الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طاهري محمد- بشار-

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

Ministére de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Tahri Mohamed –Béchar-

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de

مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر

بعنوان:

دروس وتطبيقات في بحوث العمليات

من إعداد الأستاذ:

د. قسول سفيان

السنة الجامعية: 2023/2022

فهرس المحتويات

مقدمة

تعتبر بحوث العمليات أحد العلوم التي تهتم بعمليات التحليل واتخاذ القرار بهدف تحقيق الأعظمية في العائد وأقل تكلفة ممكنة حيث أن التطور الحاصل في مختلف مجالات الحياة يتطلب التعامل مع التغيرات الحاصلة بأسلوب عملي اعتمادا على العلم والمنطق والتحليل الذي يسبق اتخاذ القرارات المختلفة، وتواجه المؤسسات حاليا تحديات كبيرة نظرا لتطور المعلوماتية أو الاقتصاد الرقمي، ما يوجب إلمام وتمكن متخذي القرارات بقدر كبير بالأساليب العلمية والكمية الحديثة من أجل اتخاذ القرارات المختلفة.

ويأتي علم بحوث العمليات ليوفر أساليب كثيرة يمكن تبنيها في حل كثير من المشكلات الإدارية والاقتصادية كما تعد أسلوبا رياضيا فاعلا في دراسة المتغيرات الاقتصادية وإمكانية الاستفادة منها في إعداد السياسات الاقتصادية المستقبلية ، لذا أصبح هذا المقياس يدرس في الكثير من المعاهد والجامعات اختلاف تخصصاتها ، وأصبحت الدول النامية مجبرة على الاستعانة وتطبيق هذا العلم من أجل حل مشاكلها وحث الطلبة والعاملين على اعتماد الأساليب الكمية في بحوثهم لزيادة دقة النتائج التي يتوصلون إليها.

وهذا العمل عبارة عن مطبوعة دروس وتطبيقات موجهة لطلاب السنة الثالثة ليسانس والسنة الأولى ماستر في ميدان العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية لمختلف الاختصاصات ، كما أن هذا العمل المتواضع أنجز بهدف تذليل بعض العقبات و العراقيل التي تصادف طلبتنا في مقياس بحوث العمليات وبعض المقاييس الكمية التي تعتمد على الطرق الرياضية بشكل شبه مطلق مما يتطلب تركيزا أدق و جهدا أكبر. وإثراء المكتبة الجامعية بعمل يمكن أن يقدم إضافة للأعمال المقدمة سابقا.

وتتضمن هذه المطبوعة سبع وحدات حيث تطرقنا في الوحدة الأولى إلى ماهية بحوث العمليات، أهدافها ومجالات استخدامها، أما الوحدة الثانية فقد تناول البرمجة الخطية مفهومها وكيفية صياغة النموذج الرياضي في حالتي التعظيم والتدنئة، أما الوحدة الثالثة فقد بينا كيفية حل البرامج الرياضية لإيجاد الحل الأمثل من خلال طريقتين أساسيتين هما الطريقة البيانية وطريقة السمبليكس، وفي الوحدة الرابعة تطرقنا إلى البرنامج المرافق للبرنامج الأولي ومساهمته في إيجاد الحلول المثلى بالإضافة إلى بعض الحالات الخاصة، وفيما يخص الوحدة الخامسة تناولنا فيها موضوع برمجة الأعداد الصحيحة لبعض المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية التي لا يمكن تجزئتها، أما الوحدة السادسة خصصت لتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية من خلال دراسة مدى التغيرات في المتغيرات الأساسية في النموذج الرياضي ، أما الوحدة السابعة فقد استمرت مع البرمجة الخطية ولكنها انفردت بتوضيح فكرة نماذج النقل أو نماذج التخصيص والبحث عن الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية في حالة التدنئة لتكاليف النقل.

ولترسيخ كل الدروس التي وردت في هذه المطبوعة عمدنا إلى حل عدد معتبر من الأمثلة والتطبيقات بطريقة منهجية و مبسطة إلى أبعد الحدود.

وفي الأخير نرجو من الله العلي القدير أن يكون قد و فقنا في إخراج هذا العمل المتواضع إلى النور وأن يستفيد منه من يحتاج إليه سواء كانوا طلابا أو أساتذة أو غيرهم و نعتذر مسبقا عن كل الأخطاء التي قد ترد ضمن هذه المطبوعة.

الوحدة الأولى

ماهية بحوث العمليات

بدأ الاهتمام ببحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية حيث استخدمت بشكل أساسي في قيادة القوات البريطانية للحصول على أعلى كفاءة للعتاد الحربي و أفراد الجيش.

وقد أثبتت النماذج المستخدمة فعاليتها خلال العمليات العسكرية وكان لها دور كبير في تخفيض الخسائر المادية والبشرية وتعزيز فرص الربح.[1]

وقد سبق ذلك محاولات متفرقة لبعض العلماء بصفة فردية كفريدريك تايلورا لذي صمم بعض النماذج لتطبيقها في مجال إدارة الإنتاج الصناعي من أجل تحقيق أعلى مردود ممكن لاستخدام الأفراد والمعدات.

لكن هذه المحاولات لا يمكن اعتبارها جاءت لتطوير بحوث العمليات، وإنما يمكن اعتبارها جاءت كمقدمات أدت إلى نشأة بحوث العمليات.[2]

وعليه يمكن القول أن هذا العلم بدأ مع بداية الحرب العالمية الثانية و امتد مع نهايتها ليشمل المجالات الإدارية والاقتصادية و الهندسية و غيرها، بعد أن زاد الاهتمام به بشكل كبير و قام عدد كبير من العلماء بتطويره وتدريسه في الجامعات و خاصة جامعة Princeton التي كان لها السبق في تطوير وتدريس هذا العلم.

حيث تبين أن جميع الأساليب التي استخدمت في المجال العسكري يمكن أن تستخدم في المجال الاقتصادي لتطوير احتياجات الإنسان.

إضافة إلى تايلور هناك علماء ساهموا بجهودهم لتطوير هذا العام و تبنوا فكرة اتخاذ القرارات في المؤسسات على أساس كمي لا على أساس التجربة والخطأ والحدس الشخصي ، حيث يرتكز القرار على جمع الحقائق الكمية وتحليلها وتفسيرها واختيار البديل الأفضل. و من هؤلاء العلماء Henri Fayol, Frank Gliberth , Henri Gantt.[3]

وجميعهم أيدوا تايلور لضرورة استخدام المقاييس الكمية في وضع المعايير لاتخاذ القرارات الإدارية، وقد كان ذلك بجهود فردية.

- قام علماء بتطوير هذا الفكر وتبنوا فكرة اتخاذ القرارات في المؤسسة على أساس كمي لا على أساس خبرة وتجربة وتكوين المسير.[4]

[1] فتحي خليل حمدان ، "**بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، ط1، 2010، ص 16.

[2] بوقرة رابح، "**بحوث العمليات**"، الجزء الأول، جامعة المسيلة، 2010/2009، ص 9.

[3] محمد راتول، "**بحوث العمليات**"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط3، 2008، ص5.

[4] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، "**المدخل إلى بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، ط3، 2009، ص 11.

1. مفهوم بحوث العمليات:

لا يوجد تعريف موحد لبحوث العمليات، فهناك من يعرفها:

1.1 تعريف Kimball و Morse : طريقة علمية لإمداد الإدارة التنفيذية بأساس كمي للقرارات الخاصة بالعمليات تحت رقابتهم. (الاقتصاد علم تجريبي: تجربة، فرضية، نظرية).

2.1 تعريف د.موفق محمد الكبيسي: عبارة عن مجموعة من الطرق و الوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الأفضل للموارد المتاحة.[1]

3.1 وقد عرفها **بعض العلماء** على أنها مجموعة من الطرق المستخدمة في إعداد المعلومات بشكل يعطي للإدارة الفرصة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

4.1 أما **جمعية بحوث العمليات** ببريطانيا فقد عرفته على أنها تطبيق الطرق العلمية على المشاكل المعقدة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة من الأفراد، المعدات، المواد والأموال. وبمقتضى هذا النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة عوائد مختلف القرارات والاستراتيجيات البديلة وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياساتها وإجراءاتها بأسلوب علمي.[2]

2. أهداف بحوث العمليات:

تهدف بحوث العمليات للوصول إلى الحل الأمثل، و هذا يعني أن الحل المتوصل إليه هو أفضل الحلول ولا يوجد بديل آخر يعطي نتائج أفضل.

كما تهدف بحوث العمليات لتحقيق الأمثلية و ليس فقط تحسين الوضع الحالي و هذا يعني أنه في ظروف المسألة موضوع الدراسة يكون الهدف المطلوب تحقيقه هو أفضل و أمثل الحالات المتاحة لبدائل الحل. [3]

إن استخدام أساليب و نماذج بحوث العمليات يستدعي معرفة في مجالات عديدة كما يعني أن المدخل الملائم لعلاج المسائل باستخدام بحوث العمليات يستدعي تشكيل فريق عمل لدراسة المسألة و حلها.

و يوفر علم بحوث العمليات فائدة كبيرة لصانعي القرار، أهمها:[4]

.1.2 طرح البدائل لحل مشكلة معينة، و ذلك لاتخاذ القرار المناسب اعتمادا على العوامل و الظروف المتوفرة.

---

[1] أحمد حاتم عبد الله، "**بحوث العمليات**"، منشورات الجامعة الافتراضية السورية، الجمهورية العربية السورية، 2018، ص4.

[2] بوقرة رابح، مرجع سابق ، ص 9.

[3] طلال عبود ، طاهر حسن، "**بحوث العمليات**"، منشورات الجامعة الافتراضية السورية، الجمهورية العربية السورية، 2021، ص23.

[4] صالح مهدي، محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، "**تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 17.

2.2. إعطاء صورة عن تأثير العالم الخارجي على الإستراتيجية المتبعة في تنفيذ خطة ما حيث تِثر الظروف الخارجية على نتيجة الاستراتيجيات التي تتخذها الإدارة.

3.2. صياغة الأهداف و النتائج، و مدى تأثر هذه الأهداف بكافة العوامل و المتغيرات، و سهولة معالجة الروابط بين هذه المتغيرات رياضيا للوصول إلى كمية رقمية يسهل تحليلها.

وتعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداء من بناء النموذج إلى حله فاختباره فتطبيقه، كون أن التحضير لاتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي:[1]

- تحديد المشكلة و تحليلها إلى عناصرها الأولية (تعريف المسألة).
- بناء النموذج الرياضي المناسب الذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
- اختبار مدى صحة النموذج.
- إيجاد حل للنموذج.
- اختبار مدى مناسبة الحل.
- تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها.

و هي خطوات منهجية لا بد من المرور عبرها لحل أي مشكل علمي في الإدارة الاقتصادية للموارد.

3. مجالات استخدام بحوث العمليات في المؤسسات:

فيما يلي بعض المجالات التي استخدمت بحوث العمليات في المؤسسة:[2]

التخطيط العام: و شمل التخطيط للمشروعات و تنظيم هيكل المؤسسة و تخطيط السياسات الأفضل لها و وضع البرامج الممكنة لتطوير إمكانيات و موارد المؤسسة.

الانتاج: و يتطرق إلى توزيع الموارد و سلسلة الانتاج، لتحقيق أقصى قدر ممكن من الإنتاجية و ترشيد النفقات للحصول على أقل التكاليف، و الرقابة على الجودة على أساس التوازن بين الجودة المطلوبة و التكلفة المتضمنة.

[1] أكرم محمد عرفان المهتدي، " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات**"، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، ط1، 2004، ص14-15.

[2] طلال عبود، طاهر حسن، مرجع سابق، ص 42-44.

التسويق: و هذا بتحديد ميزانية التسويق و توزيعها بين البيع الشخصي و الإعلان و ترويج المبيعات، ففي المبيعات الشخصية دراسة عدد رجال البيع و عدد الزبائن لكل رجل بيع و عدد مرات زيارة الزبون، وبالنسبة للإعلان دراسة إمكانية الوصول إلى الحل الأفضل للوسائل الإعلامية و تأثيره على المبيعات.

المنتوجات الجديدة: و استخدمت في مشاكل المنتجات الجديدة سواء كان من ناحية الاختيار أو التوقيت أو التنبؤ بالطلب.

التوزيع: ساعدت بحوث العمليات في تحديد حجم و مكان المخازن الخاصة بالمنتجات و مراكز التوزيع و البيع و كيفية تقليل تكاليف نقل السلع من نقطة إلى نقطة.

الإدارة المالية: استخدمت بحوث العمليات لتحليل التدفق النقدي و متطلبات الاستثمارات، و موارد رأسمال و سياسات توزيع الأرباح، و قدمت نماذج رياضية في سياسات البيع بالأجل و مشاكل الحساب الغير مدفوعة.

الموارد البشرية: قدمت دراسات على مجموعات السن و المهارات من ناحية الأداء الأفضل، و كذلك في مجالات التوظيف و توزيع الأفراد على العمل و تقييم الحوافز لضمان الأداء الأفضل.

المشتريات: كما استعملت بحوث العمليات لتحديد سياسات الشراء من ناحية الوقت و الكمية و كذلك في حالات اختلاف الأسعار و تغييرها و خصومات الكمية

إن بحوث العمليات تؤثر بنماذجها و أنظمتها على اتخاذ القرارات، فعلى المسير أن يقوم بالتصرف المناسب طبقا للمعلومات الجديدة و على المسير تحديد مدى تناسب النماذج مع مشاكلهم، و مراقبتها للتأكد من أنها ما زالت معبرة عن واقع المشكلة و طبيعتها.

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية

1. مفهوم البرنامج الخطي:[1] هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين، هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، تسمى دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية. في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا. والمقصود من كلمة أمثلية هو الوصول إلى أعظم قيمة للدالة الاقتصادية أو أدنى قيمة لها حسب الحالة، في وجود تلك المجموعة من القيود، و ألحقت كلمة خطي بكلمة البرنامج لأن متغيرات كل من الدالة و القيود هي من الدرجة الأولى.

1.1. حالة التعظيم:[2]

$$\text{Max} : Z = C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + C_3\, x_3 + \dots C_n\, x_n$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \dots a_{1n}\, x_n \le b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \dots a_{2n}\, x_n \le b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \dots a_{3n}\, x_n \le b_3 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + a_{m3}\, x_3 + \dots a_{mn}\, x_n \le b_m \\ x_1 , x_2 , x_3 , \dots x_n \ge 0 \end{cases}$$

Max تعني تعظيم Maximisation أي جعل الدالة Z في أعظم قيمة لها.

$x_1 , x_2 , x_3 , \dots x_n$ هي متغيرات البرنامج و المطلوب البحث عن قيمها، و يشترط أن تكون غير سالبة، كما يدل على ذلك القيد الأخير، و هو شرط منطقي لأن الكميات لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة.

$C_1 , C_2 , C_3 , \dots C_n$ معاملات الدالة المراد تعظيمها شريطة احترام القيود.

و تسمى هذه الدالة بالدالة الاقتصادية أو دالة الهدف.

و يمكن أن تأخذ معاملات الدالة أي قيمة:

$a_{11} , a_{12} , \dots a_{1n} , a_{21} , a_{22} , \dots a_{2n} , a_{31} , a_{32} , \dots a_{3n} , a_{m1} , a_{m2} , \dots a_{mn}$

معاملات القيود و يمكن أن تأخذ أي قيمة.

$b_1 , b_2 , b_3 , \dots b_m$

شعاع الثوابت، و يشترط أن تكون قيمة موجبة.

---

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، **"أساسيات بحوث العمليات"**، دار قنديل للنشر و التوزيع، عمان، ط1، 2008، ص17.

[2] مكيد علي، **"بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015، ص 11-16.

S/C (تحت القيود Sous contraintes) و المراد هو تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات.

ويمكن كتابة هذا البرنامج أيضا بالشكل المصفوفي كالتالي:

$$\text{Max : } Z = (C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \ldots C_n) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x_2} \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{S/C} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

و اختصارا يكتب البرنامج كما يلي:

$$\text{Max : } Z = C'x$$

$$\text{S/C} \begin{cases} Ax \leq B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

C´ : هو منقول مصفوفة معاملات الدالة الاقتصادية

x : هو شعاع المتغيرات

A : هي مصفوفة معاملات القيود

B : شعاع الثوابت

مثال: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$\text{Max} : Z = 100\,x_1 + 60\,x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 400 \\ 2\,x_1 + 9\,x_2 \leq 1080 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 \leq 960 \\ x_1\,,\,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة:

الدالة الاقتصادية تكتب كما يلي:

$$\text{Max} : Z = (100 \quad 60) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل:

$$\text{S/C} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$

و أخيرا قيد عدم السلبية يكتب على النحو:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1. حالة التدنئة:

$$\text{Min} : Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \dots C_n x_n$$

$$\text{S/C} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots a_{1n} x_n \geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots a_{2n} x_n \geq b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots a_{3n} x_n \geq b_3 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots a_{mn} x_n \geq b_m \\ x_1 , x_2 , x_3 , \dots x_n \geq 0 \end{cases}$$

Min تعني تدنئة Minimisation و يراد بها تعظيم الدالة Z تحت مجموعة القيود.

و بالشكل المصفوفي تكتب:

$$\text{Min} : Z = (C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \dots C_n) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{S/C} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما بالشكل المصفوفي المختصر يكتب البرنامج كما يلي:

$$Min : Z = C'x$$

$$S/C \begin{cases} Ax \geq B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

C´: هو منقول شعاع معاملات دالة الهدف

x : هو شعاع المتغيرات

A : هي مصفوفة معاملات القيود

B : شعاع الثوابت

مثال: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$Min : Z = 4\, x_1 + 18\, x_2 + 2\, x_3$$

$$S/C \begin{cases} 4\, x_1 + 4\, x_2 + 14\, x_3 \geq 20 \\ 2\, x_1 + 6\, x_3 \geq 14 \\ 2\, x_1 + 34\, x_2 + 30\, x_3 \geq 50 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة:

دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$Min : Z = (4 \quad 18 \quad 2) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. بناء البرنامج الخطي:

يظهر من العرض السابق أن البرنامج الخطي في شكليه تعظيم أو تدنئة يتألف من المكونات التالية:

أ. دالة الهدف: [1] تسمى أيضا الدالة الاقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الانتاج أو تعظيم الأرباح أو تدنئة التكاليف ... الخ. و تكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

ب. القيود:[2] هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا.

ج. شرط عدم السالبية: و تعني أن جميع المتغيرات أكبر أو تساوي الصفر كونها تتعلق بكميات مادية و ضمنا الكميات المادية يجب أن لا تساوي الصفر.[3]

1.2. مفهوم البرمجة الخطية:

إن تشكيل البرنامج الذي رأينا سابقا انطلاقا من مسائل واقعية و طرق حل البرنامج و الوصول إلى قيمة المتغيرات التي تعطي الحل الأمثل هي من المواضيع التي تدرسها البرمجة الخطية. و منه فإن البرمجة الخطية هي مجموعة من طرق التحليل العلمي يبحث على وجه الخصوص أمثليات الاستخدام للموارد الاقتصادية و ذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية.

2.2. مجالات استخدامها:

تستخدم في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية و المالية و التجارية وعلوم التسيير عامة هي:[4]

أ. في حالة التعظيم:

- تعظيم الأرباح.
- تعظيم الانتاج.
- تعظيم طاقات التخزين.
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال.

[1] محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، **"بحوث العمليات"**، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، ط2، 2011، ص 19.
[2] محمد راتول، مرجع سابق، ص 15.
[3] أحمد حاتم عبد الله، مرجع سابق، ص7.
[4] محمد راتول، مرجع سابق، ص16.

- تعظيم استخدام اليد العاملة.

و غير ذلك من السائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

ب. في حالة التدنئة:

- تدنئة التكاليف.
- تدنئة الخسائر.
- تدنئة عدد الموظفين.
- تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة و غير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

3.2. بناء البرنامج الخطي:

أهم خطوة في البحث عن الأمثلية، و يقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي إلى مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح متكون من عدد من المتغيرات، به دالة هدف تكون إما في حالة تعظيم أو تدنئة.

أ- كيفية بناء النموذج الرياضي: لبناء النموذج الرياضي بشكل صحيح نحتاج إلى:

- دراسة المشكلة و تحديد مكوناتها و خصائصها.
- تحديد المدخولات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة:
  - متغيرات القرار (x_1 , x_2 , x_3 ...).
  - دالة الهدف (Z).
  - المتباينات و المعادلات (القيود).

مثال 1:

يتبع أحد المصانع نوعين من الانتاج من سلعة واحدة، النوع العادي و الممتاز و يستخدم آلتين في الانتاج و لانتاج وحدة واحدة من النوع العادي يجب تشغيل الآلة الأولى ساعة واحدة و الثانية لمدة ساعة واحدة. و لانتاج وحدة واحدة من النوع الممتاز يجب تشغيل الآلة الأولى ساعة واحدة و الثانية لمدة ساعتين. فإذا علمت أن:

- ربح الوحدة الواحدة من النوع العادي هو 2 دينار، بينما ربح الوحدة الواحدة من النوع الممتاز هو 1.5 دينار.
- الطاقة الانتاجية لكل آلة لا تتجاوز 8 ساعات.

المطلوب: ايجاد النموذج الرياضي (الخطة الإنتاجية) التي تحقق أكبر عائد ممكن للمصنع.

الحل:

X_1: عدد وحدات الإنتاج من النوع العادي

X_2: عدد وحدات الإنتاج من النوع الممتاز

الطاقة الإنتاجية لكل آلة	الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة		رقم الآلة
	نوع ممتاز x_2	نوع عادي x_1	
8	1	2	**1**
8	2	1	**2**
	1.5	2	**الربح لكل وحدة**

1. تحديد دالة الهدف:

أي إيجاد العلاقة بين طاقة الإنتاج و العائد المادي.

$$Max : Z = 2\, x_1 + 1{,}5\, x_2$$

2. تحديد قيود المسألة و تتمثل بالعلاقة الإنتاجية لكل آلة:

$$2\, x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

3. قيد عدم السلبية:

عدد وحدات الإنتاج من النوع العادي أكبر أو يساوي الصفر $x_1 \geq 0$

عدد وحدات الإنتاج من النوع الممتاز أكبر أو يساوي الصفر $x_2 \geq 0$

مثال 2: [1]

أمام شركة الغزل والنسيج ثلاث طرق لإنتاج الأقمشة القطنية، الخصائص التقنية للإنتاج حسب الطرق الثلاث هي:

الطريقة الأولى: معالجة وإنتاج وحدة واحدة من القماش يتطلب 03ساعات من وقت عمل الآلات و0.4 ساعة عمل من وقت اليد العاملة.

الطريقة الثانية: معالجة وإنتاج وحدة واحدة من القماش يتطلب 2.5 ساعة من وقت عمل الآلات و0.5 ساعة عمل من وقت العمال.

الطريقة الثالثة: كل وحدة قماش تتطلب لإنتاجها 5.25 ساعة من وقت عمل الآلات و 0.35 ساعة عمل من وقت العمال.

[1] مكيد علي، مرجع سابق، ص 34-35.

أقصى عدد ساعات العمل للآلات الذي يمكن استخدامه هو 6000 ساعة أسبوعيا، بينما أقصى وقت عمل متاح من اليد العاملة يمكن استخدامه في الإنتاج هو 600 ساعة أسبوعيا. الربح الذي تحصل عليه الشركة من بيع القماش حسب طرق الإنتاج الثلاث هو على التوالي 10و.ن ، 09و.ن ، 11و.ن.
تريد الشركة أن تحدد الكميات من القماش التي يجب عليها إنتاجها حسب طرق الإنتاج الثلاثة التي تمكنها من تعظيم أرباحها كون النموذج الرياضي الخطي الخاص بهذه المؤسسة.

الحل:

$\text{Max} : Z = 9x_1 + 10x_2 + 11x_3$

$3x_1 + 2,5x_2 + 5,25x_3 \leq 6000$

$0,4x_1 + 0,5x_2 + 0,35x_3 \leq 600$

$X_j \geq 0$

مثال 3:

تنتج مؤسسة طاولات و كراسي معينة، و عملية الإنتاج تمر في مرحلتين:
المرحلة الأولى تمثل عملية النجارة و الثانية تمثل عملية الدهن، علما أن انتاج طاولة واحدة يتطلب 4 ساعات في المرحلة 1 و 2 ساعة في المرحلة 2. بينما انتاج كرسي واحد يحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة 1 و نصف ساعة في المرحلة 2.
يبلغ ربح الطاولة الواحدة 80 دينار، بينما ربح الكرسي الواحد يصل إلى 20 دينار. فإذا علمت أن عدد ساعات أعمال النجارة المتوفرة لا يتجاوز 120 ساعة أسبوعيا و عدد ساعات الدهن لا يتجاوز 80 ساعة أسبوعيا، أكتب الخطة الإنتاجية اللازمة لتحقيق أكبر ربح ممكن للشركة.

الحل:

X_1: عدد الطاولات المنتجة

X_2: عدد الكراسي المنتجة

المرحلة	الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة		طاقة العمل
	طاولة x_1	كرسي x_2	
النجارة	4	1	120
الدهن	2	1/2	80
الربح	8	2	

- **دالة الهدف:** زيادة الربح إلى الحد الأعلى

$$Max : Z = 8\,x_1 + 2\,x_2$$

- **القيود:**

زمن النجارة المستعمل أقل أو يساوي الزمن المتوفر

$$4\,x_1 + x_2 \leq 120$$

زمن الدهن المستعمل أقل أو يساوي الزمن المتوفر

$$2\,x_1 + 1/2x_2 \leq 120$$

قيد عدم السلبية:

$$x_1\ ,\ x_2 \leq 0$$

مثال 4:[1]

استلمت شركة كيميائية طلبا للحصول على 1400 كيلوغرام من خليط مكون من ثلاثة مركبات وبالمواصفات التالية:

1- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كيلوغرام من المركب الأول.

2- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كيلوغرام من المركب الثاني.

3- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كيلوغرام من المركب الثالث.

إذا علمت أن تكلفة الكيلوغرام من المركب الأول، المركب الثاني والمركب الثالث هي على التوالي 2، 3، 4 دينار.

أكتب النموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

الحل:

نفرض أن:

X_1 عدد الكيلوغرامات من المركب الأول.

X_2 عدد الكيلوغرامات من المركب الثاني.

X_3 عدد الكيلوغرامات من المركب الثالث.

كلفة الكيلوغرام من المركب الأول تساوي 2 دينار، فإذا استخدمنا x_1 كيلوغرام من هذا المركب فستكون الكلفة $2x_1$ دينار.

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيع مرعي، **"مقدمة في بحوث العمليات"**، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، ط6، 2011، ص27.

بنفس الطريقة إذا استخدمنا x_2 كيلوغرام من المركب الثاني فستكون الكلفة $3x_3$، كذلك إذا استخدمنا x_3 كيلوغرام من المركب الثالث فستكون الكلفة $4\ x_3$.

وبما أن الهدف هو تقليل الكلفة Min فإن دالة الهدف ستكون على الشكل:

$$Min : Z = 2x_1 + 3x_3 + 4x_3$$

القيود:

- القيد الأول: لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 ك من المركب الأول أي : $x_1 \leq 400$
- القيد الثاني: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 ك من المركب الثاني أي : $x_2 \geq 200$
- القيد الثالث: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 ك من المركب الثالث أي : $x_3 \geq 150$
- القيد الرابع: مجموع الخليط من المركبات الثلاثة يجب أن يساوي 1400 كيلوغرام أي:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1400$$

وعليه فالنموذج الرياضي الذي سيؤدي إلى تدنئة التكاليف سيكون بالصيغة التالية:

$$Min : Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Subject to,

$$X_1 \leq 400$$

$$X_2 \geq 200$$

$$X_3 \geq 150$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الوحدة الثالثة

طرق حل البرامج الرياضية

نقصد بحل البرنامج الرياضي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو حالة تدنئة.[1]

ويمكن إيجاد حل البرنامج الخطي من خلال طريقتين:

1. طريقة الرسم البياني:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق لمعالجة وحل البرامج الخطية التي تحتوي على متغيرين اثنين فقط من خلال الإعتماد على الأسلوب البياني وهذا من خلال إتباع الخطوات التالية:[2]

1.1 تحويل متباينات النموذج الرياضي إلى معادلات رياضية وافتراض المساواة دون إضافة متغير إضافي.

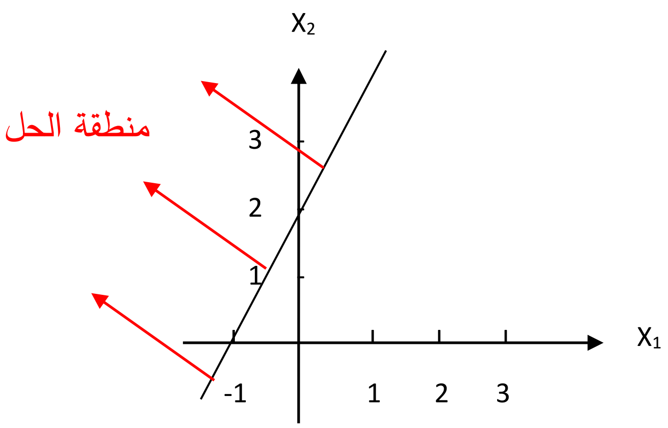
.2.1 رسم مخطط بياني مكون من محورين وكل محور يمثل أحد المتغيرات الأساسية في اتخاذ القرار ومن خلال هذا المخطط نحدد منطقة الحلول بعد رسم منحنيات المعادلات.

مثال1:

$$2x_1 - x_2 \leq -2$$

$$2x_1 - x_2 = -2$$

x_1	x_2
0	2
−1	0



[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 25.

[2] منعم زمزير الموسوي، **"بحوث العمليات"**، دار وائل للنشر و التوزيع، عمان، ط1، 2009، ص 63.

مثال 2:

أوجد الحل الأمثل Optimal Solution للنظام الرياضي التالي باستخدام الطريقة البيانية Graphical Solution.

Max : $Z = 3x_1 + 2x_2$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 1500 \\ x_1 + x_2 \leq 1000 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

$3x_1 + x_2 \leq 1500$

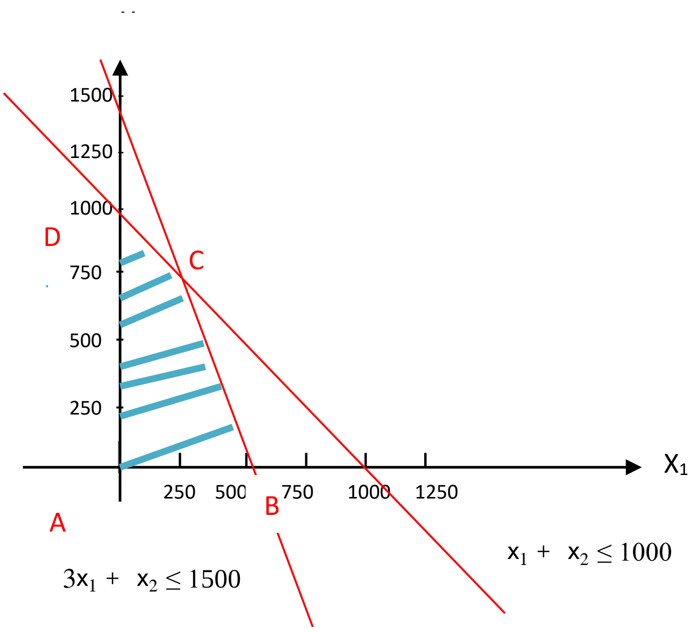
$3x_1 + x_2 = 1500$

x_1	x_2
0	1500
500	0

$x_1 + x_2 \leq 1000$

$x_1 + x_2 = 1000$

x_1	x_2
0	1000
1000	0



- المساحة المظللة A, B, C, D هي منطقة الحل الممكن.
- إحدى هذه الزوايا A, B, C, D تمثل الحل الأمثل.

نقوم بتعويض النقاط في المعادلة Z

$Z = 3x_1 + 2x_2$

النقطة	x_1	x_2	Z
A	0	0	0
B	500	0	1500
C	250	750	2250
D	0	1000	2000

من النقاط السابقة يتضح أن الحل الأمثل يكون عند النقطة C أي:

عندما تكون $x_1=250$, $x_2=750$ و عندها تكون قيمة الأرباح $Z=2250$

لإيجاد إحداثيات النقطة C بين المستقيمين:

1- نحول المتباينات إلى معادلات كالتالي:

$$3x_1 + x_2 = 1500 \quad \dots (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1000 \quad \dots (2)$$

2- للتخلص من أحد المتغيرين نضرب المعادلة رقم (2) ب -1 لتصبح:

$$-x_1 - x_2 = -1000 \quad \dots (3)$$

3- نجمع المعادلة (1) مع المعادلة (3) على النحو التالي:

$$3x_1 + x_2 = 1500 \quad \dots (1)$$

$$-x_1 - x_2 = -1000 \quad \dots (3)$$

$$2x_1 + 0 = 500$$

$$\mathbf{x_1 = 250}$$

4- لإيجاد قيمة x_2 نعوض قيمة $x_1=250$ في المعادلة رقم (2)

$$x_1 + x_2 = 1000$$

$$250 + x_2 = 1000$$

$$\mathbf{x_2 = 750}$$

إذن إحداثيات نقطة التقاطع C هي (750 ، 250)

ملاحظة: [1]

1- حاول دائما أن تجعل معامل أحد المتغيرين في المعادلة الأولى مساويا لمعامل نفس المتغير في المعادلة الثانية.

2- في حال كانت لهما نفس الإشارة نقوم بطرح المعادلتين، و إذا كانت الإشارتان مختلفتان نقوم بجمع المعادلتين.

مثال3: نفرض أن:

$$5x_1 - 3x_2 = 15 \ldots (1)$$
$$2x_1 + x_2 = 10 \ldots (2)$$

نجعل معامل المتغير x_2 في المعادلة الثانية يساوي معامل المتغير x_2 في المعادلة الأولى نضرب المعادلة الثانية ب 3:

$$5x_1 - 3x_2 = 15 \ldots (1)$$
$$3x2x_1 + 3x_2 = 3 \text{ x } 10 \ldots (2)$$

$$5x_1 + 3x_2 = 15 \ldots (1)$$
$$6x_1 + 3x_2 = 30 \ldots (2)$$
$$11x_1 = 45$$
$$x_1 = 45/11$$

3- عند استخراجنا لإحداثيات النقاط الطرفية لمنطقة الحلول، لا نعتمد على الإسقاط من الرسم البياني و هذا لاحتمال الوقوع في الخطأ راجع لعدم دقة الرسم البياني، و سوف نعتمد على الطريقة المبينة سابقا.

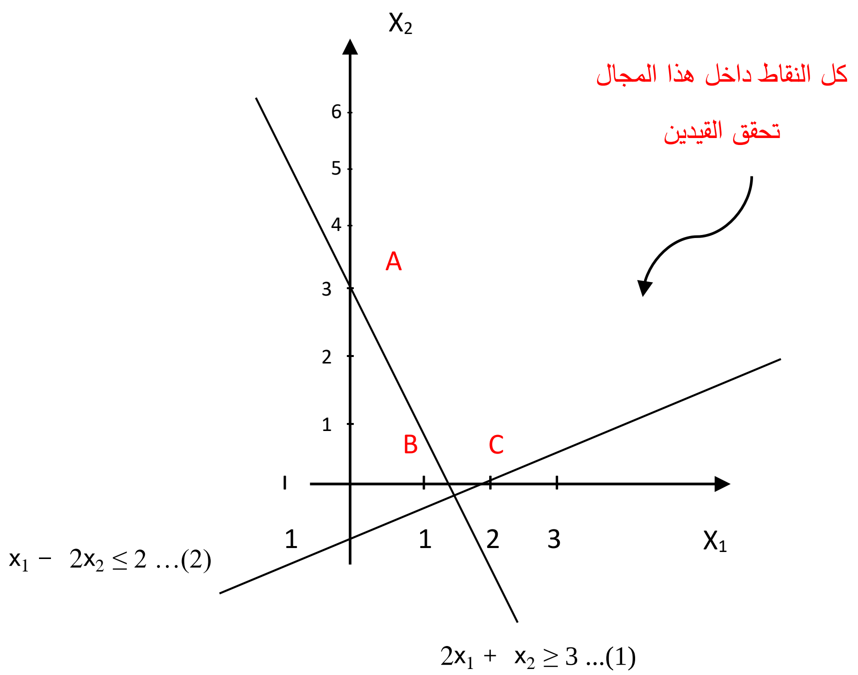
مثال 4:

$$\text{Min} : Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، مرجع سابق، ص 26.

الحل:



$2x_1 + x_2 = 3$

x_1	x_2
0	3
3/2	0

$x_1 - 2x_2 = 2$

x_1	x_2
0	−1
2	0

الحل الأمثل يكون أحد النقاط الطرفية لمنطقة الحلول (A, B,C).

أما النقاط داخل منطقة الحلول تمثل الحلول الممكنة.

$Z = 6x_1 + 4x_2$

Points extrêmes →

النقاط الطرفية	x_1	x_2	Z
A	0	3	12
B	1,5	0	9
C	2	0	12

بما أننا نبحث على تدنية دالة الهدف Min فنختار أقل قيمة لدالة الهدف من الجدول و هي: Z=9 و منه الحل الأفضل هو النقطة B.

3.1. حالات خاصة في الحل البياني:[1]

عند الحل البياني تصادفنا حالات خاصة نذكر منها:

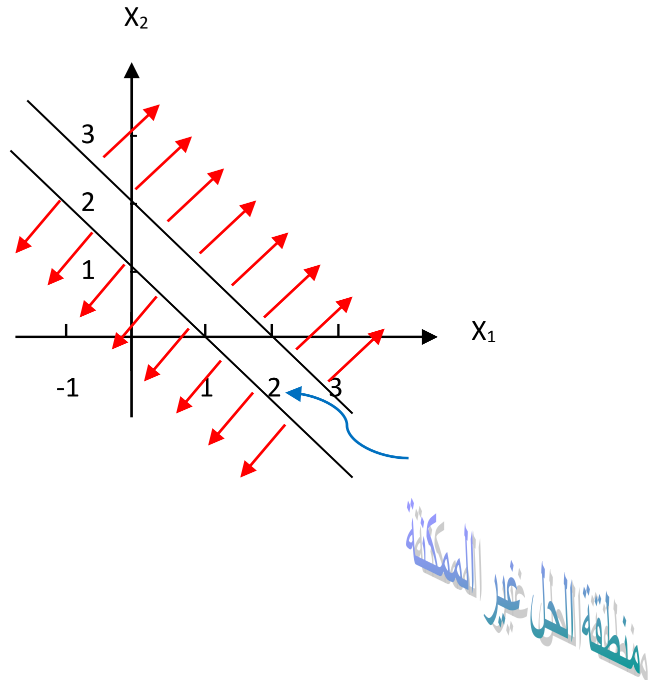
أ. تعذر الحل:

يعني أنه لا يوجد منطقة حلول ممكنة، أي أن تحقيق أحد القيود يؤدي إلى عدم تحقيق القيد الآخر.

مثال5:

$$Max : Z = 3x_1 - 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$



ب. عدم توفر حدود لمنطقة الحلول:

يعني أن تغير قيمة متغير أو أكثر في المسألة يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف في حالة مسائل Max دون مخالفة أي من قيود المسألة وبالتالي تكون منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية والسبب يكون عادة إغفال أحد قيود المسألة.

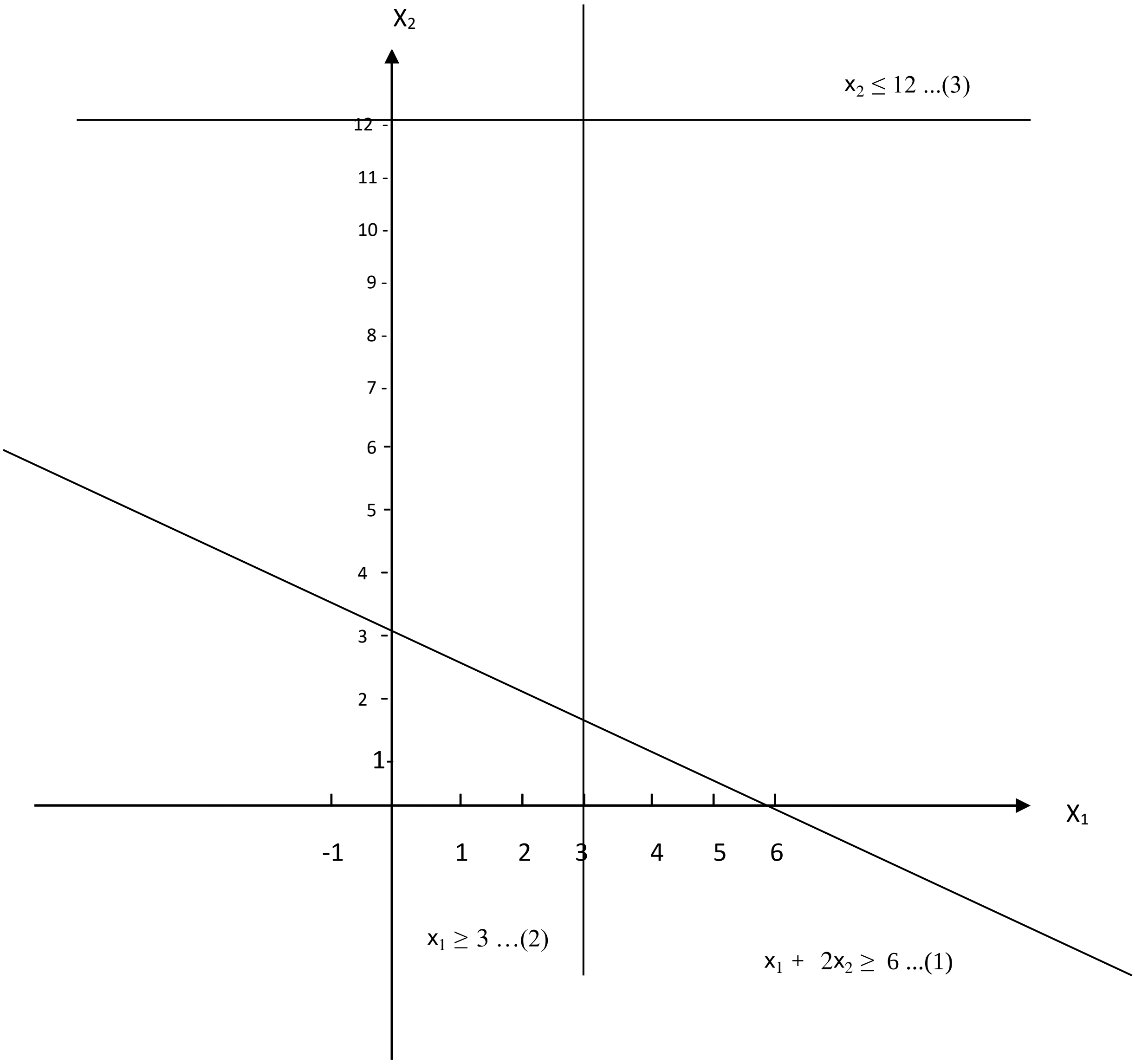
---

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، مرجع سابق،ص 40.

مثال6:

Max : $Z = 8x_1 + 3x_2$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$



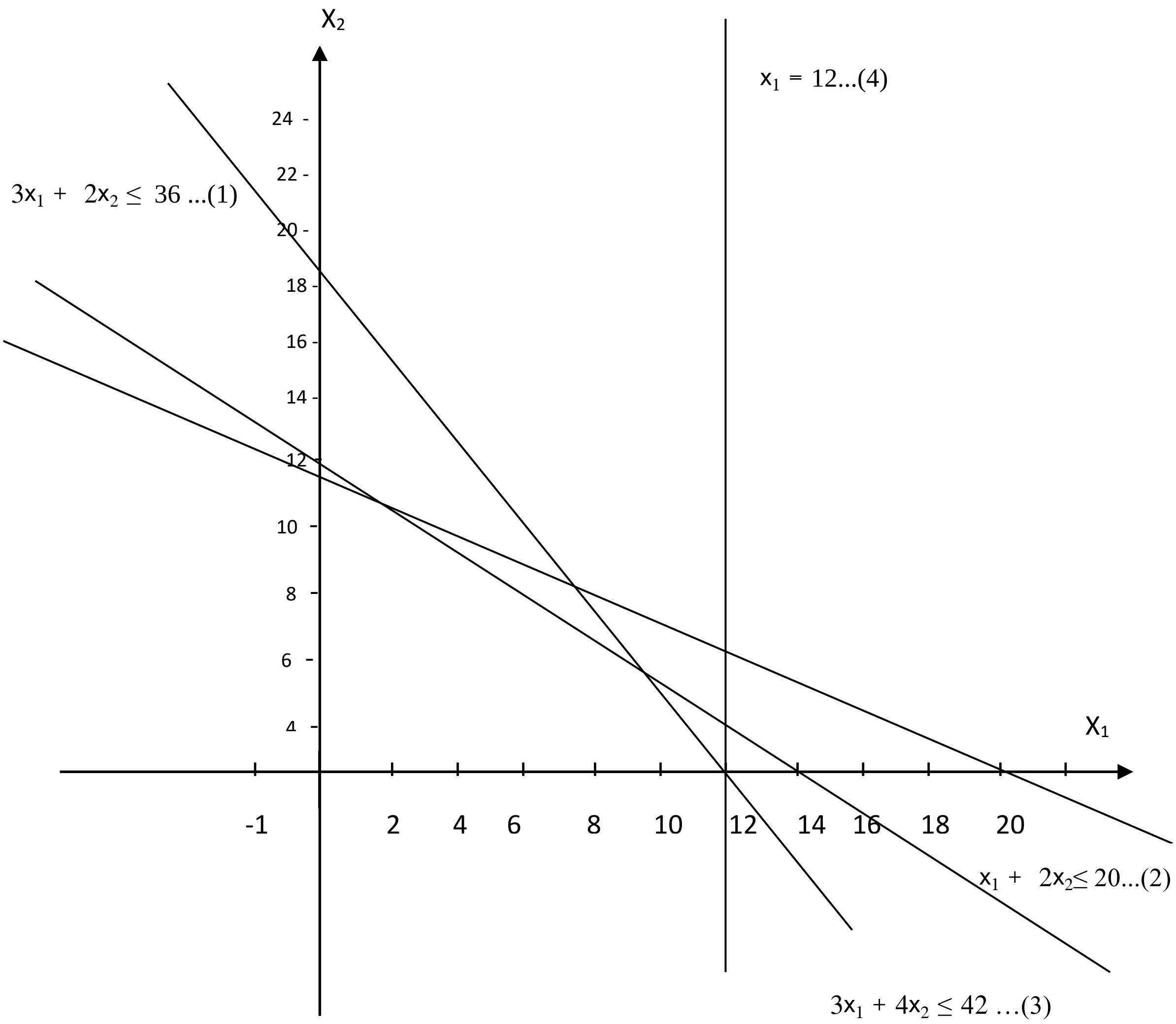
ج. الفائض:

أي أن يكون تأثير أحد القيود أكثر إعاقة عن القيد الآخر، فيلغي تأثيره على حل المسألة، و بالتالي يكون وجود مثل هذا القيد غير ضروري لعدم فائدته.

مثال7:

$\text{Max}: Z = 5x_1 + 8x_2$

$$\text{S/C} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 42 \\ X_1 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

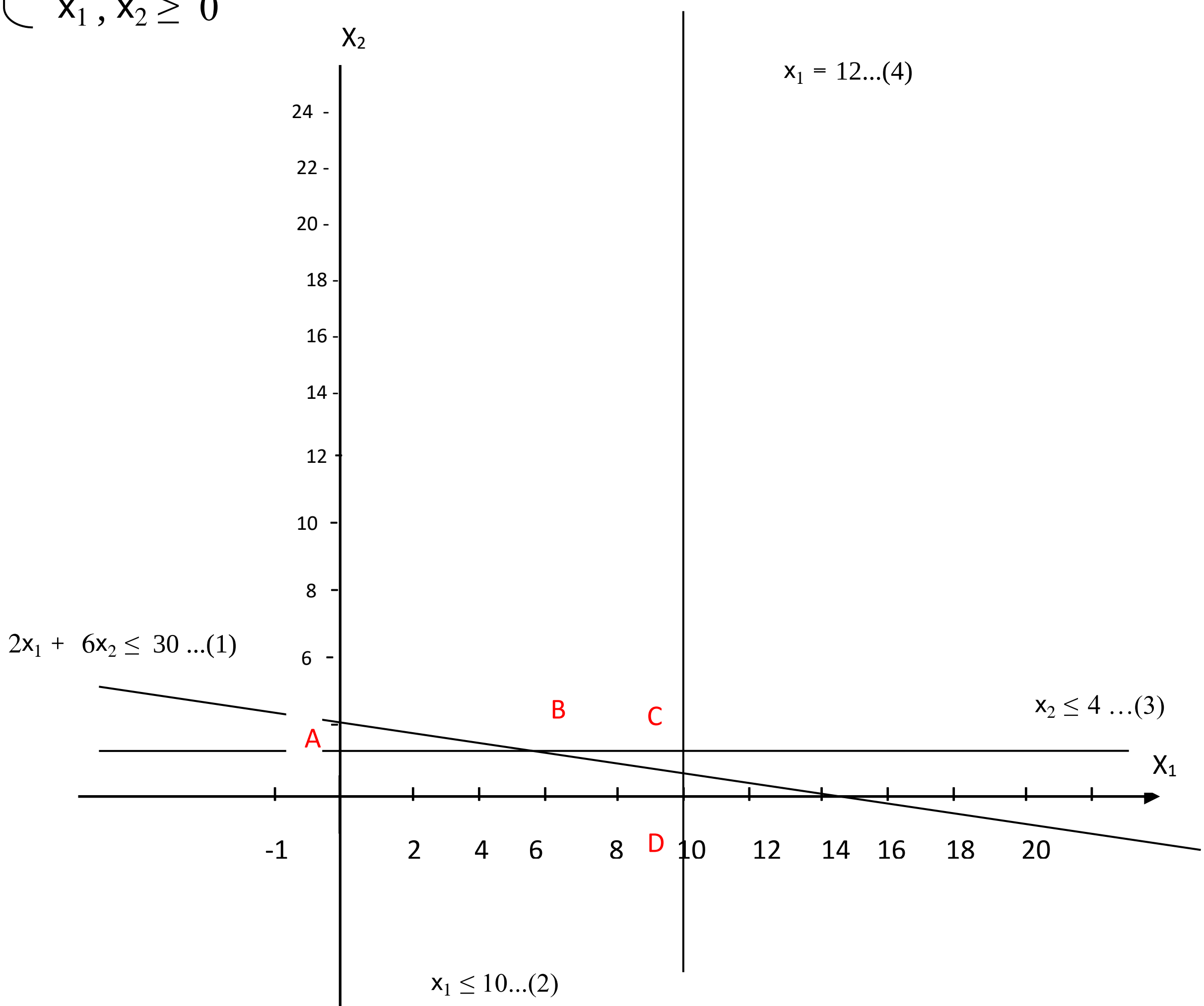


د. حالة تعدد الحلول المثلى:

مثال8:

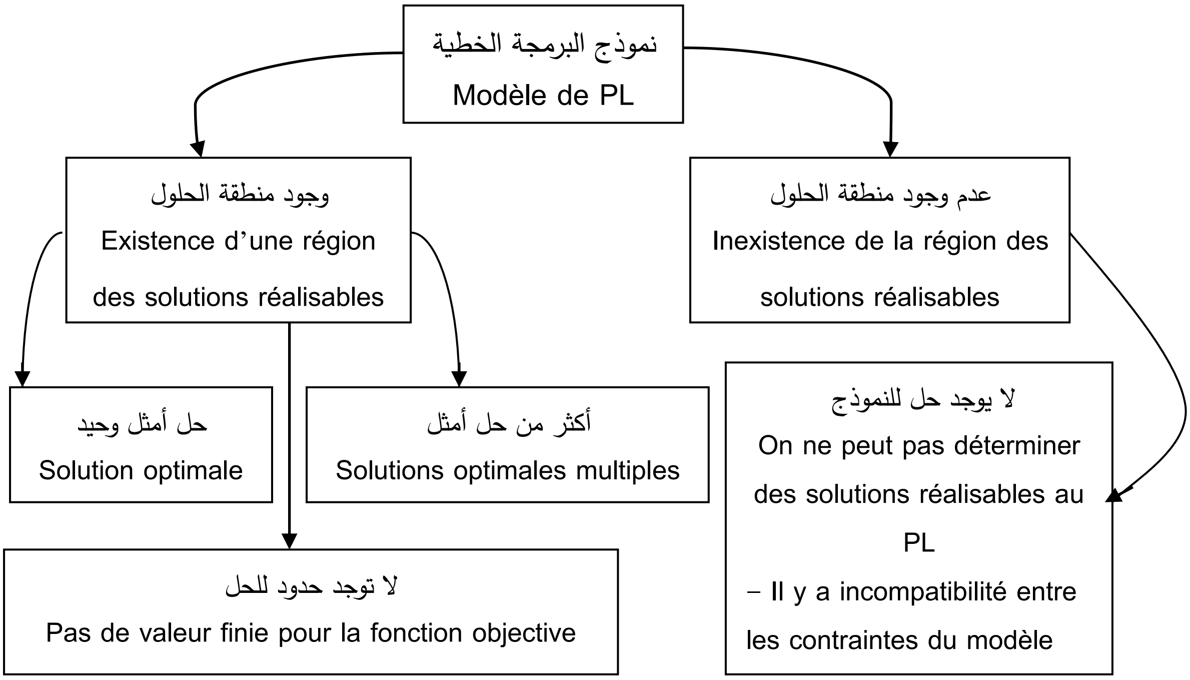
$$Max : Z = x_1 + 3x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$



النقاط الطرفية	x_1	x_2	Z
A	0	4	12
B	3	4	15
C	10	5/3	15
D	10	0	10

عند البحث عن القيمة العظمى لدالة الهدف نجد أنها في النقطة B و C ومنه فالحل الأمثل ليس نقطة ولكن قطعة مستقيمة [B,C] وكل المتغيرات x_1 , x_2 التي تنتمي إلى [B,C] تعطينا $Z = 15$.



الحالات الخاصة في البرمجة الخطية[1]

2. طريقة السمبليكس:

طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول كما تسمى أحيانا سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي إثنين أو أكثر .

1.2. الصيغة القانونية للبرنامج الخطي:

أ. **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي كالآتي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم.
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

ب. **حالة التدنئة:**

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة.
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.

[1] Gérald Baillageon, Programmation Linéaire Appliquée : outils d'optimisation et d'aide à la décision, édition SMG, Canada, 1996, p 50.

- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

ج. **الصيغة المختلطة:**

- دالة الهدف إما في حالة تدنئة أو حالة تعظيم.
- القيود مختلطة.

مثال1:

$$Max : Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.2. إيجاد الصيغة النموذجية: تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي بطريقة السمبليكس إذ يجري تحويل أي صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية.

لإيجاد الصيغة النموذجية في حالة كون القيد عبارة عن متراجحة لا بد من إدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود إلى معادلات.

تسمى هذه المتغيرات بمتغيرات الفجوة لأنها تسد الفرق الموجود بين طرفي المتراجحة.

ويتم ذلك حسب الحالات كما يلي:[1]

أ. **الحالة الأولى:** إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

لتحويل القيد إلى معادلة متساوية نضيف إلى الطرف الأيسر متغيرة صورية تسمى متغيرة الفجوة نرمز لها X_j^e حيث **j** ترتيب المتغيرة و **e** ترمز إلى الفجوة **écart** و عليه يصبح القيد أعلاه عبارة عن معادلة:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x^e_{n+1} = b_m$$

حيث x^e_{n+1} أضيفت إلى الطرف الأيسر لترجحه فيصبح الطرف الأيسر مساويا للطرف الأيمن، وبمعنى آخر أضيفت لتغلق الفجوة بين الطرفين.

[1] Mustapha Nabil ," recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises", Dunod, France, 1985 , p 31 .

وتمثل متغيرات الفجوة الطاقات غير المستعملة أو العاطلة، و هي متغيرات يجب أن تكون أيضا غير سالبة.

ونشير أنه عند إدخال متغيرة الفجوة إلى القيد فإنه ينبغي إدخالها أيضا على دالة الهدف لكن بمعامل يساوي الصفر على اعتبار أنها خارج النظام.

مثال2:

أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج التالي:

$$\text{Max} : Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

كل القيود عبارة عن متراجحات و بالتالي نضيف إلى كل منها متغيرة للفجوة:

$$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \mathbf{x_4^e} = 10$$

$$x_1 + 3x_3 + \mathbf{x_5^e} = 7$$

$$x_1 + 17x_2 + 15x_3 + \mathbf{x_6^e} = 25$$

نلاحظ أننا ميزنا بين متغيرات الفجوة المضافة فأعطيناها ترتيبا متزايدا و مغايرا للمتغيرات الحقيقية، وهي غالبا غير متساوية لعدم تساوي الطاقات غير المستعملة في كل قيد.

وعليه يصبح البرنامج بالصيغة القانونية على النحو التالي:

$$\text{Max} : Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \mathbf{x_4^e} = 10 \\ x_1 + 3x_3 + \mathbf{x_5^e} = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + \mathbf{x_6^e} = 25 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ldots x_6^e \geq 0 \end{cases}$$

ويجب أن تضاف متغيرات الفجوة بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^e & x_5^e & x_6^e \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 17 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأول. و تعتبر أولى خطوات البحث عن الحل الأمثل بطريقة سمبليكس.

ب. الحالة الثانية: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

لتحويل القيد إلى معادلة متساوية نطرح من الطرف الأيسر متغيرة صورية هي متغيرة الفجوة.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x^e_{n+1} = b_m$$

يلاحظ أن معامل متغيرة الفجوة يأخذ إشارة سالبة و بالتالي فهو لا يتيح لنا إمكانية الحصول على مصفوفة أحادية. لذلك يتم الاستعانة بمتغيرات أخرى تسمى المتغيرات الاصطناعية و يفترض أن تكون قيمتها معدومة و معاملها يساوي +1. و بالتالي فهي مجرد متغيرات مساعدة و نميزها عن متغيرات الفجوة بالحرف a (artificielle).

أما دالة الهدف فتضاف إليها متغيرات الفجوة بمعاملات صفرية أما المتغيرات الاصطناعية فتضاف إليها على أن تأخذ معاملات (يفترض) بإشارة سالبة نرمز لها ب M إذا كانت دالة الهدف في حالة تعظيم وبإشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف في حالة تدنئة.

مثال3: أوجد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج التالي:

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نكتب القيود على الشكل التالي:

$$7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14 \qquad \dots (1)$$
$$8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16 \qquad \dots (2)$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10 \qquad \dots (3)$$

أما دالة الهدف فنكتب كما يلي:

$$\text{Max}: Z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a$$

أو

$$Max : Z = 20x_1 + 15x_2\ Mx_4^a - Mx_7^a$$

و تكون مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج كما يلي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^a & x_5^e & x_6^e & x_7^a \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن هذه المصفوفة أنها تحتوي على مصفوفة أحادية (الأعمدة 4، 5، 7) و هو مبرر التحويلات التي تم إجرائها على النظام.

ج. **إيجاد الحل في حالة التعظيم:** نتبع الخطوات التالية:[1]

- نبحث عن الصيغة النموذجية، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.
- نرتب البيانات في جدول يسمى جدول الحل الأساسي الأول تكون فيه متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس "رئيسية" أو متغيرات داخل الأساس أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس و تكون دالة الهدف معدومة.

فإذا كان البرنامج الخطي على النحو:

$$Max : Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \le b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \le b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 \le b_3 \\ x_1\ ,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

فإن الصيغة النموذجية هي:

$$Max : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + x_3^e = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + x_4^e = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + x_5^e = b_3 \\ x_1\ ,\ x_2,\ x_3^e,\ x_4^e,\ x_5^e \ge 0 \end{cases}$$

[1] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص 43.

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

		X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	ß	
متغيرات الأساس	X_3^e	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1	عمود الثوابت
	X_4^e	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2	
	X_5^e	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3	
	AZ	C_1	C_2	0	0	0	0	قيمة الدالة ◄

انطلاقا من الجدول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني و ذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك عنصر الإرتكاز 0

المتغيرة التي يدخل الأساس هي التي يكون لها أكبر معامل في الدالة الاقتصادية و يسمى العمود الذي تنتمي إليه هذه المتغيرة بعمود عنصر الارتكاز (أو العمود الأمثل).

المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز، يسمى سطر عنصر الارتكاز.

عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

مثال4: أوجد حل للبرنامج الخطي التالي:

Max : $Z = 100x_1 + 60x_2$

$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نوجد أولا الصيغة النموذجية و هي: Max : $Z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$

$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3^e = 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_4^e = 108 \\ 8x_1 + 6x_2 + 0x_5^e = 96 \\ x_1 , x_2 \dots x_5^e \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	ß	النسبة
x_3^e	8	2	1	0	0	40	5
x_4^e	6	9	0	1	0	108	18
x_5^e	8	6	0	0	1	96	12
ΔZ	100	60	0	0	0	0	

- **المتغيرة التي تدخل الأساس:** هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر الدالة الاقتصادية و بالتالي فهي المقابل للقيمة 100 أي x_1 .
- **المتغيرة التي تخرج من الأساس:** هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين النسب الحاصلة من جراء تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز و هي 5 و عليه المتغيرة التي تخرج من الأساس هي X_3^e .
- و يكون عنصر الارتكاز هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز أي هو القيمة 8.
- نقسم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز فيصبح هذا السطر بالترتيب كما يلي:

1 1/4 1/8 0 0 5

يتحول عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي أي أن قيمة عنصر الارتكاز تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه أما بقية عناصر العمود فتتحول إلى أصفار.

بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس تبقى أحادية.

بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات.

مثال5: القيمة 9 في الجدول تحول على النحو التالي:

$$\frac{8X9-2X6}{8}=\frac{15}{2}$$

القيمة 96 في عمود الثوابت $\frac{8X96-40X8}{8}=56$

القيمة 0 التي تغبر عن قيمة الدالة الاقتصادية: $\frac{8\times0-40\times100}{8}=-500$

و بالمثل تحسب بقية العناصر و يصبح الجدول كالتالي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	ß	النسبة
X_3^e	1	1/4	1/8	0	0	5	20
X_4^e	0	15/2	−3/4	1	0	−78	10.4
X_5^e	0	4	−1	0	1	56	14
AZ	0	35	−25/2	0	0	−500	

يلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية تحسنت فانتقلت قيمتها من 0 إلى 500 كما دخلت متغيرة حقيقية إلى الأساس و أصبحت قيم المتغيرات كما يلي:

$$X_1 = 5$$

$$X_4^e = 78$$

$$X_5^e = 56$$

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	ß
X_1	1	0	3/20	−1/30	0	12/5
X_2	0	1	−1/10	2/15	0	52/5
X_5^e	0	0	−3/15	−8/15	1	72/5
AZ	0	0	−9	−14/3	0	−864

كل معاملات الدالة الاقتصادية أي السطر الأخير أصبحت سالبة أو معدومة و بالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل و تكون النتائج المحصل عليها هي:

$$X_1 = 12/5 = 2,4$$

$$X_2 = 52/5 = 10,4$$

$$X_5^e = 72/5 = 14,4$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

و نلاحظ أن الدالة الاقتصادية تحسنت و انتقلت قيمتها من 500 إلى 864 و يمكن إثبات ذلك بالتعويض في الدالة:

$$Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$= 100 \times 12/5 + 60 \times 52/5$$

$$= 864$$

و بالتالي فإن قيم المتغيرات التي تجعل الدالة في أعظم قيمة لها هي:

$$X_1 = 2,4$$

$$X_2 = 10,4$$

كما أن هذه النتائج تحقق القيدين الأول و الثاني تماما، أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة عاطلة قيمتها 14,4 و تعبر عنها متغيرة الفجوة $x_5^e = 14,4$ كما يظهر في الجدول.

و القيمة العظمى للدالة الاقتصادية هي: $Z = 864$

د. ايجاد الحل في حالة التدنئة: نتبع الطريقة التالية:[1]

- نبحث عن الصيغة النموذجية، حيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.
- نرتب البيانات في جدول الحل الأساسي الأول تكون فيه متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس في حالة ما إذا كانت معاملاتها +1 أو تكون المتغيرات الاصطناعية هي متغيرات أساس و هي الحالة الأكثر مصادفة، أما المتغيرات الحقيقية نعتبرها متغيرات خارج الأساس. و تكون أيضا قيمة الدالة معدومة و ينبغي إدخال تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية منها و نوضح ذلك كما يلي:

لدينا البرنامج الخطي:

$$Min : Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \geq b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \geq b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \geq b_3 \\ x_1 \,,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن الصيغة النموذجية هي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3 \\ x_1 \,,\, x_2, \ldots x_8^a \geq 0 \end{cases}$$

من القيود المعدلة نستخرج قيم المتغيرات الاص
طناعية:

$$X_4^a = b_1 - a_{11}\, x_1 - a_{12}\, x_2 + x_3^e$$
$$X_6^a = b_2 - a_{21}\, x_1 - a_{22}\, x_2 + x_5^e$$
$$X_8^a = b_3 - a_{31}\, x_1 - a_{32}\, x_2 + x_7^e$$

نعوض قيم هذه المتغيرات في الدالة الاقتصادية:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

[1] Gerard Desbazeille, Exercices et problèmes de recherche opérationnelle, DUNOD, Paris, 1972, p 37.

فتصبح على الشكل:

$$Z=[c_1-(a_{11}+a_{21}+a_{31})M]x_1+[c_2-(a_{12}+a_{22}+a_{32})M]x_2+Mx_3^e+Mx_5^e+Mx_7^e+M(b_1+b_2+b_3)$$

بمساواة الدالة إلى الصفر و هي نقطة الانطلاق دائما نجد:

$$[c_1-(a_{11}+a_{21}+a_{31})M]x_1+[c_2-(a_{12}+a_{22}+a_{32})M]x_2+Mx_3^e+Mx_5^e+Mx_7^e=-M(b_1+b_2+b_3)$$

و يكون الجدول الأساسي الأول كما يلي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	ß
X_1	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
X_2	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
X_5^e	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3
AZ	$c_1-(a_{11}+a_{21}+a_{31})M$	$c_2-(a_{12}+a_{22}+a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-M(b_1+b_2+b_3)$

مثال6:

$$\text{Min : } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{S/C}\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- يتم إيجاد الصيغة النموذجية و تصبح القيود كما يلي.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 6$$

$$6x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a = 6$$

$$x_2 - x_7^e + x_8^a = 2$$

$$x_1 , x_2 \dots x_8^a \geq 0$$

- كما تصبح الدالة الاقتصادية كما يلي:

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

أو

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

- للإشارة فإن المتغيرات الاصطناعية تأخذ المعامل M بإشارة موجبة و يفترض أن يكون كبيرا جدا و هذا حتى تكون المتغيرات المضروبة فيه و التي هي مجرد متغيرات مساعدة، خارج نظام الحل الأساسي النهائي لكونها أولى المتغيرات المرشحة للخروج من الأساس كون معاملاتها كبيرة جدا.
- نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية من تشكيلة المعادلات:

$$x_4^a = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = 6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e$$
$$x_8^a = 2 - x_2 + x_7^e$$

- ثم نعوضها في الدالة:

$$\text{Min } Z=10x_1 30x_2+M(6 - 3x_1-2x_2+x_3^e)+M(6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e)+M(2 - x_2+x_7^e)$$

- بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد:

$$(10-9M)x_1+(30-4M)x_2+Mx_3^e+Mx_5^e+Mx_7^e= - 14M$$

- و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	ß	النسبة
x_4^a	3	2	−1	1	0	0	0	0	6	2
x_6^a	6	1	0	0	−1	1	0	0	6	1
x_8^a	0	1	0	0	0	0	−1	1	2	−
ΔZ	10−9M	30−4M	M	0	M	0	M	0	− 14M	

- عكس حالة التعظيم فإن في حالة التدنئة تكون المتغيرة التي تدخل الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة سالبة وهي $10 - 9M$. أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المقابلة لأصغر نسبة بين عمود الثوابت وعمود عنصر الارتكاز وهي X_6^a .

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	ß	النسبة
x_4^a	0	3/2	−1	1	1/2	/	0	0	3	2
x_1	1	1/6	0	0	−1/6	/	0	0	1	−
x_8^a	0	1	0	0	0	/	−1	1	2	2
ΔZ	0	(170−15M)/6	M	0	(10−3M)/6	/	M	0	− 5M−10	

- نلاحظ أن عناصر عمود المتغيرة الاصطناعية التي تخرج من الأساس X6a لم يتم حسابها وتم الاستغناء عنها لأن لا يمكن أن ندخلها إلى الأساس مرة ثانية.

- نلاحظ أن المعاملات في السطر الأخير ليست كلها موجبة، لذلك فالمتغيرة المرشحة للدخول إلى الأساس هي المقابلة للمعامل $(170-15M)/6$ وهي X_2 ، أما المتغيرة التي تخرج فهي إما x_4^a أو x_8^a. وفي هذه الحالة نأخذ واحدة على الاختيار لا على التعيين.

نفرض أن المتغيرة التي تخرج هي X_4^a

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	ß
X_4^a	0	1	−2/3	/	1/3	/	0	0	2
X_1	1	0	1/9	/	−2/9	/	0	0	2/3
X_8^a	0	0	2/3	/	−1/3	/	−1	1	P=0
AZ	0	0	(−6M+170)/9	/	(3M−70)/9	/	M	0	− 200/3

- بنفس الطريقة فإن المتغيرة التي تدخل الأساس هي X_3^e والتي تخرج من الأساس هي X_8^a .
- نلاحظ أن قيمة X_8^a المقابلة هي 0 وقد فرضناها p وهي قيمة بجوار 0 وهذا لتسهيل عملية الحساب على أن نأخذ قيمتها الحقيقية عند نهاية الحل.

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	ß
X_4^a	0	1	0	/	0	/	−1	/	2
X_1	1	0	0	/	−1/6	/	1/6	/	2/3
X_8^a	0	0	1	/	−1/2	/	−3/2	/	P=0
AZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	− 200/3

- بما أن كل عناصر السطر الأخير أصبحت غير سالبة فنكون حصلنا على جدول الحل الأمثل وتكون قيم المتغيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي:

$x_2=2 \quad x_1=2/3$

- أما بقية المتغيرات فهي معدومة.
- قيمة الدالة الاقتصادية هي $Z=200/3$
- للتحقق من مدى احترام القيود، نعوض في كل قيد:

$3X_1+2X_2\geq 6 \rightarrow 3x\ 2/3 + 2x2 = 6$

أي أن القيد الأول محقق تماما وهو ما يؤكد أن متغيرة الفجوة X_3^e قيمتها معدومة

$X_1+X_2 \geq 6 \rightarrow 6x\ 2/3 +2= 6$

وهو قيد محقق تماما.

ويلاحظ أن القيد الثالث محقق تماما.

3. حالات خاصة:

أثناء سيرورة الحل قد نصادف عدة حالات خاصة منها:

1.3. انعدام وجود حل أمثل:

في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنئة، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير اصطناعي واحد أو أكثر، وهذا ما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2.3. عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الارتكاز أقل أو تساوي صفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت وعناصر عمود الارتكاز.

3.3. الانحلال:

نكون أمام حالة الانحلالية عندما نجد متغيرين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس، أو متغيرين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، وفي الحالتين نختار واحدة على الاختيار لا على التعيين.

الوحدة الرابعة

الثنائية أو البرنامج المرافق

1. مفهوم البرنامج المرافق:

لكل مشكلة برنامج رياضي تمت صياغته بشكل أولي يقابله برنامج رياضي مقابل، هذا الأخير له عدة فوائد في مجال بحوث العمليات إذ يساعد على التوصل إلى الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التي يصعب التوصل إليه وفق النموذج الأولي كون بعض المتغيرات ذات قيمة سالبة[1]، كما يساعد إلى إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى حلول بطريقة مختصرة في حالة إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية في تلك المشكلة أو إضافة قيود جديدة للمشكلة.[2]

ولكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات $y_1, y_2, y_3 \dots y_m$ مشتق منه.

– إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية:

$$\text{Max} : Z = C`x$$

$$\text{S/C} \begin{cases} A`x \leq B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

– فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$\text{Min} : Z = B`y$$

$$\text{S/C} \begin{cases} A`y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases}$$

و تفصيلا إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية:[3]

$$\text{Max} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \;\; + x_4^e = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \;\; + x_5^e = b_3 \\ x_1\, , x_2, x_3^e, x_4^e, x_5^e \geq \;\; 0 \end{cases}$$

---

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 81.

[2] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، مرجع سابق، ص 82.

[3] Hamdy, A. Taha, operation reaserch : an introduction, 4 edition, Macmillan publishing Company, New York, 1989, p23.

- فإن برنامجه الثنائي هو:

$$\text{Min} : Z = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1 \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \geq c_2 \\ a_{13}\, y_1 + a_{23}\, y_2 \geq c_3 \\ y_1 , y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- لاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي هو بعدد القيود في البرنامج الأولي.

- لاحظ أن هذين البرنامجين متناظرين.

مثال1:[1]

من البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min} : Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$S/C \begin{cases} 5\, x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2\, x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- أوجد جدول الحل الأمثل.

2- أوجد البرنامج الثنائي ثم أوجد جدول حله الأمثل.

3- قارن نتائج الحل في البرنامجين، ماذا تستنتج؟

الحل:

1- ايجاد الحل الأمثل:

الصيغة النموذجية هي:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 10x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a$$

$$S/C \begin{cases} 5\, x_1 + x_2 + x_3^e + x_4^a = 10 \\ -2\, x_1 + 7x_2 - x_5^e + x_{46}^a = 14 \\ x_1 , x_2 \ldots x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 84.

من الصيغة النموذجية نستنتج:

$$X_4^a = 10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e$$
$$X_6^a = 14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

بالتعويض في دالة الهدف:

$$(3-3M)x_1 + (10-8M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M$$

وعليه يكون جدول الحل الأساسي الأول:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	ß
X_4^a	5	1	−1	1	0	1	10
X_6^a	−2	7	0	0	−1	1	14
AZ	3–3M	10–8M	M	0	M	0	− 24M

المتغيرة المرشحة للدخول هي x_2 و المرشحة للخروج هي x_6^a و عنصر الارتكاز هو 7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	ß
X_4^a	37/7	0	−1	1	1/7	/	8
X_2	−2/7	1	0	0	−1/7	/	2
AZ	(41−37M)/7	0	M	0	(10−M)/7	/	− 8M−20

الحل في الجدول الثاني غير أمثل لأن ليس كل عناصر الصف الأخير موجبة.

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي x_1 و المرشحة للخروج هي x_4^a ، و عنصر الارتكاز 37/7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	ß
X_1	1	0	−7/37	/	1/37	/	56/37
X_2	0	1	0−2/37	/	−35/259	/	90/37
AZ	0	0	41/37	0/	37/47	/	− 1068/37

حل البرنامج الثنائي

كل معاملات الدالة أصبحت موجبة و بالتالي فإن هذا الحل هو الأمثل.

$Z = 1068/37$ $\qquad x_2 = 90/37$ $\qquad x_1 = 56/37$

2− ايجاد البرنامج الثنائي:

بتطبيق قواعد التحويل فإن البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max } Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$S/C \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 \le 3 \\ y_1 + 7y_2 \le 10 \\ y_1 , y_2 \ge 0 \end{cases}$$

حل البرنامج الثنائي: الصيغة النموذجية هي:

$$Max\ Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$S/C \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 + y_3^e = 3 \\ y_1 + 7y_2 + y_4^e = 10 \\ y_1 , y_2 \dots y_4^e \ge 0 \end{cases}$$

و منه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	ß
y_3^e	5	−2	1	0	3
Y_4^e	1	$\boxed{7}$	0	1	10
AZ	10	14	0	0	0

المتغيرة التي تدخل الأساس هي y_2 و التي تخرج منه هي y_4^e و عنصر الارتكاز هو 7 و جدول الحل الأساسي الثاني هو:

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	ß
y_3^e	37/7	0	1	2/7	41/7
Y_2	1/7	1	0	1/7	10/7
AZ	8	0	0	−2	−20

هذا الحل غير أمثل، المتغيرة التي تدخل هي y_1 و المتغيرة التي تخرج هي y_3^e و عنصر الارتكاز هو 37/7.

و يكون جدول الحل الأمثل هو:

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	ß
y_1	1	0	7/37	2/37	41/37
y_2	0	1	−1/37	35/259	47/37
AZ	0	0	−56/37	−90/37	−1068/37

حل البرنامج الأولي:

كل معاملات الدالة أصبحت أقل أو تساوي الصفر لذلك فالحل أصبح أمثليا حيث:

$y_1 = 41/37 \qquad y_2 = 47/37 \qquad Z = 1068/37$

3- المقارنة و الاستنتاج:

من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا: $x_1 = 56/37$ و هي قيمة تقابل y_3^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

$X_2 = 90/37$ و هي قيمة تقابل y_4^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بقية المتغيرات معدومة.

وإذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي فإننا نجد أن:

X_3^e تقابلها القيمة $41/37$ و هي قيمة y_1 في البرنامج الثنائي.

X_5^e تقابلها القيمة $41/37$ و هي قيمة y_2 في البرنامج الثنائي.

ملاحظة:

إن هذا التقابل يتم على وجه الترتيب مع إهمال الإشارة السالبة.

كما أن قيمة الدالة الاقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين.

و النتيجة هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، و جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

2. ثنائية الصيغ المختلطة:[1]

قاعدة1: إذا كان القيد في المسألة الأولية من الشكل $\sum_{j=1} a_{ij} x_j = b_1$ فإن المتغير y_i المرافق له في المسألة الثنائية يكون حرا أي$(-\infty, +\infty)$ $Y_i \in$ بمعنى مقابل كل متغير فجوة معدوم في قيد المسألة الأولية، يقابله متغير أساس حر في المسألة الثنائية.

مثال2:

$$\text{Max } Z = 100y_1 - 50y_2 + 20y_3$$

$$S/C \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 + y_3 \le 9 \\ 5y_1 - y_2 + y_3 \le 2 \\ 10y_1 + 7y_3 = 4 \\ y_1 - y_2 + 7y_3 \le 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \forall \end{cases}$$

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص89.

$$\text{Min } Z = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \geq 100 \\ -4x_1 - x_2 - x_4 \geq -50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\ \forall,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

قاعدة2: إذا كان أحد المتغيرات x_i في المسألة الأولية حرا أي $X_i \in (-\infty, +\infty)$ فإن القيد رقم i المقابل في المسألة الثنائية يكون على الشكل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = C_j$ بمعنى مقابل كل متغير أساس حر في المسألة الأولية متغير فجوة معدوم في المسألة الثنائية.

مثال3:

البرنامج الثنائي: $\text{Max } Z = -30y_1 - 2y_2$

$$S/C \begin{cases} 5y_1 - y_2 \leq -1 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

يحول إلى الصيغة التالية:

$$\text{Min } Z = -x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ \forall \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = -x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \leq 30 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ \forall \end{cases}$$

قاعدة3: إذا كان القيد في المسألة الأولية حالة التعظيم على الشكل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ نضرب الطرفين في الإشارة (−) فيصبح القيد على الشكل $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$ و يكون المتغير y_i المرافق في الثنائية غير سالب أي $y_i \geq 0$.

مثال4:

البرنامج الثنائي:

$$\text{Max } Z = 6y_1 + 14y_2 - 2y_3$$

$$S/C \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 30 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

يحول إلى الصيغة التالية:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 32x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 14 \\ -3x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ \forall \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 32x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. نظريات:

- ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.
- إذا كان للبرنامج الأولي حل أمثل، فإن قيمة دالة الهدف في البرنامجين تكون متساوية.
- إذا كان البرنامج الأولي ليس له حل، فإن البرنامج الثنائي ليس له حل.

تمرين: أوجد ثنائيات البرامج التالية:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$S/C \begin{cases} -x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \ \forall \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = x_1 - 3 + 7x_2 + 2x_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

4. عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات: يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن خوارزمية الحل بطريقة السمبلكس تشترط عدم سالبية كل المتغيرات، لذا يجب التحايل رياضيا، بحيث ندخل إلى النظام متغيرات كلها غير سالبة و ذلك وفق المعالجات التالية:

1.4. إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر: أي: $x_j \leq 0$ في هذه يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض: $x_j = -x_j'$

$$x_j' \geq 0$$

حيث:

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نتبع خوارزمية الحل ونوجد الحل الأمثل بشكل عادي، وحينئذ نحول المتغير X إلى أصله وفق التحويل الأولي.

2.4. إذا كان أحد المتغيرات حرا : أي يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت في الإتجاه الموجب أو السالب، أي : $x_j \in (-\infty, +\infty)$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$X_j = x_j' - x_j''$ حيث: $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$

أي أن x_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث:

- إذاكان x_j موجبا يكون: $x_j' > x_j''$
- إذاكان x_j سالبا يكون: $x_j' < x_j''$
- إذاكان x_j معدوما يكون: $x_j' = x_j''$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نوجد الحل الأمثل، ونقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي وفق صيغة التحويل أعلاه.

مثال5: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max : Z = 3x_1 - 3x_2$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بما أن x_2 سالب، لذلك نجري التحويل التالي:

نفرض أن $x_2 = -x_2'$ حيث: $x_2' \geq 0$ ، بالتعويض في البرنامج أعلاه نحصل على البرنامج المحور التالي:

$$Max: Z = 3x_1 - 3x_2'$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 - 6x_2' \leq 10 \\ 2x_1 - 2x_2' \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2' \geq 0 \end{cases}$$

و تكون الصيغة النموذجية للبرنامج هي:

$$Max: Z = 3x_1 - 3x_2'$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 - 6x_2' + x_3^e = 10 \\ 2x_1 - 2x_2' + x_4^e = 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2' \geq 0 \ , x_3^e \geq 0 \ , x_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	$x_2´$	x_3^e	x_4^e	ß
x_3^e	5	-6	1	0	**10**
x_4^e	2	-2	0	1	**14**
ΔZ	**3**	**−3**	**0**	**0**	**0**

عن طريق خوارزمية السمبلكس نلاحظ أن x_1 مرشحة للدخول إلى الأساس، و x_3^e مرشحة للخروج من الأساس، و عليه يكون جدول الحل الأساسي الثاني على النحو:

	x_1	$x_2´$	x_3^e	x_4^e	ß
x_1	1	-6/5	1/5	0	**2**
$x_2´$	0	2/5	−2/5	1	**10**
ΔZ	**0**	**3/5**	**−3/5**	**0**	**−6**

من الجدول أعلاه نجد أن $x_2´$ مرشحة للدخول و أ x_4^e مرشحة للخروج، و عليه يكون جدول الحل الأمثل هو:

	x_1	$x_2´$	x_3^e	x_4^e	ß
x_1	1	0	−1	3	**32**
$x_2´$	0	1	−1	5/2	**25**
ΔZ	**0**	**0**	**0**	**−3/2**	**−21**

من هذا الجدول نجد:

$$x_1 = 32$$

$$x_2´ = 25$$

$$x_3^e = 0$$

$$x_4^e = 0$$

و قيمة الدالة الإقتصادية هي $Z = 21$

بعد إيجاد جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 على أساس التحويل المفترض مع بداية الحل و هو

$x_2 = -x_2´$

بما أن: $x_2´ = 25$

لذلك فإن: $x_2 = -25$

و حيث أن الدالة الإقتصادية الأصلية هي:

$Z=3x_1+3x_2$

بالتعويض نجد:

$$Z = 3(32) + 3(-25) = 21$$

أي أن قيمة الدالة الإقتصادية تبقى هي نفسها بدون تغيير.

مثال6: أوجد جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \ \forall \end{cases}$$

في هذه الحالة x_2 حر يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت موجبة أو سالبة. لذلك نفترض أن هذه المتغيرة عبارة عن الفرق بين متغيرتين كلاهما موجب، أي:

x_2 $x_2' - x_2''$ مع $x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$

بالتعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$\text{Max: } Z = 3x_1 + 10(x_2' - x_2'')$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 6(x_2' - x_2'') \leq 10 \\ 2x_1 + 7(x_2' - x_2'') \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2' \geq 0 \ , x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

بفك الأقواس نحصل على البرنامج المعدل التالي:

$$\text{Max: } Z = 3x, + 10x_2' - 10x_2''$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2' \geq 0 \ , x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

بإدخال متغيرات الفجوة نحصل على الصيغة النموذجية التالية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 10x_2' - 10x_2''$$

$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' + x_3^e = 10 \\ 2x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + x_4^e = 14 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2' \geq 0 \ , x_2'' \geq 0 \ , x_3^e \geq 0 \ , x_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يكون جدول الحل الأساسي الأول هو:

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	ß
x_3^e	5	6	-6	1	0	**10**
x_4^e	2	7	-7	0	1	**14**
ΔZ	**3**	**10**	**−10**	**0**	**0**	**0**

و يتم إيجاد الحل بطريقة السمبلكس و هذا ما يظهره الجدول التالي :

	x_1	x_2'	x_2''	x_3^e	x_4^e	ß
X_2'	5/6	1	-1	1/6	0	**10/6**
x_4^e	-23/6	0	0	−7/6	1	**7/3**
ΔZ	**−16/3**	**0**	**0**	**−10/6**	**0**	**−50/3**

حيث أن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 0$$
$$x_2' = 10/6$$
$$x_2'' = 0$$
$$x_3^e = 0$$
$$x_4^e = 7/3$$

و أعظم قيمة للدالة الاقتصادية هي: $Z= 50/3$

بعد إيجاد قيم المتغيرتين x_2' و x_2'' في جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 و هي عبارة عن الفرق بينهما حسب معادلة التحويل أعلاه و هي: $x_2 = x_2' - x_2''$ و عليه فإن:

$$x_2 = 10/6 - 0 = 10/6$$

و هي قيمة موجبة هنا، و يمكن أن تكون سالبة فيما لو كانت x_2'' أكبر من x_2'.

5. حالات أخرى:

أثناء سيرورة الحل قد نصادف عدة حالات خاصة، منها:

1.5. انعدام وجود حل أمثل:[1] في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنئة، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير اصطناعي واحد أو أكثر، و هذا ما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2.5. عدم محدودية الحل: و هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الارتكاز أقل أو تساوي الصفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على

[1] صالح مهدي و آخرون، مرجع سابق، ص184.

المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت و عناصر عمود عنصر الارتكاز.

3.5. الانحلال:[1] نكون أمام حالة الانحلالية عندما نجد متغيرين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. و في الحالتين نختار واحدة لا على التعيين.

4.5. تعدد الحلول المثلى: تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم طريقة السمبليكس و ذلك عن طريق إلقاء نظرة على الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في الصف (ΔZ) مساوي للصفر رغم عدم وجودها في مزيج الحل، فهذا يعني وجود أكثر من حل أمثل بديل.[2]

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، **"بحوث العمليات و الأساليب الكمية نظرية و تطبيق"**، دار جليس الزمان، عمان، 2008، ص 93-95.

[2] صالح مهدي و آخرون، مرجع سابق، ص187.

الوحدة الخامسة

برمجة الأعداد الصحيحة

بعض المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية لا يمكن تجزئتها، وإلا فقدت صفتها. فعندما نكون بصدد تحديد كميات الأجهزة الواجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20,4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة. و في البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمها بالفاصلة وهو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل، فنتج ما يسمى **ببرمجة الأعداد الصحيحة.**[1]

وهناك ثلاثة أنواع من مسائل البرمجة الصحيحة:[2]

- المسائل التي يكون فيها جميع المتغيرات تأخذ فقط الرقمين (0،1) فتكون (1) للمتغير الداخل في النموذج و (0) للمتغير الغير داخل في النموذج.
- مسائل البرمجة الخطية الصحيحة المختلطة: حيث يأخذ جزء من المتغيرات قيما صحيحة بينما الجزء الآخر قيما حقيقية.
- البرمجة بأعداد صحيحة كاملة: حيث تأخذ جميع المتغيرات في نموذج البرمجة الخطية قيما صحيحة فقط.

إن برمجة الأعداد الصحيحة مفيدة على وجه الخصوص في المشاكل التي تتضمن قرارات منطقية، مثل: نعم–لا، بناء–عدم بناء أو استثمار– عدم استثمار، وهذه عبارة عن قرارات منطقية تسمح فقط بقيمتين اثنتين.[3]

وهناك مرحلتين للبحث عن الأعداد الصحيحة:

1. **المرحلة الأولى:** إيجاد الحل الأمثل وفق البرنـــامج الأصلي، إذا حصل حل أمثل متغيراته لا تحمل قيما صحيحة ننتقل إلى المرحلة الثانية.
2. **المرحلة الثانية:** تسمى بمرحلة التفريع، و فيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي، بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، و تستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل متغيراته تأخذ قيما صحيحة.

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو x_j حيث يأخذ قيمة غير صحيحة ولتكن b_i، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي: $b_{i1} < x_j < b_{i2}$

حيث b_{i1} و b_{i2} أعدادا صحيحة غير سالبة يتم اشتقاق قيدين جديدين هما:[4]

---

[1] محمد راتول ، مرجع سابق، ص 95.

[2] فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 165.

[3] https : //www.startimes.com/ ?t=22602302 consulté le 25/04/2023.

$x_j \leq b_{i1}$ و $x_j \geq b_{i2}$ ، ونضيف كل قيد منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف، و نأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدالة الاقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم و أقل قيمة للدالة الاقتصادية في حالة التدنئة، و إلا نستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الاقتصادية وهذا لغاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة..

مثال1: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$Max : Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$\boxed{1\text{-}5} \quad S/C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 0 \;\; , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

و هي صحيحة.

جدول الحل الأمثل للبرنامج 5-1 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	ß
x_1	1	5/2	1/4	**11/2**
ΔZ	**0**	**-48**	**-5**	**-110**

النتيجة: $x_1 = 11/2 = 5.5$ و $x_2=0$ و $Z=110$

يلاحظ أن x_1 هو قيمة غير صحيحة، و يمكن كتابتها كما يلي: $5 < x_1 < 6$

أي يمكن استنتاج قيدين الأول هو: $x_1 \leq 5$ و الثاني هو: $x_1 \geq 6$.

[4] Paul A. Jensen & Jonathan F. Bard, Operations Research, Edition John Wiley& Sons, 2003, p 185.

و عليه فإن البرنامج الأصلي يفرع إلى برنامجين الأول يتكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد الأول المستنتج و هو $x_1 \leq 5$ و الثاني أيضا يتكون من البرنامج الأصلي مضافا إليه القيد $x_2 \geq 6$، و هما:

البرنامج الأول

$$\text{Max } Z=20x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$$

وهي صحيحة

2-5

البرنامج الثاني

$$\text{Max } Z=20x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 6 \end{cases}$$

وهي صحيحة

3-5

نوجد الحل الأمثل لكل برنـــامج من البرنامجين:

جدول الحل الأمثل للبرنامج5−2 هو:

	x_1	x_2	x_3^e	X_4^e	ß
x_1	0	1	1/10	−4/10	**1/5**
x_2	1	0	0	1	**5**
ΔZ	**0**	**0**	**−1/5**	**−96/5**	**−502/5**

النتيجة: $x_1=5$ و $x_2=1/5=0.2$. و $Z=502/5$

بينما البرنامج 5−3 متناقض و ليـس لـه حل، لذلك يتم الاستغناء عنه.

من خـلال حل البرنامج5−2 وجدنا أن المتغيرة x_2 لا تأخذ قيمة صحيحة ويمكن كتابتها أيضا على الشكل: $0 < x_2 < 1$

و منه نستنتج القيدين الأول هو $x_2 \geq 1$ و الثاني $x_2 < 0$ هو و هو مرفوض لتناقضه مع شرط عدم السالبية.

لذلك فالبرنامجين الجديدين المتفرعــين عن البرنامج 5−2 هما:

$$\text{Max : } Z=20x_1 + 2x_2 \qquad \text{S/C} \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \qquad \boxed{4\text{-}5}$$

وهي صحيحة

$$\text{Max : } Z=20x_1 + 2x_2 \qquad \text{S/C} \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad \boxed{5\text{-}5}$$

وهي صحيحة

غير أن البرنامج 5−5 يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $x_2 \leq 0$ مرفوض ويتناقض مع شرط عدم السالبية.

أما جدول الحل الأمثل للبرنامج 5−4 فهو:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^e	ß
x_1	1	0	¼	0	10/4	/	**3**
x_4^e	0	0	−1/4	1	−10/4	/	**2**
x_2	0	1	0	0	−1	/	**1**
ΔZ	**0**	**0**	**−5**	**0**	**−48**	**/**	**−62**

النتيجة: $x_1 = 3$ و $x_2 = 1$ و $Z = 62$

يلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة، و بالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل **الحد الأسفل للمسألة**، و تكون كل الحلول الأخرى التي لم تعطي قيما صحيحة للمتغيرات ملغاة. و يكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي أي البرنـامج5−1، و هو يحققه بالكــامل ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في البرنامج الأصلي.

والخلاصة هي أنه إذا كــان الحل الأمثل للبرنامج الأصلي – حالة التعظيم– متغيراتـه ليست أعدادا صحيحة، فإنه يستمر التفريع حسب منهجية المثال السابق، حتى نحصل على حل أمثل متغيراته كلها أعدادا صحيحة، و يكون هذا الحل هو الحل الأسفل للمسألة، و كل البرامج المتفرعة الأخرى تصبح ملغاة، بما فيها البرامج التي أدت إلى حلول تتضمن أعدادا صحيحة لكن قيمة دالة هدفها المحصلة أقل من قيمة دالة الهدف لحل الحد الأسفل.

وفي حالة التدنئة فإن الطريقة هي نفسها، تتبع ما عدا أن حل البرنامج الأصلي يكون هو حل الحد الأسفل و حل البرنـامج النهائي الذي يتضمن أعدادا صحيحة يكون هو حل الحد الأعلى للمسألة.

الوحدة السادسة

تحليل الحساسية

Analyse de sensibilité

يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى التغير في دالة الهدف أو القيود حيث يبقى الحل مقبولا، أو هو دراسة التغير الحاصل في قيمة الحل الأمثل في حالة تغير معاملات المشكلة. [1] أو هي تحليل ما بعد الأمثلية.[2]

1. أهمية تحليل الحساسية:

يعتبر من المواضيع المهمة جداً لمتخذ القرار بسبب ديناميكية البيئة التي نعيش فيها ، حيث يعطي دراسة كاملة للمتغيرات التي تطرأ على كل المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي حيث يبقى بنا أكبر عائد أو أقل تكلفة.

حيث افترضنا سابقا أنه للوصول إلى الحل الأمثل في البرمجة الخطية يجب أن نثبت الأسعار سواء كانت المواد الأولية أو السلع المنتجة ، وكذلك معرفة تامة للمصادر المتاحة، لكن في الواقع إذا أنتجنا منتوجا وأردنا تسويقه فإن هناك عدة ظروف تؤثر منها ما يتعلق بالتطور التكنولوجي وحالة الاقتصاد من ركود و رواج ... ... في مثل هذه الحالات يشار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل سيتغير أو يبقى كما هو ؟ و إذا كان سيتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخرى بالقيم الجديدة للوصول إلى الحل الأمثل الجديد؟ هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخرى؟.

لذا فإن تحليل الحساسية يقيس درجة حساسية الحل الأمثل الحالي للتغير في القيم الواردة في المشكلة الأصلية، حيث يوفر جهد إعادة حل المشكلة مرة أخرى. وحساب هذه التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل المسألة مجددا وهذا بالاعتماد على جدول الحل الأمثل.[3]

ومنه نقوم بـ :

- دراسة التغيرات في معاملات دالة الهدف (الحدود الدنيا والقصوى لدالة الهدف).
- دراسة التغيرات في القيود(الحدود الدنيا والقصوى للقيود).

والنتائج التي يمكن أن تحدث من التغيرات هي:[4]

- إما أن يكون الحل الأمثل كما هو بدون أن يتغير.
- قد يبقى الحل الأمثل (قيمة دالة الهدف) كما هي ولكن قد تتغير قيمة المتغيرات بعضها أو كلها.

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 99-102.
[2] Hillier, Fredericks and Geral J. Lieberman, introduction to Operations research, Holden-day, inc. San Fransisco, 1987, p55.
[3] محمد عبد العال النعيمي، مرجع سابق، ص 118.
[4] نفس المرجع السابق، ص 119.

- قد يتغير الحل الأمثل بأكمله.

مثال1 : لدينا النموذج الرياضي التالي : $x_2 2Max : Z=3x_1 +$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن جدول حله الأمثل:

	x_1	x_2	x_3^e	X_4^e	ß
x_1	0	0	1/2	−1/2	**5/2**
x_2	1	1	−1/2	3/2	**15/2**
ΔZ	**0**	**0**	**−1/2**	**−3/2**	**22.5**

لحساب مدى التغير المسموح به في معاملات المتغيرات في دالة الهدف نتبع الخطوات التالية:

1- نفرض أن مقدار التغير في معامل المتغير الأول x_1 هو C_1، ومقدار التغير في معامل المتغير الثاني x_2 هو C_2 .

2- نقوم بتشكيل المتباينات للمتغير الأول x_1 بفرض أن قيمته دائما موجبة كالتالي:

* معامل x_3^e في $Z + C_1$ x معامل x_3^e في $x_1 \geq 0$

* معامل x_4^e في $Z + C_1$ x معامل x_4^e في $x_1 \geq 0$

و بنفس الطريقة للمتغير الثاني x_2 :

* معامل x_3^e في $Z + C_2$ x معامل x_3^e في $x_2 \geq 0$

* معامل x_4^e في $Z + C_2$ x معامل x_4^e في $x_2 \geq 0$

و بتطبيق ذلك على مثالنا تكون المتباينات للمتغير الأول x_1 هي :

$$+ ½ + C_1 \text{ x } ½ \geq 0 \quad \dots (1)$$

$$+ 3/2 + C_1 \text{ x } -½ \geq 0 \dots (2)$$

من (1) ينتج أن : $C_1 \geq -1$

من (2) ينتج أن : $C_1 \leq 3$

بدمج (1) و (2) يكون: $3 \geq C_1 \geq -1$

والتغيير في معامل x_1 يكون: $3-1 \leq x_1 \leq 3+3$

أي: $2 \leq x_1 \leq 6$

و متباينات x_2 تكون:

$$+ \frac{1}{2} + C_2 \times -\frac{1}{2} \geq 0 \quad \dots (3)$$

$$+ 3/2 + C_2 \times 3/2 \geq 0 \quad \dots (4)$$

من (3) ينتج أن : $C_2 \leq 1$

من (4) ينتج أن : $C_2 \geq -1$

بدمج (3) و (4) يكون: $+1 \geq C_2 \geq -1$

و التغيير في معامل x_2 يكون $2-1 \geq x_2 \geq 2+1$

أي: $1 \geq x_2 \geq 3$

أما لحساب مدى التغير المسموح به في ثوابت القيود نتبع الخطوات التالية:

1- نفرض أن مقدار التغير في الثابت الأول a_1 ، و مقدار التغير في الثابت الثاني a_2.

2- نقوم بتشكيل المتباينات للثابت الأول على النحو التالي:

ثابت x_1 + a_1 x معامل x_e^3 في $x_1 \geq 0$.

ثابت x_2 + a_1 x معامل x_e^3 في $x_2 \geq 0$.

و بنفس الطريقة للثابت الثاني:

ثابت x_1 + a_2 x معامل x_e^4 في $x_1 \geq 0$.

ثابت x_2 + a_2 x معامل x_e^4 في $x_2 \geq 0$.

و بتطبيق ذلك على مثالنا تكون المتباينات للثابت الأول هي:

$$a_1 \geq -5 \quad \Leftarrow \quad 5/2 + a_1 \times \frac{1}{2} \geq 0 \quad \dots (1)$$

$$a_1 \leq 15 \quad \Leftarrow \quad 15/2 + a_1 \times -\frac{1}{2} \geq 0 \quad \dots (2)$$

بدمج (1) و (2) يكون: $-5 \geq a_1 \geq 15$

و متباينات الثابت الثاني تكون:

$$a_2 \leq 5 \quad \Leftarrow \quad 5/2 + a_2 \times -\frac{1}{2} \geq 0 \quad \dots (3)$$

$$a_2 \geq -5 \quad \Leftarrow \quad 15/2 + a_2 \times 3/2 \geq 0 \quad \dots (4)$$

بدمج (3) و (4) يكون: $-5 \geq a_2 \geq 5$

الوحدة السابعة

مسائل النقل – تقليل التكاليف

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث العمليات، باعتبارها تهدف إلى الوصول إلى الأمثلية في وجود مجموعه من القيود. وخصوصا تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أو معنوي من مجموعة من المناطق إلى مناطق أخرى و في حدود كميات محددة ، أو البحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه. وتعود الجذور التاريخية لمشاكل النقل Transportation problems إلى عام 1942. [1]

كما وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم Hitchcok في سنة 1941، ، و قد نشر T.C Kopmans عام 1947 دراسة تحت عنوان " الاستثمار الأمثل لنظام النقل"حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة 1953.[2]

1. مسائل النقل:

1.1. عرض المسألة: تعرض مسائل النقل في حالة التدنئة بشكل مشابه للافتراض التالي:

نفرض أن مؤسسة اقتصادية لها ثلاث وحدات إنتاجية متواجدة في أماكن مختلفة

– الوحدة S1 تنتج الكمية b_1
– الوحدة S2 تنتج الكمية b_2
– الوحدة S3 تنتج الكمية b_3

وهذا من السلعة المنتجة ويفترض أنها متشابهة.

تكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث بتمرين 4 مناطق مختلفة من تلك السلعة، حيث أن كميات الطلب لكل منطقة هي على الشكل:

- المنطقة D1 الكميات المطلوبة هي: a_1.
- المنطقة D2 الكميات المطلوبة هي: a_2.
- المنطقة D3 الكميات المطلوبة هي: a_3.
- المنطقة D4 الكميات المطلوبة هي: a_4.

---

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 103.
[2] محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، **"الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"**، دار اليازوري، عمان، 2013، ص 121.

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من وحدة الإنتاج S_i إلى المنطقة المراد تموينها D_j محددة محاسبيا و هي C_{ij}، وهي معروفة في الجدول التالي:

	المنطقة D_1	المنطقة D_2	المنطقة D_3	المنطقة D_4
الوحدة S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
الوحدة S_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
الوحدة S_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}

المطلوب : ما هي الكميات التي يجب على كل وحدة أن تمون بها كل منطقة مع ضمان حصول كل منطقة على احتياجاتها كاملة، وفي حدود الطاقة القصوى المتاحة لكل وحدة إنتاجية، وهذا بشرط أن تتحمل المؤسسة التي تنتمي إليها هذه الوحدات أقل تكلفة ممكنة ؟

فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة S_i المنطقة D_j هي x_{ij} فإن الكميات المحتمل توجيهها من كل وحدة إلى كل منطقة هي حسب الجدول:

	المنطقة D_1	المنطقة D_2	المنطقة D_3	المنطقة D_4
الوحدة S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الوحدة S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الوحدة S_3	X_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

وهو جدول مشابه لجدول التكاليف، غير أن الفرق هو أن قيم التكاليف من كل وحدة إلى كل منطقة معلومة، غير أن في هذا الجدول الكميات عبارة عن متغيرات مجهولة تبحث عنها إشكالية المسألة.

2.1. تشكيل جدول مسائل النقل:

يمثل الجدول لمسألة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، والصيغة الجدولية لمشكل النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (S) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) و عدد أعمدتها (D) وتمثل مراكز الاستلام حسب المثال السابق يمكن تلخيصه في جدول شامل هو جدول مسائل النقل و يكون:[1]

لعرض	المنطقة D_4	المنطقة D_3	المنطقة D_2	المنطقة D_1	
b_1	C_{14} x_{14}	C_{13} x_{13}	C_{12} x_{12}	C_{11} x_{11}	الوحدة S_1
b_2	C_{24} x_{24}	C_{23} x_{23}	C_{22} x_{22}	C_{21} x_{21}	الوحدة S_2
b_3	C_{34} x_{34}	C_{33} x_{33}	C_{32} x_{32}	C_{31} x_{31}	الوحدة S_3
المجموع	a_4	a_3	a_2	a_1	الطلب

- تسمى الوحدات الانتاجية بالمنبع.
- تسمى المناطق المراد تموينها بالمصب.

و عليه فإن القيمة C_{ij} هي تكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع S_i إلى المصب D_j و هي قيمة غير سالبة.

[1] حامد سعد نور الشمرتي، هلي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي، عمان، 2007، ص 281.

و X_{ij} هي الكميات المراد نقلها من المنبع S_i إلى المصب D_j و هي أيضا غير سالبة و منه فإن النموذج الرياضي لمشكلة النقل يكتب على الشكل:[1]

$$Min\ :Z = C_{11}\,x_{11} + C_{12}\,x_{12} + \ldots + C_{34}\,x_{34} + C_{nm}\,x_{nm}$$

$$S/C \left\{ \begin{array}{l} C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}\,x_{13} + C_{14}x_{14} + C_{1m}\,x_{1m} = b_1 \\ C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + \ldots + C_{2m}x_{2m} = b_2 \\ C_{n1}x_{n1} + C_{n2}\,x_{n2} + \ldots + C_{nm}\,x_{nm} = b_n \\ \\ C_{11}x_{11} + C_{21}x_{21} + \ldots + C_{n1}x_{n1} = a_1 \\ C_{12}x_{12} + C_{22}x_{22} + \ldots + C_{n2}x_{n2} = a_2 \\ C_{1m}x_{1m} + C_{2m}x_{2m} + \ldots + C_{nm}x_{nm} = a_m \\ x_{11}\ ,\ x_{12},\ x_{13}\ \ldots\ x_{nm} \geq 0 \end{array} \right.$$

اختصارا:

$$Min\ :\ Z = \sum^{m} \sum^{n} Cij\ xij$$

$$S/C \left\{ \begin{array}{l} \sum^{m} x_{ij} = b_i \\ \sum^{n} x_{ij} = a_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

و هنا نفترض أن: $\sum^{n} bi = \sum^{n} aj$

و يسمى نموذج مشاكل النقل و الذي يتساوى فيه حجم الطلب مع حجم العرض بالنموذج المتوازن (أي مجموع العرض = مجموع الطلب)

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيع مرعي، مرجع سابق، ص116.

مثال: أكتب النموذج الرياضي لمسألة النقل التالية:[1]

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	C_{13} x_{13}	C_{14} x_{14}	5
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	C_{23} x_{23}	C_{24} x_{24}	20
S_3	C_{31} x_{31}	C_{32} x_{32}	C_{33} x_{33}	C_{34} x_{34}	50
الطلب	15	30	15	15	المجموع

الحل:

$$\text{Min}: Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{14}x_{14} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24} + C_{31}x_{31} + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34}.$$

$$S/C\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15 \\ x_{ij} \geq 0 \ , \ (i = 1,2,3 \ ، \ j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

2. طرق حل مشاكل النقل:

لايجاد الحل الابتدائي لمشاكل النقل نستخدم الطرق التالية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية The North West Corner Method
- طريقة أقل التكاليف The Least Costs Method
- فوجل التقريبية The Vogel's Approximation Method

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، مرجع سابق، ص 135.

علما بأن هذه الطرق تعطي حلا أساسيا(أوليا) للمشكلة وسنبحث لاحقا عن طريقة الوصول إلى الحل الأمثل.

وفيما يلي شرح لهذه الطرق:[1]

1.2. طريقة الزاوية الشمالية الغربية: The North – West Cornner Method

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة. ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال:

إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاثة مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع، وحجم المخزون في كل مخزن والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5	1	8	12
S_2	2	4	0	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30 / 30

المطلوب: ما مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ملاحظة:

إن الأرقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في جدول –2– تمثل كلفة النقل، فمثلا كلفة نقل وحدة واحدة من المصدر S_1 إلى مركز الطلب D_3 هي 8 و.ن.

[1] محمد راتول، مرجع سابق، ص 110.

خطوات الحل:

– بداية يجب التأكد من توفر شرط التوازن أي أن مجموع العرض المتوفر في المصادر يساوي مجموع ما تطلبه المراكز التسويقية، من الجدول نلاحظ أنها متساوية حيث أن:

$$12 + 14 + 4 = 9 + 10 + 11$$

– نأخذ الخلية الأولى والتي تقع في الصف الأول (الشمالي) والعمود الأول (الغربي) وهي الخلية (S_1 , D_1)ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_1 , D_1) .

$$\text{Min } (12,9) = 9$$

أي يتم تخصيص 9 وحدات للخلية (S_1 , D_1) وهذا يؤدي إلى سد احتياجات المركز D_1 بالكامل، حيث يتم شطب العمود الأول وذلك يشير إلى أن التخصيصات للخلايا الأخرى في العمود ذاته تساوي صفر.

ملاحظة:

أ. يتم تعديل العرض والطلب للجدول بعد كل عملية تلبية طلب ما.

ب. إن عملية النقل بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس الصف حتى يتم إغلاقه ونفاذ جميع الكمية المتاحة في المصدر المقابل للصف المعنى.

– نأخذ الخلية الثانية (S_1 , D_2) و التي تكون هي الآن في الزاوية الشمالية الغربية، ونقارن الكمية المتاحة لدى المصدر S_1 بالكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_2 ونختار الأقل ونخصصها للخلية (S_1 , D_2) .

$$\text{Min } (3 ,10) = 3$$

لذا نخصص 3 وحدات للخلية (S_1 , D_2) .

3. نحدد عدد المتغيرات الأساسية: $M + N - 1$

M: عدد الصفوف = 3

N : عدد الأعمدة = 3

$3+3-1= 5$

– نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت بالكامل، لذا نأخذ الخلية (S_2,D_2) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_2 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, D_2) .

$$\text{Min } (14, 7) = 7$$

– نأخذ الخلية (S_2 , D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ، ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, D_3) .

$$\text{Min } (7,11) = 7$$

– نأخذ الخلية (S_3 , D_3)، ونخصص لها 4 وحدات وهي الكمية المتبقية لدى المركز S_3 والمطلوبة من قبل مركز الطلب D_3.

– عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول النقل بصيغته النهائية كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	12
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	14
S_3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	4
الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ 4 0	30 30

ويكون إجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق:

$$\text{Total Cost} = 5\text{x}9 + 1\text{x}3 + 4\text{x}7 + 7\text{x}4 = 104 \text{ J.D}$$

2.2. طريقة أقل التكاليف The Least Costs Method :[1]

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب. لذا وضعت طريقة أقل التكاليف لمعالجة مثل هذا النوع من العيوب في نماذج النقل حيث يتم البحث والتركيز بموجب هذه الطريقة على أقل تكلفة متوفرة في جـدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض.

[1] أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سابق، ص 131.

سنعتمد على مثالنا السابق في توضيح الخطوات الرئيسية لطريقة أقل التكاليف.

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5	1	8	12
S_2	2	4	0	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30 / 30

نلاحظ أن أقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي الصفر، وهي تقابل المصدر S_2 والمركز D_3، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3، ثم نختار أقل الكميتين، ونخصصها للخلية (S_2 , D_3) .

$$\text{Min } (14, 11) = 11$$

إن الجدول أعلاه يمثل جدول النقل بصيغته النهائية و بكلفة إجمالية تساوي38 دينار حيث تم حسابها كالآتي :

$$\text{Total Cost} = 5 \times 2 + 1 \times 10 + 2 \times 3 + 0 \times 11 + 3 \times 4 = 38 \text{ J.D}$$

من خلال حسابنا للتكلفة الكلية لمشكلة النقل هذه بطريقة أقل التكاليف نلاحظ أن هذه الطريقة تكلفتها اقل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ملاحظة:

إذا كانت هناك في إحدى مراحل عملية المقارنة بين كلف النقل ، كلفتين متساويتين فبالإمكان اختيار إحداهما عشوائيا.

3.2. طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximations Method (VAM) :[1]

تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل ونادرا ما تكون طريقتي أقل التكاليف

[1] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد،مرجع سابق، ص 219.

والطريقة الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل. لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا أقل التكاليف والزاوية الشمالية الغربية.

وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي:

أ. حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل.

ب. تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق في الكلفة (أعلى جزاء).

ج. اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.

د. في الخلية التي اختيرت في الخطوة " 3 " نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل.

هـ. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة :

عند تساوي الفروق في الصفوف والأعمدة نأخذ الفرق الثاني وذلك بشطب أقل قيمة من الصف والعمود ونأخذ الفرق الذي بعده، أما إذا كانت من البداية كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة أقل التكاليف.

سيتم توضيح طريقة فوجل بالاستعانة بمثالنا السابق، ثم بعد ذلك تتم المقارنة بين إجمالي التكاليف لهذه الطريقة بإجمالي التكاليف الذي تم الحصول عليها بموجب الطرق السابقة.

المراكز

المصادر		D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
	S_1	5	1	8	12	4
	S_2	2	4	0	14	2
	S_3	3	6	7	4	3
	الطلب	9	10	11	30 / 30	
	فرق الأعمدة	1	3	7		

- نجد الفرق في التكلفة للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول أعلاه.
- نلاحظ أن للعمود الثالث أكبر فرق والذي يساوي " 7 ".
- نبحث عن أقل كلفة في العمود الثالث، فنجد أن للخلية $(S_2\ ,\ D_3)$ أقل كلفة والبالغة صفر.
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة في المصدر S_2 ثم نختار أقل الكميتين

.Min (11,14) = 11

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	5	1	8	12	4
S_2	2	4	0	~~14~~ 3	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	~~11~~ 0	30 30	
فرق الأعمدة	1	3			

- و يتم تعديل العرض و الطلب في الجدول أعلاه، و هذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل احتياجات المركز D_3، لذا يشطب المركز D_3 من الجدول لغرض إعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى .
- يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود في الجدول أعلاه.
- نلاحظ أن للصف الأول أعلى فرق في الكلفة.
- نبحث عن أقل كلفة في الصف الأول، فنجد أن للخلية (S_1,D_1) أقل كلفة والبالغة "1".
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_2 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S_1 ثم نختار أقل الكميتين. Min (12,10) = 10.

- يتم شطب مركز الطلب D_2، ولهذا السبب سوف لا يؤخذ بعين الاعتبار عند حساب الفرق في الكلفة في المراحل اللاحقة .

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	5	1 / 10	8	~~12~~ 2	4
S_2	2	4	0 / 11	~~14~~ 3	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	~~10~~ 0	~~11~~ 0	30 / 30	
فرق الأعمدة	1				

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف والأعمدة بسبب وجود مركز طلب واحد وهو (D_1) والذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن.

إن ما نحتاجه هنا هو البحث عن اقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ فيه أن المصدر S_2 يقابل أقل كلفة والتي تساوي 2 سيتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 والبالغة " 3 " وحدات لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1، ويتم إلغاء المركز S_2 .

من جهة أخرى بإمكان المصدر S_3 تلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1 وذلك بتوفير 4 وحدات فقط من احتياجات D_1 البالغة " 6 " وحدات. وأخيرا يتم تخصيص آخر احتياجات المركز D_1 والبالغة 2 وحدة من المصدر S_1. وبهذا يصبح نموذج النقل بصيغته النهائية بموجب طريقة فوجل كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{8}$	---
S_2	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 11	---
S_3	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	---
الطلب	---	---	---	

بموجب نموذج النقل أعلاه ستكون الكلفة الإجمالي كما يلي:

(Total Cost) = 5 x 2 + 1 x 10 + 2 x 3 + 0 x 11 + 3 x 4 = 38 J.D

ملاحظة:[1]

في أغلب الأحيان تكون نتائج طريقتي فوجل ، والتكلفة الأقل متقاربة أو متطابقة.

* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية = 104 دينار.
* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة أقل التكاليف = 38 دينار.
* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة فوجل = 38 دينار.

نلاحظ أن الطريقتين الأخيرتين قد حققتا اقتصادا في مجموع التكاليف قدرة 66 دينار مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

[1] فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 197.

4.2. نموذج النقل غير المتوازن :[1]

تحدث في الحياة العملية أن تواجه المؤسسة نقص في الموارد التي تطلبها في عملياتها الإنتاجية أو تلاحظ تدنيا في الطلب على منتجاتها، مما يخلق فائضا لديها ما يؤدي إلى خلق صعوبات لجهازها التسويقي في تصريف هذا الفائض أو العكس زيادة في الطلب على منتجاتها أكثر من خططها الإنتاجية.[2]

ولقد ذكرنا سابقا أن مجموع قيم العرض يجب أن تكون مساوية لمجموع قيم الطلب ولكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج غير متوازن ولكي نوازن النموذج نضيف إلى الأقل، قيمة الفرق وتكون التكلفة الموازية لها أصفار فإذا :

1. كان العرض أكثر من الطلب فإننا نضيف إلى الجدول عمود آخر تكون فيه التكاليف تساوي صفر ونحل النموذج بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة.
2. كان العرض أقل من الطلب نضيف صف آخر بنفس الطريقة تكون التكاليف فيه أصفار ونوازن النموذج.

ملاحظة:

إن الصف الوهمي أو العمود الوهمي هو مشابه للمتغيرات الاصطناعية من مشكلات البرمجة الخطية التي سبق ذكرها.[3]

---

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 132.

[2] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص 113.

[3] سهيلة عبد الله سعيد، **"الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"**، دار الحامد، عمان، ط1، 2007، ص 207.

مثال: وازن نموذج النقل التالي، ثم جد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1	3	100
S_2	5	4	0	150
S_3	2	3	6	50
الطلب	100	120	60	300 / 280

نلاحظ هنا أن مجموع قيم العرض = 300، ومجموع قيم الطلب = 280، وبالتالي نضيف عمود آخر قيمة الطلب فيه = 20، والتكاليف = صفر، كالآتي :

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2	1	3	0	100
S_2	5	4	0	0	150
S_3	2	3	6	0	50
الطلب	100	120	60	20	300 / 300

و يكون الحل الأولي للنموذج بطريقة أقل التكاليف هو:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	~~100~~ 0
S_2	$\boxed{5}$ 50	$\boxed{4}$ 20	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{0}$ 20	~~150~~ ~~90~~ ~~70~~ 0
S_3	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$	50
الطلب	100	120	60	20	300 / 300

Total Cost = 100 + 350 + 80 + 60 = 590 J.D

مثال 2: وزان نموذج النقل التالي، ثم جد التكلفة الكلية بطريقة فوجل:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	120
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	100
الطلب	100	100	50	

نلاحظ أن الطلب أكثر و بالتالي نضيف صف قيمته 30 و تكاليفه = صفر كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	0	1	2	120
S_2	2	3	5	100
S_3	0	0	0	30
الطلب	100	100	50	

ويكون الحل الأولي للتكلفة الكلية بطريقة فوجل هو :

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	0	1	2	120	1
S_2	2	3	5	100	1
S_3	0	0	0	30	0
الطلب	100	100	50		

Total Cost = 300 + 40 = 340 J. D.

3. اختبار مثالية الحل الأولي :

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولا أمثل منه ؟

هنا طريقتان لاختبار أمثلية الحل هما:[1]

- طريقة المسار المتعرج " طريقة الحجر المتنقل " The Stepping Stone Method
- طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method

1.3. طريقة المسار المتعرج : طريقة التخطي

تقضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول (الحل الأولي) لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك.

وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

أ. القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق:

- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
- يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايات المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.
- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.
- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة.
- حتى يكون الحل أمثلا يجب ان تكون التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر .

[1] فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 135.

مثال3: فيما يلي جدول الحل الأولى بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5	1	8	12
S_2	2	4	0	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	

الخلية (S_1 , D_3) غير داخلة في الحل، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى اختلال شروط توازن المسألة على مستوى السطر الأول، و على مستوى العمود الثالث، لذا ينبغي طرح القيمة -1 من الخلية (S_2 , D_3) ، غير أن طرح هذه القيمة يحدث احتلالا على مستوى السطر الثاني، لذلك نضيف القيمة 1 إلى الخلية (S_2 , D_3)، وهو ما يحدث اختلال على مستوى العمود2 و عليه نطرح القيمة 1 من الخلية (S_1 , D_1)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة.

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل مستخدما طريقة المسار المتعرج.

من الجدول " 23 " يتضح وجود أربعة خلايا فارغة هي الخلايا:

(S_1 , D_3), (S_2 , D_1), (S_3 , D_1), (S_3 , D_2)

ويتم تقييم أثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية كالآتي:

1. تكوين مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة.
2. يتم وضع إشارة زائد (+) للخلية المراد تقيمها ثم إشارة ناقص (−) للخلية التي تليها في المسار، ثم إشارة زائد للخلية التالية في المسار، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلية التي بدأناها.

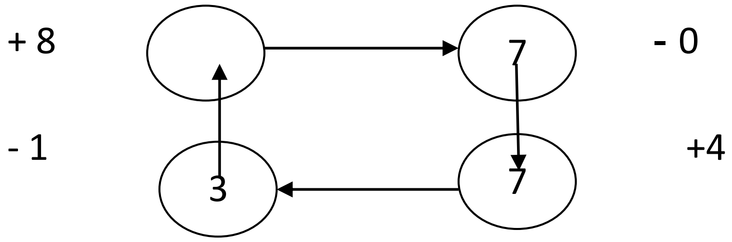
3. نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) ، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها.
4. إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسالب فإن ذلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.
5. في حالة وجود أكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب فإنه تعطي الأولوية للخلية صاحبة أكبر رقم سالب، حيث أن شغل تلك الخلية يكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف.
6. يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفي المسار.

الخلية (S_1,D_3):

المسار المغلق:

$(S_1,D_3) \rightarrow (S_2,D_3) \rightarrow (S_2,D_2) \rightarrow (S_1,D_2) \rightarrow (S_1,D_2) \rightarrow (S_1,D_3)$

التكلفة غير المباشرة: $+ 8-0 + 4-1 = 11$



المسار المغلق للخلية (S_1,D_3)

ملاحظة:

1. الأرقام داخل الدوائر (في الشكل أعلاه) تمثل محتويات كل خلية مشغولة.
2. الأرقام التي خارج الدوائر تمثل تكلفة كل خلية من الجدول –23–.

الخلية (S_2,D_1) :

المسار المغلق:

$(S_2, D_1) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_1, D_2) \rightarrow (S_1, D_1) \rightarrow (S_2, D_1)$

التكلفة غير المباشرة: $+2 - 4 + 1 - 5 = -6$

الخلية (S_3,D_2) :

المسار المغلق:

$(S_3, D_2) \rightarrow (S_3, D_3) \rightarrow (S_2, D_3) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_3, D_2)$

التكلفة غير المباشرة: $+6-7+0-4 = -5$

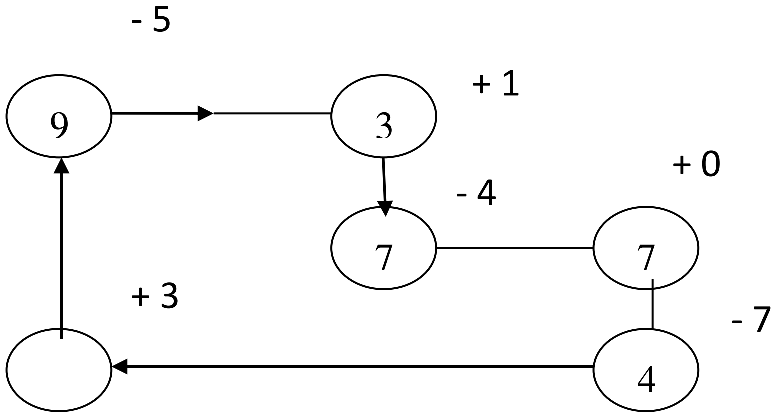
الخلية (S_3,D_1) :

المسار المغلق:

$(S_3,D_1) \rightarrow (S_1,D_1) \rightarrow (S_1,D_2) \rightarrow (S_2,D_2) \rightarrow (S_2,D_3) \rightarrow (S_3,D_3) \rightarrow (S_3,D_1)$

التكلفة غير المباشرة: $+3-5+1-4+0-7=-12$

وباستعراض قيم التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة نجد أن تكاليف النقل الكلية يمكن تخفيضها في حالة شغل الخلية (S_3,D_1) حيث أن لها أقل تكلفة غير مباشرة بالسالب وتتحدد الكمية التي ستنقل إلى الخلية (S_3,D_1) من الخلايا المشغولة على أساس أقل مقدار في الخلايا المشغولة (الأرقام داخل الدوائر في الشكل أدناه) التي إشارتها سالبة في المسار المغلق للخلية (S_3,D_1) .



المسار المغلق للخلية $(S_3\ ,D_1)$

وبدراسة الخلايا التي يمكن النقل منها إلى الخلية $(S_3\ ,D_1)$ نجد أنه يمكن النقل من الخلية (S_1,D_1) أو (S_2,D_2) أو (S_3,D_3) (حيث أن قيم التكلفة لها في المسار سالبة، لاحظ الأرقام الموجودة فوق

الدوائر في الشكل أعلاه) وحفاظا على عدم سالبية الخلايا نأخذ أقل القيم في الخلايا السالبة وهي -4 . ونجمعها إلى القيم في الخلايا الموجبة، ونطرحها من القيم في الخلايا السالبة. ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق (S_3,D_1) حيث تصبح كالآتي:

من (S_3,D_1) : $9-4=5$

إلى (S_1,D_2) : $3+4=7$

من $(S_2,\ D_2)$: $7-4=3$

إلى $(S_2,\ D_3)$: $7+4=11$

من $(S3,\ D3)$: $4-4=0$

إلى (S_3, D_1): $0+4 = 4$

ويمكن تصور جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق الذكر كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	[5] 5	[1] 7	[8]	12
S_2	[2]	[4] 3	[0] 11	14
S_3	[3] 4	[6]	[7] 0	4
الطلب	9	10	11	

وعليه فإن تكاليف النقل الكلية طبقا لجدول النقل الثاني هي:

$5X5+1X7+4 X 3+ 0 X 11 +3X4+6X0= 25 + 7 + 12 + 12 = 56$ J.D

كانت الكلفة الكلية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية J.D (104) في حين بلغت الكلفة الإجمالية بعد التعديل بموجب طريقة المسار المتعرج J.D (56).

أي هناك اقتصاد في الكلفة ما قيمته J.D (48) نتيجة شغل الخلية (S_3,D_1) وهذا الحل (جدول24) كسابقه، يتطلب التأكد من كونه يمثل الحل الأمثل المنشود أم لا.

بمعنى آخر هل هناك إمكانية للحصول على نتائج أفضل من النتيجة السابقة والبالغة J.D (56)؟

4. اختبار مثالية جدول النقل الثاني:

يتم اختبار مثالية جدول النقل الثاني (جدول 24) السابق ذكره طبقا لنفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسة آثار شغل الخلايا الفارغة على التكلفة الكلية وذلك على النحو التالي:

الخلية (S_1,D_3):

المسار المغلق:

$(S_1, D_3) \rightarrow (S_2, D_3) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_1, D_2) \rightarrow (S_1, D_3)$

التكلفة غير المباشرة: $+8 -0+4-1=+11$

الخلية (S_2,D_1):

المسار المغلق:

$(S_2, D_1) \rightarrow (S_1, D_1) \rightarrow (S_1, D_2) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_2, D_1)$

التكلفة غير المباشرة: $2-5+1-4 = -6$

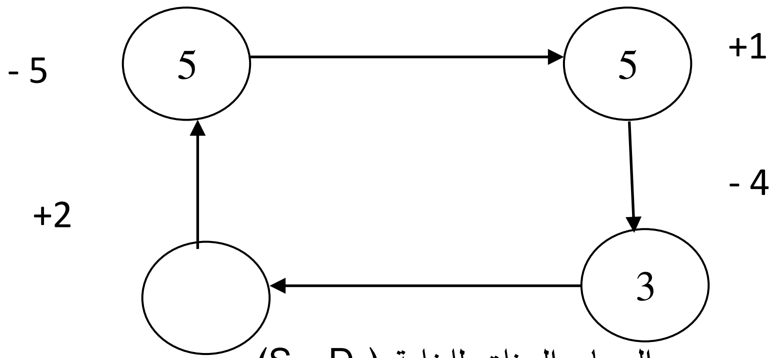
الخلية (S_3,D_2):

المسار المغلق:

$(S_3, D_2) \rightarrow (S_3, D_3) \rightarrow (S_2, D_3) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_3, D_2)$

التكلفة غير المباشرة: $+6-7+0-4=-5$

وبدراسة آثار شغل الخلايا الفارغة السابقة يتضح لنا أنه يمكن تخفيض تكاليف النقل في حالة ملء الخلية (S_2, D_1).



المسار المغلق للخلية (S_2, D_1)

وبالنظر إلى المسار المغلق للخلية (S_2, D_1) نجد أنه يمكن النقل إليها من الخلية (S_2, D_2) بمقدار 3وحدات أو من الخلية (S_1, D_1) بمقدار 5 وحدات.

وهي الخلايا ذات الإشارات السالبة في المسار المغلق للخلية (S_2, D_1) وطبقا لما سبق ذكره نأخذ أقل القيمتين في هاتين الخليتين وهي 3 وحدات ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق للخلية (S_2, D_1) حيث تصبح كالآتي:

من (S_1, D_1): $5 - 3 = 2$

إلى (S_2, D_2): $3 - 3 = 0$

من (S_1, D_2): $7 + 3 = 10$

إلى (S_2, D_1): $0 + 3 = 3$

ويمكن تصور جدول النقل الثالث بعد إجراء التعديل السابق الذكر كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	**العرض**
S_1	[5] 2	[1] 10	[8]	–
S_2	[2] 3	[4] 0	[0] 11	–
S_3	[3] 4	[6]	[7] 0	–
الطلب	–	–	–	

وتكون تكاليف النقل طبقا للجدول الثالث السابق عرضه كالآتي:

Total Cost = $5 \times 2 + 1 \times 10 + 2 \times 3 + 4 \times 0 + 0 \times 11 + 3 \times 4 + 7 \times 0$

$= 10 + 10 + 6 + 0 + 0 + 12 + 0 = 38$ J. D.

نلاحظ هنا أن شغل الخلية (S_2, D_1)، أدى إلى الاقتصاد في إجمالي التكاليف بمقدار 18 دينار.

اختبار مثالية جدول النقل الثالث:

يتم اختبار جدول النقل الثالث رقم "25" بنفس الطريقة السابقة كالآتي:

الخلية (S_1, D_3):

المسار المغلق:

$(S_1, D_3) \rightarrow (S_2, D_3) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_1, D_2) \rightarrow (S_1, D_3)$

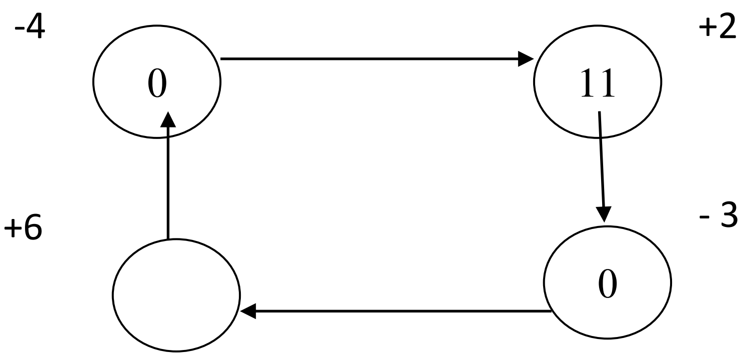
التكلفة غير المباشرة: $+8-0+4-1=11$

الخلية (S_3, D_2):

المسار المغلق:

$(S_3, D_2) \rightarrow (S_3, D_1) \rightarrow (S_2, D_1) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_3, D_2)$

التكلفة غير المباشرة: $+6-3+2-4=1$



المسار المغلق للخلية (S_3, D_2)

من العرض السابق يتضح لنا أن شغل أي من الخلايا الفارغة لن يخفض التكاليف، حيث أن التكلفة غير المباشرة لكل منها أرقام موجبة ولذلك فإن جدول النقل (رقم 25) يمثل الحل الأمثل ويعطينا الخطة المثلى لتوزيع وحدات السلعة من المصادر الثلاثة إلى مراكز التوزيع الثلاثة.

طريقة التوزيع المعدلة:

تتلخص خطوات هذه الطريق كالآتي:

1- يتم تكوين عدة معاملات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي وتعد كل معادلة على أساس العلاقة التالية: $U_i + V_j = C_{ij}$

U_i: المتغير الخاص بالصف i و الذي تقع فيه الخلية المعنية

V_j: المتغير الخاص بالعمود j و الذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij}: تكلفة العملية التي تقع في الصف i و العمود j.

2- إيجاد حل المعادلات الخاصة بالخلايا المشغولة.

3- يتم تقييم كل خلية غير مشغولة كالتالي: (حساب التكلفة غير المباشرة لها)

$C_{ij} – U_i – V_j$ = التكلفة غير المباشرة للخلية (i , j).

4- بعد التعرف على آثار شغل الخلايا الفارغة على إجمالي التكاليف يستكمل الحل طبقا لما هو متبع في طريقة المسار المتعرج.

ولإيضاح ما تقدم سنقوم بعمل اختبار المثالية لجدول النقل الأولي في طريقة الزاوية الشمالية والغربية، والذي سبق التعامل معه في طريقة المسار المتعرج.

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5 9	1 3	8	–
S_2	2	4 7	0 7	–
S_3	3	6	7 4	–
الطلب	–	–	–	

يلاحظ من الجدول أعلاه أن هناك خمسة خلايا مشغولة هي:

$(S_1, D_1), (S_1, D_2), (S_2, D_2), (S_2, D_3), (S_3, D_3)$

لذلك يتم تكوين المعادلات التالية لتلك الخلايا على التوالي:

$U_1 + V_1 = 5$ .... (1)

$U_1 + V_2 = 1$ .... (2)

$U_2 + V_2 = 4$ .... (3

$U_2 + V_3 = 0$ .... (4)

$U_3 + V_3 = 7$............ (5)

ولحل المعادلات السابقة نفترض أن قيمة أي متغير وليكن U_1 تساوي صفر (وذلك لأن عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات وكما هو معروف فإنه إذا كانت عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات فإن بعض من هذه المتغيرات يجب أن يساوي صفر) بناء على ذلك نجد أن:

$0 + V_1 = 5 \rightarrow V_1 = 5$

$0 + V_2 = 1 \rightarrow V_2 = 1$

$U_2 + 1 = 4 \rightarrow U_2= 4-1 =3$

$3 + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = -3$

$U_3 + (-3) = 7 \rightarrow U_3 = 10$

أي أن قيم المتغيرات هي:

$U_1 = 0,\ U_2 = 3,\ U_4 = 10$

$V_1 = 5,\ V_2 = 1,\ V_3 = -3$

وعلى ذلك يتم تقييم الخلايا الفارغة في الجدول "28" وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة كما يلي:

التكلفة غير المباشرة للخلية (S_1, D_3) $= C_{13} - U_1 - V_3$

$= 8 - 0 - (-3) = 8 + 3 = 11$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S_2, D_1) $= C_{21} - U_2 - V_1$

$= 2 - 3 - 5 = -6$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S_3, D_1) $= C_{31} - U_3 - V_1$

$= 3 - 10 - 5 = -12$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S_3, D_2) $= C_{32} - U_3 - V_2$

$= 6 - 10 - 1 = -5$

وبمقارنة النتائج أعلاه مع ما سبق لنا الحصول عليه عند تقييم جدول الحل الأولي باستخدام طريقة المسار المتعرج يتضح لنا تطابق النتائج في الطريقتين.

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	[5] 5	[1] 7	[8]	–
S_2	[2]	[4] 3	[0] 11	–
S_3	[3] 4	[6]	[7]	–
الطلب	–	–	–	

نختبر الجدول الجديد بنفس الطريقة:

نكون معادلات الخلايا المشغولة:

$U_1+V_1= 5$ $\quad$ $U_1+V_2= 1$ $\quad$ $U_2+V_2= 4$ $\quad$ $U_2+V_3= 0$ $\quad$ $U_3+V_1= 3$

نفرض أن U_1 يساوي 0:

$V_1= 5$, $V_2= 1$, $V_3= -3$, $U_1= 0$, $U_2= 3$, $U_3= 20$

و عليه يتم تقسيم الخلايا الفارغة و ذلك بحساب التكلفة غير المباشرة:

الخلية (S_1, D_3) ت.غ.م = $C_{13} - U_1 - V_3$

= 11

الخلية (S_2, D_1) ت.غ.م = $C_{21} - U_2 - V_1$

= − 6

الخلية (S_3, D_2) ت.غ.م = $C_{32} - U_3 - V_2$

= 7

الخلية (S_3, D_3) ت.غ.م = $C_{33} - U_3 - V_3$

= 12

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	[5] 2	[1] 10	[8]	–
S_2	[2] 3	[4]	[0] 11	–
S_3	[3] 4	[6]	[7]	–
الطلب	–	–	–	

نختبر الجدول الجديد بنفس الطريقة:

نكون معادلات الخلايا المشغولة:

$U_1+V_1= 5$ $U_1+V_2= 1$ $U_2+V_3= 0$ $U_2+V_1= 2$ $U_3+V_1= 3$

نفرض أن U_1 يساوي 0:

$V_1= 5$, $V_2= 7$, $V_3= 3$, $U_1= 0$, $U_2= -3$, $U_3= -2$

و عليه يتم تقييم الخلايا الفارغة و ذلك بحساب التكلفة غير المباشرة:

الخلية (S_1, D_3) ت.غ.م = $C_{13} - U_1 - V_3$

= 5

الخلية (S_2, D_2) ت.غ.م = $C_{22} - U_2 - V_2$

= 9

الخلية (S_3, D_2) ت.غ.م = $C_{32} - U_3 - V_2$

= 1

الخلية (S_3, D_3) ت.غ.م = $C_{33} - U_3 - V_3$

= 6

بما أن التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة موجبة فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل لمسألة النقل.

التكلفة الإجمالية = 38 و.ن.

لذا يتم عمل جدول نقل جديد عن طريق شغل الخلية (S_3,D_1) باعتبارها صاحبة أكبر رقم سالب. وتتم عملية شغل هذه الخلية طبقا لما سبق شرحه في طريقة المسار المتعرج. وتتوالي عملية اختبار المثالية بكل جدول جديد بطريقة التوزيع المعدلة وبنفس الخطوات السابق ذكرها.

مثال 2: في جدول النقل التالي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1	0	4	100
S_2	7	5	2	3	50
S_3	6	10	9	0	50
S_4	2	4	1	6	75
الطلب	20	100	30	100	

جد :

1. الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف.
2. الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

الحل:

1. الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف :

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 70	$\boxed{0}$ 30	$\boxed{4}$	~~100~~ ~~70~~ 0
S_2	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 25	~~50~~ ~~25~~ 0
S_3	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$ 75	~~75~~ 0
S_4	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	~~25~~ ~~5~~ 0
الطلب	~~20~~ 0	~~100~~ ~~30~~ ~~25~~ 0	~~30~~ 0	~~100~~ ~~25~~ 0	

تكلفة النقل الكلي هي:

$$\text{TOTAL Cost} = 70 + 125 + 75 + 40 + 20$$
$$= 330 \text{ J. D}$$

2. اختبار الحل الأمثل:

في البداية تشكل المعادلات كالآتي:

$$U_1 + V_2 = 1$$
$$U_1 + V_3 = 0$$
$$U_2 + V_2 = 5$$
$$U_2 + V_4 = 3$$
$$U_3 + V_4 = 0$$
$$U_4 + V_1 = 2$$
$$U_4 + V_2 = 4$$

وبحل المعادلات: نفرض $U_1 = 0$

U1 + V2 = 1 → V2 = 1

0 + V3 = 0 → V3 = 0

U2 + 1 = 5 → U2 = 4

4 + 4 = 3 → V4 = −1

U3 − 1 = 0 → U3 = 1

U4 + 1 = 4 → U4 = 3

3 + V1 = 2 → V1 = −1

نختبر الخلايا الفارغة بالعلاقة Cij – Ui–Vj

C11 – U1 – V1 =	5−0 (−1)	= 6
C14 – U1 – V4 =	4−0−3	= 1
C21 – U2 – V1 =	7−4 + 1	= 4
C23 – U2 – V3 =	2 – 4 – 0	= −2
C31 – U3 – V1 =	6 – 1 – (−1)	= 6
C32 – U3 – V2 =	10 – 1 −1	= 8
C33 – U3 – V3 =	9−1 – 0	= 8
C43 – U4 – V3 =	1−3−0	= −2
C44 – U4 – V4 =	6 – 3 – (−1)	= 4

نلاحظ هنا أن خليتين من الخلايا الفارغة كانت قيمتاهما بالسالب و هما (C_{23}), (C_{43}).

يكون مسار الخلية (C_{43}) هو:

(S_4 , D_3) → (S_4 , D_2) → (S_1 , D_2) → (S_1 , D_3)

نعيد تغيير قيم المسار بحيث تصبح الخلية (C43) خلية مشغولة فيصبح الجدول كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 75	0 25	4	–
S_2	7	5 25	2	3 25	–
S_3	6	10	9	0 75	–
S_4	2 20	4	1 5	6	–
الطلب	–	–	–	–	

ثم نختبر الحل للجدول السابق باستخدام طريقة التوزيع المعدلة كالآتي:

$$U_1 + V_2 = 1$$
$$U_1 + V_3 = 0$$
$$U_2 + V_2 = 5$$
$$U_2 + V_4 = 3$$
$$U_3 + V_4 = 0$$
$$U_4 + V_1 = 2$$
$$U_4 + V_3 = 1$$

بجعل $U_1 = 0$ نجد قيم باقي المتغيرات:

$0 + V_2 = 1 \rightarrow V_2 = 1$

$0 + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = 0$

$U_2 + 1 = 5 \rightarrow U_2 = 4$

$4 + V_4 = 3 \rightarrow V_4 = -1$

$U_3 + -1 = 0 \rightarrow U_3 = 1$

$U_4 + 0 = 1 \rightarrow U_4 = 1$

$1 + V_1 = 1 \rightarrow V_1 = 0$

نختبر الخلايا الفارغة :

$C_{11} - U_1 - V_1 = 5-0-0 = 5$

$C_{14} - U_1 - V_4 = 4-0-(-1) = 5$

$C_{21} - U_2 - V_1 = 7-4-1 = 3$

$C_{23} - U_2 - V_3 = 2-4-0 = -2$

$C_{31} - U_3 - V_1 = 6-1-0 = 5$

$C_{32} - U_3 - V_2 = 10-1-1 = 8$

$C_{33} - U_3 - V_3 = 9-1-0 = 8$

$C_{42} - U_4 - V_2 = 4-1-1 = 2$

$C_{44} - U_4 - V_4 = 6-1-(-1) = 6$

نلاحظ هنا أن خلية واحدة بقيت سالبة وهي الخلية (C23) ومسارها هو:

$(S_2, D_3) \rightarrow (S_2, D_2) \rightarrow (S_1, D_2) \rightarrow (S_1, D_3)$

وبتعبئة الخلية الفارغة من مسارها يصبح جدول الحل كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 95	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{4}$	–
S_2	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{3}$ 25	–
S_3	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$ 75	–
S_4	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{6}$	–
الطلب	–	–	–	–	

ثم نختبر الحل للجدول السابق بنفس الطريقة:

$$U_1 + V_2 = 1$$
$$U_1 + V_3 = 0$$
$$U_2 + V_2 = 5$$
$$U_2 + V_3 = 2$$
$$U_2 + V_4 = 3$$
$$U_3 + V_4 = 0$$
$$U_4 + V_1 = 2$$
$$U_4 + V_3 = 1$$

نلاحظ هنا أن عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات وبالتالي نحل المعادلات بطريقة الحذف والتعويض وتكون قيم المتغيرات هي كالآتي:

$U_1 = -1/2$ $\quad$ $V_1 = ½$

$U_2 = 7/2$ $\quad$ $V_2 = 3/2$

$U_3 = ½$ $\quad$ $V_3 = -1/2$

$U_4 = 3/2$ $\quad$ $V_4 = -1/2$

نختبر الخلايا الفارغة :

$C11 - U1 - V1 = 5 - (-1/2) - ½ = 5$

$C14 - U1 - V4 = 4 - (-1/2) - (-1/2) = 5$

$C21 - U2 - V1 = 7 - (7/2) - ½ = 3$

$C31 - U3 - V1 = 6 - ½ - ½ = 5$

$C32 - U3 - V2 = 10 - ½ - 3/2 = 8$

$C33 - U3 - V3 = 9 - ½ - (-1/2) = 9$

$C42 - U4 - V2 = 4 - 3/2 - 3/2 = 1$

$C44 - U4 - V4 = 6 - 3/2 - (-1/2) = 5$

نرى هنا أن جميع الخلايا الفارغة موجبة وبالتالي يكون الحل الأمثل هو :

Minimum Cost = 95 + 25 + 40 + 75 + 40 + 5 = 280 J.D.

علماً بأن الحل الأولي = 330 دينار وبذلك يكون الوفر الاقتصادي

= 330 – 280 = 50 دينار.

المراجع

مراجع باللغة العربية:

1. أحمد محمد الهزاع الصمادي. *أساسيات بحوث العمليات.* عمان: دار قنديل للنشر و التوزيع، 2008.
2. المهتدي أكرم محمد عرفان. *الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات.* عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2004.
3. الموسوي منعم زمزير. *بحوث العمليات.* عمان: دار وائل للنشر و التوزيع، 2009.
4. بوقرة رابح. *بحوث العمليات.* المسيلة: جامعة المسيلة، 2010.
5. رشيق رفيع مرعي فتحي خليل حمدان. *مقدمة في بحوث العمليات.* عمان: دار وائل للنشر و التوزيع، 2011.
6. رفاه شهاب الحمداني , أحمد شهاب الحمداني محمد عبد العال النعيمي. *بحوث العمليات.* عمان: دار وائل للنشر و التوزيع، 2011.
7. س سهيلة عبد الله سعيد. *الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات.* عمان: دار الحامد، 2007.
8. طاهر حسن طلال عبود. *بحوث العمليات.* الجمهورية العربية السورية: منشورات الجامعة الافتراضية السورية، 2021.
9. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي. *المدخل إلى بحوث العمليات.* عمان: دار وائل للنشر و التوزيع، 2009.
10. عبد الله أحمد حاتم. *بحوث العمليات.* الجمهورية العربية السورية: منشورات الجامعة الافتراضية السورية، 2018.
11. فتحي خليل حمدان. *بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب.* عمان: دار وائل للنشر و التوزيع، 2010.
12. محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد صالح مهدي. *تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة.* الأردن: إثراء للنشر والتوزيع، 2009.
13. محمد العزاوي محمد دباس الحميد. *الأساليب الكمية في العلوم الإدارية.* عمان: دار اليازوري، 2013.
14. محمد راتول. *بحوث العمليات.* الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2008.

15. مكيد علي. *بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية.* الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2015.

16. نازم محمود الملكاوي, فالح عبد القادر الحوري جهاد صياح بني هاني. *بحوث العمليات و الأساليب الكمية نظرية و تطبيق .* عمان: دار جليس الزمان، 2008.

17. علي خليل الزبيدي حامد سعد نور الشمرتي. *مدخل إلى بحوث العمليات.* عمان: دار مجدلاوي، 2007.

*** مراجع باللغة الأجنبية:**

1. Gérald Baillageon. *Programmation Linéaire Appliquée : outils d'optimisation et d'aide à la décision.* Canada: édition SMG, 1996.
2. Gerard, Desbazeille. *Exercices et problèmes de recherche opérationnelle.* Paris: DUNOD, 1972.
3. Hamdy, A. Taha,. *Operation reaserch : an introduction.* New York: Macmillan publishing Company, 1989.
4. Hillier Fredericks, Geral J. Lieberman. *introduction to Operations research.* San Fransisco: Holden-day, inc., 1987.
5. Mr Mawro .*Startimes* .2010 ,03 26 .https : //www.startimes.com/ ?t=22602302 (Date de consultation 25 Avril, 2023).
6. Mustapha, Nabil. *Recherche opérationnelle et Mathématiques appliqués a la gestion des entreprises.* France: Dunod, 1985.
7. Paul A. Jensen, Jonathan F. Bard. *Operations Research.* New Jersey: Edition John Wiley& Sons, 2003.