n < 30$ ، وتباينها S^2 ، فان توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ يخضع لتوزيع ستيودنت t (Student)بدرجات حرية v ، متوسطه $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$ ، أي :

$$\bar{X} \approx t_v \text{ مع } \mu_{\bar{X}} = \mu_X \text{ و } \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \text{ و } v = n - 1$$

ودالة الاختبار t التي تعبر على $\bar{X}$ هي

$$t_v = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

مثال(1-6): إذا كانت أوزان الأطفال حديثي الولادة في احدى مستشفيات الولاية تتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه يساوي 2900 غ، سحبت منه عينة عشوائية من 9 أطفال، انحرافها المعياري 300 غ فما هو احتمال أن يقل المتوسط الحسابي لأوزان الأطفال عن 2714غ؟

الحل:

1) حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \text{ ومنه } \mu_{\bar{X}} = 2900$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{9}} = 100$$

2) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} < 2800)$

نحسب دالة الاختبار t:

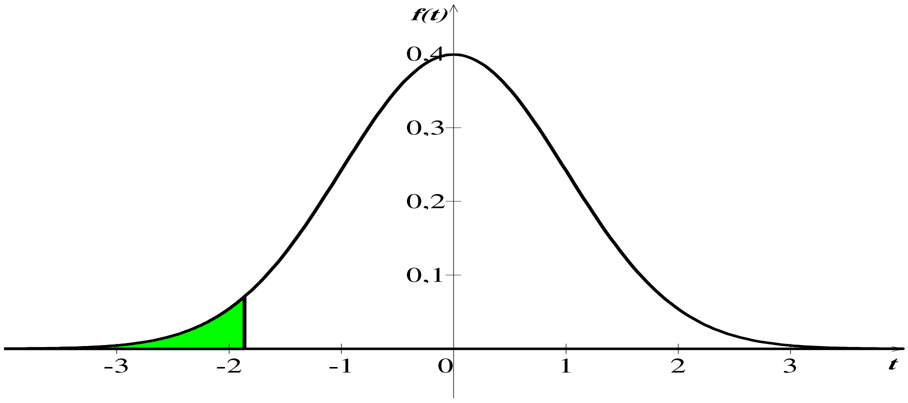
$$t=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{2714-2900}{100}=-1.86$$

درجة الحرية $v=n-1=8$

$$P(\bar{X}<2800)=P(t<-1.86)$$
$$P(\bar{X}<2800)=0.05$$

ومنه احتمال أن يكون متوسط العينة أقل 2714 غ هو: 5 %

الشكل (1-5): المساحة تحت المنحنى ستيودنت للاحتمال: $P(t<-1.86)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

جدول (1-4): توزيع المعاينة للمتوسطات حسب توزيع المجتمع، معلومية التباين وحجم العينة

توزيع المجتمع	تباين المجتمع	حجم العينة	انحراف المعاينة	دالة الاختبار
طبيعي	معلوم	لا يهم	$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$
	غير معلوم	$n\geq 30$	$\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$
		$n<30$	$\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$	$t_v=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$
ليس بالضرورة أن يكون طبيعي	معلوم	$n\geq 30$	$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$
	غير معلوم	$n\geq 100$	$\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$

رابعا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

1- حالة تباين المجتمعين معلوم

نظرية (1): إذا سحبت E_X عينة عشوائية حجمها n_X من مجتمع طبيعي X متوسطه μ_X و تباين معلوم σ_X^2، وليكن $\bar{X}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$.وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها n_Y من مجتمع طبيعي Y متوسطه μ_Y و تباين معلوم σ_Y^2 ، وليكن $\bar{Y}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{Y}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{Y}}^2$. فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{X}-\bar{Y})$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبرعلى $(\bar{X}-\bar{Y})$ هي :

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، وذلك مهما كان حجم العينتين.

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0,05N)$ فان

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n_X}\left(\frac{N_X - n_X}{N_X - 1}\right) + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\left(\frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}\right)$$

مثال(1-7): إذا كان متوسط الدخل الشهري لعمال شركة A هو 30000 دج مع انحراف معياري هو 2500 دج ومتوسط الدخل الشهري لعمال الشركة B هو 28000 دج مع انحراف معياري يساوي 3000 دج. إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 25 عامل من الشركة A وعينة أخرى مستقلة عن الأولى من الشركة B حجمها 36 عامل.

المطلوب:

1) أوجد احتمال أن يزيد متوسط الدخل للعينة الأولى عن متوسط الدخل للعينة الثانية بمقدار 2500دج؟

2) أوجد احتمال أن يقل متوسط الدخل للعينة الأولى عن متوسط الدخل الشهري للعينة الثانية؟

الحل:

1) حساب احتمال: $P(\bar{X}-\bar{Y}) > 2500$

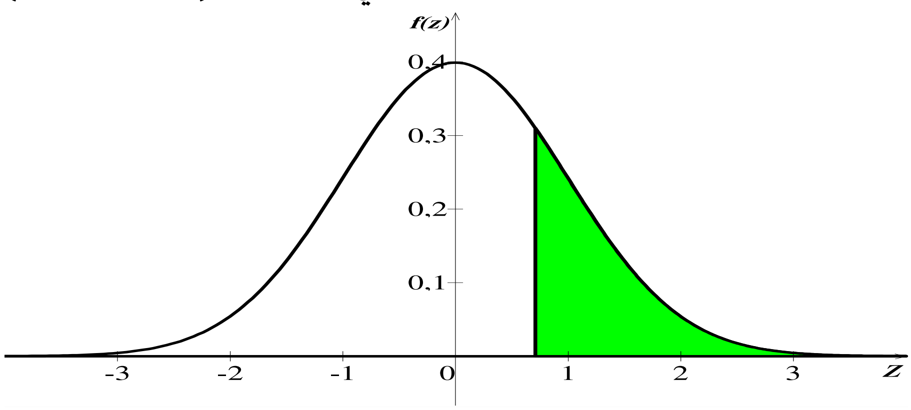
نحسب دالة الاختبار Z

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \frac{(2500)-(30000-28000)}{\sqrt{\frac{2500^2}{25}+\frac{3000^2}{36}}} = 0.71$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y}) > 2500 = P(Z > 0.71)$$
$$P(\bar{X}-\bar{Y}) > 2500 = 1-P(Z < 0.71)$$
$$P(\bar{X}-\bar{Y}) > 2500 = 1-0.7611)$$
$$P(\bar{X}-\bar{Y}) > 2500 = 0.2389$$

ومنه احتمال أن يقل متوسط الدخل للعينة الأولى عن متوسط الدخل الشهري للعينة الثانية بمقدار 2500 دج هو: 23.89 %.

الشكل (1-6): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال:$P(Z > 0.71)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) حساب احتمال: $P(\bar{X}-\bar{Y}) < 0$

3) نحسب دالة الاختبار Z

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}=\frac{(0)-(2000)}{\sqrt{\frac{2500^2}{25}+\frac{3000^2}{36}}}=-2.83$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<0=P(Z<-2.83)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<0\ \ =1-P(Z<2.83)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<0=1-0.9977)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<0=0.0023$$

نظرية (2): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X\ \geq 30$ سحبت من مجتمع X متوسطه μ_X و تباين معلوم σ_X^2، وليكن $\bar{X}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$. وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y\ \geq 30$ سحبت من مجتمع Y متوسطه μ_Y و تباين معلوم σ_Y^2 ، وليكن $\bar{Y}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{Y}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{Y}}^2$. فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{X}-\bar{Y})$ يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}}=\mu_X-\mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $(\bar{X}-\bar{Y})$ هي :

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، وذلك مهما كان حجم العينتين.

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n\ \geq\ 0,05N)$ فان

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n_X}\left(\frac{N_X-n_X}{N_X-1}\right)+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\left(\frac{N_Y-n_Y}{N_Y-1}\right)$$

مثال(1-8): إذا كان متوسط الإنفاق الشهري لأسر المدينة A هو50000 دج مع انحراف معياري يساوي 4500 دج ومتوسط الإنفاق الشهري لأسر المدينة B هو 45000 دج مع انحراف معياري يساوي 3600 دج. إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 300 أسرة من المدينة A وعينة أخرى مستقلة عن الأولى من المدينة B حجمها 250 أسرة.

المطلوب:

1) أوجد احتمال أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 6000 دج

الحل:

1) حساب احتمال: $P(\bar{X}-\bar{Y})<6000$

لدينا : $n_A \geq 30$ و $n_B \geq 30$ و منه:

نحسب دالة الاختبار Z

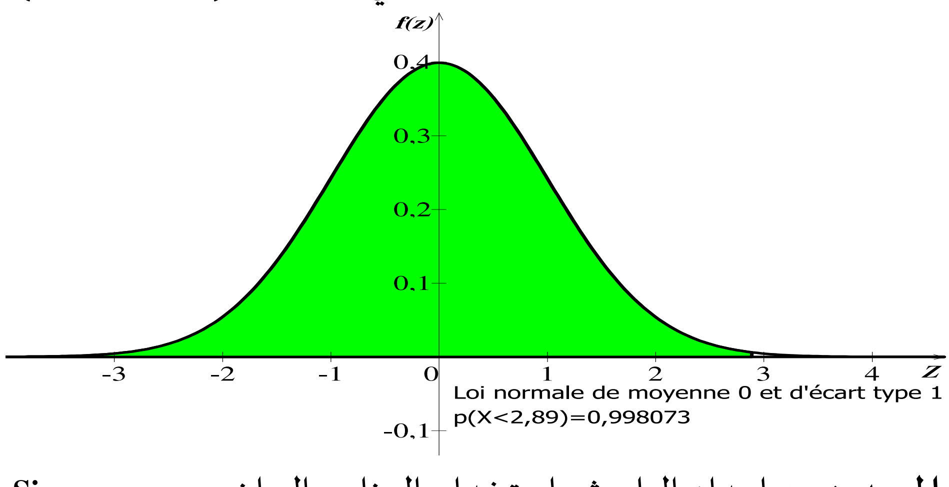
$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}=\frac{(6000)-(50000-45000)}{\sqrt{\frac{4500^2}{300}+\frac{3600^2}{250}}}=2.89$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<6000=P(Z<2.89)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})<6000=0.9981$$

ومنه احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 6000 دج هو: 99.81 %

الشكل (1-7): المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال: $P(Z<2.89)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2- حالة تباين المجتمعين غير معلوم

نظرية (3): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X \geq 30$ وتباينها S_X^2 ، سحبت من مجتمع X متوسطه μ_X و تباين غير معلوم σ_X^2، وليكن $\bar{X}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$. وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y \geq 30$ وتباينها S_Y^2 سحبت من مجتمع Y متوسطه μ_Y و تباين غير معلوم σ_Y^2 ، وليكن $\bar{Y}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{Y}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{Y}}^2$. فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{X}-\bar{Y})$ يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $(\bar{X}-\bar{Y})$ هي :

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، وذلك مهما كان حجم العينتين.

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0,05N)$ فان

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S_X^2}{n_X}\left(\frac{N_X - n_X}{N_X - 1}\right) + \frac{S_Y^2}{n_Y}\left(\frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}\right)$$

مثال(1-9): مصنع A ينتج 600 كغ من العجائن كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 80 يوماً انحرافها معياري 45 كغ. مصنع B ينتج 500كغ كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 75 يوماً انحرافها معياري 40 كغ. أحسب الاحتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 120كغ.

الحل:

1) حساب احتمال: $P(\bar{X}-\bar{Y}) > 120$

لدينا تباين المجتمعين غير معلوم، نستخدم تباين العينتين، وحجم العينتين أكبر من 30.

$n_B = 75$ ، $n_A = 80$

نحسب دالة الاختبار Z

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{(120) - (600 - 500)}{\sqrt{\frac{50^2}{80} + \frac{45^2}{70}}} = 2.62$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) > 100 = P(Z > 2.62)$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) > 100 = 1 - P(Z < 2.62)$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) > 2500 = 1 - 0.9956$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) > 2500 = 0.0044$$

ومنه احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 120 كغ هو: 0.44 %

نظرية (4): إذا سحبت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X < 30$ وتباينها S_X^2 من مجتمع طبيعي X متوسطه μ_X و تباين غير معلوم σ_X^2، وليكن $\bar{X}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}^2$.وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y < 30$ وتباينها S_Y^2 من مجتمع طبيعي Y متوسطه μ_Y و تباين غير معلوم σ_Y^2 ، وليكن $\bar{Y}$ المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة متوسطه الحسابي $\mu_{\bar{Y}}$ وتباينه $\sigma_{\bar{Y}}^2$. فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{X} - \bar{Y})$ يخضع لتوزيع ستيودنت t بدرجات حرية v ، أي :

$$\bar{X} - \bar{Y} \approx t_v \text{ ، بمتوسط } \mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y \text{ و } v = n_X + n_Y - 2$$

وتباين وفق الصيغة التالية:

أ- إذا كان $\sigma_X^2 = \boldsymbol{\sigma_Y^2}$ **فان:**

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} = \frac{\sigma^2}{n_X} + \frac{\sigma^2}{n_Y} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)$$

وبما أن التباين المشترك σ^2 مجهول فإننا نستخدم في مكانه تباينا العينتين S_X^2 و S_Y^2 حيث يكون تقدير التباين هو متوسط مرجح للقيم تبايني اللعينتين وتكون الترجيحات على أساس حجم

العينات. ولكي يكون تقدير التباين تقديراً غير متحيز لـ σ^2 نستخدم درجات الحرية $n_X - 1$ و $n_Y - 1$ كترجيحات بدلاً من استخدام العينتين n_X وn_Y . وعليه فإن مقدر التباين المشترك σ^2 هو S_C^2 ويعطي بالصيغة التالية:

$$S_C^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

ودالة الاختبار t_v التي تعبر على $(\bar{X} - \bar{Y})$ هي :

$$t_v = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_C\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}$$

مثال(1-10): سحبت عينة عشوائية حجمها 21 وتباينها 3 من مجتمع X يخضع لتوزيع طبيعي $N(30\,,\sigma^2)$ ، وسحبت عينة أخرى حجمها 16 و تباينها 3.5 من مجتمع Y يخضع لتوزيع طبيعي $N(28\,,\sigma^2)$ مستقل عن الأول.

المطلوب: إذا كان تبايني المجتمعين متساويين أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين اقل من 3؟

الحل: لدينا تبايني المجتمعين متساويين وحجم العينتين أقل من 30 نستخدم دالة الاختبار t والتباين المشترك S_C .

1) حساب احتمال $P(\bar{X} - \bar{Y}) < 3$

$$S_C^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{(21 - 1)3 + (16 - 1)3.5}{35} = 3.21$$

2) نحسب دالة الاختبار t:

$$t_v = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{S_C\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} = \frac{3 - (30 - 28)}{1.79\sqrt{\dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{16}}} = 1.69$$

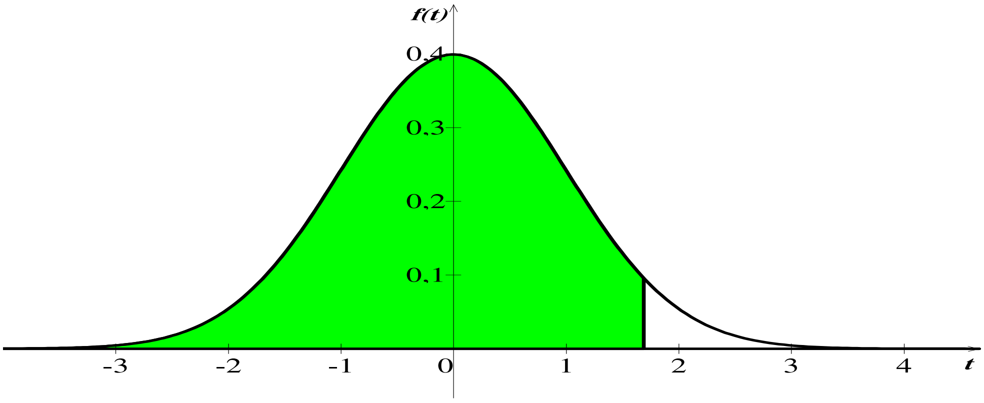
درجة الحرية $v = n_X + n_Y - 2 = 35$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) < 3 = P(t < 1.69)$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y}) < 3 = 0.95$$

ومنه احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 3 هو: 95 %

الشكل (1-8): المساحة تحت المنحنى ستيودنت للاحتمال: $P(t < 1.69)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

ب- إذا كان $\sigma_X^2 \neq \boldsymbol{\sigma_Y^2}$ فان:

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}^2 = \frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_X^2}{n_Y}$$

ودالة الاختبار t_v التي تعبر على $(\bar{X} - \bar{Y})$ هي :

$$t_v = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_X^2}{n_Y}}}$$

ودرجة الحرية v تكتب بالصيغة المركبة التالية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X - 1)} + \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y - 1)}}$$

مثال(1-10): سحبت عينة عشوائية حجمها 16 وتباينها 4 من مجتمع X يخضع لتوزيع طبيعي $N(20\,,\sigma^2)$ ، وسحبت عينة أخرى حجمها 10 و تباينها 5 من مجتمع Y يخضع لتوزيع طبيعي $N(15\,,\sigma^2)$ مستقل عن الأول.

المطلوب: إذا كان تبايني المجتمعين غير متساويين أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 6.5؟

الحل:

لدينا تبايني المجتمعين غير متساويين وحجم العينتين أقل من 30 نستخدم دالة الاختبار t

1) حساب دالة الاختبار t:

$$t_v=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_X^2}{n_Y}}}=\frac{6.5-(20-15)}{\sqrt{\frac{4}{16}+\frac{5}{10}}}=1.73$$

ودرجة الحرية v هي:

$$v=\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X-1)}+\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y-1)}}=\frac{\left(\frac{4}{16}+\frac{5}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4}{16}\right)^2}{(16-1)}+\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{(10-1)}}=17{,}58$$

$$v\approx 18$$

2) حساب احتمال $P(\bar{X}-\bar{Y})>6.5$

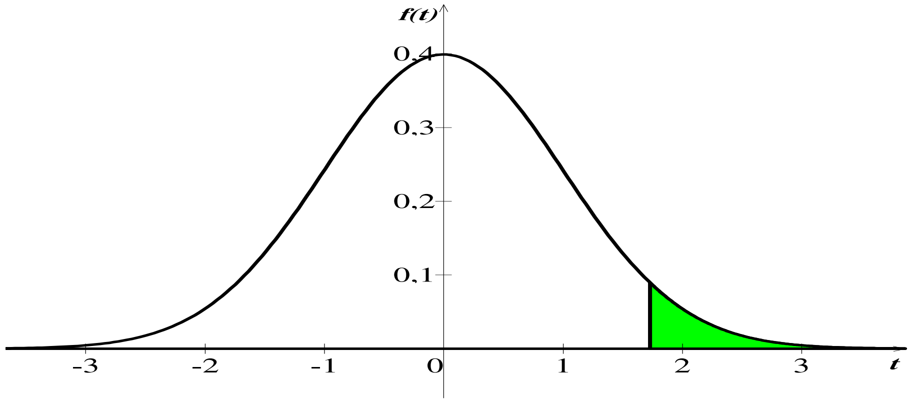
$$P(\bar{X}-\bar{Y})>6.5=P(t>1.73)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})>6.5=1-P(t<1.73)$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y})>6.5=1-0.95=0.05$$

ومنه احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 6.5 هو: 5 %

الشكل (1-9): المساحة تحت المنحنى ستيودنت للاحتمال: $P(t > 1.73)$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

خامسا: توزيع المعاينة للتباينات

ليكن X مجتمع إحصائي تباينه σ_X^2 ، سحبت منه عينة عشوائية حجمها n وتباينها S_1^2، ثم سحبت عينة عشوائية ثانية لها نفس الحجم n وتباينها S_2^2، وهكذا تكرر العملية بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع ، سنحصل على مجموعة من القيم لتباينات العينات، هذه القيم تكون مجتمعا يسمى توزيع المعاينة للتباينات يرمز له S^2.

1- متوسط وتباين توزيع المعاينة للتباينات S^2:

إذا كان تباين العينة يُعطى بالصيغة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

فإن متوسط توزيع المعاينة للتباينات S^2 يعطى بالصيغة التالية:

$$E(S^2) = \sigma_X^2$$

أما الانحراف المعياري توزيع المعاينة للتباينات S^2 فيعطى بالصيغة التالية:

$$\sigma_{S^2} = \sigma_X\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

2- توزيع المعاينة للتباينات S^2، مقدمة لتوزيع كاي تربيع:

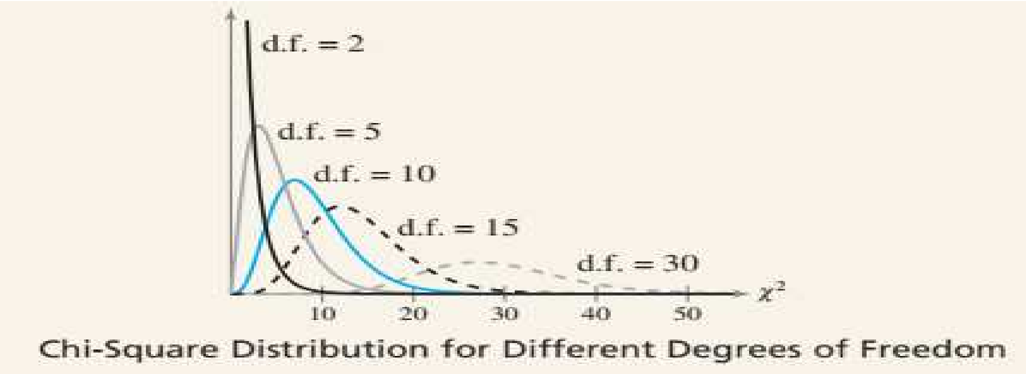
نظرية(1): إذا سحبت عينة عشوائية من مجتمع X يتبع توزيع طبيعي تباينه σ_X^2 وكانت S^2 تُمثل تباين العينة، فإن المتغير χ_v^2:

$$\chi_v^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}$$

له توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $v = n - 1$

وتوزيع كاي تربيع χ_v^2 غير متناظر، وهو توزيع ملتوي إلى اليمين، كما انه يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجتا حريته، وقيمه لا تكون سالبة.

الشكل (1-10): منحنى كاي تربيع (درجات حرية مختلفة)



المصدر: Ron Larson, Betsy Farber, Elementary statistics : picturing the world,6th edition , Pearson Education, Inc ,2015,p330.

مثال(1-11): مجتمع إحصائي يتبع توزيع طبيعي تباينه 36، سحبت منه عينة عشوائية حجمها 10 . **المطلوب**:

1) احسب احتمال أن يكون تباين العينة أقل أو يساوي 7؟
2) احسب احتمال أن يتجاوز تباين العينة 46؟

الحل:

1) احتمال أن يكون تباين العينة أقل أو يساوي 7

$$P(S^2 \leq 7) = P\left(\chi_v^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}\right)$$

$$P(S^2 \leq 7) = P\left(\chi_v^2 \leq \frac{(10-1)7}{36}\right)$$

$$P(S^2 \leq 7) = P(\chi_v^2 \leq 1.75)$$

درجة الحرية $v = n - 1 = 9$

$$P(S^2 \leq 7) = 0.005$$

2) احسب احتمال أن يتجاوز تباين العينة 46

$$P(S^2 > 46) = P\left(\chi_v^2 > \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}\right)$$

$$P(S^2 > 46) = P\left(\chi_v^2 > \frac{(9)46}{36}\right)$$

$$P(S^2 > 46) = P(\chi_v^2 > 11.5) = 0.25$$

3- توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني العينتين

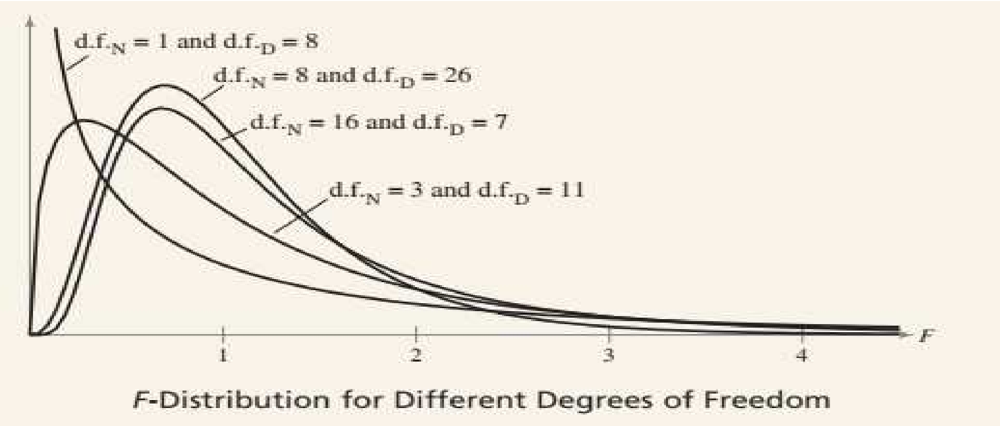
نظرية(2): ليكن S_X^2 تباين العينة التي حجمها n_X المسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ_X^2 ، و ليكن S_Y^2 تباين العينة التي حجمها n_Y المسحوبة عشوائيا من مجتمع Y يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ_Y^2 ، المستقل عن X. فإن المتغير F :

$$F = \frac{\frac{(n_X)S_X^2}{(n_X-1)} \times \frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{(n_Y)S_Y^2}{(n_Y-1)} \times \frac{1}{\sigma_Y^2}} \sim F_{v_X, v_Y}$$

له توزيع فيشر Fisher بدرجة الحرية : $v_X = n_X - 1 \quad , v_Y = n_Y - 1$

توزيع فيشر Fisher هو توزيع ملتوي إلى اليمين ومداه نظريا يكون من الصفر إلى ما لانهاية، وقيم F لا تكون سالبة، كما انه يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجتا حريته.

الشكل (1-11): منحنى فيشر (درجات حرية مختلفة)



المصدر: **Ron Larson, Betsy Farber, Elementary statistics : picturing the world,6th edition , Pearson Education, Inc ,2015,p549**

مثال(1-12): سحب عينتان مستقلتان حجمهما 21 و16من مجتمعين موزعين توزيعاً طبيعياً

أوجد الثابت C حتى يكون: $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0.05$.

درجتي الحرية : $v_1 = n_1 - 1 = 21 - 1 = 20$

$$v_2 = n_2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = P(F > C) = 0.05$$

ومن جدول توزيع فيشر F نجد أن:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = P(F > 2.33) = 0.05$$

ومنه : $C = 2.33$

مثال(1-13): سحبت عينة حجمها 12 من مجتمع طبيعي تباينه 16، وسحبت عينة أخرى حجمها 11 من مجتمع طبيعي تباينه 25 مستقل عن المجتمع الأول. المطلوب: أوجد احتمال النسبة بين تبايني اللعينتين أقل من 1.5.

الحل:

درجتي الحرية : $v_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11$

$$v_2 = n_2 - 1 = 11 - 1 = 12$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 1.5\right) = P\left(\frac{\frac{(n_X)S_X^2}{(n_X - 1)} \times \frac{1}{\sigma_X^2}}{\frac{(n_Y)S_Y^2}{(n_Y - 1)} \times \frac{1}{\sigma_Y^2}} < 1.5\right)$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 1.5\right) = P\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \times \frac{\left(\frac{(n_X)}{(n_X-1)}\right) \times \frac{1}{\sigma_X^2}}{\left(\frac{(n_Y)}{(n_Y-1)}\right) \times \frac{1}{\sigma_Y^2}} < 1.5 \times \frac{\left(\frac{12}{11}\right) \times \frac{1}{16}}{\left(\frac{11}{10}\right) \times \frac{1}{25}}\right)$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 1.5\right) = P(F < 2.32) = 0.90$$

ومنه احتمال النسبة بين تبايني اللعينتين أقل من 1.5. هو 90 %

سادسا: توزيع المعاينة لنسبة العينة

في المجتمعات الإحصائية التي تتبع توزيع ذي الحدين تكون الخاصية المدروسة معبرعنها بالنسبة مثل نسبة الناخبين في المجتمع، نسبة الوحدات التالفة في المصنع وغيرها. ويرمز لنسبة المجتمع الإحصائي بالرمز P حيث يتم حسابها:

$$P = \frac{X}{N} = \frac{\text{عدد مفردات المجتمع التي تحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{عدد الكلي لمفردات المجتمع}}$$

حيث تمثل P احتمال تحقق الظاهرة في المجتمع، أما q تمثل عدم تحقق هذه الظاهرة حيث:

$$q = 1 - p$$

عند سحب جميع العينات الممكنة من هذا المجتمع فان نسبة ظاهرة تتوزع بنسب غير متساوية في العينات، ويتم حساب نسبة الظاهرة في العينة والتي يرمز لها ب $\hat{P}$ كالتالي :

$$\hat{P} = \frac{x}{n} = \frac{\text{عدد مفردات العينة التي تحقق فيها الظاهرة المدروسة}}{\text{عدد الكلي لمفردات العينة}}$$

وعند استخرج جميع قيم لنسبة العينات المسحوبة فان هذه القيم تكون مجتمعا له توزيع احتمالي يسمى توزيع المعاينة لنسبة العينة. متوسطه الحسابي $\mu_{\hat{p}}$، و تباينه $\sigma_{\hat{p}}^2$ كما يلي:

- $\mu_{\hat{p}} = P$
- $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$ في حالة السحب مع الإرجاع ($n < 0,05N$).
- $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في حالة السحب دون إرجاع ($n \geq 0,05N$).

يمكن تقريب توزيع المعاينة لنسبة العينة الى التوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة كبير شرط تحقق: $np \geq 5$ و $nq \geq 5$

نظرية (1): إذا كان X مجتمع يتبع التوزيع ذو الحدين نسبته P ، فان توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{P}$ يقترب من التوزيع طبيعي عندما يكون حجم العينة كبير بدرجة كافية مع تحقق شرط $np \geq 5$ و $nq \geq 5$. و متوسطه الحسابي $\mu_{\hat{p}}$، و تباينه $\sigma_{\hat{p}}^2$ ، كما يلي:

$$\hat{P} \approx N\left(\mu_{\hat{p}}, \sigma_{\hat{p}}^2\right) \text{ مع } \mu_{\hat{p}} = P \text{ و } \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $\hat{P}$ هي :

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

تتبع بتقريب التوزيع الطبيعي المعياري.

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0{,}05N)$ فان

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال(1-12): إذا كان احتمال الوحدات التالفة في مصنع هو 0.06، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 وحدة ما هو احتمال أن تزيد نسبة الوحدات التالفة عن 0.07؟

الحل:

لدينا : $p = 0.06$ و $q = p - 1 = 0.94$ و $n = 100$

حساب احتمال التالي: $P(\hat{P} > 0.07)$

$$np = 100 \times 0.06 = 6 \geq 5$$

$$nq = 100 \times 0.94 = 94 \geq 5$$

بما أن $np \geq 5$ و $nq \geq 5$ فان توزيع المعاينة $\hat{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه

$$\mu_{\hat{p}} = 0.06$$

وتباينه

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{0.06 \times 0.94}{100} = 0.024$$

حساب دالة الاختبار Z :

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.07 - 0.06}{0.024} = 0.42$$

$$P(\hat{P} > 0.07) = P(Z > 0.42)$$

$$P(\hat{P} > 0.07) = 1 - P(Z < 0.42)$$

$$P(\hat{P} > 0.07) = 1 - 0.6628 = 0.3372$$

ومنه احتمال أن تزيد نسبة الوحدات التالفة عن 0.07 هو 33.72 %

سابعا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين

نظرية (2): لتكن $\hat{P}_X$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_X والمسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع ذو الحدين نسبته P_X ، و لتكن $\hat{P}_Y$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_Y والمسحوبة عشوائيا من مجتمع Y يتبع التوزيع ذو الحدين نسبته P_Y ، مستقل عن X. فإن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $(\hat{P}_X - \hat{P}_Y)$ يتبع بتقريب التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين وفق الصيغة التالية:

$$\mu_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = P_X - P_Y$$

$$\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = \frac{(p_X)(q_X)}{n_X} + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y}$$

ودالة الاختبار Z التي تعبر على $(\hat{P}_X - \hat{P}_Y)$ هي :

$$Z = \frac{(\hat{P}_X - \hat{P}_Y) - (P_X - P_Y)}{\sqrt{\frac{(p_X)(q_X)}{n_X} + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y}}}$$

تخضع بتقريب للتوزيع الطبيعي المعياري، وتحقق شرط $np \geq 5$ و $nq \geq 5$

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0,05N)$ فان

$$\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = \frac{(p_X)(q_X)}{n_X}\left(\frac{N_X - n_X}{N_X - 1}\right) + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y}\left(\frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}\right)$$

مثال(1-13): يوجد في مصنع آلاتين، حيث نسبة الوحدات التالفة من الإنتاج الشهري للآلة M_1 هو 5 % ، أما الآلة M_2 هو 4 %، سحبت عينة حجمها 120 من إنتاج M_1 ،و عينة حجمها 150 من إنتاج M_2، ما هو احتمال أن نسبة الوحدات التالفة من الآلة M_1 أكبر من نسبة الوحدات التالفة من الآلة M_2 ؟

الحل:

لدينا : $p_X = 0.05$ و $q_X = p_X - 1 = 0.95$ و $n_X = 120$

$p_Y = 0.04$ و $q_Y = p_Y - 1 = 0.96$ و $n_Y = 150$

حساب احتمال التالي: $P(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0)$

$$P\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0\right) = P(Z < z)$$

حساب دالة الاختبار Z هي :

$$Z = \frac{(\hat{P}_X - \hat{P}_Y) - (P_X - P_Y)}{\sqrt{\frac{(p_X)(q_X)}{n_X} + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y}}} = \frac{0-(0.05-0.04)}{\sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{120} + \frac{(0.04)(0.96)}{150}}} = -0.4$$

$$P\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0\right) = P(Z < -0.4)$$

$$P\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0\right) = 1 - P(Z < 0.4)$$

$$P\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0\right) = 1 - 06554 = 0.3446$$

ومنه احتمال أن نسبة الوحدات التالفة من الآلة M_1 أكبر نسبة الوحدات التالفة من الآلة M_2 هو 34.46 %

تمارين الفصل الأول

تمارين محلولة

التمرين الأول: يسحب محلل مالي عينة من بنك حجمها 4 % من مجتمع متكون من 1000 حساب بنكي متوسطه الحسابي 150 دج. فيجد أن متوسط قيود الحسابات لهذه العينة هو 165دج وانحرافها المعياري هو 25 دج.

المطلوب:

1) أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة
2) احسب احتمال أن يكون متوسط العينة بين 140 دج و155 دج

الحل:

تباين المجتمع غير معلوم لكن انحراف العينة معلوم $S = 25$

و حجمها $n = 1000 \times 0.04 = 40 \geq 30$ و $n/ N = 0.04 < \ 0,05$

ومنه نستخدم دالة الاختبار Z. في حساب الاحتمال.

1) حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

$\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ ومنه $\mu_{\bar{X}} = 150$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{40}} = 3.95$$

2) حساب الاحتمال التالي: $P(140 < \bar{X} < 155)$

نحسب دالة الاختبار Z

$$P(140 < \bar{X} < 155) = P(\frac{140-150}{3.95} < Z < \frac{155-150}{3.95})$$
$$P(140 < \bar{X} < 155) = P(-2.53 < Z < 1.26)$$
$$P(140 < \bar{X} < 155) = P(Z < 1.26) - P(Z < -2.53)$$
$$P(140 < \bar{X} < 155) = P(Z < 1.26) - 1 + P(Z < 2.53)$$
$$P(140 < \bar{X} < 155) = 0.8905$$

التمرين الثاني: تخضع أكياس السكر التي تنتجه إحدى المؤسسات لتوزيع طبيعي متوسطه 50 كغ، أخذت عينة حجمها 9 أكياس من إنتاج هذه المؤسسة، ووجد أن الانحراف المعياري لهذه الأكياس يساوي 1 كغ. أحسب احتمال أن يزيد متوسط وزن هذه الأكياس لهذه العينة عن 50.76كغ.

الحل:

1) حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة :

$\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ ومنه $\mu_{\bar{X}} = 50$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = 0.33$$

2) حساب الاحتمال التالي: $P(\bar{X} > 50.76)$

نحسب دالة الاختبار t:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{50.76 - 50}{0.33} = 2.30$$

درجة الحرية $v = n - 1 = 8$

$$P(\bar{X} > 51) = P(t > 2.30)$$
$$P(\bar{X} < 51) = 1 - P(t < 2.30)$$
$$P(\bar{X} < 51) = 1 - P(t < 2.30)$$
$$P(\bar{X} < 51) = 1 - 0.975 = 0.0.25$$

التمرين الثالث: اذا كانت نسبة من يستخدمون حزام الأمان من سائقي المنطقة A هي 60 % و نسبتهم في المنطقة B هي 50 % ، واختيرت عينة عشوائية من كلا المنطقتين لدراسة هذه الظاهرة وكان حجمها على التوالي 200 و 250

المطلوب:

1) ما هو التوزيع التقريبي للفرق بين نسبتي العينيتين
2) ما هو احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي العينتين أقل أو يساوي 5 %؟

الحل:

لدينا : $p_X = 0.6$ و $q_X = p_X - 1 = 0.4$ و $n_X = 200$

$p_Y = 0.5$ و $q_Y = p_Y - 1 = 0.5$ و $n_Y = 250$

1) التوزيع التقريبي للفرق بين نسبتي العينيتين:

$$n_X p_X = 200 \times 0.6 = 120 \geq 5 \,, n_X q_X = 200 \times 0.4 = 80 \geq 5$$
$$n_Y p_Y = 250 \times 0.5 = 125 \geq 5 \,, n_Y q_Y = 250 \times 0.5 = 125 \geq 5$$

بما أن $n_X p_X \geq 5$ و $n_X q_X \geq 5$ و $n_Y p_Y \geq 5$ و $n_Y q_Y \geq 5$ فان توزيع المعاينة $\hat{P}_X - \hat{P}_Y$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه:

$$\mu_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = P_X - P_Y = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

وتباينه:

$$\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = \frac{(p_X)(q_X)}{n_X} + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y} = \frac{(0.6)(0.4)}{200} + \frac{(0.5)(0.5)}{250}$$

$$\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y} = \frac{(p_X)(q_X)}{n_X} + \frac{(p_Y)(q_Y)}{n_Y} = 0.0022$$

2) حساب احتمال التالي : $P(\hat{P}_X - \hat{P}_Y \leq 0.05)$

حساب دالة الاختبار Z هي :

$$Z = \frac{(\hat{P}_X - \hat{P}_Y) - (P_X - P_Y)}{\sqrt{\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y}}} = \frac{0.05 - 0.01}{\sqrt{0.0022}} = 0.85$$

$$P(\hat{P}_X - \hat{P}_Y \leq 0.05) = P(Z \leq 0.85)$$

$$P(\hat{P}_X - \hat{P}_Y < 0.05) = 0.8023$$

التمرين الرابع: ينتج مصنع للأدوية نوعا من الدواء يحتوي على مادة فعالة، وزنها يتبع التوزيع الطبيعي انحرافه المعياري 1.23 غ. وللتأكد من أن كمية هذه المادة محدد بشكل دقيق في حبة الدواء، تم تحليل عينة حجمها 25 حبة.

المطلوب: أحسب احتمال ألا يزيد الانحراف المعياري لكمية هذه المادة في حبوب الدواء عن 1,42غ.

الحل:

حساب احتمال أن يكون تباين العينة أقل من : $S^2 = (1.42)^2 = 2$

$$P(S^2 < 2) = P\left(\chi^2_v < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_X}\right)$$

$$P(S^2 < 2) = P\left(\chi_v^2 < \frac{(25-1)2}{(1.23)^2}\right)$$

$$P(S^2 \leq 6) = P(\chi_v^2 \leq 32)$$

درجة الحرية $v = n - 1 = 24$

$$P(S^2 \leq 6) = 0.90$$

التمارين المقترحة

التمرين الأول: يتكون مجتمع X من المفردات التالية : 6، 7.5 ، 9 ، 10.5 ، 12 ، تم سحب بدون إرجاع جميع العينات المكونة من ثلاثة عناصر.

المطلوب:

1) أحسب المتوسط الحسابي μ_X والانحراف المعياري σ_X للمجتمع X
2) احسب المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات .
3) احسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}$ ثم استنتج قيمة الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{X}}$
4) احسب التباين S^2 لجميع العينات .
5) احسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير S^2 . ثم استنتج قيمة الانحراف المعياري σ_{S^2}
6) حل المسألة السابقة في حالة المعاينة مع إرجاع.

التمرين الثاني: إذا كان متوسط الدخل الشهري للأسرة الجزائرية 45000دج بانحراف معياري 15000دج ويتبع التوزيع الطبيعي. سحبت عينة عشوائية مكونة من 20 أسرة .

المطلوب: ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة محصور بين 44000 دج و 46000 دج.

التمرين الثالث: قدر مدير شركة أن 30 % من الطلبيات المقدمة للشركة هي من عملاء جدد، نسحب عينة حجمها 100من الطلبيات لمعرفة نسبة طلبيات الزبائن الجدد. نتائج هذه العينة سنستخدمها لمعرفة قدرة المدير على التنبؤ. نفرض أن المدير مصيب ونسبة المجتمع هي 0.3 .

المطلوب:

1) ما هو توزيع المعاينة لنسبة العينة في هذه الدراسة؟.
2) ما هو احتمال أن يكون توزيع المعاينة للنسبة محصورا بين 0.2 و 0.4؟

3) ما هو احتمال أن ينحرف توزيع المعاينة للنسبة عن نسبة المجتمع بـ ± 0.05 ؟

تمرين الرابع: سحبت عينتين عشوائيتين من مؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي، وكان متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الأولى لـ 36 عامل يساوي 25000دج بانحراف معياري 3000دج، أما متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية لـ 49عاملا يساوي 20000دج بانحراف معياري 2100دج.

المطلوب: أحسب احتمال أن متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الأول يزيد ب 4000 دج عن متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية.

التمرين الخامس: إذا كان معدل قيم الفواتير في أحد المستشفيات 1500 دج وان توزيعها يقترب من التوزيع الطبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 25 فوجد أن انحرافها المعياري هو 30 دج.

المطلوب: ما هو احتمال أن قيم الفواتير في العينة لا تزيد عن 1600 دج.

التمرين السادس: أخذت عينتان عشوائيتان مستقلتان من علامات طلبة كلية الاقتصاد في مقياس الإحصاء الاستدلالي وكان تباينا العينتين هما S_1^2 ، S_2^2 و حجمهما $n_1 = 26$ ، $n_2 = 16$. يتبعان لتوزيع مجتمعين طبيعيين تباينهما $\sigma_1^2 = 20$ ، $\sigma_1^2 = 25$

المطلوب: أوجد احتمال النسبة بين تبايني اللعينتين أكبر من 3.5

نظرية التقدير

مقدمة

المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالبا ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من بيانات العينة فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل شهري لأجور في احدى المؤسسات، أو تقدير متوسط عمر جهاز ما ...الخ. ويمكن التمييز بين نوعين من التقدير هما: التقدير بنقطة والتقدير بمجال (فترة).

1- **التقدير بنقطة**: هو عبارة عن قيمة واحدة فقط يأخذها الثابت الإحصائي المقدر بدلالة التابع الإحصائي المقابل، والمحسوب من العينة العشوائية المسحوبة من فمثلا: يكون أفضل تقدير للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي هو المتوسط الحسابي المحسوب من العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع.

ويجب التمييز بين المقدر والتقدير، فالمقدر هو قاعدة أو طريقة تستخدم فيها بيانات العينة لإيجاد قيمة رقمية لمعلمة المجتمع المجهولة أما التقدير فهو القيمة الرقمية المتحصل عليها نتيجة استخدام هذه الطريقة.

2- **خصائص المقدر الجيد**: يوجد ثلاث خصائص يجب أن تتوفر في المقدر حتى يوصف بالمقدر الجيد هي:

أ- **خاصة عدم التحيز**: يقال عن الإحصائية $\hat{\theta}$ بأنها مقدر غير متحيز لمعلمة المجتمع θ إذا كان متوسطها الحسابي أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع أي: $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

مثال (2-1): متوسط العينة $\bar{X}$ هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

البرهان:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{N}\sum x_i\right) = \frac{1}{N}\left(\sum E(x_i)\right) = \frac{N\mu}{N} = \mu$$

مثال (2-2): تباين العينة S^2 في حالة المعاينة بالإرجاع هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 لان:

$$E(S^2) = \sigma^2$$

البرهان:

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E\left[\sum\left((x_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right)^2\right]$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E[\sum((x_i-\mu)^2-2(x_i-\mu)(\bar{X}-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2)]$$
$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E[\sum(x_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum(x_i-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2]$$

لدينا:

$$\sum(x_i-\mu)=n(\bar{X}-\mu)$$

بالتعويض نجد:

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E[\sum(x_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2]$$
$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}[\sum E(x_i-\mu)^2-nE(\bar{X}-\mu)^2]$$

لدينا:

تباين المجتمع هو $\sigma^2=E(x_i-\mu)^2$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ هو $\sigma_{\bar{X}}^2=E(\bar{X}-\mu)^2$

بتعويض القيمتين في صيغة $E(S^2)$ نجد:

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(\sum\sigma^2-n\sigma_{\bar{X}}^2\right)$$
$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\sigma_{\bar{X}}^2\right)$$

بما أن سحب بالرجاع فان: $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right)=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2$$
$$E(S^2)=\sigma^2$$

ب- خاصية الكفاءة: إذا كان هناك أكثر من مقدر لمعلمة معينة، فان المقدر الأكثر كفاءة هو المقدر الذي له أقل تباين، فالكفاءة خاصية نسبية تستخدم لمقارنة بين المقدرات المختلفة لنفس المعلمة وبنفس حجم العينة، ويكون المقدر الأكفأ هو الذي يعطي تقديرات قريبة من المعلمة المجهولة.

فإذا كان لدينا مقدران $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ غير متحيزان للمعلمة المجهولة θ ، فان المقدر $\hat{\theta}_1$ يكون أكثر كفاءة من المقدر $\hat{\theta}_2$ إذا كان $\sigma_{\hat{\theta}_2}^2>\sigma_{\hat{\theta}_1}^2$

مثال(2-3): يمثل توزيعي المعاينة للمتوسط الحسابي والوسيط مقدرين غير متحيزين لمتوسط المجتمع μ ، لكن يعتبر المتوسط $\bar{X}$ مقدرا أكثر كفاءة لمتوسط المجتمع μ من الوسيط لأن: تباين

توزيع المعاينة للمتوسط $\sigma_{\bar{X}}^{2}=\frac{\sigma^{2}}{n}$ أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيط $\sigma_{ME}^{2}=\frac{\pi\sigma^{2}}{2n}$ حيث:

$$\sigma_{ME}^{2}=\sigma_{\bar{X}}^{2}\frac{\pi}{2}$$

ج- **خاصية التقارب(الاتساق):** يقال عن مقدر $\hat{\theta}$ أنه متقارب أو متسق للمعلمة θ ، إذا اقتربت قيمة المقدر من قيمة المعلمة كلما زاد حجم العينة واقترب من الما لا نهاية.

مثال :يعتبر متوسط العينة مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع لأن:

$$E(\bar{X})=\mu \quad و \quad \sigma_{\bar{X}}^{2}=\frac{\sigma^{2}}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

3- **التقدير بفترة**: من الطبيعي أن التقدير بنقطة لأي معلمة لا يخلو من الخطأ، لذلك يتم اللجوء إلى تحديد مجال يحتوي على مجموعة من القيم فيما بينها قيمة معلمة المجتمع الإحصائي المراد تقدير أحد معالمه الإحصائية. ويتم تقدير الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة المطلوبة بالاعتماد على التوزيع الاحتمالي للمقدر وعلى معامل الثقة.

أولا: تقدير فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ_X:

إن تقدير متوسط المجتمع X بفترة هو إيجاد التقدير النقطي لمتوسط المجتمع X ثم استعمال هذا المقدر لحساب حدود مجال التقدير بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ محدد مسبقا.

فإذا كانت العينة المدروسة مأخوذة من مجتمع X يتبع التوزيع طبيعي تباينه σ_X^2،أو كانت كبيرة الحجم فان توزيع المعاينة للإحصاء $\bar{X}$ يخضع لتوزيع الطبيعي أو تقريبا لتوزيع الطبيعي ذو المتوسط μ_X والتباين $\frac{\sigma_X^2}{n}$ حيث:

$$\bar{X}\approx N\left(\mu_X,\frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

وتحسب فترة الثقة للمتوسط μ_X من العبارة الاحتمالية التالية:

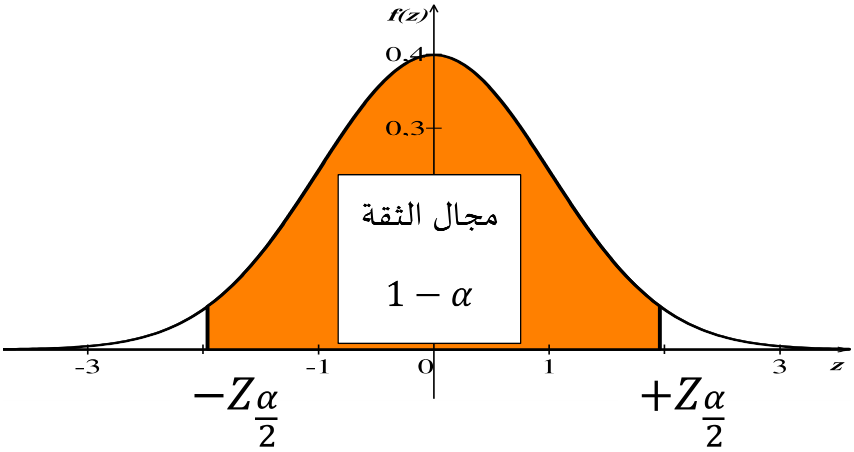
$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

حيث:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

و $Z_{+\frac{\alpha}{2}}$ هي النقطة على المحور الأفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقع إلى يمينها $\frac{\alpha}{2}$ من المساحة. و$Z_{-\frac{\alpha}{2}}$ النقطة المناظرة لها.

الشكل (2-1): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

ملاحظة:

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0{,}05N)$ فان:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

1- حالة تباين المجتمع X معلوم

نظرية (1): إذا كان $\bar{X}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع X طبيعي متوسطه μ_X و تباين σ_X^2 معلوم، فان فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للمعلمة μ_X هي:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \quad , \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$$

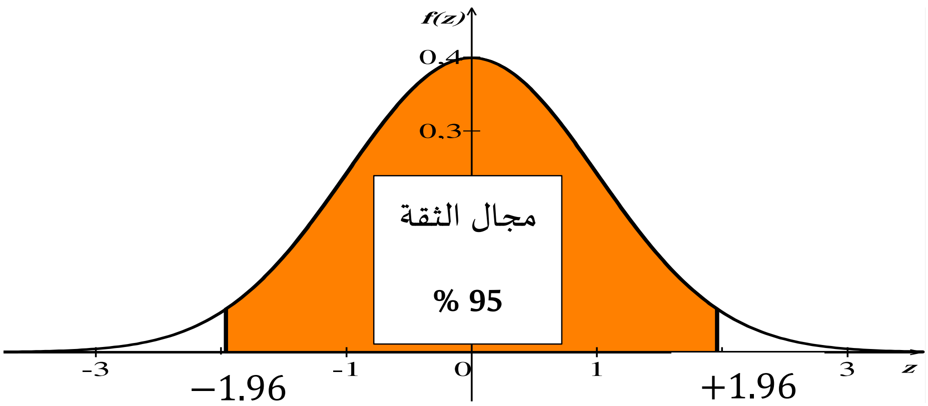
مثال (4-2): أخذت عينة حجمها 36 ومتوسطها 30 من مجتمع إحصائي يتبع توزيعاً طبيعياً انحرافه المعياري 3، أوجد فترة الثقة بنسبة 95 % لمتوسط المجتمع؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1 - \alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$

الشكل (2-2): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 95 % هي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$30 - 1.96.\frac{3}{\sqrt{36}} < \mu_X < 30 + 1.96.\frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$29.02 < \mu_X < 30.98$$

إذن فترة الثقة 95 % لمتوسط المجتمع المجهول هي: $[30.98 \ \ , 29.02]$

تحديد حجم العينة المناسب لتقدير متوسط المجتمع:

يمكن تحديد هامش خطأ معاينة مرغوب فيه وذلك باختبار حجم العينة المناسب حيث يسمى المقدار $Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ حد الخطأ في التقدير μ_X ولهذا إذا تم تحديد المقدار الأكبر المسموح لهذا الخطأ أمكن حساب حجم العينة اللازم لتحقيق ذلك الحد عن طريق حل المتباينة التالية:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq d$$

حيث d: حد المقدار الأكبر المسموح به لهذا الخطأ و نستنتج من ذلك أن:

$$n \geq \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_X}{d}\right]^2$$

مثال (2-5): أراد أحد الباحثين تقدير المتوسط الحسابي لأوزان عبوات الصابون في احدى المصانع، ولقد كان معلوما من دراسات سابقة أن الانحراف المعياري لعبوات الصابون 30 غ.

المطلوب :ما هو حجم العينة اللازم أخذه من عبوات الصابون ليتأكد الباحث بنسبة 95%أن الخطأ في تقدير لا يزيد عن 10 غ؟.

الحل: لدينا $\sigma_X = 30$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$ و $d = 10$

$$n \geq \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_X}{d}\right]^2 \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{1.96 \times 30}{10}\right]^2$$

$$n \geq 34.57$$

إذن حجم العينة المطلوب هو: 35 عبوة

2- حالة تباين المجتمع X غير معلوم

نظرية (2): إذا كان $\bar{X}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ و تباينها S ، مسحوبة من X مجتمع طبيعي متوسطه μ_X و تباين غير معلوم، فان فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ_X هي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

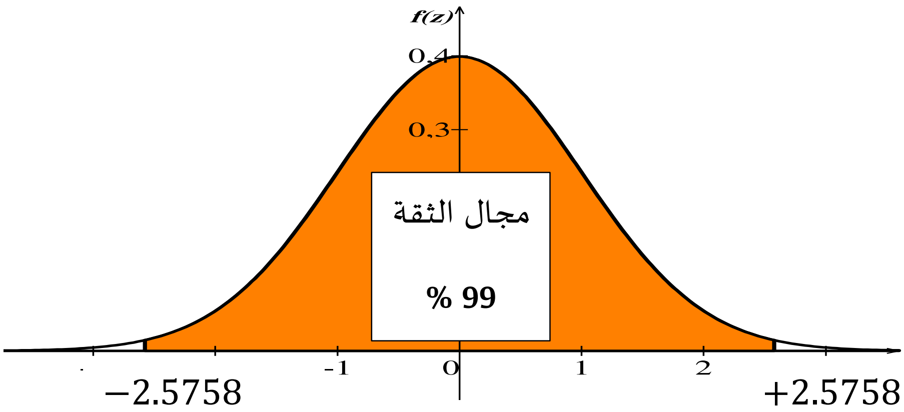
مثال (2-6): أخذت عينة حجمها 36 تلميذ من احدى المدارس الابتدائية فكان متوسط العمر 9 بانحراف معياري 0.5، فاذا كان توزيع عمر التلاميذ يتبع التوزيع الطبيعي تباينه غير معلوم، أوجد فترة الثقة بنسبة 99 % لمتوسط عمر تلاميذ المدارس الابتدائية؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1 - \alpha = 0.99$ ومنه $\alpha = 0.01$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.005$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.005} = 2.5758$

الشكل (2-3): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 99 % هي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$9 - 2.5758.\frac{0.5}{\sqrt{36}} < \mu_X < 9 + 2.5758.\frac{0.5}{\sqrt{36}}$$

$$8.78 < \mu_X < 9.22$$

إذن فترة الثقة 99 % لمتوسط المجتمع المجهول هي: $[9.22 \ , 8.78]$

نظرية (3): إذا كان $\bar{X}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها $n < 30$ و تباينها S ، مسحوبة من X مجتمع طبيعي متوسطه μ_X و تباين غير معلوم، فان فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للمعلمة μ_X هي:

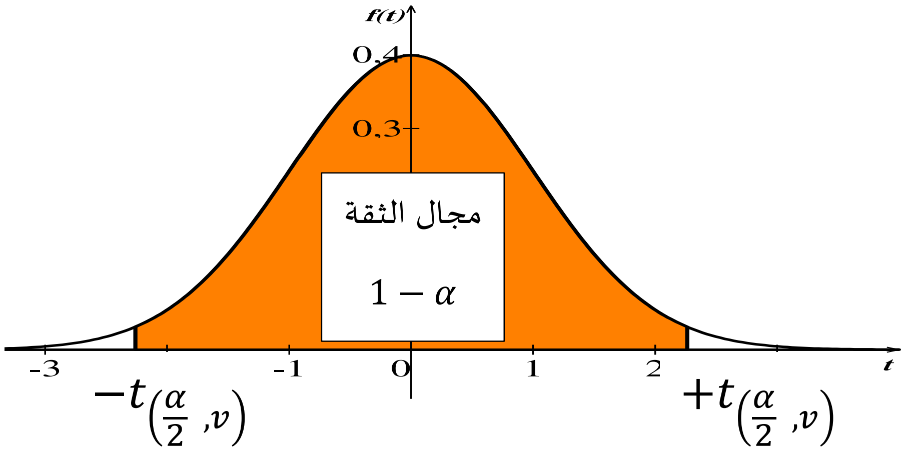
$$\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \bar{X} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

حيث $t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}$ هي النقطة على المحور الأفقي لتوزيع t ذي درجات الحرية $v = n-1$ والتي تقع إلى يمينها $\frac{\alpha}{2}$ من المساحة.

الشكل (2-4): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

مثال (2-7): أخذت عينة مكونة من القيم التالية 10، 12، 11 ،13، 10، 11، 9، 14، 12، 13 من مجتمع إحصائي يتبع التوزيع الطبيعي تباينه غير معلوم، أوجد فترة الثقة بنسبة 95 % لمتوسط هذا المجتمع؟

الحل:

1) حساب متوسط وتباين العينة:

$$\bar{X} = \frac{10 + 12 + 11 + 13 + 10 + 11 + 9 + 14 + 12 + 13}{10} = 11.5$$

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25+2.25+0.25+6.25+6.25+0.25+2.25}{10-1}$$

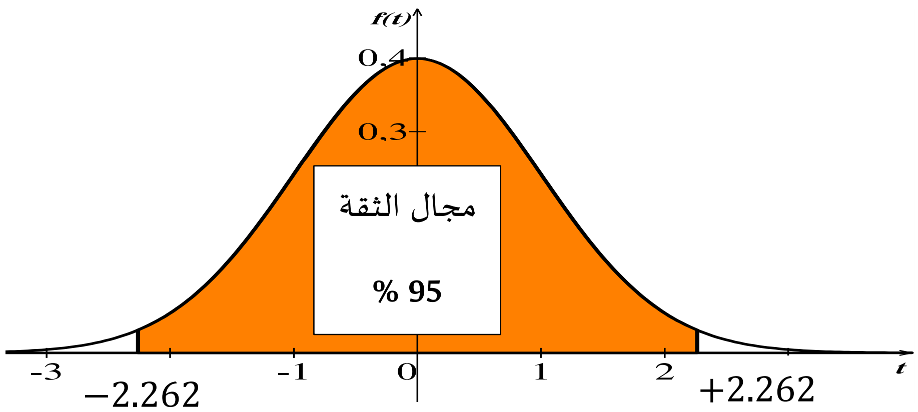
$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{22.5}{9} = 2.5$$

2) لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v = n - 1 = 9$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} = t_{(0.025, 9)} = 2.262$$

الشكل (2-5): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 95 % هي:

$$\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$11.5 - 2.262.\frac{1.58}{\sqrt{10}} < \mu_X < 11.5 + 2.262.\frac{1.58}{\sqrt{10}}$$

$$10.37 < \mu_X < 12.63$$

إذن فترة الثقة 95 % لمتوسط المجتمع المجهول هي: $[12.63 \quad , 10.37]$

3- حالة مجتمع غير طبيعي

نظرية (4): إذا كان $\bar{X}$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ مسحوبة من X مجتمع غير طبيعي متوسطه μ_X وتباين σ_X^2 معلوم، وباستعمال نظرية النهاية المركزية فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي وعليه تكون فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للمعلمة μ_X هي :

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \quad , \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$$

وفي حالة عدم معلومية σ_X^2 ، يستخدم تباين العينة S^2 شرط $n > 100$

مثال(2-8): سحب عينة عشوائية حجمها 100 كيس من احدى مصانع إنتاج الدقيق، متوسط وزنها هو 25.10 كلغ. فاذا كان مجتمع توزيع أوزان أكياس دقيق يتبع توزيعا غير طبيعيا، انحرافه المعياري 1.2 كغ. أوجد فترة الثقة بنسبة 99 % لمتوسط وزن الأكياس؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha = 0.99$ ومنه $\alpha = 0.01$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.005$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن : $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.005} = 2.5758$

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 99 % هي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$25.10 - 2.5758.\frac{1.2}{\sqrt{100}} < \mu_X < 25.10 + 2.5758.\frac{1.2}{\sqrt{36}}$$

$$24.79 < \mu_X < 25.41$$

إذن فترة الثقة 99 % لمتوسط المجتمع المجهول هي: $[24.79\ \ ,24.79]$

ثانيا: فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين:

1- حالة تباين المجتمعين معلوم

نظرية (1): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها n_X ومتوسطها $\bar{X}$، مسحوبة من مجتمع طبيعي $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2\ )$، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها n_Y ومتوسطها $\bar{Y}$ ، مسحوبة من مجتمع طبيعي$Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2\ )$. فإن فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_X - \mu_Y)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} < (\mu_X - \mu_Y) < (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right]$$

ملاحظة: إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n\ \geq\ 0,05N)$ فان

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n_X}\left(\frac{N_X - n_X}{N_X - 1}\right) + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\left(\frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}\right)$$

مثال(2-9): شركتان A وB تنتجان نوع معين من الجبس، سحبت عينة عشوائية تتكون من 30 كيس من شركة A فكان متوسط وزنها 42.5 كغ، وسحبت عينة عشوائية ثانية مستقلة عن العينة الأولى من شركة B تتكون من 25 كيس متوسط وزنها 41 كغ، إذا كان وزن الأكياس المنتج في شركة A يتبع التوزيع الطبيعي بتباين 1.2 كغ و وزن الأكياس المنتج في شركة B يتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0.9 كغ.

المطلوب: أوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي وزن الأكياس في الشركتين؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتبايني المجتمعين معلومين فان فترة الثقة عند مستوى 95 % تعطي بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right]$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}=(42.5-41)-1.96.\sqrt{\frac{1.2}{30}+\frac{0.9}{25}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}=0.96$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}=(42.5-41)+1.96.\sqrt{\frac{1.2}{30}+\frac{0.9}{25}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}=2.04$$

إذن فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي أوزان الأكياس في الشركتين هي: $[2.04\ \ ,0.96]$

2- حالة تباين المجتمعين غير معلوم

نظرية (2): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X < 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y < 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. وكان تباين المجتمعين متساوين $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_X - \mu_Y)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y}) - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X}-\bar{Y}) + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\right]$$

حيت: درجة الحرية هي: $v = n_X + n_Y - 2$

والتباين المشترك S_C^2 هو:

$$S_C^2 = \frac{(n_X-1)S_X^2 + (n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

مثال(2-10): أخذت عينة عشوائية حجمها 12 فكان متوسطها الحسابي 25 وتباينها 16 من مجتمع طبيعي، وأخذت عينة عشوائية ثانية حجمها 8 فكان متوسطها الحسابي 35 وتباينها 14 من مجتمع طبيعي مسقل عن الأول. إذا كان تبايني المجتمعين غير معلومين ومتساويين.

المطلوب: أوجد فترة الثقة 90 % للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

الحل:

1) حساب التباين المشترك:

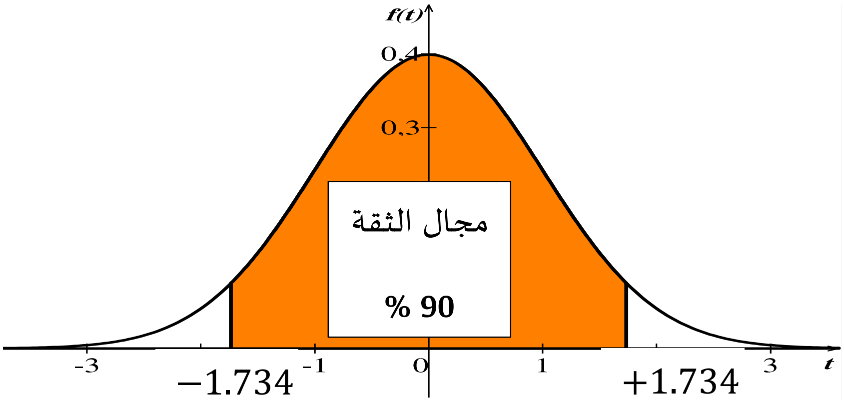
$$S_C^2 = \frac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2} = \frac{11\times16+7\times14}{12+8-2} = 15.22$$

2) لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha = 0.90$ ومنه $\alpha = 0.10$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.05$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v = n_X + n_Y - 2 = 18$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} = t_{(0.05\ ,18)} = 1.734$$

الشكل (2-5): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتبايني المجتمعين غير معلومين ومتساويين، وحجم العينتين أقل من 30، فان فترة الثقة عند مستوى 90 % تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\ ,(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\right]$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=(25-35)-1.734.\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=-10.8$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=(-10)+1.734.\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=-9.2$$

إذن فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي أوزان الأكياس في الشركتين هي: $[-9.2\ ,-10.8]$

نظرية (3): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X < 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y < 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. وكان تباين المجتمعين غير متساوين $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_X - \mu_Y)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y}) - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\ ,(\bar{X}-\bar{Y}) + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\right]$$

ودرجة الحرية v تكتب بالصيغة المركبة التالية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X-1)}+\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y-1)}}$$

مثال(2-11): سحبت عينتين عشوائيتين من شركتين تنتجان مربى الفواكه، العينة الأولى تتكون من 25 علبة متوسطها 210 غ وتباين 25 غ والعينة الثانية تتكون من 20 علبة متوسطها 200 غ وتباين 16 غ. أوجد فترة الثقة 98 % للفرق بين متوسطي أوزان مربى الفواكه في الشركتين؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha = 0.98$ ومنه $\alpha = 0.02$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.01$

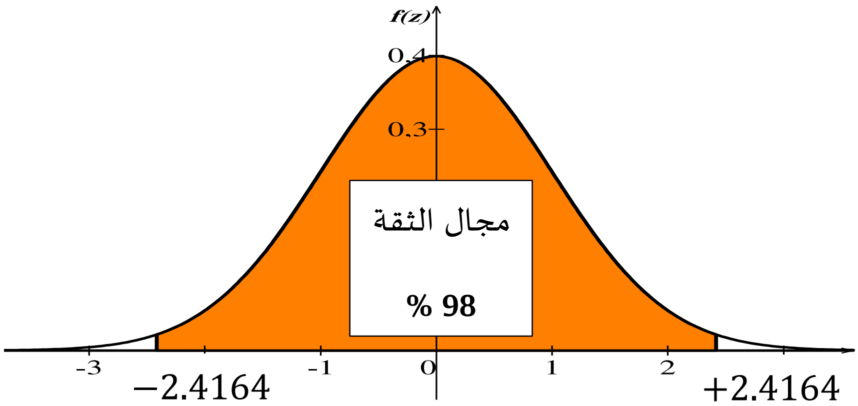
ودرجة الحرية v هي:

$$v=\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X-1)}+\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y-1)}}=\frac{\left(\frac{25}{25}+\frac{16}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{25}{25}\right)^2}{(24)}+\frac{\left(\frac{16}{20}\right)^2}{(19)}}=43.2$$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v=43$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}=t_{(0.01\ ,43)}=2.4164$$

الشكل (2-5): المساحة تحت المنحنى المظللة بين القيمتين (مجال الثقة)



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتبايني المجتمعين غير معلومين وغير متساويين وحجم العينتين أقل من 30، فان فترة الثقة عند مستوى 90 % تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\right]$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=(210-200)-2.4164.\sqrt{\frac{25}{25}+\frac{16}{20}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}\cdot\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=6.76$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}\cdot\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=(10)+2.4164.\sqrt{\frac{25}{25}+\frac{16}{20}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}\cdot\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=13.24$$

إذن فترة الثقة 98 % للفرق بين متوسطي أوزان مربى الفواكه في الشركتين هي: $[13.24\ ,6.76]$

نظرية (4): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X\geq 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع X ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y\geq 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع Y. وليس بالضرورة أن يتبعا المجتمعان للتوزيع الطبيعي، فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_X-\mu_Y)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\quad,(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\right]$$

مثال(2-12): البيانات التالية لعينتين مستقلتين مسحوبتين من مجتمعين

العينة الأولى	العينة الثانية
$n_X=100$	$n_Y=120$
$\bar{X}=18$	$\bar{Y}=15$
$S_X^2=49$	$S_Y^2=55$

أوجد فترة الثقة 92 % للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

الحل:

لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha=0.92$ ومنه $\alpha=0.08$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.04$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن : $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.04}=1.75$

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتبايني المجتمعين غير معلومين وحجم العينتين أكبر من 30، فان فترة الثقة عند مستوى 95 % تعطي بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}\right]$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=(18-15)-1.75.\sqrt{\frac{49}{100}+\frac{55}{120}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=1.42$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=(18-15)+1.75.\sqrt{\frac{49}{100}+\frac{55}{120}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X}+\frac{S_Y^2}{n_Y}}=4.58$$

إذن فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين هي: $[4.58\ ,1.42]$

ثالثا: تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين

توجد الكثير من الحالات التي ترتبط فيها البيانات الخاصة بالعينتين، بحيث تكون العينتين غير مستقلتين، بمعنى أن القيم في العينتين تكون من نفس مفردات قيد الدراسة، فمثلا لدراسة أثر زيادة الدخل على استهلاك، فانه يتم اختيار عينة عشوائية من الأسر، بحيث تجمع البيانات عن استهلاك هذه الأسر قبل زيادة في رواتبهم (قيم العينة الأولى)، ثم بعد زيادة في رواتبهم (قيم العينة الثانية)، وبالتالي فان هذه الدراسات تكون فيها حجوم العينات متساوية حتما، وتشكل كل مفردة زوجين من القيم. لذلك سمية بالعينتين المزدوجتين.

وفي اغلب الحالات التي تكون فيها العنتين مزدوجتين يكون الهدف هو المقارنة بين متوسطين حسابين لمجتمعين قبل وبعد إجراء معين.

نظرية (5): إذا كانت E_d عينة عشوائية من الفروق $(d_1, d_2, d_3, , , , , , d_n)$ حجمها $n_d < 30$ وتباينها S_d^2، مسحوبة من مجتمع الفروق X_d حيث $X_d \approx N(\mu_d, \sigma_d^2)$. فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة عينتين مزدوجتين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{d} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S_d}{\sqrt{n}} < \mu_d < \bar{d} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

$$\left[\bar{d} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S_d}{\sqrt{n}} \quad , \bar{d} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} \cdot \frac{S_d}{\sqrt{n}}\right]$$

حيث:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

d_i : هو الفرق بين قيمة القراءتين لنفس المفردة (الفرق بين القيمة في العينة الأولى مقابل القيمة في العينة الثانية).

$\bar{d}$: المتوسط الحسابي لعينة للفروق

S_d : الانحراف المعياري لعينة الفروق.

مثال(2-13): تم إجراء امتحان لسبعة عمال لمعرفة تحكمهم في تكنولوجية جديدة وسجلت علامتهم، ثم أدخلوا دورة تدريبية لمدة شهر، ثم أعيد الامتحان بعد انتهاء الدورة التدريبية، والبيانات التالية تمثل نتائج الامتحانين:

علامة العامل								
	قبل الدورة	13	10	12	9	6	8	11
	بعد الدورة	16	15	12	15	11	12	9

المطلوب: أوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي التحكم في التكنولوجية الجديدة عند العمال قبل وبعد الدورة التدريبية؟

الحل:

1) إيجاد عينة الفروق وحساب متوسطها وتباينها كما يلي:

قبل الدورة x_1	بعد الدورة x_2	$d_i = x_1 - x_2$	$(d_i - \bar{d})^2$
13	16	- 3	0
10	15	- 5	4
12	12	0	9
9	15	- 6	9
6	11	- 5	4
8	12	- 4	1
11	9	2	25
/	/	- 21	52

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-21}{7} = -3$$

$$S_d{}^2 = \frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{52}{6} = 8.67$$

$$S_d = \sqrt{8.67} = 2.94$$

3) لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v=n-1=6$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}=t_{(0.025\ ,6)}=2.447$$

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي والعينتين مزدوجتين وحجم العينتين أقل من 30،
فان فترة الثقة عند مستوى 95 % تعطي بالعلاقة التالية:

$$\bar{d}-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}<\mu_d<\bar{d}+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\bar{d}-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}=(-3)-2.447.\frac{2.94}{\sqrt{7}}$$

$$\bar{d}-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}=-5.71$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\bar{d}+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}=(-3)+2.447.\frac{2.94}{\sqrt{7}}$$

$$\bar{d}+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}=-0.29$$

إذن فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي التحكم في التكنولوجية الجديدة عند العمال قبل وبعد الدورة التدريبية هي: $[5.71\ \ ,-0.29]$

رابعا: فترة الثقة لتباين المجتمع

إذا سحبت عينة عشوائية من مجتمع X يتبع توزيع طبيعي تباينه σ_X^2 وكانت S^2 تُمثل تباين العينة، فإن المتغير χ_v^2:

$$\chi_v^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2}$$

له توزيع كاي تربيع بدرجات حرية $v = n - 1$

نظرية (1): إذا كان S^2 هو تباين عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه μ_X وتباينه σ_X^2 فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ لتباين المجتمع σ_X^2 هي:

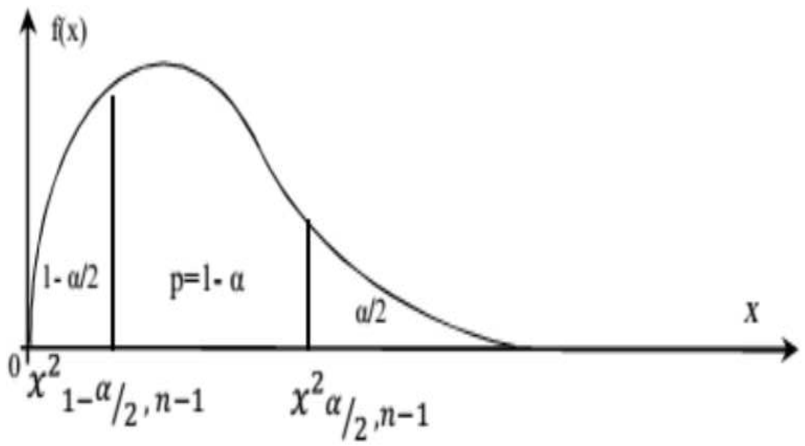
$$P\left(\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)} < \chi^2 < \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} < \sigma_X^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}}\right) = 1-\alpha$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}}\right]$$

ويمكن توضيح مجال الثقة باستخدام توزيع كاي تربيع بالشكل التالي:



مثال (2-14): إذا كانت علامات طلاب في مادة الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي، تم سحب عينة عشوائية حجمها 6 طلبة علاماتهم كالاتي: 12.5، 13، 14، 13.5، 14.5، 15. المطلوب: أوجد فترة الثقة 95 % لتباين المجتمع باستخدام بيانات العينة؟

الحل:

1) حساب المتوسط الحسابي وتباين العينة:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{82.5}{6} = 13.75$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{4.375}{6-1} = 0.875$$

2) فترة الثقة لتباين المجتمع هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} \quad , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}}\right]$$

و $1-\alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، و درجة حرية $v = n - 1 = 5$ ويكون:

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} = \chi^2_{(0.025\,,5)} = 12.833$$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)} = \chi^2_{(0.975\,,5)} = 0.831$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} = \frac{(6-1)0.875}{12.833} = 0.34$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}} = \frac{(6-1)0.875}{0.831} = 5.26$$

إذن فترة الثقة لتباين المجتمع عند مستوى الثقة 95 % هي: $[5.26\ ,0.34]$

خامسا: فترة الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين

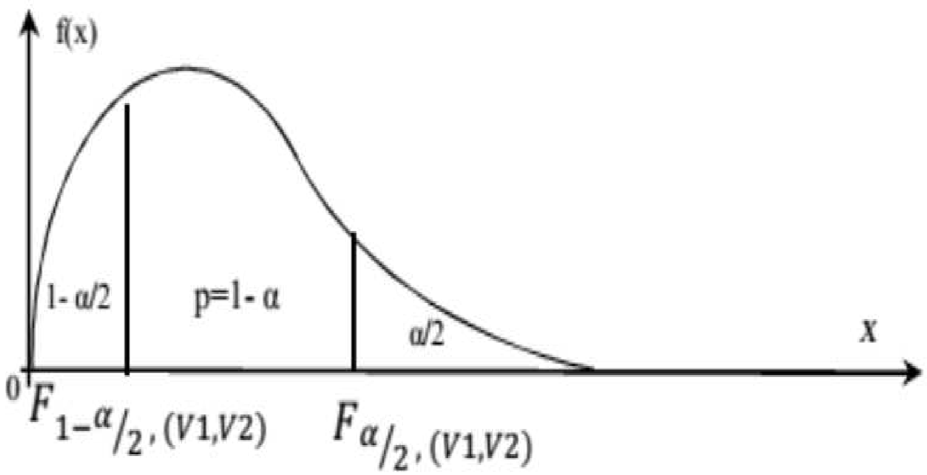
نظرية (2): ليكن S_X^2 تباين العينة التي حجمها n_X المسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ_X^2 ، و ليكن S_Y^2 تباين العينات التي حجمها n_Y المسحوبة عشوائيا من مجتمع Y يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ_Y^2 ، المستقل عن X. فإن فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للنسبة بين تبايني المجتمعين $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ هي:

$$\frac{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v_X,v_Y\right)}} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq \frac{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\ ,v_X,v_Y\right)}}$$

مجال فترة الثقة هو:

$$\left[\frac{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v_X,v_Y\right)}}\ ,\frac{\frac{S_X^2}{S_Y^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\ ,v_X,v_Y\right)}}\right]$$

ويمكن توضيح فترة الثقة باستخدام توزيع فيشر بالشكل التالي:



مثال (2-15): سحبت عينة من مجتمع طبيعي حجمها 16 وتباينها 9 وسحبت عينة أخرى من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول حجمها 25 وتباينها 12 أوجد فترة ثقة 95 % للنسبة بين تبايني المجتمعين.

الحل:

بما أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا والعينتين مستقلتين، فان فترة الثقة المطلوبة هي

$$\left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}} , \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}\right]$$

و $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$ ، و درجة حرية $v_X=n-1=15$ ، $v_Y=n-1=24$ ويكون:

$$f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}=f_{(0.025,15,24)}=2.44$$

$$f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}=f_{(0.975,15,24)}=0.37$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}=\frac{\frac{9}{12}}{2.44}=0.31$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}=\frac{\frac{9}{12}}{0.37}=2.03$$

إذن فترة الثقة لنسبة تبايني المجتمعين عند مستوى الثقة 95 % هي: $[2.03 , 0.31]$

سادسا: فترة الثقة لنسبة المجتمع

إذا كان X مجتمع يتبع التوزيع ذو الحدين $X \sim B(n, P)$ ، فان توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{P}$ يقترب من التوزيع طبيعي $\hat{P} \approx N\left(\mu_{\hat{p}}, \sigma_{\hat{p}}^2\right)$ عندما يكون حجم العينة كبير بدرجة كافية مع تحقق شرط $np \geq 5$ و $nq \geq 5$. ويكون متوسطه الحسابي $\mu_{\hat{p}} = P$، و تباينه $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$.

بما أن P غير معلومة وهي التي نريد تقدير فترة الثقة لها، نستخدم نسبة العينة $\hat{P}$ المعلومة لحساب التباين $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{P}\hat{q}}{n}$.

نظرية (1): إذا كانت $\hat{P}$ تمثل نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n ، وكانت n كبيرة بدرجة كافية فان فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ التقريبية لنسبة النجاح في المجتمع P هي:

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} < \mu_X < \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}$$

مجال الثقة هو:

$$\left[\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} \quad , \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\right]$$

إذا كان المجتمع محدود (سحب بدون إرجاع) أو $(n \geq 0{,}05N)$ نستعمل:

$$\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

مثال (2-16): لمعرفة نسبة أصحاب المحلات التجارية الذين التزموا بإجراءات الوقاية ضد فيروس كورونا، بوضع الكمامة في احدى ولايات التي شهدت انتشار هذا الفيروس، تمت معاينة عينة عشوائية حجمها 400 محل تجاري ووجد 300 منها قد وضع أصحابها الكمامة والتزموا بالإجراءات الوقائية.

المطلوب:قدر نسبة المحلات التجارية التي التزم أصحابها بالإجراءات الوقائية ضد فيروس كورونا في هذه الولاية ككل باستخدام مستوى ثقة95%؟

الحل:

لدينا: $\hat{P} = \frac{300}{400} = 0.75 \quad , \hat{q} = 1 - 0.75 = 0.25$

بما n كبيرة فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} \quad , \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\right]$$

و $1 - \alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.75 - 1.96.\sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{400}}$$

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.708$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.75 + 1.96.\sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{400}}$$

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.792$$

إذن فترة الثقة لنسبة المحلات التجارية التي التزم أصحابها بالإجراءات الوقائية ضد فيروس كورونا في هذه الولاية ككل عند مستوى الثقة 95 % هي: $[0.708\ ,\ 0.792]$

تحديد حجم العينة اللازم لتقدير نسبة المجتمع:

غالبا ما تكون النسبة P غير معلومة ،وقد تكون هناك معلومات سابقة من دراسات مماثلة فيمكن استخدام قيمة P المعروفة من تلك الدراسات السابقة ، أما اذا لم تكن هناك أية قيمة ل P يمكن اعتبار $P = 1/2$ حيث تعطي هذه القيمة أكبر خطأ ممكن الحصول عليه . فإذا تم تحديد أكبر خطأ مسموح به d في تقدير P ، فانه يمكن حساب حجم العينة اللازم لتحقيق d كلاتي :

أ- قيمة P المعروفة من تلك الدراسات السابقة:

$$n \geq \left[\frac{Z\frac{\alpha}{2}}{d}\right]^2 .P(1-P)$$

ب- اعتبار $P = 1/2$:

$$n \geq \frac{1}{4}\left[\frac{Z\frac{\alpha}{2}}{d}\right]^2$$

حيث d : هو المقدار الأكبر المسموح به للخطأ في التقدير P

مثال (2-17): لمعرفة تقدير نسبة عدد الأشخاص الذين تماثلوا لشفاء ضد فيروس الحساسية في احدى المدن، ما هو عدد الأشخاص الذين يخضعون للمعاينة الطبية حتى نكون واثقين 95 % أن الخطأ في تقدير P لا يزيد عن 0.06 في كل من الحالتين التاليتين:

أ- $\mathrm{P} = 0.90$ من دراسات سابقة.

ب- P غير معرفة.

الحل:

عند مستوى الثقة: $1-\alpha = 0.95$ فان $\alpha = 0.05$ ومنه

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

أ- $P = 0.90$:

$$n \geq \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{d}\right]^2 .P(1-P) \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{1.96}{0.06}\right]^2 .0.9 \times 0.1 = 171$$

حجم العينة هو: $n = 171$

ب- P غير معرفة.

$$n \geq \frac{1}{4}\left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{d}\right]^2 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{4}\left[\frac{1.96}{0.06}\right]^2 = 267$$

حجم العينة هو: $n = 267$

سابعا: فترة الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

نظرية (2): لتكن $\hat{P}_X$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_X والمسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع ذو الحدين $X \sim B(n_X, P_X)$ ، و لتكن $\hat{P}_Y$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_Y المسحوبة عشوائيا من مجتمع Y يتبع التوزيع ذو الحدين $Y \sim B(n_Y, P_Y)$ ، مستقل عن X. وكانت n_X و n_Y كبرتان بدرجة كافية فان فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ للفرق بين نسبتي المجتمعين $\hat{P}_X - \hat{P}_Y$ هي:

$$(\hat{P}_X - \hat{P}_Y) \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{(\hat{p}_X)(\hat{q}_X)}{n_X} + \frac{(\hat{p}_Y)(\hat{q}_Y)}{n_Y}}$$

مثال(2-18): أخذت عينة عشوائية حجمها 120 من المرضى الذين تلقوا دواء ضد كورونا في المدينة A، فوجد أن 114 منهم تماثلوا للشفاء، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 100 من المرضى الذين تلقوا دواء ضد كورونا في المدينة B فوجد أن 90 منهم تماثلوا للشفاء . أوجد فترة ثقة 90 % للفرق بين نسبتي المرضى الذين تماثلوا للشفاء في المدينتين؟

الحل:

لدينا: $\widehat{P}_X = \frac{114}{120} = 0.95 \quad , \hat{q}_X = 0.05$

$$\widehat{P}_Y = \frac{90}{100} = 0.9 \quad , \hat{q}_Y = 0.1$$

بما أن n_X و n_Y كبرتان بدرجة كافية فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left(\widehat{P}_X - \widehat{P}_Y\right) \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{(\hat{p}_X)(\hat{q}_X)}{n_X} + \frac{(\hat{p}_Y)(\hat{q}_Y)}{n_Y}}$$

و $1 - \alpha = 0.90$ ومنه $\alpha = 0.10$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.05} = 1.64$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\left(\widehat{P}_X - \widehat{P}_Y\right) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{(\hat{p}_X)(\hat{q}_X)}{n_X} + \frac{(\hat{p}_Y)(\hat{q}_Y)}{n_Y}} = 0.05 - 1.64\sqrt{\frac{(0.95)0.05}{120} + \frac{(0.9)0.1}{100}}$$

$$\left(\widehat{P}_X - \widehat{P}_Y\right) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{(\hat{p}_X)(\hat{q}_X)}{n_X} + \frac{(\hat{p}_Y)(\hat{q}_Y)}{n_Y}} = -0.009$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\left(\widehat{P}_X - \widehat{P}_Y\right) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{(\hat{p}_X)(\hat{q}_X)}{n_X} + \frac{(\hat{p}_Y)(\hat{q}_Y)}{n_Y}} = 0.109$$

إذن فترة ثقة للفرق بين نسبتي المرضى الذين تماثلوا للشفاء في المدينتين عند مستوى 90 % هي: $[0.109 \;, -0.009]$

تمارين الفصل الثاني
تمارين محلولة

التمرين الأول: أخذت عينة مكون من 200 مشارك في برنامج تدريبي لإنقاص الوزن، فكان متوسطها 5 ساعات تدريب في الأسبوع، بانحراف معياري قدره 1.5 ساعة.

المطلوب: أوجد مجال الثقة 95% لمتوسط ساعات التدريب في الأسبوع من قبل جميع المشاركين في هذه البرنامج؟

الحل: فترة الثقة هي $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 95 % هي:

$$\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu_X<\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$5-1.96.\frac{1.5}{\sqrt{200}}<\mu_X<5+1.96.\frac{1.5}{\sqrt{200}}$$

$$4.97<\mu_X<5.21$$

إذن فترة الثقة 95 % ساعات التدريب في الأسبوع من قبل جميع المشاركين في هذه البرنامج هي:

[5.21 , 4.97]

التمرين الثاني: من بين المؤسسات المتوسطة العاملة في قطاع الصناعة وعددها 200 مؤسسة، تم سحب عينة عشوائية مع إرجاع حجمها 10 مؤسسات فوجد أن رقم أعمال هذه المؤسسات كما يلي (الوحدة مليون. دج):

32	35	30	24	28	33	30	25	27	26

المطلوب:

1) قدر نقطياً متوسط رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة؟

2) قدر نقطياً تباين رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة؟

3) أوجد فترة الثقة 90 % لمتوسط رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة؟
4) أوجد فترة الثقة 95 % لتباين رقم أعمال المؤسسات العاملة في قطاع الصناعة؟

الحل:

1) حساب متوسط وتباين العينة:

x_i	26	27	25	30	33	28	24	30	35	32	286
$(x_i-\bar{X})^2$	9	4	16	1	16	1	25	1	36	9	118

$$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum x_i=\frac{290}{10}=29$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{118}{10-1}=13.11$$

2) التقدير النقطي لمتوسط رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة هو:

$$E(\bar{X})=\mu=29$$

3) التقدير النقطي تباين رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة هو:

$$E(S^2)=\sigma^2=13.11$$

4) فترة الثقة 90 % لمتوسط رقم أعمال المؤسسات المتوسطة في قطاع الصناعة هي:

فترة الثقة هي $1-\alpha=0.90$ ومنه $\alpha=0.10$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.05$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v=n-1=9$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}=t_{(0.05\ ,9)}=1.833$$

وفترة الثقة المطلوبة عند مستوى 95 % هي:

$$\bar{X}-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu_X<\bar{X}+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$29-1.833.\frac{3.62}{\sqrt{10}}<\mu_X<29+1.833.\frac{3.62}{\sqrt{10}}$$

$$26.9<\mu_X<31.1$$

إذن فترة الثقة 90 % لمتوسط المجتمع المجهول هي: $[31.1 \ , 26.9]$

5) فترة الثقة 95 % لتباين رقم أعمال المؤسسات العاملة في قطاع الصناعة هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} \ , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}}\right]$$

و $1-\alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، ودرجة حرية $v = n-1 = 9$ ويكون:

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)} = \chi^2_{(0.025\,,9)} = 19.023$$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)} = \chi^2_{(0.975\,,9)} = 2.70$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}} = \frac{(10-1)13.11}{19.023} = 6.20$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v\right)}} = \frac{(10-1)13.11}{2.70} = 43.70$$

إذن فترة الثقة لتباين المجتمع عند مستوى الثقة 95 % هي: $[43.70 \ , 6.20]$

التمرين الثالث: لمعرفة الفرق الحقيقي بين معدل العطل السنوية للعاملين ومعدل العطل السنوية للعاملات في إحدى المؤسسات التربوية، تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من سجلات العاملين والعاملات في هذه المؤسسة لمدة معينة فوجد أن من سجلات 20عاملا متوسط العطل السنوية 40 يوم بتباين 25 يوم ومن سجلات 22عاملات وجد أن متوسط أيام العطل السنوية هو 50 يوم بتباين 16 يوم إذا كان تبايني المجتمعين غير معلومين ومتساويين.

المطلوب: أوجد فترة الثقة 90 % للفرق الحقيقي بين متوسط العطل السنوية للعمال والعاملات في هذه المؤسسة؟

الحل:

1) حساب التباين المشترك:

$$S_C^2=\frac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}=\frac{19\times25+21\times16}{20+22-2}=20.275$$

2) لدينا فترة الثقة هي $1-\alpha=0.90$ ومنه $\alpha=0.10$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.05$

ومن جدول التوزيع t ، وبدرجة حرية $v=n_X+n_Y-2=40$ نجد أن:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}=t_{(0.05\ ,40)}=1.684$$

وبما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتبايني المجتمعين غير معلومين ومتساويين، وحجم العينتين أقل من 30، فان فترة الثقة عند مستوى 90 % تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\ \ ,(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\right]$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=(40-50)-1.684.\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{22}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=-10.52$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=(-10)+1.684.\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{22}}$$

$$(\bar{X}-\bar{Y})+t_{\left(\frac{\alpha}{2},v\right)}.S_C\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}=-9.48$$

إذن فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي أوزان الأكياس في الشركتين هي:
$[-9.48\ ,-10.52]$

التمرين الرابع: أخذت عينتان مستقلتان من مجتمعيين طبيعيين الأولى تشمل أوزان 26 تلميذا تباينها يساوي 36، والثانية أوزان 16 تلميذة تباينها يساوي 25.

المطلوب :حدد فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني وذلك باستخدام مستوى الثقة95%؟

الحل:

بما أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا والعينتين مستقلتين، فان فترة الثقة المطلوبة هي

$$\left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}\ ,\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}\right]$$

و $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$ ، و درجة حرية $v_X=n-1=25$ ، $v_Y=n-1=15$ ويكون:

$$f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}=f_{(0.025\ ,25,15)}=2.69$$

$$f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}=f_{(0.975\ ,25,15\ )}=0.41$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}=\frac{\frac{36}{25}}{2.69}=0.53$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)}}=\frac{\frac{36}{25}}{0.41}=3.51$$

إذن فترة الثقة لنسبة تبايني المجتمعين عند مستوى الثقة 95 % هي: $[3.51\ ,0.53]$

التمرين الخامس: قامت احدى شركات استطلاع للرأي العام حول منتوجها المتمثل بمكيفات الهواء في منطقة معينة، حيث أخذت عينة عشوائية حجمها 300 من الأفراد فوجد أن 200منهم يستعملون هدا النوع من المكيفات.

المطلوب:

1) قدر نسبة الأفراد الذين يستعملون هذا المنتوج؟
2) أوجد فترة الثقة 95 %لنسبة الأفراد الذين يستخدمون هذا المنتوج؟

الحل:

1) تقدير نسبة الأفراد الذين يستعملون هذا المنتوج:

$$\hat{P}=\frac{200}{300}=0.67\qquad ,\hat{q}=1-0.67=0.33$$

2) بما n كبيرة فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\quad ,\hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\right]$$

و $1-\alpha=0.95$ ومنه $\alpha=0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2}=0.025$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}=0.67-1.96.\sqrt{\frac{0.67\times0.33}{300}}$$

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.624$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.67 + 1.96.\sqrt{\frac{0.67 \times 0.33}{300}}$$

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.716$$

إذن فترة الثقة لنسبة الأفراد الذين يستخدمون هذا المنتوج عند مستوى الثقة 95 % هي:

$$[0.716\ ,0.624]$$

التمرين السادس: الجدول التالي يبين توزيع عينة من المؤسسات لقطاع معين حسب رقم أعمالها. (سحب مع إرجاع)

رقم الأعمال	]2 ، 0]	]4 ، 2]	]6 ،4]	]8 ، 6]	]10 ، 8]
عدد المؤسسات	6	12	17	10	5

المطلوب:

1) أوجد فترة الثقة 95 % لمتوسط رقم أعمال جميع مؤسسات هذا القطاع؟

2) أوجد فترة الثقة 90 % لنسبة المؤسسات التي رقم أعمالها أكبر أو يساوي 6 مليون دج؟

الحل:

حساب المتوسط الحسابي للعينة:

رقم الأعمال مليون دج	]2 ، 0]	]4 ، 2]	]6 ، 4]	]8 ، 6]	]10 ، 8]	المجموع
عدد المؤسسات	6	13	16	10	5	50
x	1	3	5	7	9	/
nx	6	39	80	70	45	240
$n(x_i - \bar{X})^2$	86.64	42.12	0.64	48.4	88.2	266

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{240}{50} = 4.8$$

$$S^2 = \frac{\sum n(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{266}{50-1} = 5.43$$

$$S = 2.33$$

1) فترة الثقة هي $1-\alpha = 0.95$ ومنه $\alpha = 0.05$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول التوزيع Z نجد أن : $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$

لدينا فترة الثقة المطلوبة عند مستوى 95 % هي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_X < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبالتعويض نجد:

$$4.8 - 1.96.\frac{2.33}{\sqrt{50}} < \mu_X < 4.8 + 1.96.\frac{2.33}{\sqrt{50}}$$

$$4.15 < \mu_X < 5.45$$

إذن فترة الثقة 95 % لمتوسط رقم أعمال جميع مؤسسات هذا القطاع هي: [5.45 ,4.15]

2) تقدير نسبة المؤسسات التي رقم أعمالها أكبر أو يساوي 6 مليون دج هي:

عدد المؤسسات من معطيات الجدول هي: 15

$$\bar{P} = \frac{15}{50} = 0.3 \qquad ,\bar{q} = 1 - 0.3 = 0.7$$

3) بما n كبيرة فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} \quad ,\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\right]$$

و $1-\alpha = 0.90$ ومنه $\alpha = 0.10$ فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.05$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.05} = 1.64$$

الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.3 - 1.64.\sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{50}}$$

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.194$$

الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.3 + 1.64.\sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{50}}$$

$$\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}} = 0.406$$

إذن فترة الثقة لنسبة الأفراد الذين يستخدمون هذا المنتوج عند مستوى الثقة 95 % هي:

$[0.406 \ \ ,0.194]$

التمارين المقترحة

التمرين الأول: إذا كانت محتويات عبوات أحد أنواع العصير تتبع التوزيع الطبيعي، سحب 10 عبوة من هذا العصير فكانت كالاتي: 1.20، 1.25، 1.30، 1.21، 1.27، 1.29، 1.26، 1.28، 1.23، 1.24 بالتر.

المطلوب: أوجد فترة الثقة 96 % لمتوسط محتويات عبوات هذا النوع من العصير؟

التمرين الثاني: أخذت عينة عشوائية حجمها 30 ومتوسطها 50، من مجتمع طبيعي $N(\mu_X\ ,25)$ ، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 20 ومتوسطها 55، من مجتمع طبيعي $N(\mu_Y\ ,36)$ مستقل عن الأول.

المطلوب:

1) أوجد فترة الثقة 90 % للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

2) أوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

التمرين الثالث: يريد مدير شركة أن يقدر المتوسط الحسابي للزمن اللازم لتركيب نوع من محركات السيارات بحيث لا يزيد الخطأ في هذا المتوسط عن 5 دقائق وذلك بدرجة ثقة 99 % ويعرف من خبرة الشركة السابقة في هذا المجال أن عملية تركيب المحرك تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 10 دقيقة.

المطلوب :ما هو حجم العينة المناسب لهذه العملية؟

التمرين الرابع: يعتقد مسيرو مؤسسة ما بأنهم إذا قاموا بتدريب عمالهم فان إنتاجيتهم سوف تزداد لهذا قاموا بأخذ عينة من العمال وسجلوا إنتاجيتهم قبل وبعد التدريب فتحصلوا على النتائج التالية:

العمال	1	2	3	4	5	6	7	8
قبل التدريب	54	56	50	52	60	55	52	56
بعد التدريب	60	59	57	56	64	58	62	63

المطلوب :قدر فترة الثقة95% للفرق بين متوسطي إنتاجية العمال قبل وبعد التدريب وذلك بافتراض أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا؟

التمرين الخامس: أراد أحد الباحتين تقدير الوسط الحسابي لعمر العمال في صناعة ما وكان لديه معلومات تفيد بأن العمال يبدؤون العمل في الثامنة عشر من العمر، ويحالون على التقاعد في الستين منه.

المطلوب: ما هو حجم العينة العشوائية الواجب سحبها لتقدير هذا المتوسط إذا رغبنا في التأكد 95 % من كل الحالات العملية على أن لا يزيد الخطأ في التقدير عن 1.5سنة؟

التمرين السادس: أخذت عينة عشوائية حجمها 400من معلمي المرحلة الابتدائية فوجد أن 80منهم حاصلين على شهادة الماستر.

المطلوب: أوجد فترة الثقة99% لنسبة المعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة الماستر؟

التمرين السابع: بافتراض انه سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما حجمها 12فأعطت وسط حسابي 81 وانحراف معياري 5، وتم سحب عينة أخرى من مجتمع آخر مستقل عن الأول حجمها 10فأعطت وسط حسابي 85وانحراف معياري 4.

المطلوب:

1) أوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين المجهولين إذا علمت أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين؟

2) أوجد فترة الثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين المجهولين إذا علمت أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين؟

التمرين الثامن: سحبت عينة عشوائية حجمها 7 من مجتمع طبيعي X تباينه σ_X^2 ، ثم سحبت عينة أخرى حجمها 6 من مجتمع طبيعي Y تباينه σ_Y^2 مستقل عن الأول، وكانت بيانات العينتين كالاتي:

العينة الأولى: 5، 6، 9، 7، 8، 7، 8

العينة الثانية: 6، 7، 4 ،5، 3، 5

المطلوب: أوجد فترة الثقة 95 % لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني؟

التمرين التاسع: في استفتاء خاص حول برنامج تلفزيوني خاص بالأطفال تم اختبار عينة عشوائية مكونة من 125طفلا فكان عدد المعجبين بالبرنامج 80طفلا وتم اختبار عينة ثانية مكونة من 100طفلة فكان عدد المعجبات بالبرنامج 75طفلة.

المطلوب: أوجد فترة الثقة 95%للفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة كل المعجبين من البنات بالبرنامج التلفزيوني الخاص بالأطفال؟

اختبار الفرضيات

مقدمة

يحتاج الباحث أحيانا في مرحلة ما من دراسته إلى اختبار فرضية أو أكثر بخصوص المجتمع المدروس. من أمثلة ذلك: اختبار فرضية بخصوص معدل الدخل في منطقة معينة، اختبار فرضية نسبة شفاء لدواء معين، ... ويتم ذلك بصياغة فرضية عن المجتمع المدروس (أو المجتمعات المدروسة) ومن ثم محاولة الحصول على دليل إحصائي ينفي أو يثبت هذه الفرضية وذلك من خلال بيانات عينة (أو أكثر) عشوائية بسيطة. تخص الفرضية أحد معالم المجتمع كالمتوسط، النسبة أو التباين، ويعتمد في إثباتها أو رفضها على خصائص إحصائية المعاينة.

1- الفرضية الإحصائية:

هي عبارة عن ادعاء أو تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع، ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين.

2- مراحل اختبار الفرضية الإحصائية:

2-1 تحديد الفرضية:

أ- الفرضية المبدئية (العدمية): هي الهدف الذي نريد اختباره ويرمز لها بالرمز H_0 ، وهي الفرضية التي تصاغ على أمل رفضها، ويفترض أنها صحيحة دائما ما لم يظهر بوضوح أنها غير صحيحة، وتسمى الفرضية الصفرية.

ب- الفرضية البديلة: ويرمز لها بالرمز H_1 وهي الفرضية المعاكسة (المنافية) للفرضية المبدئية، حيث عند رفض الفرضية الصفرية H_0 فإننا نقبل الفرضية البديلة H_1 ، والفرضة البديلة لها ثلاثة أشكال مختلفة. وتصاغ الفرضية الصفرية كما يلي:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

وتصاغ الفرضية البديلة كما يلي:

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$
$$H_1: \theta > \theta_0$$
$$H_1: \theta < \theta_0$$

حيث: θ معلمة المجتمع، θ_0 قيمة معينة

2-2 اختبار الفرضيات:

تعريف: هو الاختبار الذي نقبل أو نرفض فيه الفرضية المبدئية H_0 بدرجة ثقة معلومة (احتمال قبول H_0)، وهذا الاختبار يجرى على معالم المجتمع، المتوسط والنسبة والتباين.

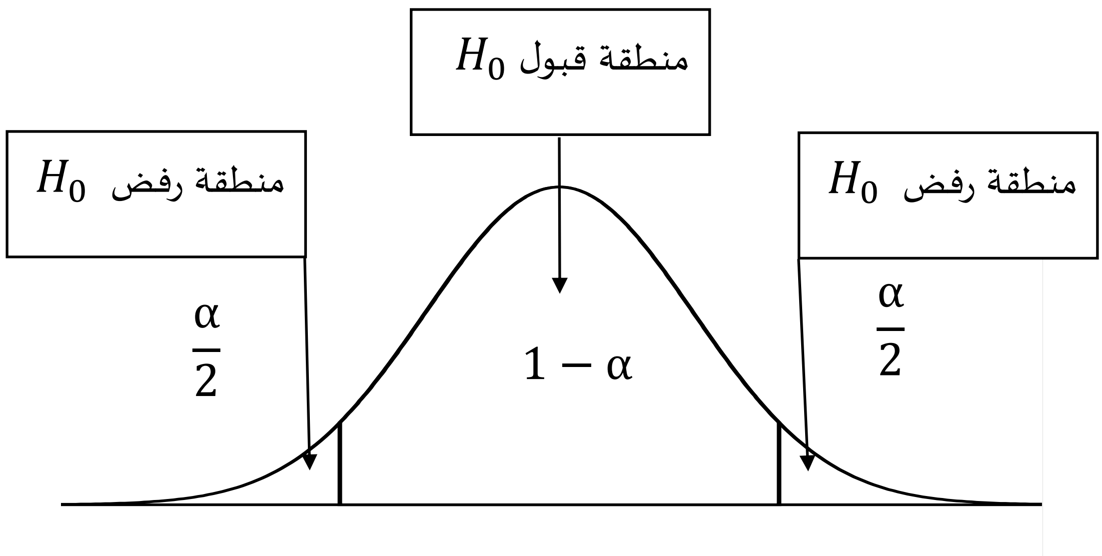
3-2 أنواع الاختبارات:

أ- الاختبار من الجانبين(الطرفين):

$H_1: \theta \neq \theta_0$ مقابل $H_0: \theta = \theta_0$

في هذه الحالة الفرضية البديلة لها طرفان واحد أيمن والآخر أيسر، حيث نقبل الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض، كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (3-1): اختبار ذو طرفين عند مستوى الدلالة α



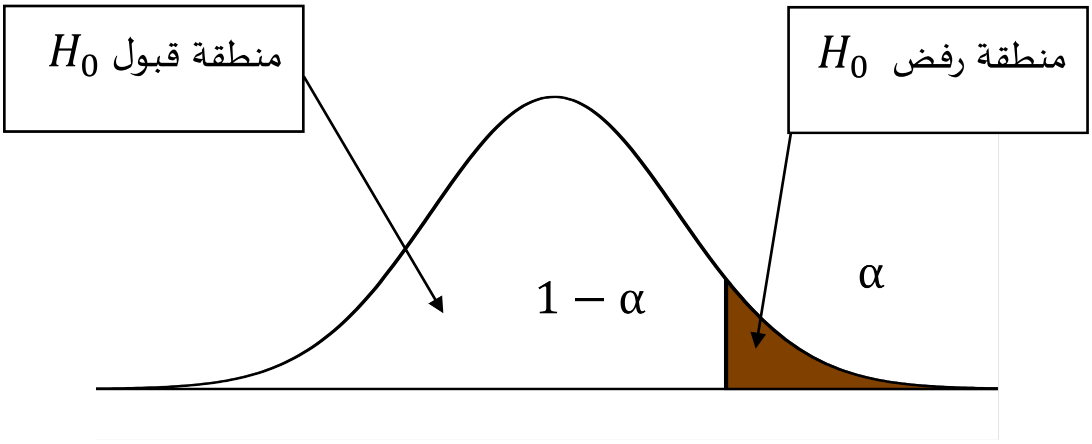
المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

ب- اختبار من جانب الأعلى (الأيمن، اليمين):

$H_1: \theta > \theta_0$ مقابل $H_0: \theta = \theta_0$

الفرضية البديلة في هذه الحالة لها طرف واحد أعلى ويتم وضع قيمة α في الطرف الأيمن من توزيع دالة الاختبار، حيث يتم رفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 ، وتقبل الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (3-2): اختبار ذو طرف واحد (اليمين) عند مستوى دلالة α



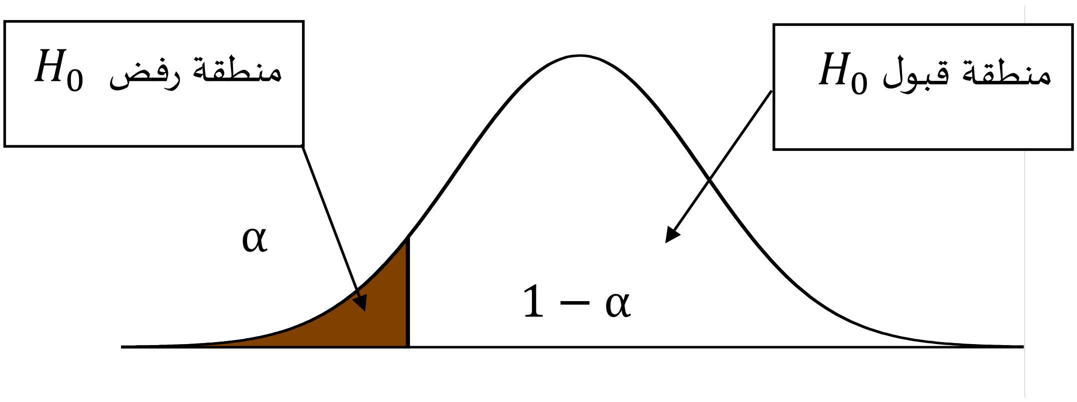
المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

ج- اختبار من جانب الأسفل (اليسار، الأيسر):

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \theta < \theta_0$$

الفرضية البديلة في هذه الحالة لها طرف واحد أدنى ويتم وضع قيمة α في الطرف الأيسر من توزيع دالة الاختبار، حيث يتم رفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 ، وتقبل الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (3-3): اختبار ذو طرف واحد (اليسار) عند مستوى دلالة α



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

4-2 أنواع الأخطاء:

إن اتخاذ القرار بقبول أو برفض الفرضية يصاحبه نوعان من الأخطاء المحتمل ارتكابها هي:

أ- الخطأ من النوع الأول (مستوى المعنوية): يرمز له بالرمز α ، وهو احتمال رفض الفرضية المبدئية H_0 علما أنها صحيحة، لأن هذا الرفض نتج عن خطأ في معطيات العينة.

ب- الخطأ من النوع الثاني (مستوى الثقة): يرمز له بالرمز β ، وهو احتمال قبول الفرضية المبدئية H_0 علما أنها خاطئة، ولدينا $\beta = 1 - \alpha$

ويمكن توضيح نوعي الخطأ من خلال الجدول التالي:

الجدول (3-1): يبين نوعي الخطأ (α و β)

القرار / الفرضية العدمية H_0	قبول الفرضية العدمية H_0	رفض الفرضية العدمية H_0
صحيحة	قرار صحيح احتماله $(1 - \alpha)$	رفض خاطئ احتماله α خطأ من النوع الأول
خاطئة	قبول خاطئ احتماله β خطأ من النوع الثاني	قرار صحيح احتماله $(1 - \beta)$ يسمى بقوة الاختبار

5-2 مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة: وهو احتمال رفض H_0 عندما تكون صحيحة، وهو الخطأ من النوع الأول ويسمى مستوى المعنوية للاختبار، يرمز له بالرمز α وتحدد قيمته مسبقا، ومن الناحية العملية فإنه يستخدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01. إن استخدام المستوى المعنوية 0.05 أو 5 % في اختبار فرضية معينة، يعني أن هناك حوالي 5 فرص من 100 ترفض الفروض وهي صحيحة، بمعنى أن الثقة في اتخاذ القرار الصحيح هي 95 % مقابل 5 % أن يكون هذا القرار خاطئ.

6-2 تحديد دالة الاختبار: وهي الدلة التي تساعد في اتخذ القرار والتي يتم معرفتها من خلال البيانات المعطاة، أما إحصاء الاختبار يتم حساب قيمته من بيانات العينة.

7-2 القرار الإحصائي: تحديد المنطقة (المجال) التي ترفض فيها H_0 يعني قبول H_1، وتحديد المنطقة التي تقبل فيها H_0 ويعني رفض H_1 .

أولا: اختبار الفرضيات للمتوسطات

1- حالة تباين المجتمع X معلوم

نظرية (1): إذا كانت E_X عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي متوسط μ_X وتباين معلوم σ_X^2، فان دالة الاختبار هي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z > +z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_\alpha$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_\alpha$$

مثال(3-1): تخضع أحجام عبوات أحد أنواع العصير لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 0.10 لتر و متوسطه μ_X ، أخذت عينة عشوائية حجمها 6 عبوة فوجد أن متوسطها الحسابي هو 1.3لتر.

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ الفرضية الصفرية $H_0: \mu = 1.25$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq 1.25$

الحل:

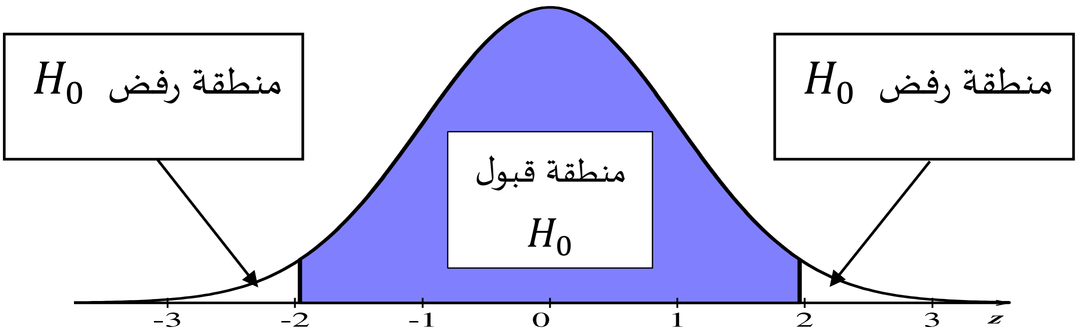
$$H_0: \mu = 1.25 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu \neq 1.25$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

$$z_{-\frac{\alpha}{2}} = z_{-0.025} = -1.96$$

الشكل(3-4): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $z = \pm 1.96$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} = \frac{1.3 - 1.25}{\frac{0.1}{\sqrt{6}}} = 1.22$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية: $1.22 > 1.96$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج أن متوسط المجتمع يختلف عن 1.25 لتر.

2- حالة تباين المجتمع X غير معلوم

1-2 نظرية (2): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ مسحوبة من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي متوسط μ_X وتباين σ_X^2 غير معلوم، فان دالة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_\alpha$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_\alpha$$

مثال (2-3): تخضع أعداد حبات البرتقال على شجرة البرتقال في بستان كبير لتوزيع طبيعي وسطه 200حبة، استعمال صاحب البستان نوع جديد من السماد، وأراد أن يختبر ما إذا زاد الإنتاج، ولمعرفة ذلك أخذ عينة عشوائية مكونة من 81 شجرة، فوجد أن المتوسط الحسابي لأعداد الحبات في العينة 196 بانحراف معياري $S = 25$ حبة.

المطلوب :هل تشير هذه البيانات إلى زيادة في الإنتاج عند مستوى الدلالة$\alpha = 0.05$

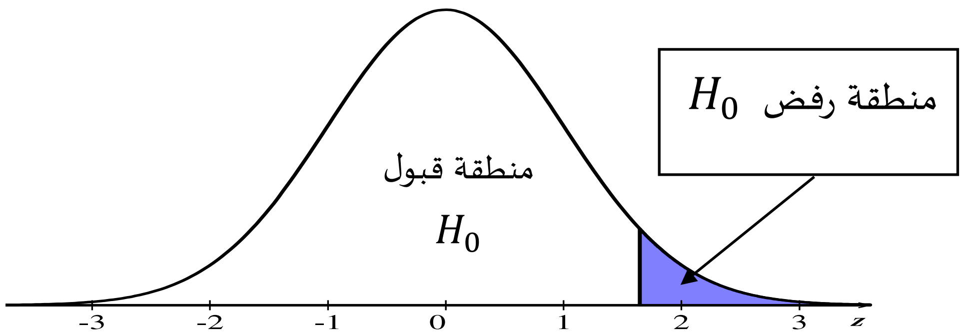
الحل:

$$H_0: \mu = 200 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu > 200$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ايمن والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

الشكل(3-5): منطقة قبول H_0 تقع أقل من القيمة $z = +1.645$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{196 - 200}{\frac{25}{\sqrt{81}}} = -1.44$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أقل من قيمة Z الجدولية: $-1.44 < 1.645$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج عدم زيادة في الإنتاج وان السماد غير فعال.

2-2 نظرية (2): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n < 30$ مسحوبة من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي متوسط μ_X وتباين σ_X^2 غير معلوم ،فان دالة الاختبار هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

توزيع t بدرجة الحرية $v = n - 1$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \quad \text{أو} \quad T > +t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T > +t_{(\alpha, v)}$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha, v)}$$

مثال (3-3): استنتج أحد الباحثين أن معدل زمن انتظار المرضى في قاعة العلاج في احدى المستشفيات هو 50 دقيقة، قامت المستشفى بإجراءات لتقليل زمن الانتظار في إطار تحسين جودة خدماتها، ولاختبار نجاح هذه الإجراءات تم حساب معدل زمن الانتظار لعينة تتكون من 20 مريض فكان متوسطها 30 دقيقة بانحراف معياري 10 دقائق.

المطلوب: بافتراض أن الزمن موزع توزيع طبيعي، اختبر مدى نجاعة هذه الإجراءات في تخفيف مدة انتظار المرضى عند مستوى الدلالة 5 %؟

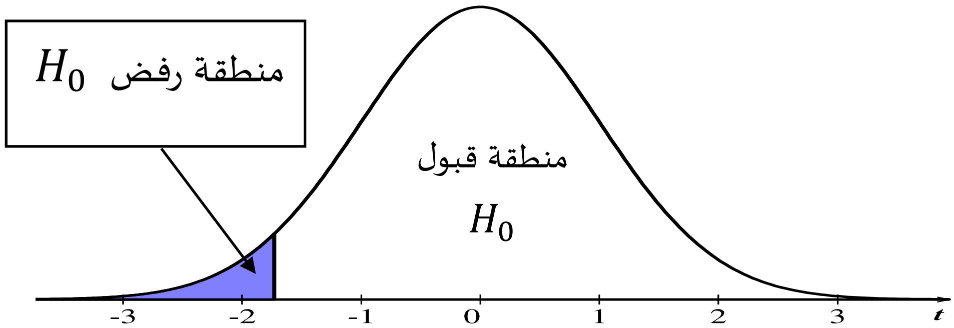
الحل:

$$H_0: \mu = 50 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu < 50$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$-t_{(\alpha, v)} = -t_{(0.05, 19)} = -1.729$$

الشكل(3-6): منطقة قبول H_0 تقع أكبر من القيمة $-t_{(0.05\ ,19\ )} = -1.729$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{30 - 50}{\frac{10}{\sqrt{20}}} = -8.94$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة T المحسوبة أقل من قيمة T الجدولية: $-8.44 < -1.729$ ، أي أن قيمة T تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج أن الإجراءات الجديدة فعالة في تقليص زمن انتظار المرضى في قاعات العلاج.

ثانيا: اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين:

1- حالة تباين المجتمعين معلوم

نظرية (1): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها n_X ومتوسطها $\bar{X}$، مسحوبة من مجتمع طبيعي $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2\ )$ ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها n_Y ومتوسطها $\bar{Y}$ ، مسحوبة من مجتمع طبيعي $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2\ )$.

فان دالة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_Y$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_{\alpha}$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_{\alpha}$$

مثال (3-4): أخذت عينة عشوائية حجمها 25 من مجتمع طبيعي تباينه 36 فوجد أن متوسطها الحسابي 53، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول تباينه 30 فوجد أن متوسطها الحسابي 49.

المطلوب: اختبر الفرضية $H_0: \mu_X = \mu_Y$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ عند مستوى المعنوية 4 %؟

الحل:

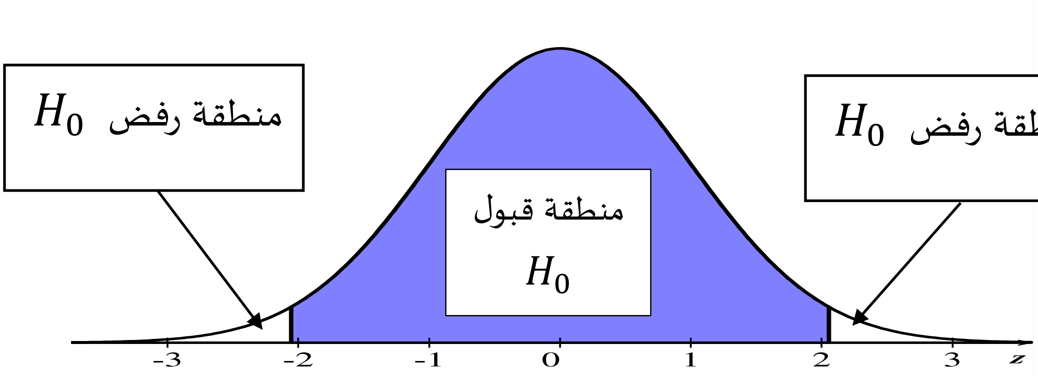
$$H_0: \mu_X = \mu_Y \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.02} = 2.054$$

$$z_{-\frac{\alpha}{2}} = z_{-0.02} = -2.054$$

الشكل(3-7): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $z = \pm 2.054$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \frac{53 - 49}{\sqrt{\frac{36}{25} + \frac{30}{20}}} = 2.33$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية: $2.33 > 2.054$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.04$ ، ونستنتج أن متوسطي المجتمعين مختلفين.

2- حالة تباين المجتمعين غير معلوم

نظرية (2): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X \geq 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع X ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y \geq 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع Y. وليس بالضرورة أن يتبعا المجتمعان للتوزيع الطبيعي، فان دالة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_Y$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z > +z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_\alpha$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_\alpha$$

مثال (3-5): أخذت عينة عشوائية من مجتمع معين، وكان حجمها 100 ومتوسطها الحسابي 27 وانحرافها المعياري 3، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع آخر، وكان حجمها 120 متوسطها الحسابي 28.5 وانحرافها المعياري 4.

المطلوب :هل يمكن الادعاء أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى الدلالة 4 %؟

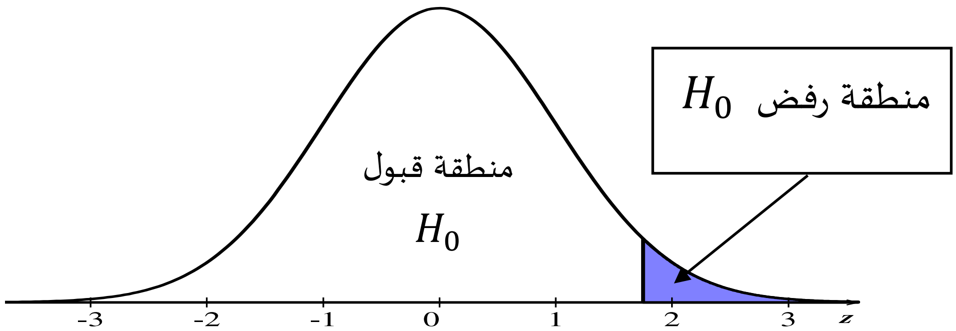
الحل:

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu_X > \mu_Y$$

3) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_\alpha = z_{0.04} = 1.75$$

الشكل(3-8): منطقة قبول H_0 تقع أقل من القيمة $z = +1.75$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

4) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = \frac{27 - 28.5}{\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{16}{120}}} = -3.17$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أقل من قيمة Z الجدولية: $-3.17 < 1.75$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.04$ ، ونستنتج أن متوسط المجتمع الأول ليس أكبر من متوسط المجتمع الثاني.

نظرية (3): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X < 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y < 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. وكان تباين المجتمعين متساوين $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ فان دالة الاختبار هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_C\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

توزيع T بدرجة الحرية هي: $v = n_X + n_Y - 2$

والتباين المشترك S_C^2 هو:

$$S_C^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \quad \text{أو} \quad T > +t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)}$$

2) $H_1: \mu_X > \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T > +t_{(\alpha, v)}$$

3) $H_1: \mu_X < \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha, v)}$$

مثال (3-6): مجتمع $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ، سحبت منه العينة (8، 6، 8، 9، 10، 7) و $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ سحبت منه العينة (11، 11، 12، 13، 14، 13، 12، 10) بافتراض تبايني المجتمعين متساويين.

المطلوب: اختبر الفرض القائل بعدم وجود فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين عند مستوى الدلالة 2 %؟

الحل:

1) حساب القيم التالية:

بعد العمليات الحسابية نجد أن:

$$\bar{X} = 8 \quad و \quad \bar{Y} = 12 \quad و \quad S_X^2 = 2 \quad و \quad S_Y^2 = 1.714 \quad و \quad S_C^2 = 1.83$$

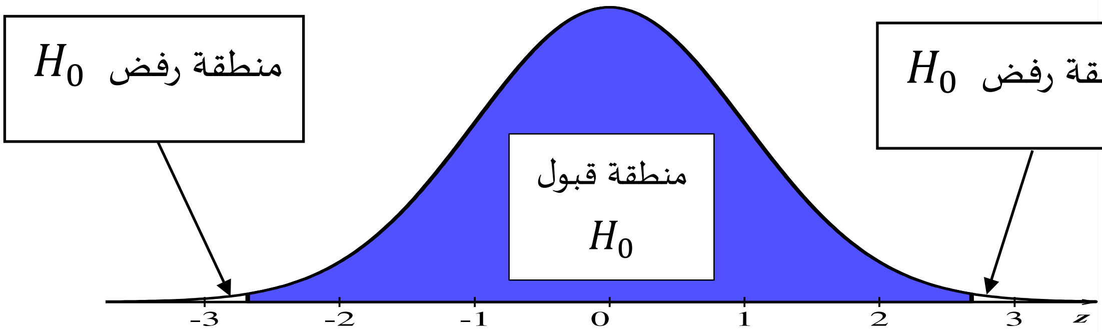
$$H_0: \mu_X = \mu_Y \quad مقابل \quad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

2) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} = t_{(0.01, 12)} = 2.681$$

$$-t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} = -t_{(0.01, 12)} = -2.681$$

الشكل(3-9): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $t_{(0.01, 9)} = \pm 2.821$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

3) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_C\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{5.8 - 9.33}{2.36\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = -2.47$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة محصورة بين $2.681 > -2.47 > -2.681$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.02$ ، والنتيجة عدم وجود فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين.

نظرية (4): إذا كانت E_X عينة عشوائية حجمها $n_X < 30$ وتباينها S_X^2، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ، وعينة ثانية مستقلة عن الأولى E_Y عشوائية حجمها $n_Y < 30$ و وتباينها S_Y^2 ، مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. وكان تباين المجتمعين غير متساوين $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ فان دالة الاختبار هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}}$$

توزيع T بدرجة الحرية v تكتب بالصيغة المركبة التالية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X - 1)} + \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y - 1)}}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \quad \text{أو} \quad T > +t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)}$$

2) $H_1 : \mu_X > \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T > +t_{(\alpha, v)}$$

3) $H_1 : \mu_X < \mu_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha, v)}$$

مثال(7-3): سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين فأعطت النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$n_X = 10$	$n_Y = 9$
$\bar{X} = 25$	$\bar{Y} = 23$
$S_X^2 = 9$	$S_Y^2 = 4$

المطلوب: اختبر الفرضية $H_0: \mu_X = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ عند مستوى الدلالة 0.05 بافتراض أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين؟

الحل:

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين ولتحديد القيم الحرجة لها (القيم الجدولية)، نحسب درجة الحرية كما يلي:

$$v = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_X}\right)^2}{(n_X - 1)} + \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_Y}\right)^2}{(n_Y - 1)}} = \frac{\left(\frac{9}{10} + \frac{4}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^2}{(10 - 1)} + \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^2}{(9 - 1)}} = 15.73$$

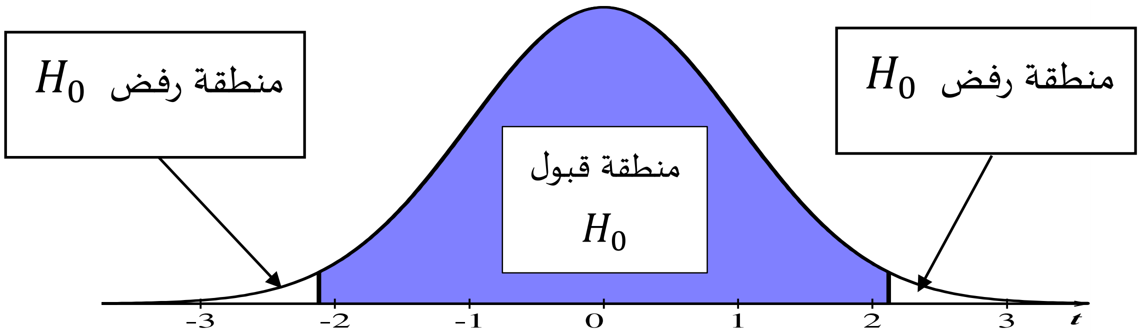
$$v = 16$$

ومنه القيم الحرجة هي:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)} = t_{(0.025\ ,16\ )} = 2.120$$

$$-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)} = -t_{(0.025\ ,16\ )} = -2.120$$

الشكل(3-10): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $t_{(0.025\ ,16\ )} = \pm 2.120$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} = \frac{25 - 23}{\sqrt{\frac{9}{10} + \frac{4}{9}}} = 1.72$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة محصورة بين $-2.120 < 1.72 < 2.120$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، والنتيجة عدم وجود فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين.

ثالثا: اختبار القرصيات للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين (غير مستقلين)

نظرية (5): إذا كانت E_d عينة عشوائية من الفروق $(d_1, d_2, d_3, , , , , , d_n)$ حجمها $n_d < 30$ وتباينها S_d^2، مسحوبة من مجتمع الفروق X_d حيث $X_d \approx N\left(\mu_d, \sigma_d^2\right)$ ، فان دالة الاختبار هي:

$$T = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

توزيع t بدرجة الحرية $v = n - 1$ ، حيث:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

d_i : هو الفرق بين قيمة القراءتين لنفس المفردة (الفرق بين القيمة في العينة الأولى مقابل القيمة في العينة الثانية).

$\bar{d}$: المتوسط الحسابي لعينة للفروق

S_d : الانحراف المعياري لعينة الفروق.

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 \colon \mu_d = 0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1 \colon \mu_d \neq 0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} \quad \text{أو} \quad T > +t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)}$$

2) $H_1 \colon \mu_d > 0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T > +t_{(\alpha\ ,v\ )}$$

3) $H_1: \mu_d < 0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$T < -t_{(\alpha\ ,v\ )}$$

مثال(3-8): البيانات التالية تبين نقاط الطلبة في مادة اللغة الإنجليزية قبل وبعد الدورة التكوينية التي قاموا بها لتحسين مستواهم.

قبل	14	14	13	14	12	14	13	12	13
بعد	15	13	16	16	15	17	13	16	17

المطلوب: هل هناك فرقا في تحسن مستوى الطلبة في مادة الإنجليزية قبل وبعد الدورة التكوينية عند مستوى الدلالة 0.05؟

الحل:

1) إيجاد عينة الفروق وحساب متوسطها وتباينها كما يلي:

$(d_i - \bar{d})^2$	$d_i = x_1 - x_2$	بعد الدورة x_2	قبل الدورة x_1
1	-1	15	14
16	2	13	14
1	-3	16	13
0	-2	16	14
1	-3	15	12
1	-3	17	14
4	0	13	13
4	-4	16	12
4	-4	17	13
32	-18	/	/

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-18}{9} = -2$$

$$S_d{}^2 = \frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{32}{8} = 4$$

$$S_d = \sqrt{4} = 2$$

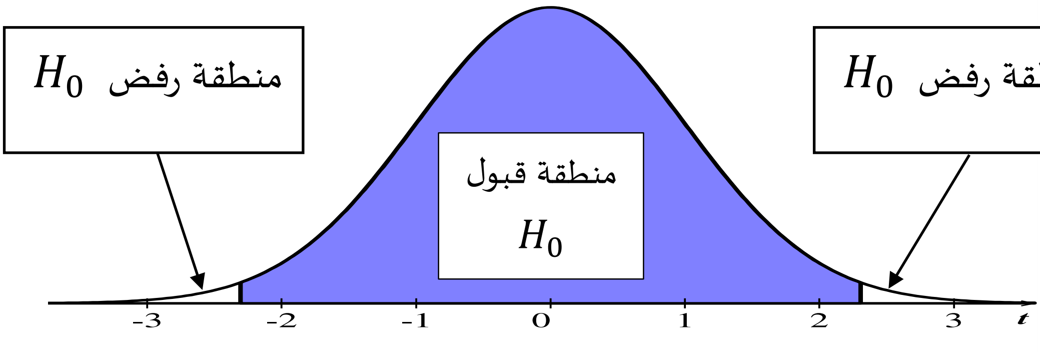
$$H_0: \mu_d = 0 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu_d \neq 0$$

2) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)} = t_{(0.025\ ,8\ )} = 2.306$$

$$-t_{\left(\frac{\alpha}{2}\ ,v\right)} = -t_{(0.025\ ,8\ )} = -2.306$$

الشكل(3-11): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $t_{(0.025\ ,8\ )} = \pm 2.306$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

3) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-2}{\frac{2}{\sqrt{9}}} = -3$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أقل من قيمة Z الجدولية: $-3 < -2.306$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.04$ ، ونستنتج أنه يوجد فرق معنوي بين مستوى الطلبة قبل وبعد الدورة التكوينية.

رابعا: اختبار الفرضيات لتباين المجتمع

نظرية (1): إذا كان S^2 هو تباين عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع X يتبع التوزيع الطبيعي $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ فإن دالة الاختبار هي:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

توزيع **كاي تربيع** بدرجات حرية $v = n - 1$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$\chi^2 < \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, v\right)} \quad \text{أو} \quad \chi^2 > \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)}$$

2) $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$\chi^2 > \chi^2_{(\alpha, v)}$$

3) $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha, v)}$$

مثال(3-9): يدعى مدير أحد المصانع أن منتجاته من مسحوق الغسيل التي متوسطها 200 غ لا يزيد الانحراف المعياري لأوزانها عن 10 غ، ولتأكد من كفاءة الإنتاج من حيث أن الوزن لا زال ضمن القياسات المحددة، سحبت عينة عشوائية مكونة من 20 كيس فتبين قيمة الانحراف المعياري لها 12 غ.

المطلوب: اختبر ادعاء المدير عند مستوى الدلالة 0.05؟

الحل:

$$H_0: \sigma_X^2 = 100 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \sigma_X^2 > 100$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$\chi^2_{(\alpha, v)} = \chi^2_{(0.05, 19)} = 30.144$$

2) القيمة المحسوبة ل χ^2 هي:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)12^2}{10^2} = 27.36$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة χ^2 المحسوبة أقل من قيمة χ^2 الجدولية: $27.36 < 30.144$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 و نرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، والنتيجة أن ادعاء المدير صحيح ولا زال المصنع محافظ على قياسات الإنتاج.

خامسا: اختبار النسبة بين تبايني المجتمعين

ليكن S_X^2 تباين العينة التي حجمها n_X المسحوبة عشوائيا من مجتمع $X \approx N(\mu_X, \sigma_X^2)$ و ليكن S_Y^2 تباين العينة التي حجمها n_Y المسحوبة عشوائيا من مجتمع $Y \approx N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ المستقل عن X. فإن دالة الاختبار هي:

$$F = \frac{\frac{(n_X)S_X^2}{(n_X-1)}}{\frac{(n_Y)S_Y^2}{(n_Y-1)}} \sim F_{v_X, v_Y}$$

توزيع فيشر بدرجة الحرية : $v_X = n_X - 1 \quad , v_Y = n_Y - 1$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$F < f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, v_X, v_Y\right)} \quad \text{أو} \quad F > f_{\left(\frac{\alpha}{2}, v_X, v_Y\right)}$$

2) $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$F > f_{(\alpha, v_X, v_Y)}$$

3) $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$F < f_{(1-\alpha, v_X, v_Y)}$$

مثال(3-10): سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين فأعطت النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$n_X = 12$	$n_Y = 10$
$\bar{X} = 17.4$	$\bar{Y} = 13.2$
$S_X^2 = 16$	$S_Y^2 = 22$

المطلوب :هل هناك فرق بين تبايني المجتمعين عند مستوى الدلالة 0.05؟

الحل: $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ مقابل $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$f_{\left(\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)} = f_{(0.025,11,9)} = 3.91$$

$$f_{\left(1-\frac{\alpha}{2},v_X,v_Y\right)} = f_{(0.975,11,9)} = 0.28$$

2) القيمة المحسوبة ل F هي:

$$F = \frac{\frac{(n_X)S_X^2}{(n_X-1)}}{\frac{(n_Y)S_Y^2}{(n_Y-1)}} = \frac{\frac{(12)(16)}{(12-1)}}{\frac{(10)(22)}{(10-1)}} = 0.714$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة F المحسوبة محصورة بين $0.28 < 0.714 < 3.91$ ، أي أنها تقع في منطقة القبول ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 ،
والنتيجة أن تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$

سادسا: اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع

نظرية(1): ليكن $\hat{P}$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n والمسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع ذو الحدين $X \sim B(n, P)$ ، و عندما يكون حجم العينة كبير بدرجة كافية مع تحقق شرط $np \geq 5$ و $nq \geq 5$. فان دالة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: P = P_0$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: P \neq P_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z > +z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: P > P_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z > +z_\alpha$$

3) $H_1: P < P_0$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z < -z_\alpha$$

مثال(3-11): مصنع للأدوية المسجلة يدعي أن دواء من إنتاجه له فعالية بنسبة 95 % في التخفيف من الحساسية لفترة 4 ساعات. في عينة مكونة من 300 شخص مصابين بالحساسية، أدى الدواء إلى تخفيف 270 منهم.

المطلوب: قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحا عند مستوى معنوية 0.03.

الحل:

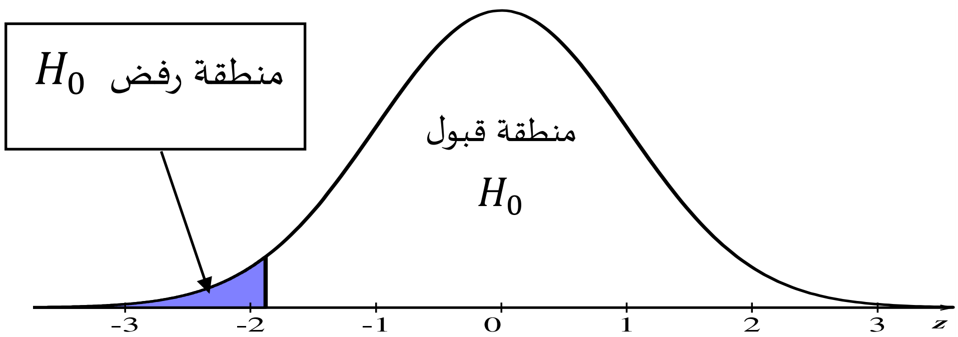
لدينا:
$$\hat{P} = \frac{270}{300} = 0.9$$

$$H_0 : P = 0.95 \quad \text{مقابل} \quad H_1 : P < 0.95$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_{-\alpha} = z_{-0.03} = -1.88$$

الشكل(3-10): منطقة قبول H_0 تقع أكبر من القيمة $z_{-0.03} = -1.88$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي Sine qua non

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.9 - 0.95}{\sqrt{\frac{(0.95)(0.05)}{300}}} = -3.97$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أقل من قيمة Z الجدولية: $-3.97 < -1.88$، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج أن ادعاء المصنع غير صحيح.

سابعا: فترة الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

نظرية (2): لتكن $\hat{P}_X$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_X والمسحوبة عشوائيا من مجتمع X يتبع التوزيع ذو الحدين $X\sim B(n_X,P_X)$ ، و لتكن $\hat{P}_Y$ نسبة الظاهرة في العينة التي حجمها n_Y المسحوبة عشوائيا من مجتمع Y يتبع التوزيع ذو الحدين $Y\sim B(n_Y,P_Y)$ ، مستقل عن X. فإن دالة الاختبار هي:

$$Z=\frac{(\hat{P}_X-\hat{P}_Y)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)}}$$

مع

$$\hat{p}=\frac{(n_X)(\hat{P}_X)+(n_Y)(\hat{P}_Y)}{n_X+n_Y}$$

حيث: نسبة $\hat{p}$ هي المتوسط المرجح لنسبتي العينتين $\hat{p}_X$ و $\hat{p}_Y$.

واردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: P_X=P_Y$ مقابل الفرضية البديلة:

1) $H_1: P_X\neq P_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z<-z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z>+z_{\frac{\alpha}{2}}$$

2) $H_1: P_X>P_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z>+z_\alpha$$

3) $H_1: P_X<P_Y$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (المعنوية) α إذا كانت:

$$Z<-z_\alpha$$

مثال(3-12): لدراسة مستوى الرضا عن خدمات مستشفى عمومي مع مستشفى خاص، وزعت استمارة استبيان على 200 مريض في المستشفى العمومي وجد أن 150 سجلوا رصاهم عنه، ووزعت استمارة استبيان على 150 مريض في المستشفى الخاص وجد أن 130 سجلوا رضاهم عنه.

المطلوب: هل هناك اختلاف جوهري من حيث الرضا بين خدمات المستشفى العمومي والمستشفى الخاص عند مستوى الدلالة 0.07؟

الحل:

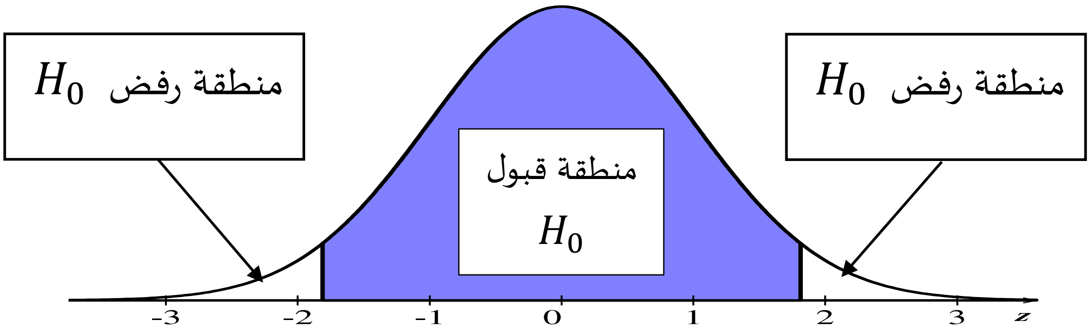
$$H_0: P_X = P_Y \quad \text{مقابل} \quad H_1: P_X \neq P_Y$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.035} = 1.812$$

$$z_{-\frac{\alpha}{2}} = z_{-0.035} = -1.812$$

الشكل(3-11): منطقة قبول H_0 بين القيمتين $z = \pm 1.812$



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج الرياضي **Sine qua non**

2) حساب نسبتي العينتين:

$$\hat{P}_X = \frac{150}{200} = 0.75 \qquad \hat{P}_Y = \frac{130}{150} = 0.87$$

3) نسبة $\hat{p}$ المرجحة:

$$\hat{p} = \frac{(n_X)(\hat{P}_X)+(n_Y)(\hat{P}_Y)}{n_X+n_Y} = \frac{(200)(0.75)+(150)(0.87)}{200+150} = 0.8$$

4) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{(\hat{P}_X - \hat{P}_Y)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)}} = \frac{(0.75-0.87)}{\sqrt{(0.8)(0.2)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{150}\right)}} = -2.77$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أقل من قيمة Z الجدولية: $-2.77 < -1.96$ ، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 ، ونستنتج أنه يوجد اختلاف في مستوى الرضا بين خدمات المستشفى العمومي وخدمات المستشفى الخاص عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$.

تمارين الفصل الثالث

تمارين محلولة

التمرين الأول: ترغب شركة أن تعرف ما إذا كان ادعاء الشكاوى المقدمة لها صحيح حول عبوات الصابون المسحوق الذي تبيعه تحتوي على أقل من 500 غ، وبانحراف معياري 75 غ، وتعرف الشركة من الخبرة الماضية أن أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي، فأخذت عينة عشوائية حجمها 25 عبوة فوجد أن متوسطها الحسابي هو 490 غ.

المطلوب: اختبر صحت هذا الادعاء عند مستوى معنوية 0.01؟

الحل:

$$H_0: \mu = 500 \text{ مقابل } H_1: \mu < 500$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ايمن والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_{-\alpha} = z_{-0.01} = -2.326$$

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{490 - 500}{\frac{75}{\sqrt{25}}} = -0.67$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية: $-2.326 < -0.67$، أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$، والذي يعني أن الشكاوى المقدمة من قبل المستهلكين غير صحيحة.

التمرين الثاني: وجد باحث في دراسة سابقة أن معدل قيم الفواتير في أحد المستشفيات 80.5 دينارا وأن توزيعها يقترب من التوزيع الطبيعي. أراد الباحث اختبار فرضية أن قيم الفواتير قد تغيرت، فدرس عينة عشوائية حجمها 25 فاتورة، فوجد أن متوسطها الحسابي 83.5 دينار وانحرافها المعياري 11.2 دينار.

المطلوب: هل هناك اختلاف في معدل الفواتير عند مستوى معنوية 0.05؟

الحل:

$$H_0: \mu = 80.5 \text{ مقابل } H_1: \mu \neq 80.5$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$t_{(\alpha\ ,v\ )} = t_{(0.025\ \ ,24\ )} = 2.064$$
$$-t_{(\alpha\ ,v\ )} = -t_{(0.025\ \ ,24\ )} = -2.064$$

2) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{83.5 - 80.5}{\frac{11.2}{\sqrt{25}}} = 1.34$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة T المحسوبة محصورة بين $-2.064 < 1.34 < 2.064$ ، أي أن قيمة T تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج أن معدل قيم الفواتير في المستشفى لم يتغير.

التمرين الثالث: في ظل جائحة كورونا قامت الجزائر كغيرها من الدول بالموافقة على استخدام لقاح سبوتنيكV، الذي أثبت فعالية بنسبة 90% ضد فيروس كورونا. في عينة مكونة من 300 شخص تلقوا التطعيم بلقاح سبوتنيك V، فان 285 منهم لم يصابوا بعدوى فيروس كورونا.

المطلوب: اختبر فعالية اللقاح أنها تزيد عن نسبة 90 % عند مستوى معنوية 0.02؟

الحل:

لدينا: $\hat{P} = \frac{285}{300} = 0.95$

$$H_0: P = 0.95 \quad \text{مقابل} \quad H_1: P > 0.95$$

1) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن والقيمة الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$z_\alpha = z_{0.02} = 2.054$$

2) القيمة المحسوبة ل Z هي:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.95 - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{300}}} = 2.89$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية: $2.054 < 2.89$، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومنه فإننا نرفض الفرضية الصفرية H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.02$ ، ونستنتج أن فعالية اللقاح تزيد عن 90 %

التمرين الرابع: يدعي أحد الصانعين أن المنتجات المصنوعة في آلته يكون متوسط طولها 20سم، من أجل مراقبة مدى ضبط الآلة للقياسات المحددة لإنتاج، تم سحب عينة عشوائية تتكون من 10 قطع، وتم قياس طول كل قطعة، فكانت النتائج كالتالي:(بالسنتيمتر).

18	24	18	22	15.5	18	16	22	24.5	18

المطلوب: بافتراض أن أطوال القطع المصنعة يتبع التوزيع الطبيعي، اختبر عند مستوى معنوية 0.05 صحت ادعاء الصانع؟

الحل:

1) حساب متوسط وانحراف العينة:

x_i	18	24	18	22	15.5	18	16	22	24.5	18
$(x_i - \bar{x})^2$	2.56	19.36	2.56	5.76	16.81	2.56	12.96	5.76	24.01	2.56

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{196}{10} = 19.6$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{94.9}{10-1} = 10.544$$

$$S = 3.25$$

$H_0 : \mu = 20$ مقابل $H_1 : \mu \neq 20$

2) لدينا أن الفرضية البديلة ذات طرفين والقيم الحرجة لها (القيم الجدولية) هي:

$$t_{(\alpha\ ,v\ )} = t_{(0.025\ ,9\ )} = 2.262$$

$$-t_{(\alpha\ ,v\ )} = -t_{(0.025\ ,9\ )} = -2.262$$

3) القيمة المحسوبة ل T هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{19.6 - 20}{\frac{3.25}{\sqrt{10}}} = -0.389$$

بالمقارنة نلاحظ أن قيمة T المحسوبة محصورة بين $-2.262 < -0.389 < 2.262$.

أي أن قيمة T تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ونستنتج أن قياسات إنتاج الالة مضبوطة وان ادعاء الصانع صحيح.

التمارين المقترحة

التمرين الأول: من المعروف أن أحد أدوية إزالة الألم المستخدمة يمكنها إزالة الألم للمريض في فترة زمنية متوسطها 5.7 دقيقة. ولمقارنة هذا الدواء بدواء جديد لإزالة الألم اختيرت عينة عشوائية حجمها 25 مريض، وتم إعطاء الدواء الجديد لهم فكان المتوسط الحسابي لطول فترة إزالة الألم في هذه العينة هو 4.2 دقيقة بانحراف معياري 2.2 دقيقة.

المطلوب: هل تدل هذه النتائج أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة المرض، وذلك عند مستوى معنوي 0.04؟

التمرين الثاني: لاحظت إدارة محطة بنزين أن معدل فترة انتظار السيارة للتزود بالوقود هو 5 دقائق، وأرادت أن تقلص من هذه الفترة فقامت بإعادة تنظيم صفوف الانتظار، فأخذت عينة حجمها 9 سيارات وبعد أن دونت فترات الانتظار وجدت أن معدل فترات الانتظار هو 4 دقائق بانحراف معياري 0.5 دقيقة.

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية 0.02 الفرضية الصفرية $H_0: \mu = 5$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu < 5$

التمرين الثالث: في دراسة قام بها أحد البنوك وجد أن عملاءه يستخدمون البطاقات التي يصدرها 10 مرات في الشهر وسطيا. ورغبة من البنك في زيادة استعمال عملائه لتلك البطاقات، طرح في شهر لاحق جوائز يمكن أن يربحها مستعملو البطاقات، أخذت عينة عشوائية من الزبائن مكونة من 25 شخصا حاملا للبطاقات فوجد أنهم استخدموا البطاقات في ذلك الشهر 12مرة في المتوسط وذلك بانحراف معياري قدره 3.

المطلوب :هل تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد ازداد خلال ذلك الشهر مستخدما في ذلك مستوى الدلالة 0.05.

التمرين الرابع: أبدت إدارة التسويق في مؤسسة ما فكرة جديدة تسمى " البيع بروح الفريق " وفيها يستخدم الهاتف في عرض السلع على الزبائن قبل البيع، يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 25 % وهي نسبة البيع الحالية والمحققة. أرادت الإدارة أن تتحقق من ادعاء الفريق، فقامت بتجربة الفكرة على عينة مكونة من 100مكالمة بيع، نجح منها 30 عملية بيع.

المطلوب: هل يمكن القول أن فريق البيع نجح في زيادة في نسبة البيع عند مستوى معنوية 0.03؟

التمرين الخامس: إذا كانت الأجور اليومية في مؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي، وكان متوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الأولى 2500دج بانحراف معياري 300دج، ومتوسط الأجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية 2000دج بانحراف معياري 210دج. أخذت عينة من مؤسسة الأولى حجمها 36، وعينة من مؤسسة الثانية حجمها 49.

المطلوب: هل هناك فروق معنوية بين متوسطي الأجور اليومية في المؤسستين عند مستوى الدلالة 5%؟

التمرين السادس: إذا كان متوسط أطوال 20 تلميذا في مؤسسة تربوية هو 1.45 م وبانحراف معياري 0.1 م، بينما كان متوسط أطوال 15 تلميذة هو 1.40 م وبانحراف معياري قدره 0.15 م. وبافتراض أن متوسط أطوال التلاميذ والتلميذات يتبع التوزيع الطبيعي.

المطلوب:

1) اختبر فرضية عدم وجود اختلاف بين أطوال التلاميذ والتلميذات عند مستوى الدلالة 6 % إذا علمت أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين؟

2) اختبر فرضية عدم وجود اختلاف بين أطوال التلاميذ والتلميذات عند مستوى الدلالة 6 % إذا علمت أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين؟

التمرين السابع: تدعي شركة أن أحد منتجاتها الصيدلانية مدة صلاحيته بعد إنتاجه يزيد انحرافه المعياري عن شهرين، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة حجمها 25 من هذا المنتج فكان متوسط مدة استعماله هو 2 سنتين وانحرافه المعياري 3أشهر.

المطلوب: اختبر صحت هذا الادعاء عند مستوى معنوية 5 %؟

التمرين الثامن: سحبت عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 25 ،16 من مجتمعين مستقلين وكان الانحراف المعياري للعينتين هو: 7 ، 5 على الترتيب.

المطلوب: عند مستوى الدلالة 0.05 اختبر الفرضيتين التاليتين:

$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ مقابل $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ مقابل $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$

التمرين التاسع: لدراسة فعالية دواء معين لمعالجة مرض ارتفاع ضغط الدم، أخذت مجموعة من المرضى وتم قياس ضغط الدم عندهم قبل العلاج، وبعد فترة من إعطاء دواء إلى نفس المجموعة أعيد قياس ضغط الدم عندهم. والنتائج المحصل عليها موضحة في الجدول التالي:

الأشخاص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
قياس ضغط الدم قبل العلاج	18	15	19	16	17	18	20	15	21	22
قياس ضغط الدم بعد العلاج	13	13	14	13	12	14	14	15	14	16

المطلوب :هل هناك فرق في متوسط قياس ضغط الدم قبل وبعد اخذ العلاج عند مستوى الدلالة 5 %؟

التمرين العاشر: ترغب مؤسسة في مقارنة فعالية نوعين من الأدوية، فقامت بإعطاء الدواء الأول إلى المجموعة الأولى تتكون من 200 مريض فتبين شفاء 150منهم. وتم إعطاء الدواء الثاني إلى المجموعة الثانية تتكون من 200مريض فتبين شفاء 120 منهم.

المطلوب: هل هناك فرق جوهري بين فعالية النوعين من الأدوية عند مستوى الدلالة 4 %؟

المراجع

- أ. إياد محمد الهوبي، (2014)، الإحصاء التطبيقي، الطبعة الأولى، الكلية الجامعية للعلوم والتكنولوجيا، خان يونس.
- إبراهيم مراد الدعمة ومازن حسن الباشا، (2013)، أساسيات في علم الإحصاء مع تطبيقات SPSS، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى، 2013.
- ثائر فيصل شاهر، (2013)، اختبار الفرضيات الإحصائية، الطبعة الأولى، دار مكتبة حامد للنشر والتوزيع، عمان.
- جيلالي جلاطو، (2002)، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر.
- خليل شرف الدين، (بدون سنة)، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية
- دومينيك سالفاتور، (2011)، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الدار الدولية للنشر والتوزيع، عين شمس، مصر
- عبد المجيد عبد المجيد البلداوي، (1997)، الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان.
- عبد مضحي جبار، (2011)، مقدمة في نظرية الاحتمالات، الطبعة الأولى، دار المسيرة، عمان
- عدنان حسين الجادري، (2003)، الإحصاء الوصفي في العلوم التربوية، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن.
- عزام صبري، (2006)، الإحصاء الوصفي ونظام SPSS، الطبعة الأولى، جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
- عزام عبد الرحمان صبري، (2015)، الإحصاء التطبيقي بنظام spss، الطبعة الأولى، دار المنهجية للنشر والتوزيع، عمان
- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، (2008)، مقدمة في الإحصاء مبادئ وتحليل باستخدام spss، الطبعة الثانية، دار المسيرة، عمان
- مروان عبد المجيد، (2000)، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، دار الفكر، عمان. الأردن.
- مصطفى يوسف كافي وآخرون، (2012)، الإحصاء في الإدارة والاقتصاد"، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى.

▪ نبيل جمعه صالح النجار، (2015)، الإحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجية spss، الطبعة الأولى، داروكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان.

▪ وليد إسماعيل السيفو وآخرون، (2010)، أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال، زمزم ناشرون وموزعون، الأردن، الطبعة الأولى.

▪ Bernard Candelpergher, (2013), Théorie des probabilités une introduction élémentaire, Calvage –Mounet, Paris.

▪ Bernard Goldfarb, Catherine Pardoux, (2011), Introduction à la méthode Statistique, 6e édition, Dunod, Paris

▪ Christophe Hurlin, Valérie Mignon, (2015), Statistique et probabilités en economie-gestion, Dunod, Paris

▪ Eva Cantoni, Philippe Huber, Elvezio Ronchetti, (2009), Maîtriser l'aléatoire Exercices résolus de probabilités et statistique, 2e édition, Springer, Paris

▪ F. Bertrand M. Maumy-Bertrand, (2011), Statistique en 80 fiches pour les scientifiques, Dunod, Paris.

▪ Jean-Pierre Lecoutre, (2008), Statistique et probabilités, 4e édition, Dunod, Paris.

▪ Michel Lejeune, (2010), Statistique La théorie et ses applications, 2e édition, Springer, Paris

▪ Prem S.Mann , Christopher Jay Lacke, (2013), Introductory Statistics, 8 th Edition, John Wiley & Sons, Inc , United States of America

▪ Renée Veysseyre, (2001), Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur, 2e édition, Dunod, Paris.

▪ Ron Larson, Betsy Farber,(2015), Elementary statistics : picturing the world,6th edition , Pearson Education, Inc , United States of America

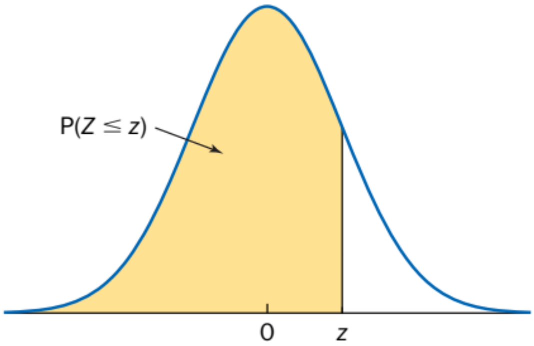
▪ Stephen KoKoSKa ,(2015) Introductory Statistics A Problem-Solving Approach, Second Edition , W. H. Freeman and Company ,United States of America

▪ William Mendenhall, Robert J. Beaver , Barbara M. Beaver , (2013) Introduction to Probability and Statistics, 14 th Edition , Brooks/Cole, Cengage Learning , United States of America.

Table III Standard Normal Distribution Cumulative Probabilities

Let Z be a standard normal random variable: $\mu = 0$ and $\sigma = 1$.

This table contains cumulative probabilities: $P(Z \leq z)$.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Table III Standard Normal Distribution Cumulative Probabilities (Continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

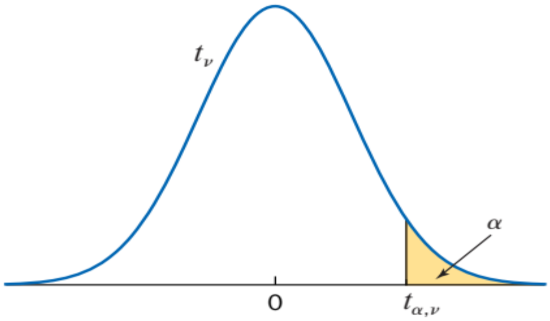
Special critical values: $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190

α	0.00009	0.00008	0.00007	0.00006	0.00005	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001
z_α	3.7455	3.7750	3.8082	3.8461	3.8906	3.9444	4.0128	4.1075	4.2649

Table V Critical Values for the t Distribution

This table contains critical values associated with the t distribution, $t_{\alpha,\nu}$, defined by α and the degrees of freedom, ν.



	α								
ν	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088	636.6192	3183.0988
2	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271	31.5991	70.7001
3	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145	12.9240	22.2037
4	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103	13.0337
5	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688	9.6776
6	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588	8.0248
7	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079	7.0634
8	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413	6.4420
9	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809	6.0101
10	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869	5.6938
11	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370	5.4528
12	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178	5.2633
13	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208	5.1106
14	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405	4.9850
15	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728	4.8800
16	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150	4.7909
17	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651	4.7144
18	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216	4.6480
19	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834	4.5899
20	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495	4.5385
21	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193	4.4929
22	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921	4.4520
23	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676	4.4152
24	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454	4.3819
25	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251	4.3517
26	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066	4.3240
27	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896	4.2987
28	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739	4.2754
29	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594	4.2539
30	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460	4.2340
40	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510	4.0942
50	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960	4.0140
60	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602	3.9621
70	0.8468	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	3.2108	3.4350	3.9257
80	0.8461	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163	3.8988
90	0.8456	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019	3.8780
100	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905	3.8616
200	0.8434	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.1315	3.3398	3.7891
500	0.8423	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857	3.1066	3.3101	3.7468
∞	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190

Fractiles de la Loi Normale

U → N(0 . 1).

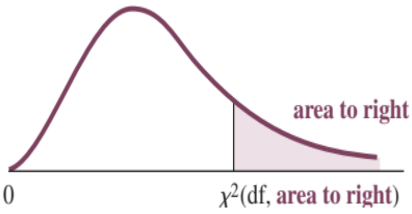
Pour $P < 0.5$ (colonne de gauche et ligne supérieure). les fractiles sont négatifs.
Pour $P > 0.5$ (colonne de droite et ligne inférieure). les fractiles sont positifs.

P	**0**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**	**0.006**	**0.007**	**0.008**	**0.009**	**0.01**	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

Exemples : $\Pi(u) = P(U \le u) = P = 0.6340 \Rightarrow u = 0.3425$; $\Pi(u) = P(U \le u) = P = 0.4020 \Rightarrow u = -0.2482$

Critical Values of χ^2 ("Chi-Square") Distribution

The entries in this table, χ^2 (df, α), are the critical values for the χ^2 distribution for which the area under the curve to the right is α.



Area to the Right

α

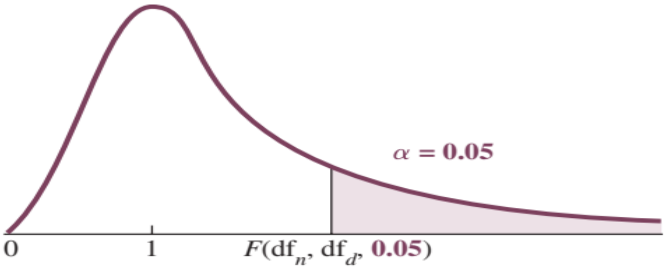
ν	0.9999	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90
1	$0.0^{7}157$	$0.0^{6}393$	$0.0^{5}157$	$0.0^{4}393$	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158
2	0.0002	0.0010	0.0020	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107
3	0.0052	0.0153	0.0243	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844
4	0.0284	0.0639	0.0908	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636
5	0.0822	0.1581	0.2102	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103
6	0.1724	0.2994	0.3811	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041
7	0.3000	0.4849	0.5985	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331
8	0.4636	0.7104	0.8571	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895
9	0.6608	0.9717	1.1519	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682
10	0.8889	1.2650	1.4787	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652
11	1.1453	1.5868	1.8339	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778
12	1.4275	1.9344	2.2142	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038
13	1.7333	2.3051	2.6172	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415
14	2.0608	2.6967	3.0407	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895
15	2.4082	3.1075	3.4827	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468
16	2.7739	3.5358	3.9416	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122
17	3.1567	3.9802	4.4161	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852
18	3.5552	4.4394	4.9048	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649
19	3.9683	4.9123	5.4068	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509
20	4.3952	5.3981	5.9210	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426
21	4.8348	5.8957	6.4467	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396
22	5.2865	6.4045	6.9830	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415
23	5.7494	6.9237	7.5292	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480
24	6.2230	7.4527	8.0849	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587
25	6.7066	7.9910	8.6493	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	7.1998	8.5379	9.2221	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919
27	7.7019	9.0932	9.8028	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139
28	8.2126	9.6563	10.3909	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392
29	8.7315	10.2268	10.9861	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677
30	9.2581	10.8044	11.5880	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992
31	9.7921	11.3887	12.1963	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336
32	10.3331	11.9794	12.8107	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706
33	10.8810	12.5763	13.4309	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102
34	11.4352	13.1791	14.0567	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523
35	11.9957	13.7875	14.6878	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967
36	12.5622	14.4012	15.3241	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433
37	13.1343	15.0202	15.9653	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921
38	13.7120	15.6441	16.6112	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430
39	14.2950	16.2729	17.2616	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958
40	14.8831	16.9062	17.9164	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505
50	21.0093	23.4610	24.6739	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886
60	27.4969	30.3405	31.7383	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589
70	34.2607	37.4674	39.0364	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289
80	41.2445	44.7910	46.5199	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778
90	48.4087	52.2758	54.1552	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911
100	55.7246	59.8957	61.9179	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581

Table VI **Critical Values for the Chi-Square Distribution** (Continued)

	α							
ν	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8276	12.1157	15.1367
2	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966	13.8155	15.2018	18.4207
3	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382	16.2662	17.7300	21.1075
4	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603	18.4668	19.9974	23.5127
5	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5150	22.1053	25.7448
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.4577	24.1028	27.8563
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3219	26.0178	29.8775
8	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550	26.1245	27.8680	31.8276
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894	27.8772	29.6658	33.7199
10	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882	29.5883	31.4198	35.5640
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568	31.2641	33.1366	37.3670
12	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.9095	34.8213	39.1344
13	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195	34.5282	36.4778	40.8707
14	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193	36.1233	38.1094	42.5793
15	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.6973	39.7188	44.2632
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.2524	41.3081	45.9249
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.7902	42.8792	47.5664
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565	42.3124	44.4338	49.1894
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823	43.8202	45.9731	50.7955
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.3147	47.4985	52.3860
21	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011	46.7970	49.0108	53.9620
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957	48.2679	50.5111	55.5246
23	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813	49.7282	52.0002	57.0746
24	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585	51.1786	53.4788	58.6130
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279	52.6197	54.9475	60.1403
26	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899	54.0520	56.4069	61.6573
27	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449	55.4760	57.8576	63.1645
28	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934	56.8923	59.3000	64.6624
29	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356	58.3012	60.7346	66.1517
30	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720	59.7031	62.1619	67.6326
31	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027	61.0983	63.5820	69.1057
32	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281	62.4872	64.9955	70.5712
33	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484	63.8701	66.4025	72.0296
34	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639	65.2472	67.8035	73.4812
35	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748	66.6188	69.1986	74.9262
36	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812	67.9852	70.5881	76.3650
37	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833	69.3465	71.9722	77.7977
38	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814	70.7029	73.3512	79.2247
39	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756	72.0547	74.7253	80.6462
40	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660	73.4020	76.0946	82.0623
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.6608	89.5605	95.9687
60	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517	99.6072	102.6948	109.5029
70	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149	112.3169	115.5776	122.7547
80	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211	124.8392	128.2613	135.7825
90	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989	137.2084	140.7823	148.6273
100	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695	149.4493	153.1670	161.3187

Critical Values of the F Distribution ($\alpha = 0.05$)

The entries in this table are critical values of F for which the area under the curve to the right is equal to 0.05.

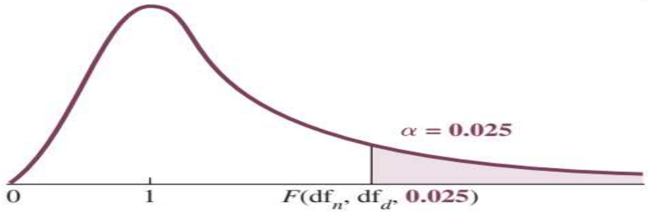


υ_2	υ_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

υ_2	υ_1									
	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
1	242.98	243.91	245.96	248.01	249.26	250.08	251.15	251.77	253.01	254.17
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11

Critical Values of the F Distribution ($\alpha = 0.025$)

The entries in this table are critical values of F for which the area under the curve to the right is equal to 0.025.

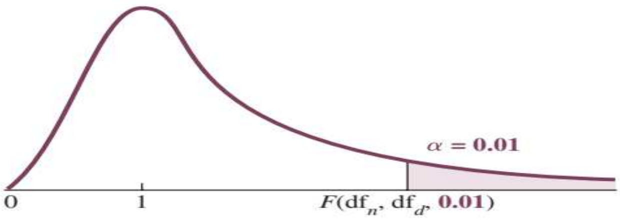


	Degrees of Freedom for Numerator									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.74	14.63	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.61	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.85
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	5.00	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
35	5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
80	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18
200	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18	2.11
500	5.05	3.72	3.14	2.81	2.59	2.43	2.31	2.22	2.14	2.07
1000	5.04	3.70	3.13	2.80	2.58	2.42	2.30	2.20	2.13	2.06

υ_2	υ_1									
	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
2	39.41	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.37	14.33	14.26	14.17	14.11	14.08	14.04	14.01	13.96	13.91
4	8.79	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.32	8.26
5	6.57	6.53	6.43	6.33	6.27	6.23	6.17	6.14	6.08	6.02
6	5.41	5.37	5.27	5.17	5.11	5.06	5.01	4.98	4.92	4.86
7	4.71	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.21	4.15
8	4.24	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.74	3.68
9	3.91	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.40	3.34
10	3.66	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.15	3.09
11	3.47	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	2.96	2.89
12	3.32	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.80	2.73
13	3.20	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.67	2.60
14	3.09	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.56	2.50
15	3.01	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.47	2.40
16	2.93	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.40	2.32
17	2.87	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.33	2.26
18	2.81	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.27	2.20
19	2.76	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.22	2.14
20	2.72	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.17	2.09
21	2.68	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.13	2.05
22	2.65	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.09	2.01
23	2.62	2.57	2.47	2.36	2.29	224	2.18	2.14	2.06	1.98
24	2.59	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.02	1.94
25	2.56	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.00	1.91
26	2.54	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.05	1.97	1.89
27	2.51	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.03	1.94	1.86
28	2.49	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	2.01	1.92	1.84
29	2.48	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.99	1.90	1.82
30	2.46	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.88	1.80
35	2.39	2.34	2.23	2.12	2.05	2.00	1.93	1.89	1.80	1.71
40	2.33	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.74	1.65
50	2.26	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.66	1.56
60	2.22	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.70	1.60	1.50
80	2.16	2.11	2.00	1.88	1.81	1.75	1.68	1.63	1.53	1.41
100	2.12	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.48	1.36
200	2.06	2.01	1.90	1.78	1.70	1.64	1.56	1.51	1.39	1.25
500	2.02	1.97	1.86	1.74	1.65	1.60	1.52	1.46	1.34	1.17
1000	2.01	1.96	1.85	1.72	1.64	1.58	1.50	1.45	1.32	1.13

Critical Values of the F Distribution ($\alpha = 0.01$)

The entries in the table are critical values of F for which the area under the curve to the right is equal to 0.01



Degrees of Freedom for Numerator

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.	5000.	5403.	5625.	5764.	5859.	5928.	5982.	6024.	6056.
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.69	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

υ_2	υ_1									
	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1000
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.72	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	25.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16