

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ TAHRI MOHAMED BÉCHAR FACULTÉ DE
TECHNOLOGIE

Belkacem AMIEUR

Analyse numérique

Cours et exercices

Experts :

Dr :TERFAYA Nazihe

Dr :MOURID Elhoucine

Béchar le 18 décembre 2023

TABLE DES MATIÈRES

I	Cours	2
0.1	Introduction	3
1	Zéro d'une fonction	4
1.1	Introduction :	4
1.2	Méthode des bisections (Dichotomie) :	5
1.2.1	Script matlab :	7
1.2.2	Exemple 1 : calcul de $\sqrt{3}$	8
1.2.3	Exemple 3 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$	9
1.3	Méthode du Point fixe :	11
1.3.1	Exemple 1 : $\sqrt{3}$	13
1.3.2	Exemple 2 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$	14
1.4	Méthode de Newton-Raphson :	15
1.4.1	Script matlab :	16
1.4.2	Exemple 1 : $\sqrt{3}$	17
1.4.3	Exemple 2 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$	18
2	Interpolations polynômiales	20
2.1	Introduction :	20
2.2	Méthode de LAGRANGE :	20

TABLE DES MATIÈRES

2.2.1	1 ^{ère} méthode de LAGRANGE :	21
2.2.2	Exemple :	21
2.2.3	2 ^{ème} méthode de LAGRANGE :	23
2.2.4	Exemple :	23
2.3	Méthode des différences finies :	25
2.4	Exemple :	27
3	Intégration Numérique	29
3.1	Introduction :	29
3.2	Formulation Mathématique :	29
3.2.1	Formule de Newton-Côte :	30
3.2.2	Formule de Trapèze :	32
3.2.3	Formule du Trapèze Généralisée :	33
3.2.4	Formule de SIMPSON :	33
3.2.5	Formule de SIMPSON Généralisée :	33
3.2.6	Exemples :	34
4	Résolution des équations différentielles ordinaires :	36
4.1	Introduction générale :	36
4.2	Méthode d'Euler :	37
4.3	Méthode d'Euler améliorée (Implicite) :	39
4.4	Méthode de Runge-Kutta :	39
5	Résolution directe des système d'équations linéaires	43
5.1	Introduction :	43
5.2	Méthodes directes :	44
5.2.1	Méthode de GAUSS :	44
5.2.2	Méthode de GAUSS-JORDAN :	49
5.2.3	Méthode de CHOLESKI :	50

6	Méthode de résolution approximative des systèmes d'équations linéaires	57
6.1	Introduction :	57
6.2	Méthodes itératives :	57
6.2.1	Méthode de JACOBI :	58
6.2.2	Méthode de GAUSS-SEIDEL :	61
II	Exercices	65
III	Algorithmes	138
7	Algorithmes	139
7.1	Introduction :	139
7.2	Algorithme de Zéro d'une fonction :	140
7.2.1	Algorithme de la méthode de Dichotomie :	140
7.2.2	Algorithme de la méthode du Point fixe :	141
7.2.3	Algorithme de la méthode de Newton-Raphson :	141
7.3	Systèmes d'équations linéaires : Méthodes directes :	142
7.3.1	Algorithme de la méthode de Gauss :	142
7.3.2	Algorithme de la méthode de Jordan :	144
7.3.3	Algorithme de la méthode de LU :	145
7.3.4	Algorithme de la méthode de Choleski :	147
7.4	Systèmes d'équations linéaires : Méthodes itératives :	149
7.4.1	Algorithme de la méthode de Jacobi :	149
7.4.2	Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel :	149
7.5	Intégrations numériques :	150
7.5.1	Algorithme de la méthode de Trapèze :	150
7.5.2	Algorithme de la méthode de Simpson :	150
7.6	Équations différentielles :	151
7.6.1	Algorithme de la méthode de Rung Kutta :	151

TABLE DES FIGURES

1.1	Fonction $f(x)$	5
1.2	Méthode Point fixe	11
1.3	Méthode de Newton : Fonction $f(x)$	16
4.1	Méthode d'Euler & Solution Exacte	39
4.2	Méthode de Runge-Kutta	40
4.3	Méthode d'Euler, Runge-Kutta & Solution Exacte	42
6.1	Méthode d'Euler, Runge-Kutta & Solution Exacte.	124

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Exemple :Méthode de Dichotomie $\sqrt{3}$	9
1.2	Exemple :Méthode de Dichotomie	10
1.3	Exemple 1 :Méthode de Point fixe	14
1.4	Exemple 2 :Méthode de Point fixe	15
1.5	Exemple 1 :Méthode de Newton	18
1.6	Exemple 2 :Méthode de Newton	19
2.1	Tableau Ascendant	25
2.2	<i>Tableau Descendant</i>	26
2.3	Exemple Différences finies	27
2.4	Exemple :Tableau ascendant	27
2.5	Exemple :Tableau descendant	28
3.1	Trapèze $n = 4$	34
3.2	Trapèze $n = 8$	34
4.1	Méthode d'Euler	38
4.2	Méthode de Runge-Kutta	42
6.1	Exe 1 :Méthode de Dichotomie	67

LISTE DES TABLEAUX

6.2	Exe 1 :Méthode du point fixe	68
6.3	Exe 1 :Méthode de Newton	69
6.4	Exe 2 :Méthode de Dichotomie	70
6.5	Exe 2 :Méthode de Dichotomie	71
6.6	Exe 2 :Méthode de Dichotomie	72
6.7	Exe 2 :Méthode du point fixe	73
6.8	Exe 2 :Méthode du point fixe	74
6.9	Exe 2 :Méthode du point fixe	74
6.10	Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson	75
6.11	Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson	75
6.12	Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson	76
6.13	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	78
6.14	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	79
6.15	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	80
6.16	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	81
6.17	Exe 3 :Méthode du point fixe	82
6.18	Exe 3 :Méthode du point fixe	83
6.19	Exe 3 :Méthode du point fixe	84
6.20	Exe 3 :Méthode du point fixe	85
6.21	Exe 3 :Méthode de Newton	86
6.22	Exe 3 :Méthode de Newton	87
6.23	Exe 3 :Méthode de Newton	88
6.24	Exe 3 :Méthode de Newton	89
6.25	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	91
6.26	Exe 3 :Méthode de Newton	92
6.27	Exe 3 :Méthode de Dichotomie	96
6.28	Exe 5 :Méthode du point fixe	97
6.29	Exe 5 :Méthode de Newton	98
6.30	Méthode d'Euler	120
6.31	Méthode de Runge-Kutta 2	122

LISTE DES TABLEAUX

6.32	Méthode de Runge-Kutta 4	123
6.33	Méthode d'Euler	125
6.34	Méthode de Runge-Kutta 2	127
6.35	Méthode de Runge-Kutta 4	129

AVANT-PROPOS

Le document est structuré en trois parties dont la première est consacrée aux cours des méthodes numériques avec exemples d'application pour chaque méthode, la deuxième partie est réservée aux exercices résolus étape par étape et la troisième partie comporte les algorithmes des méthodes numériques utilisées dans les deux parties précédentes pour permettre aux étudiants la programmation de ces méthodes numériques en utilisant le langage de programmation choisi.

Le document est un support de cours et exercices pouvant servir les étudiants de licence et master pour les filières scientifiques de génie mécanique, Génie des procédés, Génie électrique, Génie civil et Hydraulique.

Première partie

Cours

0.1 Introduction

En mathématiques, parfois la résolution de certains problèmes analytiquement est délicate (difficile) ou même impossible pour certains cas, c'est pourquoi on fait appel aux méthodes numériques qui donnent des solutions proches ou approximatives.

Les méthodes numériques ont une très grande importance dans la résolution de beaucoup de problèmes tels que ceux pour la résolution des systèmes des équations linéaires comme l'élimination de Gauss-Jordan, méthode de factorisation de CHOLESKI, l'algorithme de simplexe en optimisation linéaire.

Même quand une méthode directe existe, une méthode itérative peut être utilisée car elle est souvent plus efficace.

Les méthodes numériques sont utilisées aussi pour résoudre les problèmes aux équations différentielles (problèmes aux dérivées partielles), les problèmes d'intégration, problèmes de minimisation des fonctions, Interpolations polynomiales, la résolution des systèmes des équations linéaires et non linéaires ... etc.

CHAPITRE 1

ZÉRO D'UNE FONCTION

1.1 Introduction :

Lorsque les méthodes analytiques deviennent incapables ou difficiles d'être utilisées pour résoudre un tel problème on fait recourt à des méthodes approchées qui sont très efficaces et très utilisées dans la pratique, un parmi ces problèmes est la détermination des racines d'une équation $f(x) = 0$ lorsque l'expression de $f(x)$ est de plus en plus très compliquée.

Il existe plusieurs méthodes permettant la résolution du problème donné parmi lesquelles on peut citer : la méthode des bisections (Méthode de Dichotomie), la méthode des approximations successives (méthode du point fixe) et la méthode des tangentes dites de Newton-Raphson.

Pour que la fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ possède au moins une racine dans cet intervalle, il faut que $f(a) \times f(b) < 0$

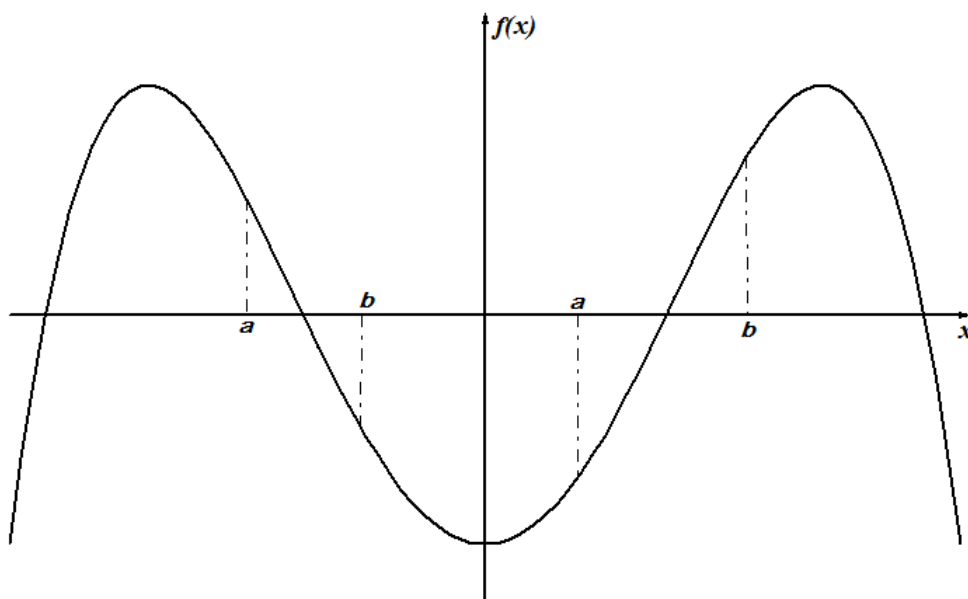


FIGURE 1.1 – Fonction $f(x)$

1.2 Méthode des bisections (Dichotomie) :

La méthode des bisections connue aussi sous le nom de la méthode de Dichotomie est une méthode qui permet de déterminer la racine de la fonction $f(x)$ se base sur les éliminations successives des domaines en suivant les étapes données ci-dessous :

- 1 - On divise l'intervalle $[a; b]$ en deux parties égales $[a; c]$ et $[c; b]$ avec $c = \frac{a+b}{2}$
- 2 - Parmi les deux, on garde l'intervalle vérifiant la condition d'existence de racine, c'est-à-dire : si $f(a) \times f(c) < 0$ le nouvel intervalle soit $[a; c]$ sinon $[c; b]$
- 3 - On répète les étapes 1 et 2 jusqu'à ce que $|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$ avec ϵ un nombre positif très petit (précision de convergence).

La méthode des bisections dite aussi méthode de Dichotomie est une méthode itérative, elle nécessite le choix d'un estimé qu'on doit corriger au cours de chaque itération.

Le nombre d'itérations nécessaire pour que la méthode converge est donnée par la relation :

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}$$

La méthode peut se résumer dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1: Algorithme de DICHOTOMIE.

Input : Donner les valeurs de a, b et ϵ

```
1  $D = |b - a|$ 
2  $i = 0; x = a$ 
3 while  $D > \epsilon$  do
4    $x_a = x$ 
5    $x = \frac{a + b}{2}$ 
6   if  $f(a) \times f(x) < 0$  then
7      $b = x$ 
8   else
9      $a = x$ 
10  end
11   $D = |x - x_a|$ 
12   $i = i + 1$ 
13 end
14 Return  $x$ 
```

1.2.1 Script matlab :

```
function Dichotomie
%=====
%Programme pour le calcul de zéro d'une fonction (f(x)=0
% Méthode de Dichotomie
%=====
clear ;
clc ;
a=input('donner la valeur de a=');
b=input('donner la valeur de b=');
eps=input('donner le nombre de chiffres après la virgule=');
Dif=b-a;
fa=f(a);
fb=f(b);
x(1)=0.5*(a+b);
x(1)=ARROND _ VAL(x(1),eps);
fx=f(x(1));
i=1;
while(Dif>eps)
i=i+1;
if(f(x(i-1))*f(a)<0)
b=x(i-1);
elseif(f(x(i-1))*f(b)<0)
a=x(i-1);
end
x(i)=0.5*(a+b);
x(i)=ARROND _ VAL(x(i),eps);
Dif=abs(x(i)-x(i-1));
X=x(i);
end
end
```

```

function y=ARROND _ VAL(VAL,EPS)
%=====
% Arrondissement d'une valeur suivant le nombre
% de chiffres après la virgule
%=====
VAL1=VAL;
T=floor(VAL/EPS);
N1=abs(floor(VAL/EPS));
Z=abs(VAL/EPS)-N1;
if (Z>=0.5)
VAL=(N1+1)*EPS;
else
VAL=N1*EPS;
end
if VAL1<0.0
VAL=-VAL;
end
y=VAL;
return
end
function y=f(x)
%=====
% Fonction à résoudre
%=====
y = x2 - 3;
end

```

1.2.2 Exemple 1 :calcul de $\sqrt{3}$

Pour mieux comprendre l'algorithme de résolution par la méthode de dichotomie dite aussi méthode des bisections, on va calculer la valeur de la racine de 3 ($\sqrt{3}$).

$$x = \sqrt{3} \implies x^2 = 3 \implies x^2 - 3 = 0$$

d'où la fonction $f(x) = x^2 - 3$ pour $x \in]1; 2[$

$f(1) = -2$ et $f(2) = 1$ d'où $f(1) \times f(2) = -2 \times 1 = -2 < 0$ d'où $a = 1$ et $b = 2$

On calcul la moitié $c = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} = 1.50$

On calcul $f(1.50) = -0.75$.

On élimine une partie : $f(a) \times f(b) > 0$ et $f(c) \times f(b) < 0$ donc le nouvel intervalle est $]a; b[=]1.50; 2[$.

On calcul à nouveau la moitié de cet intervalle $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.50+2}{2} = 1.75$

Calculons $f(c) = 0.063$ le nouvel intervalle devient $]1.50; 1.75[$

la suite des calculs sera regroupé dans le tableau suivant :

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	2,000	1,500	-2,000	1,000	-0.750	-
1	1,500	2,000	1,750	-0,750	1,000	0,063	0,250
2	1,500	1,750	1,625	-0,750	0,063	-0.359	0,125
3	1,750	1,625	1,688	0.063	-0.359	-0,152	0,063
4	1,750	1,688	1,719	0,063	-0.152	-0,046	0,031
5	1,750	1,719	1,734	0.063	-0.046	0,008	0,016
6	1,734	1,719	1,727	0.008	-0.046	-0.019	0,008
7	1,734	1,727	1,730	0.008	-0.019	-0,005	0,004
8	1,734	1,730	1,732	0.008	-0.005	0,001	0,002
9	1,730	1,732	1,731	-0.005	0.001	-0,002	0,001

TABLE 1.1 – Exemple :Méthode de Dichotomie $\sqrt{3}$

On peut remarquer que $|x_9 - x_8| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine de 3 est $x = 0.73$ à 2 chiffres prés.

Exemple 2 :

Essayer de faire la même chose pour trouver la racine de 7.

1.2.3 Exemple 3 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$

Soit $f(x) = x^3 + 4x - 2$ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction possède une racine dans l'intervalle $[0; 1]$ car :

$f(0) = -2$ et $f(1) = 5$, d'où :

$f(0) \times f(1) = -2 \times 5 = -10 < 0$, il existe une racine pour laquelle la fonction s'annule :

On divise l'intervalle $[0; 1]$ en deux parties égales, on aura : $[0; 0.5]$ et $[0.5; 1]$.

On calcul $f(0.5) = 0.125$.

On garde l'intervalle qui vérifie la condition d'existence : $f(0) \times f(0.5) = -2 \times 0.125 = -0.25 < 0$, donc le nouvel intervalle est $[0; 0.5]$.

On re-divise cet intervalle en deux parties égales : $[0; 0.25]$ et $[0.25; 0.5]$.

On calcul $f(0.25) = -0.984$.

On garde l'intervalle qui vérifie la condition d'existence : $f(0) \times f(0.25) = -2 \times -0.984 = 1.968 > 0$, donc le nouvel intervalle est $[0.25; 0.5]$.

et à chaque fois, on répète les mêmes opérations jusqu'à ce que la différence entre deux valeurs successives du centre par valeur absolue soit inférieure ou égale à ϵ , le reste des étapes sont regroupées dans le tableau suivant :

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	1,000	0,500	-2,000	3,000	0,125	-
1	0,000	0,500	0,250	-2,000	0,125	-0,984	0,250
2	0,250	0,500	0,375	-0,984	0,125	-0,447	0,125
3	0,375	0,500	0,438	-0,447	0,125	-0,166	0,063
4	0,438	0,500	0,469	-0,166	0,125	-0,022	0,031
5	0,469	0,500	0,484	-0,022	0,125	0,051	0,016
6	0,469	0,484	0,477	-0,022	0,051	0,014	0,008
7	0,469	0,477	0,473	-0,022	0,014	-0,004	0,004
8	0,473	0,477	0,475	-0,004	0,014	0,005	0,002
9	0,473	0,475	0,474	-0,004	0,005	0,001	0,001

TABLE 1.2 – Exemple :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_9 - x_8| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la fonction est $x = 0.474$ à 3 chiffres près.

1.3 Méthode du Point fixe :

Cette méthode est connue aussi sous le nom de la méthode des approximations successives.

Dans cette méthode pour résoudre le problème de zéro d'une fonction $f(x) = 0$ (détermination de la valeur de x pour laquelle $f(x)$ s'annule) dans l'intervalle $[a; b]$, on doit réécrire la fonction $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ et on forme la suite $x_i = g(x_{i-1})$. La suite peut converger comme elle peut aussi diverger tous dépend du choix de $g(x)$. Pour que la suite converge vers la solution recherchée, il faut satisfaire la condition suivante :

$$|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a; b]$$

x_i peut être considérée comme racine recherchée de la fonction $f(x)$ si la condition de convergence $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$ est vérifiée.

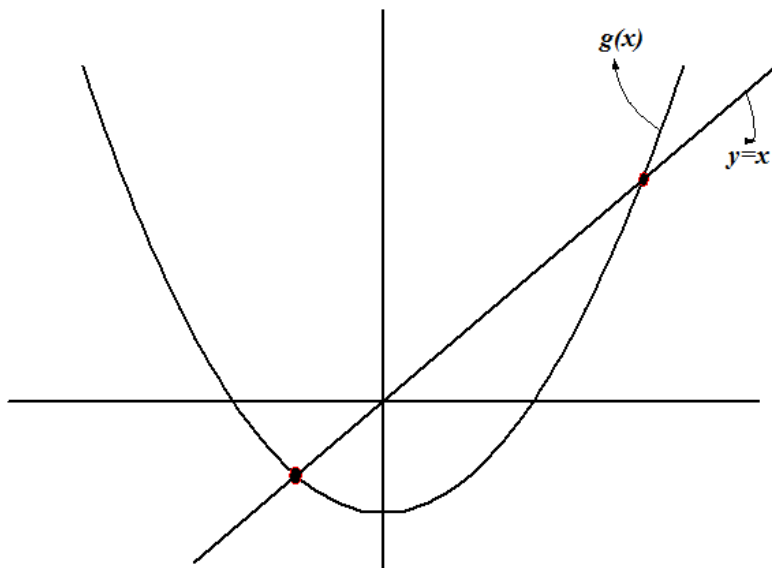


FIGURE 1.2 – Méthode Point fixe

```

function Point_fix
%=====
%Programme pour le calcul de zéro d'une fonction (f(x)=0)
% Méthode du Point fixe
%=====

clear;
clc;
a=input('donner la valeur de a=');
b=input('donner la valeur de b=');
eps=input('donner le nombre de chiffres après la virgule=');
Dif=b-a;
fa=f(a);
fb=f(b);
if(fa*fb<0)
i=1;x(1)=a;

while(Dif>eps)
i=i+1;
x(i)=g(x(i-1));
x(i)=ARROND _ VAL(x(i),eps);
disp([x(i-1),x(i)]);
Dif=abs(x(i)-x(i-1));
X=x(i);
end
else
fprintf('Pas de racine dans cet intervalle');
end
end

function y=ARROND _ VAL(VAL,EPS)
%=====
% Arrondissement d'une valeur suivant le nombre
% de chiffres après la virgule
%=====
VAL1=VAL;
c=VAL/EPS;
T=floor(VAL/EPS);
N1=abs(floor(VAL/EPS));
Z=abs(VAL/EPS)-N1;
if (Z>=0.5)
VAL=(N1+1)*EPS;
else
VAL=N1*EPS;
end

```

```

if VAL1<0.0
VAL=-VAL;
end
y=VAL;
return
end

function y=g(x)
%=====
% fonction x=g(x)
%=====
y = -2/(x + 3) + 3;
end

function y=f(x)
%=====
% Fonction f(x) à résoudre
%=====
y = x^2 - 7;
end

```

1.3.1 Exemple 1 : $\sqrt{3}$

Reprenons le premier exemple vu dans la section précédente pour calculer la racine carrée du nombre 3 ($\sqrt{3}=?$).

Comme nous avons déjà vu la fonction à résoudre est $f(x) = x^2 - 3 = 0$

Cette fonction peut être réécrite avec plusieurs façons parmi lesquelles on va choisir la forme suivante :

$x = \frac{-1}{x+2} + 2$ d'où $g(x) = \frac{-1}{x+2} + 2$ et la dérivée par rapport à x est donnée par :

$$g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Le problème maintenant c'est de vérifier que : $|g'(x)| < 1 \forall x \in]a; b[$

On a :

$1 < x < 2 \Rightarrow 3 < x + 2 < 4 \Rightarrow 9 < (x + 2)^2 < 16 \Rightarrow \frac{1}{16} < \frac{1}{(x + 2)^2} < \frac{1}{9} \Rightarrow$
 $\frac{1}{(x + 2)^2} < 1$ On va construire la suite géométrique $x_{i+1} = g(x_i)$ et on calcul à chaque fois la différence $|x_i - x_{i-1}|$ jusqu'à ce que cette différence soit inférieure à ϵ

Dans le tableau suivante les calculs sont résumés :

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,0000	1.6667	-
1	1.6667	1.7273	0.061
2	1.7273	1.7317	0.004
3	1.7317	1.7320	0.003
4	1.7320	1.7320	0.000

TABLE 1.3 – Exemple 1 :Méthode de Point fixe

On peut clairement remarquer à partir du tableau que $x = g(x)$ est trouvée pour la valeur de $x = 1.732$ qui représente la solution du problème.

D'une façon générale la racine carrée d'un nombre a est donnée par la suite : $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$

1.3.2 Exemple 2 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$

On va reprendre le même exemple traité avec la méthode de Dichotomie, la fonction $f(x) = x^3 + 4x - 2$ définie et continue sur $\mathbb{R}$, possédant une racine dans l'intervalle $[0; 1]$ $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x - 2 = 0$ peut être réécrite avec plusieurs façons parmi lesquelles on va choisir l'écriture suivante :

$$= x^3 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4) - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{x^2 + 4}$$

d'où : $g(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$

$$g'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 4)^2}$$

On peut clairement remarquer que $g'(x)$ décroît de 0 jusqu'à $-\infty$ pour tous $x \in [0; +\infty[$ donc $g'(x)$ est monotone dans l'intervalle $[0; 1]$ et parce que $|g'(1)| = \frac{4}{25}$ et $g'(0) = 0$ donc : $\forall x \in [0; 1] \Rightarrow |g'(x)| < 1$

On choisi un estimé $x_0 = 0$ par exemple de l'intervalle et on forme la suite $x_i = g(x_{i-1})$:
On calcul $x_1 = g(x_0) \Rightarrow x_1 = 0.5$ et ensuite $x_2 = g(x_1) \Rightarrow x_2 = 0.471$ et ainsi de suite jusqu'à ce que la condition de convergence soit satisfaite.

Les calculs peuvent être organisés dans le tableau suivant :

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	0.500	-
1	0,500	0.471	0.500
2	0,471	0.474	0.029
3	0,474	0.473	0.003
4	0,473	0.473	0.001

TABLE 1.4 – Exemple 2 : Méthode de Point fixe

On peut constater à partir du tableau que $x_4 - x_3 = 0.001$ d'où on peut considérer que la solution du problème à 0.001 près est donnée par $x = 0.473$

1.4 Méthode de Newton-Raphson :

Est une méthode parmi les méthodes utilisées pour trouver la ou les racine(s) d'une fonction définie et continue sur un intervalle. Elle se base sur le théorème de TAYLOR pour le développement d'une fonction au voisinage d'une valeur au premier ordre. Une telle fonction $f(x)$ en utilisant le développement de TAYLOR au premier ordre s'écrit comme suit :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Le but de la méthode de Newton-Raphson est de trouver la valeur ou les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Elle se résume donc dans l'algorithme suivant :

- 1 - Choisir un estimé.
- 2 - Calculer la nouvelle valeur de x par : $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$
- 3 - Vérifier la condition de convergence : $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$
- 4 - Si la condition n'est pas vérifiée aller à 2
- 5 - Si la condition est vérifiée arrêter et $x = x_i$.

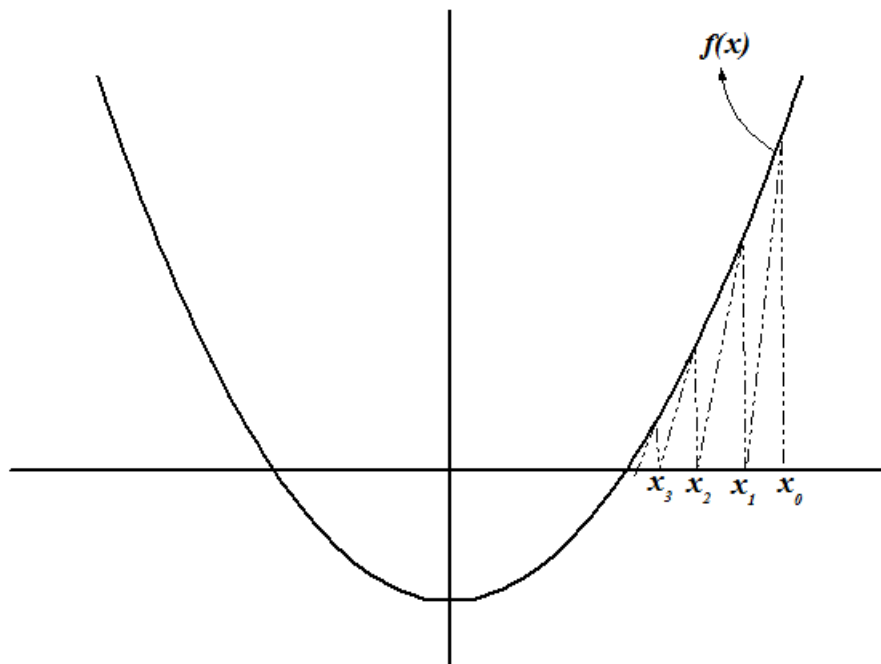


FIGURE 1.3 – Méthode de Newton : Fonction $f(x)$

1.4.1 Script matlab :

```
function Newton _ Raphson
%=====
%Programme pour le calcul de zéro d'une fonction (f(x)=0
% Méthode de Newton-Raphson
%=====
clear ;
clc ;
a=input('donner la valeur de a=');
b=input('donner la valeur de b=');
eps=input('donner le nombre de chiffres après la virgule=');
Dif=b-a;
fa=f(a);
fb=f(b);
if(fa*fb<0)
i=1 ;x(1)=a;
while(Dif>eps)
i=i+1;
x(i) = x(i - 1) - f(x(i - 1))/fp(x(i - 1));
x(i)=ARROND _ VAL(x(i),eps);
disp([x(i-1),f(x(i-1)),fp(x(i-1)),x(i)]);
Dif=abs(x(i)-x(i-1));
X=x(i);
end
else
fprintf('Pas de racine dans cet intervalle');
end
```

```

function y=ARROND _ VAL(VAL,EPS)
%=====
% Arrondissement d'une valeur suivant le nombre
% de chiffres après la virgule
%=====
VAL1=VAL;
T=floor(VAL/EPS);
N1=abs(floor(VAL/EPS));
Z=abs(VAL/EPS)-N1;
if (Z>=0.5)
    VAL=(N1+1)*EPS;
else
    VAL=N1*EPS;
end
if VAL1<0.0
    VAL=-VAL;
end
y=VAL;
return
end
function y=f(x)
%=====
% Fonction à résoudre
%=====
 $y = x^2 - 3;$ 
end

```

1.4.2 Exemple 1 : $\sqrt{3}$

L'exemple du calcul de la racine carrée de 3 sera utilisé pour bien comprendre la méthode de résolution du zéro d'une fonction par la méthode de Newton-Raphson.

On a déjà la fonction à résoudre $f(x) = x^2 - 3 = 0$

la dérivée de la fonction $f(x)$ est $f'(x) = 2x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,0000	-2,0000	2,0000	2.0000	-
1	2,0000	1,0000	4,0000	1.7500	0.25
2	1.7500	0.0625	3.5000	1.7321	0.0179
3	1.7321	0.0003	3.4643	1.7321	0.0000

TABLE 1.5 – Exemple 1 :Méthode de Newton

On peut constater à partir du tableau que $x_3 - x_2 = 0.000$ d'où on peut considérer que la solution du problème à 0.001 près est donnée par $x = 1.732$

1.4.3 Exemple 2 : $f(x) = x^3 + 4x - 2$

On reprend le même exemple traité par la méthode de Dichotomie et la méthode du point fixe.

La fonction $f(x) = x^3 + 4x - 2$ définie et continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction possède une racine dans l'intervalle $[0; 1]$ puisqu'elle vérifie la condition d'existence : $f(0) \times f(1) = -2 \times 5 = -10 < 0$

l'étape suivante consiste à calculer la dérivée de la fonction $f(x) : f'(x) = 3x^2 + 4$

On va choisir $x_0 = 0$ et ensuite on calcul $f(x)$ et $f'(x)$:

$$f(0) = -2, f'(0) = 4.$$

Calculons ensuite la valeur de x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-2}{4} = 0.5$$

de même pour calculer la valeur de x_2 , on doit calculer $f(0.5)$ et $f'(0.5)$:

$$f(0.5) = 0.125 \text{ et } f'(0.5) = 4.75$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{0.125}{4.75} = 0.474$$

Et on répète ces étapes jusqu'à ce que la condition de convergence soit vérifiée.

On peut regrouper les calculs dans le tableau suivant :

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	-2,000	4,000	0,500	-
1	0,500	0,125	4,750	0.474	0.5
2	0,474	0,001	4.673	0,473	0.026
3	0,473	0,000	4,673	0,473	0.001

TABLE 1.6 – Exemple 2 :Méthode de Newton

On peut constater à partir du tableau que $x_3 - x_2 = 0.001$ d'où on peut considérer que la solution du problème à 0.001 près est donnée par $x = 0.473$.

CHAPITRE 2

INTERPOLATIONS POLYNÔMIALES

2.1 Introduction :

Dans l'analyse numérique, l'interpolation polynomiale a une très grande importance dans la résolution des équations différentielles, dans la dérivation et dans l'intégration. On s'intéresse aux interpolations polynomiales lorsqu'on ne connaît que quelques images de certains points. Et à partir ou à l'aide de ces données on peut construire la fonction permettant de donner d'autres images d'un autre ensemble de points dans cet intervalle. Donc le but de ces interpolations est de trouver l'expression de la fonction $f(x)$ à partir d'un ensemble de points dont on connaît les images. On peut distinguer plusieurs méthodes parmi lesquelles on peut citer : La méthode de Lagrange, la méthode des différences finies et celle-ci de Newton.

2.2 Méthode de LAGRANGE :

Soit un ensemble de $n+1$ points distincts $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ pour lesquelles on connaît les $n+1$ images $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ d'une fonction $f(x)$ inconnue, il existe alors un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n assurant la relation entre les différentes

Le seul polynôme passant par les points donnés dans le tableau 2.2.2 est de la forme : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$.

On a 4 points alors $n = 4$ d'où le polynôme est de degré 3 au maximum et la relation précédente devient : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

On construit le système des équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Le système d'équations peut être écrit aussi sous la forme :

$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 6 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 2 - a_2 - a_3 \\ a_2 + 3a_3 = 1 \\ 2a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 1 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Après avoir trouver les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 , le polynôme recherché est : $f(x) = x^2 + x - 2$

Cette première méthode de Lagrange devient lourde et compliquée plus en plus le degré du polynôme augmente. A cet effet que nous allons utiliser une autre méthode qui nous permet de déterminer explicitement le polynôme recherché sans passer par la résolution du système des équations.

2.2.3 2^{ème} méthode de LAGRANGE :

A cause de des problème de résolution des systèmes d'équations à grandes dimensions, LAGRANGE a proposé une autre méthode basée sur l'utilisation des fonctions dites de pondérations ou connues aussi sous le nom des fonctions d'interpolations, et le polynôme recherché est donné par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \times f(x_i)$$

Où $L_i(x)$:représentent les fonctions de pondération ou dites aussi fonctions d'interpolation. La valeur de chaque fonctions d'interpolation vérifient la propriété suivante :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

En respectant et appliquant cette propriété, on peut aboutir à la relation de chaque fonction d'interpolation par :

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.5)$$

2.2.4 Exemple :

On reprend le même exemple traité dans la ^{re} méthode de LAGRANGE :

A partir de 4 points on ne peut créer qu'un seul polynôme d'ordre inférieur ou égale à 3 :

Pour chaque point, on forme une fonction d'interpolation dont l'expression est donnée par la relation (2.5).

Pour $i = 0$

$$L_0(x) = \prod_{j=0, \dots, 3}^{j \neq 0} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{-1 \times -2 \times 1} = \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2) = \frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2)$$

$$L_0(x)f(x_0) = -2 \times \frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2) = -x^3+2x^2+x-2 \quad (2.6)$$

Pour $i = 1$

Puisque $f(x_1) = 0$ donc :

$$L_1(x)f(x_1) = 0 \quad (2.7)$$

Pour $i = 2$

$$L_2(x) = \prod_{j=0, \dots, 3}^{j \neq 2} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{2 \times 1 \times 3} = \frac{1}{6}(x^2-x)(x+1) = \frac{1}{6}(x^3-x)$$

$$L_2(x)f(x_2) = 4 \times \frac{1}{6}(x^3-x) = \frac{2}{3}(x^3-x) \quad (2.8)$$

Pour $i = 3$

$$L_3(x) = \prod_{j=0, \dots, 3}^{j \neq 3} \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-1 \times -2 \times -3} = -\frac{1}{6}(x^2-x)(x-2) = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$

$$L_3(x)f(x_3) = 2 \times \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) = \frac{1}{3}(x^3-3x^2+2x) \quad (2.9)$$

Le polynôme $f(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) \times f(x_i) = (-x^3+2x^2+x-2) + 0 + \frac{2}{3}(x^3-x) + \frac{1}{3}(x^3-3x^2+2x) = x^2+x+2$

$$f(x) = x^2+x+2$$

2.3 Méthode des différences finies :

Soient un $n + 1$ ensemble de points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que $x_{i+1} - x_i = \Delta x = C^t e$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ et $n+1$ images $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ d'une fonction $f(x)$ inconnue. Contrairement aux précédentes méthodes, la méthode des différences finies ne peut être utilisée que si $\Delta x = C^t e$. Cette méthode est dite aussi méthode de Newton, elle se base sur le calcul des différences $\Delta^i y$ en commençant par le calcul des premières différences $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ en suite les 2^{ime} différences : $\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ jusqu'à $\Delta^n y = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Ces différences sont réarrangées dans un tableau d'une manière ascendante ou d'une manière descendante :

Pour le tableau ascendant, les différences sont données par la relation :

$$\Delta^j y_i = \Delta^{j-1} y_{i+1} - \Delta^{j-1} y_i$$

Et pour le tableau descendant, les différences sont données par la relation :

$$\Delta^j y_i = \Delta^{j-1} y_i - \Delta^{j-1} y_{i-1}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...	$\Delta^{n-1} y$	$\Delta^n y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	...	$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	...	$\Delta^{n-1} y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	...		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		...		
...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}					
x_n	y_n						

TABLE 2.1 – Tableau Ascendant

Le polynôme dans ce cas est exprimé par la relation suivante :

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta^2 x} (x - x_0) \times (x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\Delta^3 x} (x - x_0) \times (x - x_1)(x - x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta^n x} (x - x_0) \times (x - x_1) \times (x - x_2) \times \dots \times (x - x_{n-1}) \quad (2.10)$$

Ou aussi sous la forme condensée :

$$f(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!\Delta^i x} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...	$\Delta^{n-1} y$	$\Delta^n y$
x_0	y_0				...		
x_1	y_1	Δy_1			...		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		...		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	...		
...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_{n-1}$	...	$\Delta^{n-1} y_{n-1}$	
x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	...	$\Delta^{n-1} y_n$	$\Delta^n y_n$

TABLE 2.2 – *Tableau Descendant*

Le polynôme dans ce cas est exprimé par la relation suivante :

$$f(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta x} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_n}{2\Delta^2 x} (x - x_n) \times (x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_n}{3!\Delta^3 x} (x - x_n) \times (x - x_{n-1}) \times (x - x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_n}{n!\Delta^n x} (x - x_n) \times (x - x_{n-1}) \times (x - x_{n-2}) \times \dots \times (x - x_1) \quad (2.11)$$

Ou aussi sous la forme condensée :

$$f(x) = y_n + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_n}{i!\Delta^i x} \prod_{j=n}^{n-i+1} (x - x_j)$$

2.4 Exemple :

On reprend le même exemple traité en utilisant la 1^{re} et la 2^{me} méthode de LAGRANGE pour trouver le polynôme passant par les points suivants :

x	0	1	2	-1
$f(x)$	-2	0	4	-2

TABLE 2.3 – Exemple Différences finies

Le polynôme est de degré 3 au maximum puisqu'on a que 4 points avec leurs images, d'où il est de la forme : $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
 Construisons le tableau ascendant des différences finies :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	-2	0	2	0
0	-2	2	2	
1	0	4		
2	4			

TABLE 2.4 – Exemple :Tableau ascendant

Le polynôme recherchée par la méthode des différences finies dans le cas ascendant est :

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta^2 x}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta^3 x}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = -2 + \frac{2}{2}(x + 1)x \Rightarrow f(x) = -2 + x(x + 1)$$

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

Essayons maintenant de construisons le tableau descendant des différences finies :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	-2			
0	-2	0		
1	0	2	2	
2	4	4	2	0

TABLE 2.5 – Exemple :Tableau descendant

Le polynôme recherchée par la méthode des différences finies dans le cas ascendant est :

$$f(x) = y_3 + \frac{\Delta y_3}{\Delta x}(x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2\Delta^2 x}(x - x_3)(x - x_2) + \frac{\Delta^3 y_3}{6\Delta^3 x}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$f(x) = 4 + 4(x - 2) + \frac{2}{2}(x - 2)(x - 1) \Rightarrow f(x) = 4 + 4x - 8 + x^2 - 3x + 2$$

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

CHAPITRE 3

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

3.1 Introduction :

Soit une fonction $f(x)$ continue sur le segment $[a; b]$ et si l'on connaît sa fonction primitive, l'intégrale définie de cette fonction dans l'intervalle donné est calculée par la formule de Newton - Leibniz :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.1)$$

Où $F(x)$ est la primitive de $f(x)$ autrement dit $f(x) = F'(x)$. Mais dans la plupart des cas, la primitive est trop compliquée et le calcul de l'intégrale devient difficile ou impossible plus à la difficulté posée lors du calcul des intégrales multiples c'est à cet effet qu'on remède aux méthodes numériques.

3.2 Formulation Mathématique :

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, une fonction peut être représentée ou réécrite sous forme d'un polynôme d'ordre n à partir de $n + 1$ points :

Cette fonction peut être formée ou déterminée par plusieurs manières parmi lesquelles

on a la 2^{ème} méthode de LAGRANGE :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

D'où l'intégral de la fonction s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n L_i(x) \times f(x_i) \right) dx$$

partons de la règle de l'intégrale d'une somme qui représente la somme des intégrales, on peut remplacer la relation précédente par l'expression suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(x) \times f(x_i) dx \right)$$

3.2.1 Formule de Newton-Côte :

Soit $f(x)$ une fonction dont les images ne sont connues que pour certains points équidistants $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dans le segment donné par l'intervalle $[a, b]$

où $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i = x_0 + i \times h$ avec $h = \frac{b-a}{n}$

On développe l'expression précédente de l'intégrale de la fonction $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \right)$$

Remplaçons maintenant la fonction d'interpolation $L_i(x)$ par son expression dans la relation précédente pour avoir :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(f(x_i) \int_a^b \frac{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} dx \right)$$

Pour simplifier cette expression, on doit effectuer un changement de variable : $q \times h = x - x_0$ ce qui nous amène à avoir : $dx = h dq$

Et en suite d'évaluer l'expression :

$$\prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (x - x_j) = (x - x_0) \times (x - x_1) \times (x - x_2) \times \dots \times (x - x_n)$$

en fonction de la nouvelle variable q :

$$(x - x_0) = qh$$

$$(x - x_1) = x - (x_0 + h) = (q - 1)h$$

$$(x - x_2) = (q - 2)h$$

....

....

$$(x - x_j) = (q - j)h$$

$$\prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (x - x_j) = h^n \prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (q - j)$$

De la même façons, on va réécrire la quantité :

$$\prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (x_i - x_j) = (x_i - x_0) \times (x_i - x_1) \times (x_i - x_2) \times \dots \times (x_i - x_n)$$

en fonction de la nouvelle variable q :

$$(x_i - x_0) = (x_0 + ih) - x_0 = ih$$

$$(x_i - x_1) = (x_0 + ih) - (x_0 + h) = (i - 1)h$$

$$(x_i - x_2) = (x_0 + ih) - (x_0 + 2h) = (i - 2)h$$

...

$$(x_i - x_{i-1}) = h$$

$$(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1}) = i!h^i \dots$$

$$(x_i - x_{i+1}) = -h$$

$$(x_i - x_{i+2}) = -2h$$

...

$$(x_i - x_n) = (x_0 + ih) - (x_0 + nh) = -(n - i)h$$

$$(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3}) \dots (x_i - x_n) = (-1)^{n-i} (n - i)! h^{n-i}$$

d'où la quantité

$$\prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (x_i - x_j) = (-1)^{n-i} (n - i)! i! h^n$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \left(\frac{hf(x_i)}{(-1)^{n-i}(n-i)!i!} \int_0^n \prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (q-j) dq \right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^n \left(\frac{f(x_i)}{(-1)^{n-i}(n-i)!i!} \int_0^n \prod_{j=0, \dots, n}^{j \neq i} (q-j) dq \right)$$

à partir de cette expression dite de Newton-Côte, deux cas particuliers peuvent être distingués :

- 1) Formule du Trapèze pour $n=1$;
- 2) Formule de SIMPSON pour $n=2$.

3.2.2 Formule de Trapèze :

Cette formule correspond à la formule de Newton-Côte avec $n = 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h \sum_{i=0}^1 \left(\frac{f(x_i)}{(-1)^{1-i}(1-i)!i!} \int_0^1 \prod_{j=0, \dots, 1}^{j \neq i} (q-j) dq \right) \\ &= h \left(-f(x_0) \int_0^1 (q-1) dq + f(x_1) \int_0^1 q dq \right) \\ &= h \left(-f(x_0) \left(\frac{1}{2}q^2 - q \right)_0^1 + f(x_1) \left(\frac{1}{2}q^2 \right)_0^1 \right) \\ \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour minimiser l'erreur de l'intégrale, on doit augmenter le nombre de points dans l'intervalle autrement dit : on doit diminuer le pas h et par conséquent on obtient les formules des trapèzes et de Simpson généralisées.

La précision dans le calcul augmente et l'erreur du calcul de l'intégrale numérique diminue avec l'augmentation du nombre d'intervalles utilisés :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2} (f(x_2) + f(x_3)) + \\ &+ \frac{h}{2} (f(x_3) + f(x_4)) \dots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

3.2.3 Formule du Trapèze Généralisée :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \quad (3.3)$$

3.2.4 Formule de SIMPSON :

La formule de SIMPSON est un cas particulier correspondant à la formule de Newton-Côte pour $n = 2$ donnée par :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h \sum_{i=0}^2 \left(\frac{f(x_i)}{(-1)^{2-i}(2-i)!i!} \int_0^2 \prod_{j=0, \dots, 2, j \neq i} (q-j) dq \right) \\ &= h \left(f(x_0) \int_0^2 (q-1)(q-2) dq - f(x_1) \int_0^2 q(q-2) dq + f(x_2) \int_0^2 q(q-1) dq \right) \\ &= h \left(f(x_0) \int_0^2 (q^2 - 3q + 2) dq - f(x_1) \int_0^2 (q^2 - 2q) dq + f(x_2) \int_0^2 (q^2 - q) dq \right) \\ &= h \left(f(x_0) \left(\frac{1}{3}q^3 - \frac{3}{2}q^2 + 2q \right)_0^2 - f(x_1) \left(\frac{1}{3}q^3 - q^2 \right)_0^2 + f(x_2) \left(\frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{2}q^2 \right)_0^2 \right) \\ &= h \left(\frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2) \right) \\ \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.5 Formule de SIMPSON Généralisée :

Comme nous l'avons indiqué, avec l'augmentation de nombre d'intervalles, l'erreur de calcul diminue et par conséquent la précision augmente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ &\quad + \frac{h}{3} (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)) + \frac{h}{3} (f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)) \dots \\ &\quad + \frac{h}{3} (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) \quad n = 2m$$

3.2.6 Exemples :

Calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ dans l'intervalle $[0; 2]$ Par la méthode des trapèzes, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Pour calculer l'intégrale numériquement on doit calculer les images de la fonction en quelques points.

On a $h = (b - a)$.

Pour $n = 4$ par exemple on aura $h = 0.5$

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	1.0	1.25	2.0	3.25	5.0

TABLE 3.1 – Trapèze $n = 4$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{4} (1.0 + 2(1.25 + 2.0 + 3.25) + 5) = 4.75$$

Pour $n = 8$ par exemple on aura $h = 0.25$

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	1.0	1.0625	1.25	1.5625	2.0	2.5625	3.25	4.0625	5.0

TABLE 3.2 – Trapèze $n = 8$

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8)$$

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{8} (1.0 + 2 (1.0625 + 1.25 + 1.5625 + 2.0 + 2.5625 + 3.25 + 4.0625) + 5)$$

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = 4.6875$$

Utilisons maintenant la méthode de SIMPSON pour $n = 4$ dont les valeurs sont résumées dans le tableau 3.1.

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{1}{6} (1 + 4 \times 1.25 + 2 \times 2.0 + 4 \times 3.25 + 5.0)$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 4.6667$$

La même valeur est obtenue pour SIMPSON avec $n = 8$.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES :

4.1 Introduction générale :

Une équation, de $n + 1$ variables, reliant une fonction f et ses dérivées successives est dite équation différentielle d'ordre n ($E.D.$) et est donnée par la relation :

$$F(x, f, f', f'', \dots, f^n)(x) = h(x) \quad (4.1)$$

On appelle solution de l'équation différentielle, la fonction f définie et dérivable sur un intervalle et qui vérifie la relation.

On distingue deux type d'équations différentielles :une équation différentielle ordinaire ($E.D.O$) et une équation différentielle partielle dite aussi équation aux dérivées partielles ($E.D.P$).

Contrairement aux équations différentielles partielles où les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes, ces fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable pour les équations différentielles ordinaires.

Les équations différentielles ordinaires d'ordre 1 auxquelles nous nous sommes intéressés dans ce chapitre peuvent être résolues par plusieurs méthodes parmi lesquelles on peut citer : **la méthode d'Euler, la méthode d'Euler améliorée** et celle de **Runge-Kutta**.

4.2 Méthode d'Euler :

La méthode d'Euler pour la résolution des équations différentielles est la méthode la plus simple mais aussi la moins précise parmi les autres.

On considère le problème à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, x) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

y est la variable inconnue donnée en fonction de x .

La solution de ce problème repose sur le développement de Taylor de la fonction y à l'ordre 1 ou aussi sur le calcul de l'intégrale par la méthode du trapèze.

Pour le développement de Taylor de la fonction y

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta^2 x}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta^3 x}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots$$

A l'ordre 1, cette expression s'écrit sous la forme :

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \frac{dy}{dx}$$

Pour un pas constant $\Delta x = h = C^{te}$ on construit une suite :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(y_i, x_i)$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle du 1^{er} ordre suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \\ y(0) = 1.0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y^2 \\ y(0) = 1.0 \end{cases} \quad (4.3)$$

La solution exacte de ce problème est : $-y^{-2}dy = dx$ L'intégration de cette expression permet l'obtention de :

$$-\int y^{-2}dy = \int dx \Rightarrow y^{-1} = x + c \Rightarrow y = \frac{1}{x + c}$$

Pour trouver la valeur de la constante d'intégration, on vérifie la condition initiale $y(x = 0) = 1$ d'où $c = 1$ et par conséquence, on aura :

$$y = \frac{1}{x + 1}$$

i	x_i	Exacte	Euler	Erreur relative
0	0.0	1.0000	1.0000	
1	0.1	0.9091	0.9000	
2	0.2	0.8333	0.8190	
3	0.3	0.7692	0.7519	
4	0.4	0.7143	0.6954	
5	0.5	0.6667	0.6470	
6	0.6	0.6250	0.6052	
7	0.7	0.5882	0.5685	
8	0.8	0.5556	0.5362	
9	0.9	0.5263	0.5075	
10	1.0	0.5000	0.4817	
11	1.1	0.4762	0.4585	

TABLE 4.1 – Méthode d'Euler

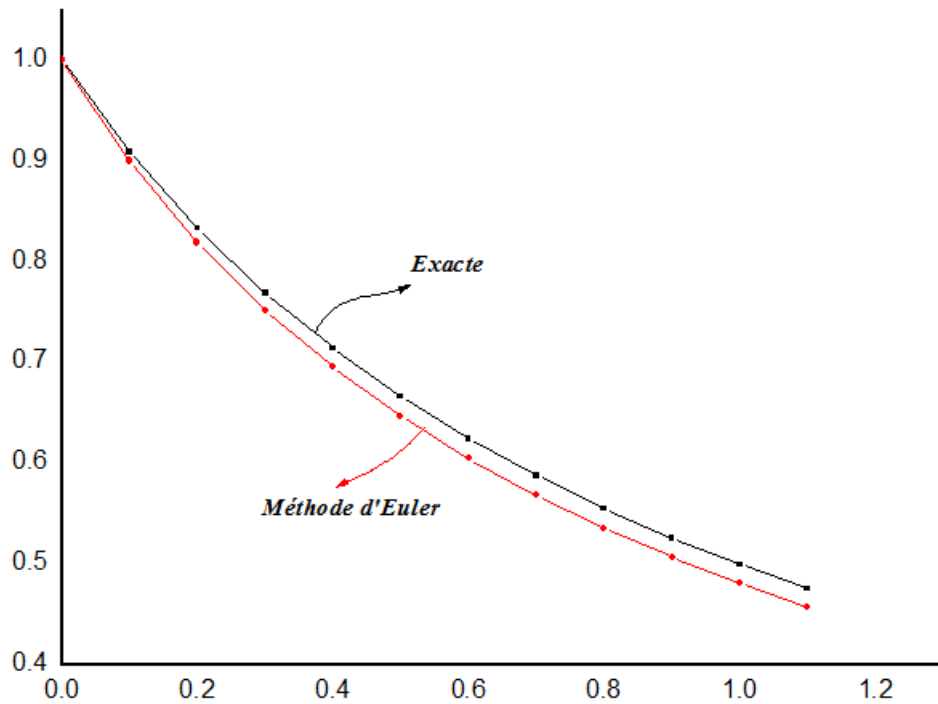


FIGURE 4.1 – Méthode d'Euler & Solution Exacte

4.3 Méthode d'Euler améliorée (Implicite) :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(y_{i+1}, x_{i+1})$$

4.4 Méthode de Runge-Kutta :

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthode numériques qui servent à la résolution des équations différentielles ordinaires, ces méthodes offrent des solutions approximatives très proches de la solution exactes.

A cause de leurs simplicité et facilité de mise en œuvre, ces méthodes parmi les méthodes les plus utilisées.

La formule de Runge-Kutta d'ordre 2 est obtenue par les différences centrées du développement d'ordre 1 de Taylor de fonction :

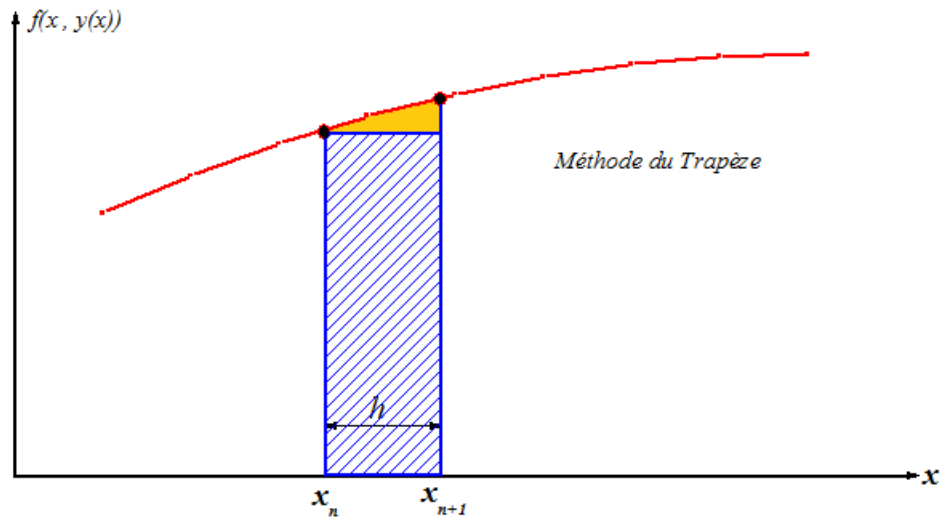


FIGURE 4.2 – Méthode de Runge-Kutta

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

D'où :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\Delta x (k_1 + k_2)$$

Avec :

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad k_2 = f(x_i + \Delta, y_i + \Delta x k_1)$$

La formule de Runge-Kutta d'ordre 4 est développée en se basant sur le calcul de l'intégrale par la méthode de SIMPSON.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

h est le pas donné par : $h = \Delta x$ d'où :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Ce qui donne :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{6} [f(x_i, y(x_i)) + 4f(x_{i+1/2}, y(x_{i+1/2})) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

d'où la relation :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [f(x_i, y(x_i)) + 4f(x_{i+1/2}, y(x_{i+1/2})) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

Finalement par la relation :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2\right) \qquad k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$$

$$\Delta x = h \quad \text{Et} \quad x_i = x_0 + i\Delta x$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent donné (4.3) avec la méthode de Runge-Kutta.

Les calculs sont effectués et donnés dans le tableau suivant.

Dans cet exemple l'erreur relative est d'ordre de 10^{-7} .

i	x_i	Exacte	Runge-Kutta	Erreur relative
0	0.0	1.0000	1.0000	
1	0.1	0.9091	0.9091	
2	0.2	0.8333	0.8333	
3	0.3	0.7692	0.7692	
4	0.4	0.7143	0.7143	
5	0.5	0.6667	0.6667	
6	0.6	0.6250	0.6250	
7	0.7	0.5882	0.5882	
8	0.8	0.5556	0.5556	
9	0.9	0.5263	0.5263	
10	1.0	0.5000	0.5000	
11	1.1	0.4762	0.4762	

TABLE 4.2 – Méthode de Runge-Kutta

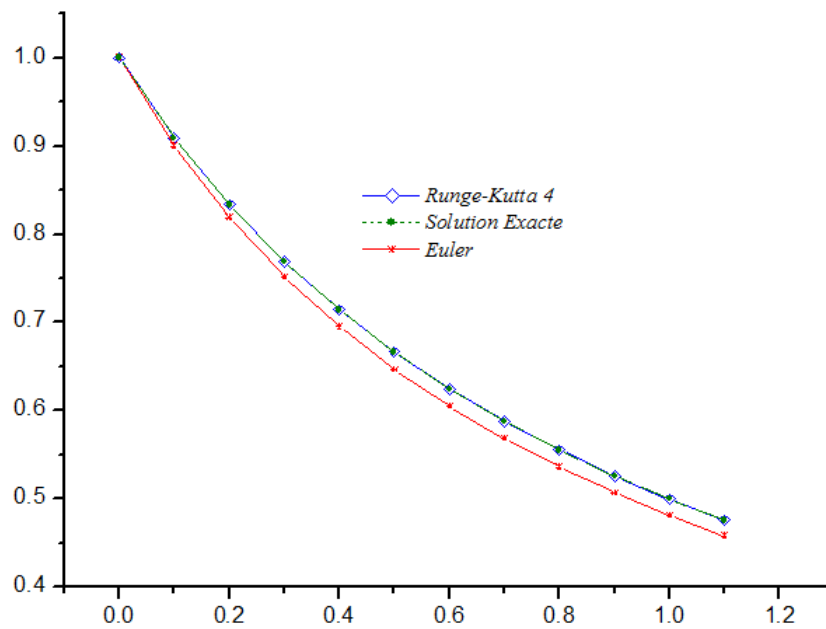


FIGURE 4.3 – Méthode d'Euler, Runge-Kutta & Solution Exacte

CHAPITRE 5

RÉSOLUTION DIRECTE DES SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

5.1 Introduction :

On appelle un système d'équations linéaires un ensemble d'équations avec plusieurs variables appelées aussi inconnues dont la relation entre les inconnues est linéaire cela veut dire qu'il n'existe pas de produits croisés. Chaque équation du système est donnée sous forme de la somme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

ou sous la forme algébrique condensée : $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ le système d'équations linéaires donc peut être représenté comme suit :

[illegible]

Pour pouvoir résoudre un système d'équation il faut que le nombre d'inconnues soit égales au nombre des équations et le déterminant de la matrice des coefficient soit non nul.

Il existe plusieurs méthodes directes et itératives pour la résolution d'un système d'équations linéaire à n inconnues parmi lesquelles on peut citer la méthode de substitution (élimination des variables), la méthode de Gauss, la méthode de Jordan, la méthode de Crammer, la méthode Choleski, la méthode d'inversion de matrice, celle de Doolittle comme méthodes directes et la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de Relaxation comme méthodes itératives.

Le but de ce chapitre est d'utiliser ces méthodes numériques pour déterminer les valeurs de x_i qui vérifient toute les équations du système linéaire donné.

5.2 Méthodes directes :

5.2.1 Méthode de GAUSS :

La méthode de Gauss transforme un système d'équation linéaire en un système triangulaire équivalent en utilisant un ensemble de transformations.

L'idée est de résoudre la première équation en x_1 , puis de l'éliminer des équations

[illegible]

$$\left. \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \right\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Pour triangulariser le système on aura besoin à $n - 1$ transformations qu'on appelle itérations ou cycles. Considérons que le système initialement donné par les équations 5.2 s'écrit, après la 1^{ère} itération, sous la forme :

[illegible]

Ou par la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La solution du système est déterminée par :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Et

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1$$

La méthode de GAUSS peut se résumer dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2: Algorithme de GAUSS.

Input : un estimé n, A, b

```

1  for  $r \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
2      for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3           $Q = \frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ 
4           $b_i = b_i - Q * b_r$ 
5          for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
6               $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - Q \times a_{rj}$ 
7          end
8      end
9       $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ 
10     for  $i \leftarrow n - 1$  to 1 do
11          $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ 
12     end
13 end
14 Return  $x$ 

```

Exemple :

En utilisant la méthode de Gauss, trouver la solution du système des équations suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Le système peut être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La première transformation a pour but de d'annuler les éléments se trouvant au dessous de la première diagonale.

Pour $r = 1$

$$\text{Pour } i = 2 \rightarrow Q = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = b_2 - Q \times b_1 = 4 - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2}$$

$$j = 1 \rightarrow a_{21} = a_{21} - Q a_{11} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$$

$$j = 2 \rightarrow a_{22} = a_{22} - Q a_{12} = 3 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$$

$$j = 3 \rightarrow a_{23} = a_{23} - Q a_{13} = 2 - \frac{1}{2} \times -1 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pour } i = 3 \rightarrow Q = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b_3 = b_3 - Q \times b_1 = 1 - \frac{-2}{2} \times 3 = 4$$

$$j = 1 \rightarrow a_{31} = a_{31} - Q a_{11} = -2 - \frac{-2}{2} \times 2 = 0$$

$$j = 2 \rightarrow a_{32} = a_{32} - Q a_{12} = 1 - \frac{-2}{2} \times 1 = 2$$

$$j = 3 \rightarrow a_{33} = a_{33} - Q a_{13} = 4 - \frac{-2}{2} \times -1 = 3$$

Le nouveau système devient après la première transformation comme suit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Ou aussi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Le but de la deuxième transformation est d'annuler les éléments se trouvant au dessous de la deuxième diagonale.

Pour $r = 2$

$$\text{Pour } i = 3 \rightarrow Q = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b_3 = b_3 - Q \times b_2 = 4 - 2 \times 1 = 2$$

$$j = 1 \rightarrow a_{31} = a_{31} - Qa_{21} = 0 - 2 \times 0 = 0$$

$$j = 2 \rightarrow a_{32} = a_{32} - Qa_{22} = 2 - 2 \times 1 = 0$$

$$j = 3 \rightarrow a_{33} = a_{33} - Qa_{23} = 3 - 2 \times 1 = 1$$

Le système triangularisé est donné par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

5.2.2 Méthode de GAUSS-JORDAN :

La méthode de GAUSS-JORDAN dite aussi méthode JORDAN repose sur l'élimination de Gauss, car les mêmes étapes sont suivies dans les transformations pour diagonaliser le système au lieu de le triangulariser.

Le système d'équations linéaire initialement donné par (5.2) se transforme en un système équivalent diagonale sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Cette méthode peut se résumer dans l'algorithme suivant :

Algorithme 3: Algorithme de JORDAN.

Input : un estimé n, A, b

```

1  for  $r \leftarrow 1$  to  $n$  do
2      for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3          if  $r \neq i$  then
4               $Q = \frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ 
5               $b_i = b_i - Q * b_r$ 
6              for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
7                   $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - Q \times a_{rj}$ 
8              end
9          end
10     end
11     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
12          $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ 
13     end
14 end
15 Return  $x$ 

```

5.2.3 Méthode de CHOLESKI :

La méthode de Choleski est une méthode basée sur la factorisation de la matrice A (symétrique et définie positive) sous la forme du produit de la transposée d'une matrice triangulaire inférieure et la matrice elle-même, autrement dit :

$$A = U^T U$$

Une matrice symétrique A est dite définie positif si on a pour tout vecteur X non nul : $X^T A X > 0$ ou bien si le déterminant de A et tous les déterminants principaux d'ordre inférieur sont positifs.

La matrice U peut être déterminée en suivant l'algorithme suivant :

$$\left[\begin{array}{l} u_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk}^2} \\ u_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk} u_{mi}}{u_{kk}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } k = 1, n \\ \text{pour } i = k + 1, n \end{array}$$

Le système s'écrit sous la forme suivante : $[A] \{x\} = \{b\} \Rightarrow [U]^t [U] \{x\} = \{b\}$

On pose : $\{y\} = [U] \{x\}$ d'où le système devient : $[U]^t \{y\} = \{b\}$

On résout ce système par rapport à y et les solution sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{b_1}{U_{11}} \\ y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} y_j}{u_{ii}} \end{array} \right\} \text{pour } i = 2, n$$

Une fois les y_i sont déterminées, on résout le système $[U] \{x\} = \{y\}$ par rapport à x

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \frac{y_n}{U_{nn}} \\ x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \end{array} \right\} \text{pour } i = n - 1, 1$$

Exemple : Trouver la solution du système d'équations suivant en utilisant la méthode de Choleski :

$$\begin{cases} 64x_1 + 40x_2 + 24x_3 = 40 \\ 40x_1 + 29x_2 + 17x_3 = 23 \\ 24x_1 + 17x_2 + 19x_3 = 1 \end{cases}$$

Solution : L'application de l'algorithme de Choleski permet la vérification de la définie positif de la matrice et sa symétrie ensuite sa décomposition A en $U^T U$.

On a la matrice A symétrique.

Il faut maintenant vérifier que tous les déterminants principaux d'ordre 1, 2 et 3 sont positifs.

Déterminant 'ordre 3 :

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 64 & 40 & 24 \\ 40 & 29 & 17 \\ 24 & 17 & 19 \end{vmatrix} = 2304 > 0$$

Déterminants principaux d'ordre 2 :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 64 & 40 \\ 40 & 29 \end{vmatrix} = 140 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 29 & 17 \\ 17 & 19 \end{vmatrix} = 262 > 0$$

Puisque tous les déterminants principaux et les valeurs diagonales sont positives, la méthode de décomposition de A en $U^T U$ est applicable pour la résolution du système donné.

Calcul des éléments de la matrice U :

Pour $k = 1$

$$u_{22} = \sqrt{a_{11} - \sum_{m=1}^0 u_{m1}^2} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{64} = 8.$$

Pour $i = 2$

$$u_{12} = \frac{a_{12} - \sum_{m=1}^0 u_{m1} u_{m2}}{u_{11}} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = 5$$

Pour $i = 3$

$$u_{13} = \frac{a_{13} - \sum_{m=1}^0 u_{m1} u_{m3}}{u_{11}} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = 3$$

Pour $k = 2$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{m=1}^1 u_{m2}^2} = \sqrt{a_{22} - u_{11}} = \sqrt{29 - 25} = \sqrt{4} = 2.$$

Pour $i = 3$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \sum_{m=1}^1 u_{m2} u_{m3}}{u_{22}} = \frac{a_{23} - u_{12} u_{13}}{u_{22}} = \frac{17 - 3 \times 5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ Pour } k = 3$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{m=1}^2 u_{m3}^2} = \sqrt{a_{33} - (u_{13}^2 + u_{23}^2)} = \sqrt{19 - 9 - 1} = \sqrt{9} = 3.$$

Le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ 23 \\ 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ 23 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Ensuite on résout le système suivant par rapport à x

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Dans le cas d'une matrice symétrique et non définie positive et pour éviter les valeurs négatives sous la racine, on procède à une factorisation sous la forme : $[A] \{x\} = \{b\} \Rightarrow [U]^t [D] [U] \{x\} = \{b\}$

Où U est une matrice triangulaire inférieure et D une matrice diagonale qui sont

exprimées par :

$$\left[\begin{array}{l} u_{kk} = 1 \text{ pour } i = 1, n \\ d_{kk} = a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk}^2 d_{mm} \\ u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk} d_{mm} u_{mj}}{d_{kk}} \end{array} \right\} \text{ pour } k = 1, n$$

Et le système des équations s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$[U]^t [D] [U] \{x\} = \{b\}$$

On pose : $[U] \{x\} = \{z\}$ et $[D] \{z\} = \{y\}$ et on résout le système par la suite :
 $[U]^t \{y\} = \{b\}$:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{b_1}{U_{11}} \\ y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} y_j}{u_{ii}} \end{array} \right\} \text{ pour } i = 2, n$$

Ensuite : $z_i = \frac{y_i}{d_{ii}}$ pour $i = 1, n$

Et enfin :

$$\left. \begin{array}{l} x_n = \frac{z_n}{U_{nn}} \\ x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \end{array} \right\} \text{ pour } i = n-1, 1$$

Exemple : Résoudre le système d'équation par la méthode de Choleski :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Solution : La matrice A est symétrique et non définie positive car :

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

D'où la matrice A n'est pas définie positive et par conséquent on ne peut pas appliquer la première factorisation de Choleski $A = U^T U$ c'est la raison pour laquelle on passe à l'application de la deuxième factorisation $A = U^T D U$.

Pour $k = 1$

$$d_{11} = a_{11} - \sum_{m=1}^0 u_{m1}^2 d_{mm} = a_{11} = 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j} - \sum_{m=1}^0 u_{m1} d_{mm} u_{mj}}{d_{11}} \text{ pour } j = 2, 3 \Rightarrow \begin{cases} u_{12} = a_{12} = 2 \\ u_{13} = a_{13} = 3 \end{cases}$$

Pour $k = 2$ $d_{22} = a_{22} - \sum_{m=1}^1 u_{m2}^2 d_{mm} = a_{11} - u_{12}^2 d_{11} = 3 - 4 \times 1 = -1$

$$u_{2j} = \frac{a_{2j} - \sum_{m=1}^1 u_{m2} d_{mm} u_{mj}}{d_{22}} \text{ pour } j = 2 \Rightarrow u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} d_{11} u_{13}}{d_{22}} = \frac{1 - 2 \times 1 \times 3}{-1} = 5$$

Pour $k = 3$ $d_{33} = a_{33} - \sum_{m=1}^2 u_{m3}^2 d_{mm} = a_{11} - (u_{13}^2 d_{11} + u_{23}^2 d_{22}) = 4 - (9 - 25) = 20$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Résolution du système :

$$[U^T] \{y\} = \{b\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{y\} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 5 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

Ensuite le système :

$$[D] \{z\} = \{y\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 5 \\ -20 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{z\} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Et en fin le système :

$$[U] \{x\} = \{z\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

CHAPITRE 6

MÉTHODE DE RÉOLUTION APPROXIMATIVE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINAIRES

6.1 Introduction :

6.2 Méthodes itératives :

Les méthodes directes, présentées dans la section précédente pour la résolution des systèmes des équations linéaires $[A] \{x\} = \{b\}$, sont utilisées surtout lorsque le système est de petite taille où l'ordre de la matrice $[A]$ est petit ou même pour les matrices pleines, dans le cas générale beaucoup de problèmes nécessitent l'utilisation des méthodes itératives pour la résolution du système.

Ces méthodes contrairement aux méthodes directes résolvent le système en plusieurs étapes avec correction en chaque étape.

Les méthodes itératives nécessitent un estimé ou une solution de démarrage x^0 arbitraire.

Plusieurs méthodes itératives peuvent être utilisées telles que la méthode de **JACOBI**, la méthode de **GAUSS-SEIDEL** et la méthode de **Relaxation**.

L'ensemble de méthodes repose sur la réécriture du système $[A] \{x\} = \{b\}$ sous la forme $\{x\} = [B] \{x\} + \{c\}$ car la matrice $[A]$ peut être décomposée et réécrite sous la forme $[A] = [L] + [D] + [U]$.

Où :

$[L]$: Matrice triangulaire inférieure.

$[D]$: Matrice diagonale.

$[U]$: Matrice triangulaire supérieure.

Le système $[A] \{x\} = \{b\}$ peut être réécrit sous la forme :

$$([L] + [D] + [U]) \{x\} = \{b\} \quad (6.1)$$

6.2.1 Méthode de JACOBI :

Dans le cas de la méthode de Jacobi, le système (6.1) s'écrit :

$$\{x^{k+1}\} = [D]^{-1} (\{b\} - ([L] + [U]) \{x^k\})$$

La matrice $B_J = -[D]^{-1} ([L] + [U])$ est dite matrice de Jacobi.

La méthode de Jacobi peut converger vers la solution comme elle peut diverger de la solution, selon la nature de la matrice de Jacobi B_J .

La méthode de Jacobi converge si le rayon spectral de la matrice de Jacobi est inférieur à 1, autrement dit si la valeur maximale par valeur absolue des valeurs propres de la matrice B_J est inférieure à 1.

$$\max(|\lambda_i|) < 1$$

La méthode converge aussi si la matrice $[A]$ est à diagonales dominantes, c'est à dire :

Pour chaque ligne i , on a : $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, n, j \neq i} |a_{ij}|$

La méthode peut se résumer comme suit :

Algorithme 4: Algorithme de JACOBI.

Input : un estimé $n, x^0(x_i^0), \epsilon, A, b$

```

1 while  $\| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^k} \| > \epsilon$  do
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      $x_i^{k+1} \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) / a_{ii}$ 
4   end
5 end
6 Return  $x$ 
```

Exemple :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Jacobi pour $\epsilon = 0.0001$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases} \quad (6.2)$$

Solution On doit tous d'abord vérifier la condition de la diagonale dominante :

$$\forall i \quad |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, n, j \neq i} |a_{ij}|$$

On a pour $i = 1$ $\sum_{j=2}^3 |a_{1j}| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |a_{11}| = 4 > 2$

On a pour $i = 2$ $\sum_{j=1, 3}^{j \neq 2} |a_{2j}| = 2 + 1 = 3 \Rightarrow |a_{22}| = 7 > 3$

On a pour $i = 3$ $\sum_{j=1,2}^{j \neq 3} |a_{3j}| = 1 + 4 = 5 \Rightarrow |a_{33}| = 12 > 5$

Ensuite on choisi un estimé $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$

En appliquant l'algorithme de la méthode de Jacobi donné, on a :pour l'itération

(1) :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4} (3 - 0 + 0) = 0.750 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{7} (19 - 0 - 0) = 2.714 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(0)} + 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{12} (31 - 0 + 0) = 2.583 \end{aligned}$$

Pour l'itération (2) :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.714 + 2.583) = 0.717 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 0.75 - 2.583) = 2.131 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{12} (31 - 0.75 + 3 \times 2.714) = 3.199 \end{aligned}$$

Pour l'itération (3) :

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.131 + 3.199) = 1.017 \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 0.717 - 3.199) = 2.052 \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{12} (31 - 0.717 + 3 \times 2.131) = 3.056 \end{aligned}$$

Pour l'itération (4) :

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(3)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.052 + 3.056) = 1.001 \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(3)} - x_3^{(3)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.017 - 3.056) = 1.987 \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(3)} + 3x_2^{(3)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.017 + 3 \times 2.052) = 3.012 \end{aligned}$$

Pour l'itération (5) :

$$x_1^{(5)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(4)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{4} (3 - 1.987 + 3.012) = 1.006$$

$$x_2^{(5)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(4)} - x_3^{(4)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.001 - 3.012) = 1.998$$

$$x_3^{(5)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(4)} + 3x_2^{(4)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.001 + 3 \times 1.987) = 2.997$$

Pour l'itération (6) :

$$x_1^{(6)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(5)} + x_3^{(5)}) = \frac{1}{4} (3 - 1.998 + 2.997) = 1.000$$

$$x_2^{(6)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(5)} - x_3^{(5)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.006 - 2.997) = 1.999$$

$$x_3^{(6)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(5)} + 3x_2^{(5)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.006 + 3 \times 1.998) = 2.999$$

Pour l'itération (7) :

$$x_1^{(7)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(6)} + x_3^{(6)}) = \frac{1}{4} (3 - 1.999 + 2.999) = 1.000$$

$$x_2^{(7)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(6)} - x_3^{(6)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.000 - 2.999) = 2.000$$

$$x_3^{(7)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(6)} + 3x_2^{(6)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.000 + 3 \times 1.999) = 3.000$$

On peut clairement voir que la condition d'arrêt est vérifiée $x_i^{(7)} - x_i^{(6)} < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, 3$
d'où la solution du problème est $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$

6.2.2 Méthode de GAUSS-SEIDEL :

Dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel, le système (6.1) s'écrit :

$$\{x^{k+1}\} = ([D] + [L])^{-1} (\{b\} - [U] \{x^k\})$$

La matrice $B_{GS} = -[D]^{-1}([L] + [U])$ est dite matrice de Gauss-Seidel.

La méthode de Gauss-Seidel peut converger vers la solution comme elle peut diverger de la solution, selon la nature de la matrice B_{GS} .

La méthode converge si le rayon spectral de la matrice de B_{GS} est inférieur à 1, autrement dit si la valeur maximale par valeur absolue des valeurs propres de la matrice B_{GS} est inférieure à 1.

$$\max(|\lambda_i|) < 1$$

La méthode converge aussi si la matrice $[A]$ est à diagonales dominantes, c'est à dire :

Pour chaque ligne i , on a : $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$

La méthode se résume dans l'algorithme suivant :

Algorithme 5: Algorithme de GAUSS-SEIDEL.

Input : un estimé $x^0(x_i^0), \epsilon, A, b$

```

1 while  $\left\| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^k} \right\| < \epsilon$  do
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      $x_i^{k+1} \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) / a_{ii}$ 
4   end
5 end
6 Return  $x$ 

```

Exemple :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Jacobi pour $\epsilon = 0.0001$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31 \end{cases} \quad (6.3)$$

Solution On doit tous d'abord vérifier la condition de la diagonale dominante :

$$\forall i \quad |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1,3 \\ j \neq i}} |a_{ij}|$$

$$\text{On a pour } i = 1 \quad \sum_{\substack{j=2,3 \\ j \neq 1}} |a_{1j}| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |a_{11}| = 4 > 2$$

$$\text{On a pour } i = 2 \quad \sum_{\substack{j=1,3 \\ j \neq 2}} |a_{2j}| = 2 + 1 = 3 \Rightarrow |a_{22}| = 7 > 3$$

On a pour $i = 3$ $\sum_{j=1,2}^{j \neq 3} |a_{3j}| = 1 + 4 = 5 \Rightarrow |a_{33}| = 12 > 5$

Ensuite on choisi un estimé $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$

En appliquant l'algorithme de la méthode de Jacobi donné, on a :

Pour l'itération (1) :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4} (3 - 0 + 0) = 0.750 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 0.75 - 0) = 2.500 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{12} (31 - 0.75 + 3 \times 2.5) = 3.146 \end{aligned}$$

Pour l'itération (2) :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.5 + 3.146) = 0.912 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 0.912 - 3.146) = 2.004 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{12} (31 - 0.912 + 3 \times 2.004) = 3.008 \end{aligned}$$

Pour l'itération (3) :

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.004 + 3.008) = 1.001 \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(3)} - x_3^{(2)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.001 - 3.008) = 1.999 \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(3)} + 3x_2^{(3)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.001 + 3 \times 1.999) = 3.000 \end{aligned}$$

Pour l'itération (4) :

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(3)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{4} (3 - 1.999 + 3.000) = 1.000 \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - 2x_1^{(4)} - x_3^{(3)}) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.000 - 3.000) = 2.000 \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - x_1^{(4)} + 3x_2^{(4)}) = \frac{1}{12} (31 - 1.000 + 3 \times 2.000) = 3.000 \end{aligned}$$

Pour l'itération (5) :

$$x_1^{(5)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - x_2^{(4)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{4} (3 - 2.000 + 3.000) = 1.000$$

$$x_2^{(5)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - 2x_1^{(5)} - x_3^{(4)} \right) = \frac{1}{7} (19 - 2 \times 1.000 - 3.000) = 2.000$$
$$x_3^{(5)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - x_1^{(5)} + 3x_2^{(5)} \right) = \frac{1}{12} (31 - 1.000 + 3 \times 2.000) = 3.000$$

On peut clairement voir que la condition d'arrêt est vérifiée $x_i^{(5)} - x_i^{(4)} < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, 3$
d'où la solution du problème est $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$

Deuxième partie

Exercices

TD N °1

Exercice N°1 :

Trouver la racine de la fonction $f(x) = 2x^3 + 4x - 4$ dans l'intervalle $]0; 1[$ à 3 chiffres près.

Exercice N°2 :

Séparer les racines de la fonction $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4$ et utiliser une méthode numérique dans chaque intervalle pour trouver la racine annulant la fonction.

Exercice N°3 :

Trouver les racines des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2$
2. $f(x) = x^5 - x^2 - 1$
3. $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$

Exercice N°4 :

Lesquelles parmi les fonctions suivantes admettent-elles une racine dans l'intervalle $]0; 1[$:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = e^{-x^4} + 4x^2 - 4$
3. $f(x) = -x^5 - 3x^2 + 1$
4. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$

Exercice N°5 :

Trouver la racine positive de la fonction $f(x) = 8x^3 + 21x^2 - 7x - 6 = 0$.

Exercice N°1 :

Pour que la fonction $f(x) = 2x^3 + 4x - 4 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0; 1]$, il faut vérifier que $f(0) \times f(1) < 0$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	1,000	0,500	-4,000	2,000	-1.750	-
1	0,500	1,000	0,750	-1,750	2,000	-0,156	0,250
2	0,750	1,000	0,875	-0,156	2,000	0,840	0,125
3	0,750	0,875	0,813	-0,1563	0,840	0,327	0,062
4	0,750	0,813	0,782	-0,156	0,323	0,084	0,031
5	0,750	0,782	0,766	-0,156	0,079	-0,037	0,016
6	0,766	0,782	0,774	-0,037	0,079	0,023	0,008
7	0,766	0,774	0,770	-0,037	0,023	-0,007	0,004
8	0,770	0,774	0,772	-0,007	0,023	0,008	0,002
9	0,770	0,771	0,771	-0,007	0,008	0,001	0,001

TABLE 6.1 – Exe 1 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_9 - x_8| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine recherchée est $x = 0.771$ à 3 chiffres près.

Méthode du point fixe :

La méthode du point fixe consiste à trouver une fonction $g(x)$ pour laquelle $|g'(x)| < 1 \forall x \in]0; 1[$

$$\text{On a } f(x) = 2x^3 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{x^2 + 2}$$

$$\text{Alors } g(x) = \frac{2}{x^2 + 2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-4}{(x^2 + 2)^2}$$

Pour pouvoir utiliser cette fonction, il faut vérifier la condition précédente :

On a :

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 2 < x^2 + 2 < 3 \Rightarrow 4 < (x^2 + 2)^2 < 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{(x^2 + 2)^2} < \frac{1}{4}$$

d'autre part on :

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow -4 < -4x < 0$$

d'où on a par multiplication :

$$\frac{-4}{9} < \frac{-4x}{(x^2 + 2)^2} < 0 \Rightarrow \frac{-4}{9} < g'(x) < 0 \Rightarrow |g'(x)| < \frac{4}{9} \Rightarrow |g'(x)| < 1$$

Alors $\forall x \in]0; 1[\Rightarrow g(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)}$ converge.

A partir du tableau, on peut clairement remarquer que $x = g(x)$ est satisfait pour la

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	1,000	-
1	1,000	0,667	0,333
2	0,667	0,818	0,151
3	0,818	0,749	0,069
4	0,749	0,781	0,032
5	0,781	0,766	0,015
6	0,766	0,773	0,007
7	0,773	0,770	0,003
8	0,770	0,771	0,001
9	0,771	0,771	0,000

TABLE 6.2 – Exe 1 :Méthode du point fixe

valeur de $x = 0.771$ qui représente la solution du problème.

Méthode de Newton :

Pour résoudre le problème en utilisant la méthode de Newton, on doit passer par le calcul de la première dérivée de cette fonction :

$$f(x) = 2x^3 + 4x - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 4$$

et on construit la suite $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

A partir du tableau, on peut constater que $|x_3 - x_2| = 0,000 < \epsilon$, la solution du

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	-4,000	4,000	1,000	-
1	1,000	2,000	10,000	0,800	0,200
2	0,800	0,224	7,840	0,771	0,029
3	0,771	0,001	7,567	0,771	0,000

TABLE 6.3 – Exe 1 :Méthode de Newton

problème est donc la valeur $x = 0,771$.

Exercice N°2 :

La séparation des racines signifie la détermination des intervalles où la fonction s'annule ou possède une solution.

L'étude de la fonction permet de trouver les intervalles où la fonction $f(x)$ se coupe avec l'axe des abscisses.

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4$$

La fonction est un polynôme défini sur $\mathbb{R}$ c'est à dire $x \in]-\infty; +\infty[$

Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = -3x^2 + 8x = x(-3x + 8)$$

Cette dérivée s'annule en $x = 0$ et $x = 8/3$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-4	5.48	$-\infty$	

On peut clairement voir que la fonction $f(x)$ change de signe dans trois intervalles : une fois dans $]-\infty; 0[$, une autre fois dans $]0; \frac{8}{3}[$ et une dernière fois dans $]\frac{8}{3}; +\infty[$

$$f(-1) = 1 \text{ et } f(0) = -4$$

$$f(1) = -1 \text{ et } f(2) = 4$$

$$f(3) = 5 \text{ et } f(4) = -4$$

A partir de ces valeurs, on peut conclure que les racines se trouvent dans les intervalles suivants :

$$x \in]-1; 0[, x \in]1; 2[\text{ et } x \in]3; 4[$$

Méthode de Dichotomie pour $x \in]-1; 0[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,000	0,000	-0,500	1,000	-4,000	-2.875	-
1	-1,000	-0,500	-0,750	1,000	-2,875	-1,328	0,250
2	-1,000	-0,750	-0,875	1,000	-1,328	-0,268	0.125
3	-1,000	-0,875	-0,938	1,000	-0,268	0,345	0,063
4	-0,938	-0,875	-0,906	0,345	-0,268	0,037	0,031
5	-0,906	-0,875	-0,891	0.037	-0.268	-0,117	0,016
6	-0,906	-0,891	-0,898	0.037	-0.117	-0.041	0,008
7	-0,906	-0,989	-0,902	0.037	-0.041	-0,002	0,004
8	-0,906	-0,902	-0,904	0.037	-0.002	0,017	0,002
9	-0,904	-0,902	-0,903	0.017	-0.002	0,008	0,001

TABLE 6.4 – Exe 2 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer qu'à 3 chiffres près, la différence $|x_9 - x_8| = 0,001 < \epsilon$ d'où la solution recherchée est $x = -0.903$.

Méthode de Dichotomie pour $x \in]1; 2[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	2,000	1,500	-1,000	4,000	1.625	-
1	1,000	1,500	1,250	-1,000	1,625	0,297	0,250
2	1,000	1,250	1,125	-1.000	0,297	-0,361	0.125
3	1,125	1,250	1,188	-0,361	0,297	-0,031	0,063
4	1,188	1,250	1,219	-0,031	0,297	0,132	0,031
5	1,188	1,219	1,204	-0.031	0.132	0,053	0,016
6	1,188	1,204	1,196	-0.031	0.053	0.011	0,008
7	1,188	1,196	1,192	-0.031	0.011	-0,010	0,004
8	1,192	1,196	1,194	-0.010	0.011	0,003	0,002
9	1,192	1,194	1,193	-0.010	0.003	-0,005	0,001

TABLE 6.5 – Exe 2 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer qu'à 3 chiffres près, la différence $|x_9 - x_8| = 0,001 < \epsilon$ d'où la solution recherchée est $x = 1.193$.

Méthode de Dichotomie pour $x \in]3; 4[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	3,000	4,000	3,500	5,000	-4,000	2.125	-
1	3,500	4,000	3,750	2,125	-4,000	-0,484	0,250
2	3,500	3,750	3,625	2.125	-0,484	0,928	0.125
3	3,625	3,750	3,688	0,928	-0,484	0,244	0,063
4	3,688	3,750	3,719	0,244	-0,484	-0,113	0,031
5	3,688	3,719	3,704	0.244	-0.113	0,061	0,016
6	3,704	3,719	3,712	0.061	-0.113	-0.032	0,008
7	3,704	3,712	3,708	0.061	-0.032	0,015	0,004
8	3,708	3,712	3,710	0.015	-0.032	-0,008	0,002
9	3,708	3,710	3,709	0.015	-0.008	0,003	0,001
10	3,709	3,710	3,710	0.003	-0.008	-0,008	0,001

TABLE 6.6 – Exe 2 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer qu'à 3 chiffres près, la différence $|x_{10} - x_9| = 0,001 \leq \epsilon$ d'où la solution recherchée est $x = 3.710$.

Méthode du point fixe $x \in]-1; 0[$:

On va réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ et on choisi la forme qui vérifie la condition :

$$\forall x \in]-1; 0[\iff |g'(x)| < 1$$

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{x^3 + 4}.$$

$$\text{dans l'intervalle choisi, on utilise } g(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{x^3 + 4}$$

$$\text{et } g'(x) = -\frac{3x^2}{4\sqrt{x^3 + 4}}$$

On a :

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\implies -1 < x^3 < 0 \implies 3 < x^3 + 4 < 4 \implies \sqrt{3} < \sqrt{x^3 + 4} < 2 \\ \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{x^3 + 4}} < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La multiplication de cette dernière par $\frac{3}{4}$ donne :

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{4\sqrt{x^3+4}} < \frac{3}{4\sqrt{3}}$$

On a aussi :

$$-1 < x < 0 \implies 0 < x^2 < 1 \text{ d'où :}$$

$$0 < \frac{3x^2}{4\sqrt{x^3+4}} < \frac{3}{4\sqrt{3}} \implies |g'(x)| < 1$$

La suite $x_i = g(x_{i-1})$ converge vers la solution recherchée.

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,000	-0,866	-
1	-0,866	-0,915	0,049
2	-0,915	-0,899	0,016
3	-0,866	-0,905	0,006
4	-0,905	-0,903	0,002
5	-0,903	-0,903	0,000

TABLE 6.7 – Exe 2 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut clairement remarquer que $x = g(x)$ est satisfait pour la valeur de $x = -0.903$ qui représente la solution du problème.

Méthode du point fixe $x \in]1; 2[$:

Dans cet intervalle on va choisir $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3+4}$ puisque la racine est positive.

La dérivée est donnée par : $g'(x) = \frac{3x^2}{4\sqrt{x^3+4}}$.

Vérification de la condition $|g'(x)| < 1 \forall x \in]1; 2[$:

On a :

$$1 < x < 2 \implies 1 < x^2 < 4 \text{ et } 1 < x^3 < 8$$

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	1,118	-
1	1,118	1,162	0,044
2	1,162	1,180	0,018
3	1,180	1,188	0,008
4	1,188	1,191	0,003
5	1,191	1,193	0,002
6	1,193	1,194	0,001
7	1,194	1,194	0,000

TABLE 6.8 – Exe 2 :Méthode du point fixe

$]1; 2[$ est $x \simeq 1,194$ à trois (03) chiffres prés.

Méthode du point fixe $x \in]3; 4[$:

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	3,000	3,556	-
1	3,556	3,684	0,128
2	3,684	3,705	0,021
3	3,705	3,709	0,004
4	3,709	3,709	0,000

TABLE 6.9 – Exe 2 :Méthode du point fixe

$]1; 2[$ est $x \simeq 3,709$ à trois (03) chiffres prés.

Méthode de Newton $x \in]-1; 0[$:

On a : $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x$

La solution est obtenue par le calcul des termes de la suite $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,0000	1,0000	-11,0000	-0,9091	-
1	-0,9091	0,0572	-9,7522	-0,9032	0,0909
2	-0,9032	0,0001	-9,6729	-0,9032	0,0059
3	-0,9032	0,0001	-9,6729	-0,9032	0,0000

TABLE 6.10 – Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson

$] -1; 0[$ est $x \simeq -0,903$ à trois (03) chiffres prés.

Méthode de Newton $x \in]1; 2[$:

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,0000	-1,0000	5,0000	1,2000	-
1	1,2000	0,0320	5,2800	1,1939	0,2000
2	1,1939	-0,0002	5,2750	1,1939	0,0061
3	1,1939	-0,0002	5,2750	1,1939	0,0000

TABLE 6.11 – Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson

$] -1; 0[$ est $x \simeq 1,194$ à trois (03) chiffres prés.

Méthode de Newton $x \in]3; 4[$:

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle

$] -1; 0[$ est $x \simeq 3,709$ à trois (03) chiffres prés.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	3,0000	5,0000	-3,0000	4,6667	-
1	4,6667	-18,5195	-28,0007	4,0053	1,6667
2	4,0053	-4,0850	-16,0849	3,7513	0,6614
3	3,7513	-0,5002	-12,2063	3,7103	0,2540
4	3,7503	-0,0119	-11,6167	3,7093	0,0410
5	3,7093	-0,0003	-11,2063	3,7093	0,0010
6	3,7093	-0,0003	-11,2063	3,7093	0,0000

TABLE 6.12 – Exe 2 :Méthode de Newton-Raphson

Exercice N°3 :

1) $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0$:

Pour trouver les racines de la fonction $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0$, il faut trouver les intervalles où la fonction donnée s'annule, c'est pourquoi on doit étudier cette fonction.

La fonction est un polynôme donc elle est définie sur $\mathbb{R}$ c'est à dire $x \in]-\infty; +\infty[$.

Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2)$$

Cette dérivée s'annule en $x = 0$, $x = \mp\sqrt{2}$

Le tableau de variation est résumé comme suit :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	2	$-\infty$

A partir du tableau de variations de la fonction donnée, les intervalles où la fonction s'annule sont :

$$]-\infty; -\sqrt{2}[,]-\sqrt{2}; 0[,]0; \sqrt{2}[\text{ et }]\sqrt{2}; +\infty[$$

Ces intervalles peuvent se réduisent en petits intervalles où la fonction change de signes ou la condition d'existence des racines est vérifiée :

On a :

$f(-2) = -2$ et $f(-1) = +1 \Rightarrow f(-2) \times f(-1) = -2 < 0$ où on peut remarquer un changement de signes de $f(x)$.

La fonction change de signes aussi pour $f(-1) = +1$ et $f(0) = -2 \Rightarrow f(-1) \times f(0) = -2 < 0$.

La fonction passe par zéro car : $f(0) = -2$ et $f(+1) = +1 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -2 < 0$

Et finalement la fonction change de signes car : $f(+1) = +1$ et $f(+2) = -2 \Rightarrow f(+1) \times f(+2) = -2 < 0$

D'où les intervalles réduits sont : $]-2; -1[,]-1; 0[,]0; +1[\text{ et }]+1; +2[$

Méthode de Dichotomie :

La méthode de Dichotomie se base sur le calcul à chaque fois du centre de l'intervalle vérifiant la condition d'existence jusqu'à ce que la différence par valeur absolue entre deux valeurs successives soit inférieure ou égale à ϵ ($|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$).

Pour $x \in]-2; -1[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-2,000	-1,000	-1,500	-2,000	1,000	1.938	-
1	-2,000	-1,500	-1,750	-2,000	1,938	0,871	0,250
2	-2,000	-1,750	-1,875	-2,000	0,871	-0,297	0.125
3	-1,875	-1,750	-1,813	-0,297	0.871	0,344	0,062
4	-1,875	-1,813	-1,844	-0,297	0.344	0,039	0,031
5	-1,875	-1,844	-1,860	-0.297	0.039	-0,130	0,016
6	-1,860	-1,844	-1,852	-0.130	0.039	-0.045	0,008
7	-1,852	-1,844	-1,848	-0.045	0.039	-0,003	0,004
8	-1,848	-1,844	-1,846	-0.003	0.039	0,018	0,002
9	-1,848	-1,846	-1,847	-0.003	0.008	0,008	0,001
10	-1,848	-1,847	-1,848	-0.003	0.008	-0,003	0,001

TABLE 6.13 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_{10} - x_9| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine recherchée est $x = -1.848$ à 3 chiffres près.

Pour $x \in]-1; 0[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,000	0,000	-0,500	1,000	-2,000	-1.063	-
1	-1,000	-0,500	-0,750	1,000	-1,063	-0,066	0,250
2	-1,000	-0,750	-0,875	1,000	-0,066	0,476	0.125
3	-0,875	-0,750	-0,813	0,476	-0.066	0,207	0,062
4	-0,813	-0,813	-0,752	0,207	-0.066	0,072	0,031
5	-0,782	-0,750	-0,766	0.072	-0.066	0,003	0,016
6	-0,766	-0,750	-0,758	0.003	-0.066	-0.032	0,008
7	-0,766	-0,758	-0,762	0.003	-0.032	-0,015	0,004
8	-0,766	-0,762	-0,764	0.003	-0.015	-0,006	0,002
9	-0,766	-0,764	-0,765	0.003	- 0.006	-0,002	0,001
10	-0,766	-0,765	-0,766	0.003	-0.002	0,003	0,001

TABLE 6.14 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_{10} - x_9| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine recherchée est $x = -0.766$ à 3 chiffres prés.

Pour $x \in]0; +1[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	+1,000	0,500	-2,000	1,000	-1.063	-
1	0,500	1,000	0,750	-1,063	1,00	-0,066	0,250
2	0,750	1,000	0,875	-0,066	1,000	0,476	0.125
3	0,750	0,875	0,813	-0,066	0,476	0,207	0,062
4	0,750	0,813	0,782	-0,066	0,207	0,072	0,031
5	0,750	0,782	0,766	-0,066	0,072	0,003	0,016
6	0,750	0,766	0,758	-0,066	0,003	-0,032	0,008
7	0,758	0,766	0,762	-0,032	0,003	-0,015	0,004
8	0,762	0,766	0,764	-0,015	0,003	-0,006	0,002
9	0,764	0,766	0,765	-0,006	0,003	-0,002	0,001
10	0,765	0,766	0,766	-0,002	0,003	0,003	0,001

TABLE 6.15 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_{10} - x_9| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine recherchée est $x = +0.766$ à 3 chiffres prés.

Pour $x \in]+1; +2[$:

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	2,000	1,500	1,000	-2,000	1.938	-
1	1,500	2,000	1,750	1,938	-2,000	0,871	0,250
2	1,750	2,000	1,875	0,871	-2,000	-0,297	0.125
3	1,750	1,875	1,813	0,871	-0,297	0,344	0,062
4	1,813	1,875	1,844	0,344	-0,297	0,039	0,031
5	1,844	1,875	1,860	0,039	-0,297	-0,130	0,016
6	1,844	1,860	1,852	0,039	-0,130	-0,045	0,008
7	1,844	1,852	1,848	0,039	-0,045	-0,003	0,004
8	1,844	1,848	1,846	0,039	-0,003	0,018	0,002
9	1,846	1,848	1,847	0,018	-0,003	0,008	0,001
10	1,847	1,848	1,848	0,008	-0,003	-0,003	0,001

TABLE 6.16 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

On peut remarquer que $|x_{10} - x_9| = 0.001 \leq \epsilon$, d'où la racine recherchée de la racine recherchée est $x = +1.848$ à 3 chiffres prés.

Méthode du point fixe :

Pour $x \in]-2; -1[$:

La méthode du point fixe exige la réécriture de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ pour laquelle $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in]-2; -1[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}}$

$$g(x) = -\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}}$$

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-2,000	-1,8708	-
1	-1,8708	-1,8516	0,1292
2	-1,8516	-1,8484	0,0192
3	-1,8484	-1,8479	0,0032
4	-1,8479	-1,8478	0,0005
5	-1,8478	-1,8478	0,0001

TABLE 6.17 – Exe 3 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle $]1; 2[$ est $x \simeq -1,848$ à trois (03) chiffres près.

Pour $x \in]-1; 0[$:

L'équation $f(x) = 0$ peut être réécrite sous la forme $x = g(x)$ pour laquelle $|g'(x)| < 0 \forall x \in]-1; 0[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2}$

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,000	-0,8660	-
1	-0,8660	-0,8004	0,1340
2	-0,8004	-0,7763	0,0656
3	-0,7763	-0,7686	0,00241
4	-0,7686	-0,7663	0,0077
5	-0,7663	-0,7656	0,0023
6	-0,7656	-0,7654	0,0007
7	-0,7654	-0,7654	0,0002
8	-0,7654	-0,7654	0,0000

TABLE 6.18 – Exe 3 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle $]1; 2[$ est $x \simeq -0,766$ à trois (03) chiffres près.

Pour $x \in]0; +1[$:

$$\text{On a } f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2}$$

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	0,8660	-
1	0,8660	0,8004	0,1340
2	0,8004	0,7763	0,0656
3	0,7763	0,7686	0,00241
4	0,7686	0,7663	0,0077
5	0,7663	0,7656	0,0023
6	0,7656	0,7654	0,0007
7	0,7654	0,7654	0,0002
8	0,7654	0,7654	0,0000

TABLE 6.19 – Exe 3 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle $]0; +1[$ est $x \simeq 0,766$ à trois (03) chiffres près.

Pour $x \in]+1; +2[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4 - \frac{2}{x^2}}$

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	2,000	1,8708	-
1	1,8708	1,8516	0,1292
2	1,8516	1,8484	0,0192
3	1,8484	1,8479	0,0032
4	1,8479	1,8478	0,0005
5	1,8478	1,8478	0,0001

TABLE 6.20 – Exe 3 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle $]1; 2[$ est $x \simeq 1,848$ à trois (03) chiffres prés.

Méthode de Newton-Raphson :

La méthode de Newton-Raphson se base sur le calcul de la tangente pour chaque valeur dans l'intervalle vérifiant la condition d'existence de la racine et la formation de la suite $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ jusqu'à ce que la condition de convergence soit satisfaite $|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$.

Pour $x \in]-2; -1[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 8x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	-2,000	-2,000	16,000	-1,8750	-
1	-1,8750	-0,2971	11,3672	-1,8489	0,1250
2	-1,8489	-0,0119	10,4901	-1,8478	0,0261
3	-1,8478	-0,0004	10,4539	-1,8478	0,0011
4	-1,8478	-0,0004	10,4539	-1,8478	0,0000

TABLE 6.21 – Exe 3 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut remarquer que $|x_4 - x_3| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = -1,848$.

Pour $x \in]-1; 0[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 8x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	-1,0000	1,000	-4,000	-0,7500	-
1	-0,7500	-0,0664	-4,3125	-0,7654	0,2500
2	-0,7654	0,0001	-4,3296	-0,7654	0,0154
3	-0,7654	0,0001	-4,3296	-0,7654	0,0000

TABLE 6.22 – Exe 3 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut remarquer que $|x_3 - x_2| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = -0,765$.

Pour $x \in]0; 1[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 8x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,0000	1,000	4,000	-0,7500	-
1	0,7500	-0,0664	4,3125	-0,7654	0,2500
2	0,7654	0,0001	4,3296	-0,7654	0,0154
3	0,7654	0,0001	4,3296	-0,7654	0,0000

TABLE 6.23 – Exe 3 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut remarquer que $|x_3 - x_2| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = +0,765$.

Pour $x \in]1; 2[$:

On a $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 8x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	2,000	-2,000	-16,000	1,8750	-
1	1,8750	-0,2971	-11,3672	1,8489	0,1250
2	1,8489	-0,0119	-10,4901	1,8478	0,0261
3	1,8478	-0,0004	-10,4539	1,8478	0,0011
4	1,8478	-0,0004	-10,4539	1,8478	0,0000

TABLE 6.24 – Exe 3 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut remarquer que $|x_4 - x_3| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = +1,848$.

2) $f(x) = x^5 - x^2 - 1 = 0$:

L'étude de la fonction permet la séparation des racines.

La fonction $f(x)$ donnée est un polynôme, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$ c'est à dire $x \in]-\infty; +\infty[$.

Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 5x^2 - 2x = x(5x - 2)$$

Cette dérivée s'annule en $x = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Le tableau de variation est résumé comme suit :

x	$-\infty$	0	$+\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-1.326	$+\infty$	

A partir du tableau de variations de la fonction donnée, il existe une racine pour laquelle la fonction s'annule : $\left] \sqrt[3]{\frac{2}{5}}; +\infty \right[$

Cet intervalle peut se réduire en un intervalle plus serré où la fonction change de signes et la condition d'existence des racines est vérifiée :

On a $f(1) = -1$ et $f(2) = +27 \Rightarrow f(1) \times f(2) = -1 \times +27 = -27 < 0$, donc la

racine recherchée appartient à l'intervalle $]1; 2[$.

Méthode de Dichotomie :

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,0000	2,0000	1,5000	-1,000	27,000	4,3438	-
1	1,0000	1,5000	1,2500	-1,000	4,3438	0,4893	0,2500
2	1,0000	1,2500	1,1250	-1,000	0,4893	-0,4636	0,1250
3	1,1250	1,2500	1,1875	-0,4636	0,4893	-0,0488	0,0625
4	1,1875	1,2500	1,2188	-0,0488	0,4893	0,2040	0,0313
5	1,1875	1,2188	1,2032	-0,0488	0,2040	0,0740	0,0156
6	1,1875	1,2032	1,1954	-0,0488	0,0740	0,0120	0,0078
7	1,1875	1,1954	1,1915	-0,0488	0,0120	-0,0182	0,0039
8	1,1915	1,1954	1,1935	-0,0182	0,0120	-0,0028	0,0020
9	1,1935	1,1954	1,1945	-0,0028	0,0120	0,0050	0,0010
10	1,1935	1,1945	1,1940	-0,0028	0,0050	0,0011	0,0005

TABLE 6.25 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

A partir du tableau, on peut conclure que $|x_{10} - x_9| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = +1,194$.

Méthode du point fixe :**Méthode de Newton-Raphson :**

On a $f(x) = x^5 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 2x$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	2,0000	27,000	76,000	1,6447	-
1	1,6447	8,3296	33,2968	1,3945	0,3553
2	1,3945	2,3288	16,1189	1,2500	0,2502
3	1,2500	0,4893	9,7070	1,1996	0,1445
4	1,1996	0,0451	7,9550	1,1939	0,0504
5	1,1939	0,0003	7,7710	1,1939	0,0057
6	1,1939	0,0003	7,7710	1,1939	0,0000

TABLE 6.26 – Exe 3 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut conclure que $|x_6 - x_5| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = +1,194$.

3) $f(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0$:

L'étude de la fonction permet la séparation des racines.

La fonction $f(x)$ donnée est un polynôme, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$ c'est à dire $x \in]-\infty; +\infty[$.

Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 2e^{x^2} - 4x^2 = 2x(e^{x^2} - 4)$$

Cette dérivée s'annule en $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2 \ln 2}$

Le tableau de variation est résumé comme suit :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2\ln 2}$	0	$+\sqrt{2\ln 2}$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1.545	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1.545	$\nearrow$	$+\infty$

A partir du tableau de variations de la fonction donnée, on peut voir qu'il existe 4 racines permettant d'annuler cette fonction : $] -2; -1[$, $] -1; 0[$, $] 0; +1[$ et $] +1; +2[$

Exercice N°4 :

Dans cet exercice on doit seulement vérifier si la condition d'existence de la racine est satisfait ou non pour l'ensemble des fonctions dans l'intervalle $]0; +1[$.

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$f(0) = +1$ et $f(+1) = -3 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -3 < 0$, donc la fonction admet une racine dans l'intervalle $]0; +1[$.

$$2) f(x) = e^{-x^4} + 4x^2 - 4$$

$f(0) = -3$ et $f(+1) = +0.368 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -0.104 < 0$, donc la fonction admet une racine dans l'intervalle $]0; +1[$.

$$3) f(x) = -x^5 - 3x^2 + 1$$

$f(0) = +1$ et $f(+1) = -3 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -3 < 0$, donc la fonction admet une racine dans l'intervalle $]0; +1[$.

$$4) f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$f(0) = -1$ et $f(+1) = +3 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -3 < 0$, donc la fonction admet une racine dans l'intervalle $]0; +1[$.

Exercice N°5 :

Dans cet exercice on demande de trouver la racine positives parmi les solutions de zéro de la fonction $8x^3 + 21x^2 - 7x - 6 = 0$.

L'équation représente un polynôme définie sur $\mathbb{R}$ ou $] -\infty; +\infty[$.

Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 24x^2 + 42x - 7$$

Cette dérivée s'annule en $x = \pm 0.153$

Le tableau de variations est résumé comme suit :

x	$-\infty$	-0.153	$+0.153$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-4.46		-6.55		$+\infty$

La racine positive se trouve dans l'intervalle $]0.153; +\infty[$

Pour réduire cet intervalle au maximum :

$$f(0) = -6 \text{ et } f(+1) = +16 \Rightarrow f(0) \times f(+1) = -6 \times 16 = -96 < 0, \text{ donc } x \in]0; 1[.$$

Méthode de Dichotomie :

A partir du tableau, on peut conclure que $|x_{10} - x_9| = 0,001 < \epsilon$, la solution du

i	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	0,000	1,000	0,500	-6,000	16,000	-3,250	-
1	0,500	1,000	0,750	-3,250	16,000	3,938	0,250
2	0,500	0,750	0,625	-3,250	3,938	-0,219	0.125
3	0,625	0,750	0,688	-0,219	3,938	1,730	0,063
4	0,625	0,688	0,657	-0,219	1,730	0,734	0,031
5	0,625	0,657	0,641	-0.219	0,734	0,248	0,016
6	0,625	0,641	0,633	-0.219	0.248	0.013	0,008
7	0,625	0,633	0,629	-0.219	0.013	-0,0104	0,004
8	0,629	0,633	0,631	-0.104	0.013	-0,046	0,002
9	0,631	0,633	0,632	-0.046	0.013	-0,017	0,001
10	0,632	0,633	0,633	-0.017	0.013	0,013	0,001

TABLE 6.27 – Exe 3 :Méthode de Dichotomie

problème est donc la valeur $x = +0,633$.

Méthode du point fixe :

$$\text{On a } f(x) = 8x^3 + 21x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{7x + 6}{8x + 21}.$$

$$g(x) = \frac{7x + 6}{8x + 21} \Rightarrow g'(x) =$$

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	0,670	-
1	0,670	0,637	0,331
2	0,637	0,633	0,033
3	0,633	0,633	0,004
4	0,633	0,633	0,000

TABLE 6.28 – Exe 5 :Méthode du point fixe

A partir du tableau, on peut constater que la solution du problème dans l'intervalle $]0; 1[$ est $x \simeq 0,633$ à trois (03) chiffres près.

Méthode de Newton-Raphson :

On a $f(x) = 8x^3 + 21x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow f'(x) = 24x^2 + 42x - 7$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_i - x_{i-1} $
0	1,000	16,000	59,000	0,729	-
1	0,729	3,157	36,373	0,642	0,271
2	0,942	0,278	29,856	0,633	0,087
3	0,633	0,013	29,203	0,633	0,009
4	0,633	0,013	29,203	0,633	0,000

TABLE 6.29 – Exe 5 :Méthode de Newton

A partir du tableau, on peut conclure que $|x_4 - x_3| = 0,000 < \epsilon$, la solution du problème est donc la valeur $x = +0,633$.

TD N °2

Exercice N°1 : Trouver le polynôme à partir des données suivantes :

x	0	1	2	3	4
y	-1.0	3.0	17.0	47.0	99.0

Exercice N°2 : Trouver, en utilisant la 1ère méthode de Lagrange, le polynôme passant par les points suivants :

$$(0, -6); (1, -7.5); (-1, -9.5); (2, -2); (-2, -18)$$

Exercice N°3 : En utilisant la 2ème méthode de Lagrange, trouver le polynôme passant par les points :

x	0	1	2	3	4	5
y	-7.0	-3.0	6.0	25.0	62.0	129

Exercice N°4 : En utilisant la 2ème méthode de Lagrange, trouver la valeur $f(1.75)$ du polynôme passant par les points suivants :

x	-2	-1	0	1	2
y	2.0	4.0	1.0	5.0	8.0

Solution**Exercice N°1 :**

x	0	1	2	3	4
y	-1	3	17	47	99

On a 5 points à partir desquels on forme un polynôme d'ordre 4 au maximum qui peut être sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

On remplace chaque couple $(x_i, f(x_i))$ pour former le système d'équations

La résolution du système d'équations obtenu peut se faire par plusieurs méthodes tel que : la méthode de Gauss, la méthode de Jordan, celle de Crammer, ...etc.

La méthode de substitution est l'une des méthodes utilisée pour résoudre le système d'équation en question :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 18 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 48 \\ 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 100 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 9 \\ a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 27a_4 = 16 \\ a_1 + 4a_2 + 16a_3 + 64a_4 = 25 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 - a_2 - a_3 - a_4 \\ a_2 + 3a_3 + 7a_4 = 5 \\ a_2 + 4a_3 + 13a_4 = 6 \\ a_2 + 5a_3 + 21a_4 = 7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 - a_2 - a_3 - a_4 \\ a_2 = 5 - 3a_3 - 7a_4 \\ a_3 + 6a_4 = 1 \\ a_3 + 7a_4 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 - a_2 - a_3 - a_4 \\ a_2 = 5 - 3a_3 - 7a_4 \\ a_4 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0 \\ a_3 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -1 + x + 2x^2 + x^3$$

Le polynôme recherché peut être aussi déterminé en utilisant la 2^{me} méthode de Lagrange basée sur le calcul des fonctions d'interpolation :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

Où $L_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation dites aussi fonctions de forme, elle peuvent être calculées en se basant sur leurs propriétés :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{-1 \times -2 \times -3 \times -4} = \frac{1}{24} (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

$$= \frac{1}{24} (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \times -1 \times -2 \times -3} = -\frac{1}{6} (x^2 - 2x)(x^2 - 7x + 12)$$

$$= -\frac{4}{24} (x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{2 \times 1 \times -1 \times -2} = \frac{1}{4} (x^2 - x) (x^2 - 7x + 12)$$

$$= \frac{6}{24} (x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{3 \times 2 \times 1 \times -1} = -\frac{1}{6} (x^2 - x) (x^2 - 6x + 8)$$

$$= -\frac{4}{24} (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x)$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$L_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{24} (x^2 - x) (x^2 - 5x + 6)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{24} (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) - \frac{12}{24} (x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x) \\ &\quad + \frac{102}{24} (x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x) - \frac{188}{24} (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x) + \frac{99}{24} \\ &\quad (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 + x + 2x^2 + x^3$$

Méthode des différences fines (Méthode de Newton) : Le polynôme peut être déterminé aussi par la méthode des différences finies dite aussi méthode de Newton :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1				
1	3	4			
2	17	14	10		
3	47	30	16	6	
4	99	52	22	6	0

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta x} (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_n}{2\Delta x^2} (x - x_4)(x - x_3) + \frac{\Delta^3 y_n}{6\Delta x^3} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 y_n}{24\Delta x^4} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \\
\Rightarrow f(x) &= 99 + \frac{52}{1} (x - 4) + \frac{22}{2} (x - 4)(x - 3) + \frac{6}{6} (x - 4)(x - 3)(x - 2) \\
&\quad + \frac{0}{24} (x - 4)(x - 3)(x - x)(x - 1) \\
\Rightarrow f(x) &= 99 + 52x - 208 + 11(x^2 - 7x + 12) + (x^2 - 7x + 12)(x - 2) \\
\Rightarrow f(x) &= 99 + 52x - 208 + 11(x^2 - 7x + 12) + (x^2 - 7x + 12)(x - 2) \\
&\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1
\end{aligned}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1	4	10	6	0
1	3	14	16	6	
2	17	30	22		
3	47	52			
4	99				

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta x^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta x^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 y_0}{24\Delta x^4} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
f(x) &= -1 + \frac{4}{1}x + \frac{10}{2}x(x - 1) + \frac{6}{6}x(x - 1)(x - 2) \\
&\quad + \frac{0}{24\Delta x^4}x(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\
f(x) &= -1 + 4x + 5x^2 - 5x + x(x^2 - 3x + 2)
\end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

Exercice N°2 : Le polynôme passant par les points suivants :

$$(0,-6); (1,-7.5); (-1,-9.5); (2,-2); (-2,-18)$$

Est de la forme suivante :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

En substituant chacun des points dans cette fonction, on obtient le système d'équations

$$\text{suivant : } \begin{cases} a_0 = -6 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -1.5 \\ -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = -3.5 \quad \dots\dots\dots(a) \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 2 \\ -a_1 + 2a_2 - 4a_3 + 8a_4 = -6 \end{cases}$$

Par la méthode de substitution pour éliminer à chaque fois une inconnue, permet la détermination des coefficients du polynôme. La somme des deux premières équations ensemble et la somme des deux dernières équations permettent l'obtention du système réduit suivant :

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_4 = -5 \\ 2a_2 + 8a_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 0.5 \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

La soustraction des deux premières équations et la soustraction des deux dernières équations du système (a), donne le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ a_1 + 4a_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Le polynôme donc est exprimé par :

$$f(x) = -6 - 3x^2 + x^3 + 0.5x^4$$

Le polynôme est obtenu aussi en utilisant la 2^{me} méthode de LAGRANGE :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{-1 \times 1 \times -2 \times 2} = \frac{1}{4}(x^2-1)(x^2-4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{24} (x^4 - 5x^2 + 4) \\
L_1(x) &= \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)}{1 \times 2 \times -1 \times 3} = -\frac{1}{6} (x^2 + x) (x^2 - 4) \\
&= -\frac{4}{24} (x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) \\
L_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)(x+2)}{-1 \times -2 \times -3 \times 1} = -\frac{1}{6} (x^2 - x) (x^2 - 4) \\
&= -\frac{4}{24} (x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x) \\
L_3(x) &= \frac{x(x-1)(x+1)(x+2)}{2 \times 1 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24} (x^2 - 1) (x^2 + 2x) \\
&= \frac{1}{24} (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x) \\
L_4(x) &= \frac{x(x-1)(x+1)(x-2)}{-2 \times -3 \times -1 \times -4} = \frac{1}{24} (x^2 - 2x) (x^2 - 1) \\
&= \frac{1}{24} (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \\
f(x) &= \sum_{i=0}^4 L_i(x) f(x_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -6 \times \frac{6}{24} (x^4 - 5x^2 + 4) - 7.5 \times -\frac{4}{24} (x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) \\
&\quad - 9.5 \times -\frac{4}{24} (x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x) - 2 \times \frac{1}{24} (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x) \\
&\quad - 18 \times \frac{1}{24} (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \\
f(x) &= -6 - 3x^2 + x^3 + 0.5x^4
\end{aligned}$$

Le polynôme peut être déterminé aussi en utilisant la méthode des différences finies connue sous le nom de la méthode de Newton :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	-18	8.5	-5	0	12
-1	-9.5	3.5	-5	12	
0	-6	-1.5	7		
1	-7.5	5.5			
2	-2				

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta x^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta x^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{\Delta^4 y_0}{24\Delta x^4} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f(x) = -18 + \frac{8.5}{1} (x + 2) + \frac{-5}{2} (x + 2)(x + 1) + \frac{0}{6} (x + 2)(x + 1)x + \frac{12}{24\Delta x^4} (x + 2)(x + 1)x(x - 1)$$

$$f(x) = -1 + 8.5x - 2.5x^2 - 7.5x - 5 + 0.5x^4 + x^3 - 0.5x^2 - x$$

$$f(x) = 0.5x^4 + x^3 - 3x^2 - 6$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	-18				
-1	-9.5	8.5			
0	-6.0	3.5	-5		
1	-7.5	-1.5	-5	0	
2	-2	5.5	7	12	12

$$f(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta x} (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_n}{2\Delta x^2} (x - x_4)(x - x_3) + \frac{\Delta^3 y_n}{6\Delta x^3} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2) + \frac{\Delta^4 y_n}{24\Delta x^4} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 + \frac{5.5}{1} (x - 2) + \frac{7}{2} (x - 2)(x - 1) + \frac{12}{6} (x - 2)(x - 1)x + \frac{12}{24} (x - 2)(x - 1)x(x + 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 99 + 52x - 208 + 11(x^2 - 7x + 12) + (x^2 - 7x + 12)(x - 2)$$

$$\Rightarrow f(x) = -13 + 5.5x + 3.5x^2 - 10.5x + 7 + 2x^3 - 6x^2 + 4x + 0.5x^4 - x^3 - 0.5x^2 + x$$

$$f(x) = 0.5x^4 + x^3 - 3x^2 - 6$$

Exercice N°3 :

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-3	6	25	62	129

A partir de 6 points, on forme un polynôme d'ordre 5 au maximum, ce polynôme s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

On forme le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -7 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 6 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 = 25 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + 1024a_5 = 62 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 + 3125a_5 = 129 \end{array} \right.$$

On réarrange le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 13 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 = 32 \\ 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + 1024a_5 = 69 \\ 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 + 3125a_5 = 136 \end{array} \right.$$

$$a_1 = 4 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \dots\dots\dots(??)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_2 + 6a_3 + 14a_4 + 30a_5 = 5 \\ 6a_2 + 24a_3 + 78a_4 + 240a_5 = 20 \\ 12a_2 + 60a_3 + 252a_4 + 1020a_5 = 53 \\ 20a_2 + 120a_3 + 620a_4 + 3120a_5 = 116 \end{array} \right.$$

$$a_2 = 2.5 - 3a_3 - 7a_4 - 15a_5 \dots\dots\dots(??)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a_3 + 36a_4 + 150a_5 = 5 \\ 24a_3 + 168a_4 + 840a_5 = 23 \\ 30a_3 + 240a_4 + 1410a_5 = 33 \end{array} \right.$$

$$a_3 = \frac{1}{6} (5 - 36a_4 - 150a_5) \dots\dots\dots(??)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 24a_4 + 240a_5 = 30 \\ 60a_4 + 660a_5 = 32 \end{array} \right.$$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} a_5 = \frac{1}{120} \\ a_4 = \frac{5}{120} \end{array} \right. \quad \text{De (??), on obtient :}$$

$$a_3 = \frac{1}{6} (5 - 36a_4 - 150a_5) = \frac{1}{6} \left(5 - 36\frac{5}{120} - 150\frac{1}{120} \right) = \frac{45}{120}$$

A partir de (??), on obtient :

$$a_2 = 2.5 - 3a_3 - 7a_4 - 15a_5 = 2.5 - 3\frac{45}{120} - 7\frac{5}{120} - 15\frac{1}{120} = \frac{115}{120}$$

Et à partir de (??), on aura :

$$a_1 = 4 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = 4 - \frac{115}{120} - \frac{45}{120} - \frac{5}{120} - \frac{1}{120} = \frac{314}{120}$$

$$f(x) = \frac{1}{120} (-840 + 314x + 115x^2 + 45x^3 + 5x^4 + x^5)$$

En utilisant aussi la deuxième méthode de LAGRANGE, on peut trouver le polynôme demandé :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{-1 \times -2 \times -3 \times -4 \times -5} = -\frac{1}{120} (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)(x-5) \\ &= -\frac{1}{120} (x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \times -1 \times -2 \times -3 \times -4} = \frac{1}{24} (x^2 - 5x^2 + 6x)(x^2 - 9x + 20) \\ &= \frac{5}{120} (x^5 - 14x^4 + 71x^3 - 154x^2 + 120x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{2 \times 1 \times -1 \times -2 \times -3} = -\frac{1}{12} (x^2 - 4x^2 + 3x)(x^2 - 9x + 20) \\ &= -\frac{10}{120} (x^5 - 13x^4 + 59x^3 - 107x^2 + 60x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{3 \times 2 \times 1 \times -1 \times -2} = \frac{1}{12} (x^2 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 9x + 20) \\ &= \frac{10}{120} (x^5 - 12x^4 + 49x^3 - 78x^2 + 40x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times -1} = -\frac{1}{24} (x^2 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 8x + 15) \\ &= -\frac{5}{120} (x^5 - 11x^4 + 41x^3 - 61x^2 + 30x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{120} (x^2 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 7x + 12) \\ &= \frac{1}{120} (x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^4 L_i(x) f(x_i)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{7}{120} (x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120) \\
&\quad - \frac{15}{120} (x^5 - 14x^4 + 71x^3 - 154x^2 + 120x) \\
&\quad - \frac{60}{120} (x^5 - 13x^4 + 59x^3 - 107x^2 + 60x) \\
&\quad + \frac{250}{120} (x^5 - 12x^4 + 49x^3 - 78x^2 + 40x) \\
&\quad - \frac{310}{120} (x^5 - 11x^4 + 41x^3 - 61x^2 + 30x) \\
&\quad + \frac{129}{120} (x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x) \\
f(x) &= \frac{1}{120} (-840 + 314x + 115x^2 + 45x^3 + 5x^4 + x^5)
\end{aligned}$$

Méthode des différences finies (Méthode de Newton)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	129	67	30	12	4	1

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta x} (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_n}{2\Delta x^2} (x - x_4)(x - x_3) + \frac{\Delta^3 y_n}{6\Delta x^3} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2) \\
&\quad + \frac{\Delta^4 y_n}{24\Delta x^4} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \\
\Rightarrow f(x) &= 129 + \frac{6}{1} (x - 5) + \frac{30}{2} (x - 5)(x - 4) + \frac{12}{6} (x - 5)(x - 4)(x - 3) \\
&\quad + \frac{4}{24} (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2) + \frac{1}{120} (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1) \\
f(x) &= \frac{1}{120} (-840 + 314x + 115x^2 + 45x^3 + 5x^4 + x^5)
\end{aligned}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7	4	5	5	3	1
1	-3	9	10	8	4	
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta x^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta x^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{\Delta^4 y_0}{24\Delta x^4} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$f(x) = -7 + \frac{4}{1}x + \frac{5}{2}x(x-1) + \frac{5}{6}x(x-1)(x-2) + \frac{3}{24\Delta x^4}x(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{3}{24\Delta x^4}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$f(x) = \frac{1}{120} (-840 + 314x + 115x^2 + 45x^3 + 5x^4 + x^5)$$

Exercice N°4 :

x	-2	-1	0	1	2
y	2	4	1	5	8

Le polynôme passant par l'ensemble des points peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

L'utilisation de la première méthode de LAGRANGE exige la formation et la résolution

$$\text{du système d'équations : } \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \\ -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 3 \quad \dots\dots\dots(b) \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 7 \\ -2a_1 + 42a_2 - 8a_3 + 16a_4 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ 2a_2 + 2a_4 = 7 \\ 2a_2 + 8a_4 = 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_4 = \frac{-5}{6} \\ a_2 = \frac{26}{6} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ 2a_1 + 2a_3 = 1 \\ 2a_1 + 8a_3 = 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_3 = \frac{2}{6} \\ a_1 = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{26}{6}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{6} (6 + x + 26x^2 + 2x^3 - 5x^4)$$

Le polynôme peut être aussi déterminé en utilisant la 2^{me} méthode de LAGRANGE basée sur le calcul des fonctions d'interpolations :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{-1 \times 1 \times -2 \times 2} = \frac{1}{4} (x^2 - 1) (x^2 - 4)$$

$$= \frac{6}{24} (x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$L_1(x) = \frac{x(x+1)(x-2)(x+2)}{1 \times 2 \times -1 \times 3} = -\frac{1}{6} (x^2 + x) (x^2 - 4)$$

$$= -\frac{4}{24} (x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x)$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x+2)}{-1 \times -2 \times -3 \times 1} = -\frac{1}{6} (x^2 - x) (x^2 - 4)$$

$$= -\frac{4}{24} (x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x+1)(x+2)}{2 \times 1 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24} (x^2 - 1) (x^2 + 2x)$$

$$= \frac{1}{24} (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)$$

$$\begin{aligned}
L_4(x) &= \frac{x(x-1)(x+1)(x-2)}{-2 \times -3 \times -1 \times -4} = \frac{1}{24} (x^2 - 2x) (x^2 - 1) \\
&= \frac{1}{24} (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \\
f(x) &= \sum_{i=0}^4 L_i(x) f(x_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 \times \frac{6}{24} (x^4 - 5x^2 + 4) + 5 \times -\frac{4}{24} (x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) \\
&+ 4 \times -\frac{4}{24} (x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x) + 8 \times \frac{1}{24} (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x) \\
&+ 2 \times \frac{1}{24} (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)
\end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{26}{6}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{6} (6 + x + 26x^2 + 2x^3 - 5x^4)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	2	2	-5	12	-20
-1	4	-3	7	-8	
0	1	4	-1		
1	5	3			
2	8				

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta x^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta x^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&+ \frac{\Delta^4 y_0}{24\Delta x^4} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 + \frac{2}{1} (x + 2) + \frac{-5}{2} (x + 2)(x + 1) + \frac{12}{6} (x + 2)(x + 1)x \\
&+ \frac{-20}{24} (x + 2)(x + 1)x(x - 1)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{6} (6 + x + 26x^2 + 2x^3 - 5x^4)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	2				
-1	4	2			
0	1	-3	-5		
1	5	4	7	12	
2	8	3	-1	-8	-20

$$\begin{aligned} f(x) &= y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta x} (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_n}{2\Delta x^2} (x - x_4)(x - x_3) + \frac{\Delta^3 y_n}{6\Delta x^3} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2) \\ &\quad + \frac{\Delta^4 y_n}{24\Delta x^4} (x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \\ \Rightarrow f(x) &= 8 + \frac{3}{1} (x - 2) + \frac{-1}{2} (x - 2)(x - 1) + \frac{-8}{6} (x - 2)(x - 1)x \\ &\quad + \frac{-20}{24} (x - 2)(x - 1)x(x + 1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{6} (6 + x + 26x^2 + 2x^3 - 5x^4)$$

TD N °3

Exercice N°1 : Calculer l'intégration de la fonction passant par les points suivants en utilisant la formule du trapèze :

x	0	1	2	3	4
y	-1.0	3.0	17.0	47.0	99.0

Exercice N°2 : Calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x - 1$ dans l'intervalle $[-2; 2]$ en utilisant la formule du trapèze et la formule de Simpson pour $n = 8$ ensuite comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Exercice N°3 : En utilisant la formule de Simpson Trouver la valeur de la surface limitée par l'ensemble des points suivants : $(0, -6)$; $(1, -7.5)$; $(-1, -9.5)$; $(2, -2)$; $(-2, -18)$

Exercice N°4 : En utilisant la formule de Simpson trouver l'intégrale limitée de la fonction passant par l'ensemble des points suivants :

x	-2	-1	0	1	2
y	2.0	4.0	1.0	5.0	8.0

Sollutions

Exercice N°1 : La formule du trapèze pour le calcul des intégrales est donnée par la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4)$$

On a $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1.0$ d'où :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} (-1.0 + 2(3.0 + 17.0 + 47.0) + 99.0) = 116$$

Exercice N°2 : On doit tous d'abord construire le tableau des valeurs :

On a $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-2)}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$

x	-2	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	-6.2	-5.05	-3.8	-2.45	-1.0	0.55	2.2	3.95	5.8

La formule du Trapèze est donnée par l'expression suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})$$

Ce qui peut donner :

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{4} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8) = -2.9000$$

La formule de SIMPSON est donnée par l'expression suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad n = 2m$$

Ce qui peut donner :

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{6} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) = -2.9333$$

L'intégrale exacte de la fonction $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x - 1$ dans l'intervalle $[-2; 2]$ est exprimée par la relation :

$$\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{5}x^2 + 3x - 1 \right) dx = \left(\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right)_{-2}^2 = \frac{16}{15} - 4 = -2.9333$$

Exercice N°3 : La formule de SIMPSON est donnée par l'expression suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad n = 2m$$

la valeur de $n = 4$ ce qui donne $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{4} = 1.0$ qui peut donner :

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = -33.33$$

Et puisqu'on demande la surface A limitée par l'ensemble des points donnés, on a
 $=A = +33.33U^2$

Exercice N°4 : La formule de SIMPSON est donnée par l'expression suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad n = 2m$$

la valeur de $n = 4$ ce qui donne $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{4} = 1.0$ qui peut donner :

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 16.0$$

TD N °4

Exercice N°1 :

Résoudre numériquement sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivantes :

$$y' + 2y = x^2 \text{ avec } y(0) = 1.25$$

Exercice N°2 :

Résoudre par la méthode d'Euler sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivantes :

$$y' + y = 2 \sin x \text{ avec } y(0) = 0$$

Exercice N°3 :

Résoudre numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivantes :

$$y' - y = (x + 1) e^x \text{ avec } y(0) = 1$$

Exercice N°4 :

Utiliser les méthode d'Euler et celles de Runge-Kutta d'ordre 4 pour résoudre numériquement sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$y' + y = x - e^x + \cos x \text{ avec } y(0) = 0$$

Sollutions

Exercice N°1 :

On a $y' + 2y = x^2$ ou $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y + x^2$
d'où $f(x, y) = -2y + x^2$

Par intégration de la relation précédente, la solution analytique ou exacte est donnée par :

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + e^{-2x}$$

L'utilisation d'une méthode numérique nécessite le choix du pas :

$$\Delta x = h$$

On prend $\Delta x = h = 0.1$ et à partir de la condition initiale donnée on prend $x_0 = 0$ et on construit la suite $x_i = x_0 + i\Delta x$ pour laquelle on doit calculer y_{i+1} selon la méthode choisie.

La formule d'Euler est donnée par l'expression suivante :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(y_i, x_i)$$

On va dans ce qui suit effectuer quelques valeurs de y_{i+1} et en suite réaliser le reste des calculs dans un tableau.

Pour $i = 0$ on a :

$$y_1 = y_0 + \Delta x f(x_0, y_0) = y_0 + 0.1(-2y_0 + x_0^2) = 1.25 + 0.1 \times (-2 \times 1.25 + 0^2)$$

$$y_1 = 1.000$$

Pour $i = 1$ on a :

$$y_2 = y_1 + \Delta x f(x_1, y_1) = y_1 + 0.1(-2y_1 + x_1^2) = 1.00 + 0.1 \times (-2 \times 1.00 + 0.1^2)$$

$$y_2 = 0.801$$

Pour $i = 2$ on a :

$$y_3 = y_2 + \Delta x f(x_2, y_2) = y_2 + 0.1(-2y_2 + x_2^2) = 0.801 + 0.1 \times (-2 \times 0.801 + 0.2^2)$$

$$y_3 = 0.6448$$

Le même processus est suivi pour les autres valeurs de i qu'on va regrouper dans le tableau suivant :

i	x_i	Exacte	Euler	Erreur relative
0	0.0	1.2500	1.2500	
1	0.1	1.0237	1.0000	0.002
2	0.2	0.8403	0.8010	0.004
3	0.3	0.6938	0.6448	0.006
4	0.4	0.5793	0.5248	0.009
5	0.5	0.4229	0.4359	0.011
6	0.6	0.4312	0.3737	0.014
7	0.7	0.3916	0.3350	0.016
8	0.8	0.3719	0.3170	0.017
9	0.9	0.3703	0.3176	0.018
10	1.0	0.3853	0.3351	0.017
11	1.1	0.4158	0.3680	0.016
12	1.1	0.4606	0.4154	0.014
13	1.1	0.5193	0.4763	0.013
14	1.1	0.5908	0.5501	0.011
15	1.1	0.6748	0.6361	0.009
16	1.1	0.7708	0.7339	0.008

TABLE 6.30 – Méthode d'Euler

La formule de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\Delta x (k_1 + k_2)$$

Avec :

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad k_2 = f(x_i + \Delta, y_i + \Delta x k_1)$$

Pour utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, deux coefficients k_1 et k_2 sont nécessaires pour le calcul.

Essayons de calculer y_1 , y_2 et y_3 manuellement et le reste des valeurs seront résumées dans un tableau.

Pour $i = 0$ on a :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -2y_0 + x_0^2 = -2 \times 1.25 + 0^2 = -2.50$$

$$k_2 = f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1k_1) = -2(y_0 + 0.1k_1) + (x_0 + 0.1)^2$$

$$k_2 = -2(1.25 - 0.1 \times 2.50) + 0.1^2 = -1.99$$

$$y_1 = y_0 + 0.5 \times 0.1 (k_1 + k_2) = 1.25 + 0.05 \times -4.49 = 1.0255$$

Pour $i = 1$ on a :

$$k_1 = f(x_1, y_1) = -2y_1 + x_1^2 = -2 \times 1.0255 + 0.1^2 = -2.0410$$

$$k_2 = f(x_1 + 0.1, y_1 + 0.1k_1) = -2(y_1 + 0.1k_1) + (x_1 + 0.1)^2$$

$$k_2 = -2(1.0255 + 0.1 \times -2.0410) + 0.2^2 = -1.6028$$

$$y_2 = y_1 + 0.5 \times 0.1 (k_1 + k_2) = 1.0255 + 0.05 \times -3.6438 = 0.8433$$

Pour $i = 2$ on a :

$$k_1 = f(x_2, y_2) = -2y_2 + x_2^2 = -2 \times 0.8433 + 0.2^2 = -1.6466$$

$$k_2 = f(x_2 + 0.1, y_2 + 0.1k_1) = -2(y_2 + 0.1k_1) + (x_2 + 0.1)^2$$

$$k_2 = -2(0.8433 + 0.1 \times -1.6466) + 0.3^2 = -1.2673$$

$$y_3 = y_2 + 0.5 \times 0.1 (k_1 + k_2) = 0.8433 + 0.05 \times -2.9139 = 0.6976$$

De la même manière on effectue le reste des calculs et on les regroupe dans le tableau :

i	x_i	Exacte	k_1	k_2	Runge-Kutta 2
0	0.0	1.2500	-2.5000	-1.9900	1.2500
1	0.1	1.0237	-2.0410	-1.6028	1.0255
2	0.2	0.8403	-1.6466	-1.2673	0.8433
3	0.3	0.6938	-1.3052	-0.9742	0.6976
4	0.4	0.5793	-1.0073	-0.7158	0.5836
5	0.5	0.4929	-0.7450	-0.4860	0.4975
6	0.6	0.4312	-0.5119	-0.2795	0.4359
7	0.7	0.3916	-0.3027	-0.0922	0.3964
8	0.8	0.3719	-0.1132	0.0794	0.3766
9	0.9	0.3703	0.0601	0.2381	0.3749
10	1.0	0.3853	0.2203	0.3862	0.3898
11	1.1	0.4158	0.3697	0.5257	0.4202
12	1.2	0.4607	0.5101	0.6581	0.4649
13	1.3	0.5193	0.6433	0.7846	0.5234
14	1.4	0.5908	0.7705	0.9064	0.5947
15	1.5	0.6748	0.8928	1.0243	0.6786
16	1.6	0.7708	1.0111	1.1389	0.7744
17	1.7	0.8784	1.1261	1.2509	0.8819
18	1.8	0.9973	1.2384	1.3607	1.0008
19	1.9	1.1274	1.3485	1.4688	1.1308
20	2.0	1.2683			1.2716

TABLE 6.31 – Méthode de Runge-Kutta 2

La formule de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \quad k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_3)$$

i	x_i	Exacte	k_1	k_2	k_3	k_4	Runge-Kutta 4
0	0.0	1.2500	-2.5000	-2.2475	-2.2728	-2.0355	1.2500
1	0.1	1.0237	-2.0375	-1.8212	-1.8428	-1.6389	1.0237
2	0.2	0.8403	-1.6407	-1.4541	-1.4727	-1.2961	0.8403
3	0.3	0.6938	-1.2976	-1.1354	-1.1516	-0.9973	0.6938
4	0.4	0.5793	-0.9987	-0.8563	-0.8705	-0.7346	0.5793
5	0.5	0.4929	-0.7358	-0.6097	-0.6223	-0.5013	0.4929
6	0.6	0.4312	-0.5024	-0.3897	-0.4009	-0.2922	0.4312
7	0.7	0.3916	-0.2932	-0.1914	-0.2016	-0.1029	0.3916
8	0.8	0.3719	-0.1038	-0.0109	-0.0202	0.0702	0.3719
9	0.9	0.3703	0.0694	0.1549	0.1464	0.2301	0.3703
10	1.0	0.3853	0.2293	0.3089	0.3009	0.3791	0.3853
11	1.1	0.4158	0.3784	0.4530	0.4456	0.5193	0.4158
12	1.2	0.4607	0.5185	0.5892	0.5821	0.6521	0.4607
13	1.3	0.5193	0.6514	0.7188	0.7121	0.7790	0.5193
14	1.4	0.5908	0.7784	0.8430	0.8366	0.9011	0.5908
15	1.5	0.6748	0.9004	0.9629	0.9566	1.0191	0.6748
16	1.6	0.7708	1.0185	1.0791	1.0731	1.1339	0.7708
17	1.7	0.8784	1.1332	1.1924	1.1865	1.2459	0.8784
18	1.8	0.9973	1.2453	1.3033	1.2975	1.3558	0.9973
19	1.9	1.1274	1.3552	1.4122	1.4065	1.4639	1.1274
20	2.0	1.2683	0.0000	0.0000	0.0000	1.7452	1.2683

TABLE 6.32 – Méthode de Runge-Kutta 4

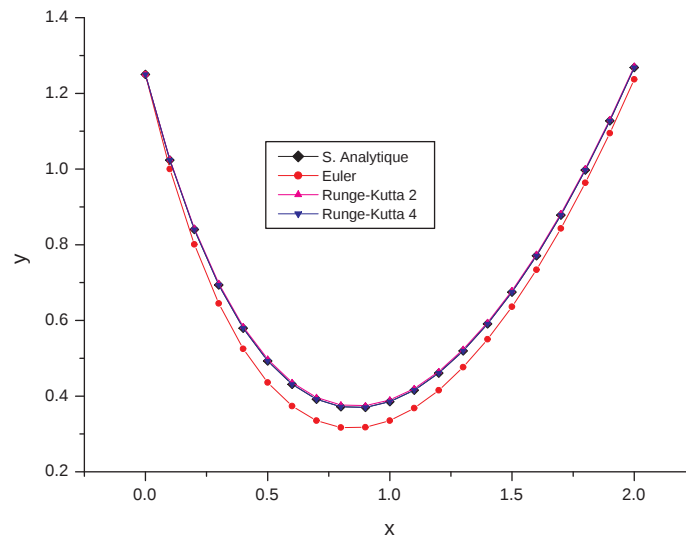


FIGURE 6.1 – Méthode d'Euler, Runge-Kutta & Solution Exacte.

Exercice N°2 :

On a $y' + y = 2 \sin x$ ou $\frac{dy}{dx} + y = 2 \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y + 2 \sin x$ dont l'intégration par rapport à x et y donne la solution analytique ou exacte suivante :

$$y = -\cos x + \sin x + e^{-x}$$

La formule d'Euler est donnée par l'expression suivante :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x f(y_i, x_i)$$

Avec $f(x_i, y_i) = -y_i + 2 \sin x_i$

On va dans ce qui suit effectuer quelques valeurs de y_{i+1} et en suite réaliser le reste des calculs dans un tableau.

Pour $i = 0$: $y_1 = y_0 + \Delta x f(y_0, x_0) = 0.0 + 0.1 \times (-0.0 + 2 \sin 0) = 0.0$

Pour $i = 1$: $y_2 = y_1 + \Delta x f(y_1, x_1) = 0.0 + 0.1 \times (-0.0 + 2 \sin 0.1) = 0.02$

Pour $i = 2$: $y_3 = y_2 + \Delta x f(y_2, x_2) = 0.02 + 0.1 \times (-0.02 + 2 \sin 0.2) = 0.0577$

i	x_i	Exacte	Euler
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1000	0.0097	0.0000
2	0.2000	0.0373	0.0200
3	0.3000	0.0810	0.0577
4	0.4000	0.1387	0.1110
5	0.5000	0.2084	0.1778
6	0.6000	0.2881	0.2559
7	0.7000	0.3760	0.3433
8	0.8000	0.4700	0.4378
9	0.9000	0.5683	0.5375
10	1.0000	0.6690	0.6404

TABLE 6.33 – Méthode d'Euler

Exercice N°3 :

On a $y' - y = (x + 1) e^x$ ou $\frac{dy}{dx} - y = (x + 1) e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + (x + 1) e^x$

La solution exacte est obtenue par intégration de cette expression pour avoir :

$$y = \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) e^x + e^x$$

La formule de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \Delta x (k_1 + k_2)$$

Avec :

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad k_2 = f(x_i + \Delta, y_i + \Delta x k_1)$$

Pour utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, deux coefficients k_1 et k_2 sont nécessaires pour le calcul.

Avec $f(x_i, y_i) = y_i + (x_i + 1) e^{x_i}$

On va dans ce qui suit effectuer quelques valeurs de y_{i+1} et en suite réaliser le reste des calculs dans un tableau.

Pour $i = 0$: $y_1 = y_0 + 0.5\Delta x(k_1 + k_2)$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 + (x_0 + 1)e^{x_0} = 1.0 + e^0 = 2.0$$

$$k_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x k_1) = (y_0 + 0.1 \times k_1) + (x_0 + \Delta x + 1)e^{x_0} = 1.2 + 1.1e^{0.1} = 2.4157$$

$$y_1 = y_0 + 0.05(k_1 + k_2) = 1 + 0.05 \times 4.4157 = 1.2208$$

Pour $i = 1$: $y_2 = y_1 + 0.5\Delta x(k_1 + k_2)$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = y_1 + (x_1 + 1)e^{x_1} = 1.2208 + 1.1e^{0.1} = 2.4365$$

$$k_2 = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta x k_1) = (y_1 + 0.1 \times k_1) + (x_1 + \Delta x + 1)e^{x_1 + \Delta x} = (1.2208 + 0.1 \times 2.4365) + 1.2e^{0.2} = 2.9301$$

$$y_2 = y_1 + 0.05(k_1 + k_2) = 1.2208 + 0.05 \times 5.3666 = 1.4891$$

Pour $i = 2$: $y_3 = y_2 + \Delta x f(k_1 + k_2)$

$$k_1 = f(x_2, y_2) = y_2 + (x_2 + 1)e^{x_2} = 1.4891 + 1.2e^{0.2} = 2.9548$$

$$k_2 = f(x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta x k_1) = (y_2 + 0.1 \times k_1) + (x_2 + \Delta x + 1)e^{x_2 + \Delta x} = (1.4891 + 0.1 \times 2.9548) + 1.3e^{0.3} = 3.5394$$

$$y_3 = y_2 + 0.05(k_1 + k_2) = 1.4891 + 0.05 \times 6.4942 = 1.8138$$

i	x_i	k_1	k_2	Runge-Kutta 2	Exacte
0	0.0000	2.0000	2.4157	1.0000	1.0000
1	0.1000	2.4365	2.9301	1.2208	1.2212
2	0.2000	2.9548	3.5394	1.4891	1.4901
3	0.3000	3.5686	4.2592	1.8138	1.8156
4	0.4000	4.2938	5.1077	2.2052	2.2079
5	0.5000	5.1484	6.1055	2.6753	2.6792
6	0.6000	6.1534	7.2767	3.2380	3.2434
7	0.7000	7.3329	8.6487	3.9095	3.9167
8	0.8000	8.7145	10.2533	4.7086	4.7181
9	0.9000	10.3302	12.1265	5.6570	5.6694
10	1.0000	12.2164	14.3102	6.7798	6.7957
11	1.1000	14.4149	16.8519	8.1061	8.1263
12	1.2000			9.6695	9.6947

TABLE 6.34 – Méthode de Runge-Kutta 2

Exercice N°4 :

On a $y' + y = x - e^x + \cos x$ ou $\frac{dy}{dx} + y = x - e^x + \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y + x - e^x + \cos x$
L'intégration de cette dernière avec prise en compte de la condition initiale donne la relation exprimant la solution exacte :

$$y = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{-x}$$

La formule de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \qquad k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_3)$$

Pour utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, quatre coefficients k_1 , k_2 , k_3 et k_4 sont nécessaires pour le calcul.

Avec $f(x_i, y_i) = -y_i + x_i - e^{x_i} + \cos x_i$

On va dans ce qui suit effectuer quelques valeurs de y_{i+1} et en suite réaliser le reste des calculs dans un tableau.

Pour $i = 0$: $y_1 = y_0 + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -y_0 + x_0 - e^{x_0} + \cos x_0 = 0.0 + 0 - e^0 + \cos 0 = 0.0$$

$$k_2 = f(x_0 + 0.5\Delta x, y_0 + 0.5\Delta x k_1) = -(y_0 + 0.05 \times k_1) + (x_0 + 0.5\Delta x) - e^{x_0 + 0.5\Delta x} + \cos(x_0 + 0.5\Delta x) = 0 + 0.05 - e^{0.05} + \cos(0.05) = -0.0025$$

$$k_3 = f(x_0 + 0.5\Delta x, y_0 + 0.5\Delta x k_2) = -(y_0 + 0.05 \times k_2) + (x_0 + 0.5\Delta x) - e^{x_0 + 0.5\Delta x} + \cos(x_0 + 0.5\Delta x) = (0 + 0.05 \times -0.0025) + (0.05) - e^{0.05} + \cos(0.05) = -0.0024$$

$$k_4 = f(x_0 + 0.5\Delta x, y_0 + \Delta x k_3) = -(y_0 + 0.1 \times k_3) + (x_0 + \Delta x) - e^{x_0 + \Delta x} + \cos(x_0 + \Delta x) = 0.00024 + 0.1 - e^{0.1} + \cos 0.1 = -0.0099$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0.0003$$

Pour $i = 1$: $y_2 = y_1 + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = -y_1 + x_1 - e^{x_1} + \cos x_1 = 0.0003 + 0.1 - e^{0.1} + \cos 0.1 = -0.0099$$

$$k_2 = f(x_1 + 0.5\Delta x, y_1 + 0.5\Delta x k_1) = -(y_1 + 0.05 \times k_1) + (x_1 + 0.5\Delta x) - e^{x_1 + 0.5\Delta x} + \cos(x_1 + 0.5\Delta x) = 0.000795 + 0.15 - e^{0.15} + \cos(0.15) = -0.0223$$

$$k_3 = f(x_1 + 0.5\Delta x, y_1 + 0.5\Delta x k_2) = -(y_1 + 0.05 \times k_2) + (x_1 + 0.5\Delta x) - e^{x_1 + 0.5\Delta x} + \cos(x_1 + 0.5\Delta x) = 0.001415 + (0.15) - e^{0.15} + \cos(0.15) = -0.0216$$

$$k_4 = f(x_1 + 0.5\Delta x, y_1 + \Delta x k_3) = -(y_1 + 0.1 \times k_3) + (x_1 + \Delta x) - e^{x_1 + \Delta x} + \cos(x_1 + \Delta x) = 0.00246 + 0.2 - e^{0.2} + \cos 0.2 = -0.0389$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0.0026$$

Le reste des calculs est organiser dans le tableau suivant :

i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4	Runge-Kutta 4	Exacte
0	0.0000	0.0000	-0.0025	-0.0024	-0.0099	0.0000	0.0000
1	0.1000	-0.0098	-0.0222	-0.0216	-0.0388	-0.0003	-0.0003
2	0.2000	-0.0387	-0.0606	-0.0595	-0.0860	-0.0026	-0.0026
3	0.3000	-0.0858	-0.1167	-0.1152	-0.1506	-0.0087	-0.0087
4	0.4000	-0.1504	-0.1900	-0.1880	-0.2320	-0.0204	-0.0204
5	0.5000	-0.2318	-0.2798	-0.2774	-0.3297	-0.0393	-0.0393
6	0.6000	-0.3295	-0.3857	-0.3829	-0.4434	-0.0673	-0.0673
7	0.7000	-0.4431	-0.5074	-0.5042	-0.5727	-0.1058	-0.1058
8	0.8000	-0.5724	-0.6446	-0.6410	-0.7175	-0.1564	-0.1564
9	0.9000	-0.7172	-0.7974	-0.7934	-0.8779	-0.2208	-0.2208
10	1.0000	-0.8776	-0.9658	-0.9614	-1.0541	-0.3004	-0.3004
11	1.1000	-1.0538	-1.1502	-1.1454	-1.2464	-0.3968	-0.3968
12	1.2000	-1.2461	-1.3510	-1.3458	-1.4556	-0.5117	-0.5117
13	1.3000	-1.4552	-1.5691	-1.5634	-1.6823	-0.6466	-0.6466
14	1.4000	-1.6819	-1.8052	-1.7991	-1.9278	-0.8033	-0.8033
15	1.5000	-1.9274	-2.0607	-2.0540	-2.1932	-0.9836	-0.9836

TABLE 6.35 – Méthode de Runge-Kutta 4

TD N °5

Exercice N°1 : Résoudre le système des équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \quad (6.4)$$

Exercice N°2 : Résoudre, en utilisant la méthode Jordan, le système des équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -16 \\ -2x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -20 \\ 10x_1 + 8x_2 - 40x_3 = 46 \end{cases} \quad (6.5)$$

Exercice N°3 : En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système des équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + x_4 = -5 \\ -9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 13 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 15 \end{cases} \quad (6.6)$$

Exercice N°4 : Résoudre le système des équations donné ci-dessous en utilisant la

méthode de Jordan.

$$\left\{\begin{array}{l}3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -17 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 5 \\ 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 6\end{array}\right. \quad (6.7)$$

Solutions

Exercice N°1 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \quad (6.8)$$

Le système des équations linéaire peut être réécrit sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \end{array} \right) \quad (6.10)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -37 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -37 \\ 0 & 0 & 10 & 23 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \end{array} \right) \quad (6.11)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 23 & 92 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & -108 \end{array} \right) \quad (6.12)$$

A partir de cette dernière transformation, on aura :

$$x_4 = \frac{-108}{-27} = 4$$

$$x_3 + 5x_4 = 20 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 - 5x_3 - 9x_4 = -37 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \Rightarrow x_1 = 1$$

Exercice N°2 :

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -16 \\ -2x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -20 \\ 10x_1 + 8x_2 - 40x_3 = 46 \end{cases} \quad (6.13)$$

Le système des équations linéaire peut être réécrit sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 10 \\ -2 & -7 & 8 \\ 10 & -8 & -40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ -20 \\ 46 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 10 & -16 \\ -2 & -7 & 8 & -20 \\ 10 & 8 & -40 & 46 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 10 & -16 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & -15 & 6 \end{array} \right) \quad (6.15)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 10 & -16 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & -15 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 11 & -12 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{71}{6} & 0 \end{array} \right) \quad (6.16)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 11 & -12 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{71}{6} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{71}{6} & 0 \end{array} \right) \quad (6.17)$$

A partir de cette dernière transformation, on aura :

$$x_3 = \frac{0}{-71} = 0$$

$$-6x_2 + 0x_3 = -12 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$-4x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -12 \Rightarrow x_1 = 3$$

Exercice N°3 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + x_4 = -5 \\ -9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 13 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 15 \end{cases} \quad (6.18)$$

Le système des équations linéaire peut être réécrit sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 1 \\ -9 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ -9 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 8 & 13 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ 0 & 16.5 & 42.5 & 10.5 & -21.5 \\ 0 & -9.5 & -7.5 & 6.5 & 20.5 \\ 0 & -1 & -26 & 2 & 30 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ 0 & 16.5 & 42.5 & 10.5 & -21.5 \\ 0 & -9.5 & -7.5 & 6.5 & 20.5 \\ 0 & -1 & -26 & 2 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ 0 & 16.5 & 42.5 & 10.5 & -21.5 \\ 0 & 0 & 16.97 & 12.55 & 8.12 \\ 0 & 0 & -23.42 & 2.64 & 28.70 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ 0 & 16.5 & 42.5 & 10.5 & -21.5 \\ 0 & 0 & 16.97 & 12.55 & 8.12 \\ 0 & 0 & -23.42 & 2.64 & 28.70 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 9 & 1 & -5 \\ 0 & 16.5 & 42.5 & 10.5 & -21.5 \\ 0 & 0 & 16.97 & 12.55 & 8.12 \\ 0 & 0 & 0 & 19.95 & 39.91 \end{array} \right)$$

A partir de cette dernière transformation, on aura :

$$x_4 = \frac{39.91}{19.95} = 2$$

$$19.97x_3 + 12.55x_4 = 8.12 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$16.5x_2 + 42.5x_3 + 10.5x_4 = -21.5 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + x_4 = -5 \Rightarrow x_1 = 1$$

Exercice N°4 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -17 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 5 \\ 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 6 \end{cases}$$

Le système des équations linéaire peut être réécrit sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 & 1 \\ 9 & 5 & 6 & -8 \\ 4 & 6 & 3 & 9 \\ 2 & -8 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -17 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 9 & 4 & 1 & -2 \\ 9 & 5 & 6 & -8 & -17 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & -8 & 9 & 8 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 9 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -22 & -6 & -11 & -11 \\ 0 & -6 & -2.33 & 7.67 & 7.67 \\ 0 & -14 & 6.33 & 7.33 & 7.33 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 9 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -22 & -6 & -11 & -11 \\ 0 & -6 & -2.33 & 7.67 & 7.67 \\ 0 & -14 & 6.33 & 7.33 & 7.33 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1.545 & -3.5 & -6.5 \\ 0 & -22 & -6 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & -0.70 & 10.67 & 10.67 \\ 0 & 0 & 10.15 & 14.33 & 14.33 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1.545 & -3.5 & -6.5 \\ 0 & -22 & -6 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & -0.70 & 10.67 & 10.67 \\ 0 & 0 & 10.15 & 14.33 & 14.33 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 20.15 & 17.27 \\ 0 & -22 & 0 & -102.83 & -102.83 \\ 0 & 0 & -0.70 & 10.67 & 10.67 \\ 0 & 0 & 0 & 169.70 & 169.70 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 20.15 & 17.27 \\ 0 & -22 & 0 & -102.83 & -102.83 \\ 0 & 0 & -0.70 & 10.67 & 10.67 \\ 0 & 0 & 0 & 169.70 & 169.70 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Transformation}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 169.70 & 169.70 \end{array} \right)$$

A partir de cette dernière transformation, on peut avoir :

$$169.0x_4 = 169.70 = 1$$

$$-0.7x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$-22x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$3x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = -1$$

Troisième partie

Algorithmes

CHAPITRE 7

ALGORITHMES

7.1 Introduction :

Dans Cette partie on présente les différents algorithmes utilisés dans l'analyse numérique .

1. Algorithme de la méthode de Dichotomie.
2. Algorithme du point fixe.
3. Algorithme de Newton-Raphson.
4. Algorithme de Gauss.
5. Algorithme de Gauss-Jordan.
6. Algorithme de décomposition LU.
7. Algorithme de Choleski.
8. Algorithme de Jacobi.
9. Algorithme de Gauss-Seidel.
10. Algorithme de la méthode du Trapèze.
11. Algorithme de la méthode de Simpson.
12. Algorithme de Runge-Kutta.

7.2 Algorithme de Zéro d'une fonction :

7.2.1 Algorithme de la méthode de Dichotomie :

Algorithme 6: Algorithme de DICHOTOMIE.

Input : Donner les valeurs de a, b et ϵ

```
1  $D = |b - a|$ 
2  $i = 0; x = a$ 
3 while  $D > \epsilon$  do
4    $x_a = x$ 
5    $x = \frac{a + b}{2}$ 
6   if  $f(a) \times f(x) < 0$  then
7      $b = x$ 
8   else
9      $a = x$ 
10  end
11   $D = |x - x_a|$ 
12   $i = i + 1$ 
13 end
14 Return  $x$ 
```

7.2.2 Algorithme de la méthode du Point fixe :

Algorithme 7: Algorithme du point fixe.

Input : Donner les valeurs de a, b et ϵ

```
1  $D = |b - a|$ 
2  $i = 0; x = a$ 
3 while  $D > \epsilon$  do
4    $x_a = x$ 
5    $x = g(x_a)$ 
6    $D = |x - x_a|$ 
7    $i = i + 1$ 
8 end
9 Return  $x$ 
```

7.2.3 Algorithme de la méthode de Newton-Raphson :

Algorithme 8: Algorithme de Newton-Raphson.

Input : Donner les valeurs de a, b et ϵ

```
1  $D = |b - a|$ 
2  $i = 0; x = a$ 
3 while  $D > \epsilon$  do
4    $x_a = x$ 
5    $fx = f(x_a)$ 
6    $fpx = fp(x)$ 
7    $x = x_a - \frac{fx}{fpx}$   $D = |x - x_a|$ 
8    $i = i + 1$ 
9 end
10 Return  $x$ 
```

7.3 Systèmes d'équations linéaires : Méthodes directes :

7.3.1 Algorithme de la méthode de Gauss :

Triangularisation inférieure :

Algorithme 9: Algorithme de GAUSS.

Input : un estimé n, A, b

```
1 for  $r \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
2   for  $i \leftarrow r + 1$  to  $n$  do
3      $Q = \frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ 
4      $b_i = b_i - Q * b_r$ 
5     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
6        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - Q \times a_{rj}$ 
7     end
8   end
9    $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ 
10  for  $i \leftarrow n - 1$  to 1 do
11     $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ 
12  end
13 end
14 Return  $x$ 
```

Triangularisation supérieure :

Algorithme 10: Algorithme de GAUSS.

Input : un estimé n, A, b

```

1  for  $r \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
2      for  $i \leftarrow 1$  to  $k - 1$  do
3           $Q = \frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ 
4           $b_i = b_i - Q * b_r$ 
5          for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
6               $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - Q \times a_{rj}$ 
7          end
8      end
9       $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ 
10     for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
11          $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ 
12     end
13 end
14 Return  $x$ 

```

7.3.2 Algorithme de la méthode de Jordan :

Algorithme 11: Algorithme de JORDAN.

Input : un estimé n, A, b

```

1  for  $r \leftarrow 1$  to  $n$  do
2      for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3          if  $i \neq r$  then
4               $Q = \frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ 
5               $b_i = b_i - Q * b_r$ 
6              for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
7                   $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - Q \times a_{rj}$ 
8              end
9          end
10     end
11     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
12          $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ 
13     end
14 end
15 Return  $x$ 

```

7.3.3 Algorithme de la méthode de LU :

Algorithme de la méthode de Doolittle :

Algorithme 12: Algorithme de Doolittle LU.

Input : donner n, A, b

```

1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2    |  $l_{ii} = 1$ 
3  end
4  for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
5    for  $j \leftarrow k$  to  $n$  do
6      |  $u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}$ 
7    end
8    for  $i \leftarrow k+1$  to  $n$  do
9      |  $l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}}{u_{kk}}$ 
10   end
11 end
12 Return  $x$ 

```

Algorithme de la méthode de Crout :

Algorithme 13: Algorithme de Crout LU.

Input : donner n, A, b

```

1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2    |  $u_{ii} = 1$ 
3  end
4  for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
5    for  $i \leftarrow k$  to  $n$  do
6      |  $l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}$ 
7    end
8    for  $i \leftarrow k+1$  to  $n$  do
9      |  $u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}}{l_{kk}}$ 
10   end
11 end
12 Return  $x$ 

```

7.3.4 Algorithme de la méthode de Choleski :

Algorithme de la méthode de $U^T U$:

Algorithme 14: Algorithme de Décomposition en $U^T U$.

Input : donner n, A, b

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2   |  $u_{ii} = 1$ 
3 end
4 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
5   |  $u_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk}^2}$ 
6   | for  $i \leftarrow k + 1$  to  $n$  do
7     |  $u_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk} u_{mi}}{u_{kk}}$ 
8   | end
9 end
10  $y_1 = \frac{b_1}{u_{11}}$ 
11 for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
12   |  $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} y_j}{u_{kk}}$ 
13 end
14 Return  $x$ 

```

Algorithme de la méthode de $U^T D U$:

Algorithme 15: Algorithme de Décomposition en $U^T D U$.

Input : donner n, A, b

```

1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2      |  $u_{ii} = 1$ 
3  end
4  for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
5      |  $d_{kk} = a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk}^2 d_{mm}$ 
6      | for  $j \leftarrow k+1$  to  $n$  do
7          |  $u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{mk} d_{mm} u_{mj}}{d_{kk}}$ 
8      | end
9  end
10  $y_1 = \frac{b_1}{u_{11}}$ 
11  $z_1 = \frac{y_1}{d_{11}}$ 
12 for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
13     |  $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} y_j}{u_{ii}}$ 
14     |  $z_i = \frac{y_i}{d_{ii}}$ 
15 end
16  $x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}$ 
17 for  $i \leftarrow n-1$  to 1 do
18     |  $x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}}$ 
19 end
20 Return  $x$ 

```

7.4 Systèmes d'équations linéaires : Méthodes itératives :

7.4.1 Algorithme de la méthode de Jacobi :

Algorithme 16: Algorithme de JACOBI.

Input : un estimé $n, x^0(x_i^0), \epsilon, A, b$

```

1 while  $\left\| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^k} \right\| > \epsilon$  do
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      $x_i^{k+1} \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) / a_{ii}$ 
4   end
5 end
6 Return  $x$ 
```

7.4.2 Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel :

Algorithme 17: Algorithme de GAUSS-SEIDEL.

Input : un estimé $x^0(x_i^0), \epsilon, A, b$

```

1 while  $\left\| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^k} \right\| < \epsilon$  do
2   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      $x_i^{k+1} \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) / a_{ii}$ 
4   end
5 end
6 Return  $x$ 
```

7.5 Intégrations numériques :

7.5.1 Algorithme de la méthode de Trapèze :

Algorithme 18: Algorithme de Trapèze.

Input : introduire a, b, n

Input : introduire x_i $i \leftarrow 1$ **to** n

Input : introduire y_i $i \leftarrow 1$ **to** n

$$1 \quad h = \frac{b - a}{n}$$

$$2 \quad I = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1})$$

3 Return x

7.5.2 Algorithme de la méthode de Simpson :

Algorithme 19: Algorithme de Trapèze.

Input : introduire a, b, n

Input : introduire x_i $i \leftarrow 1$ **to** n

Input : introduire y_i $i \leftarrow 1$ **to** n

$$1 \quad m = \frac{n}{2}$$

$$2 \quad h = \frac{b - a}{n}$$

$$3 \quad I = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{m-1} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2})$$

4 Return x

7.6 Équations différentielles :

7.6.1 Algorithme de la méthode de Rung Kutta :

Rung Kutta d'ordre 2 :

Algorithme 20: Algorithme de Rung Kutta 2.

Input : un estimé $x_0, y_0, n, \Delta x$

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2    $k_1 = f(x_i, y_i)$ 
3    $k_2 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_1)$ 
4    $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \Delta x (k_1 + k_2)$ 
5 end
6 Return  $x$ 
```

Rung Kutta d'ordre 4 :

Algorithme 21: Algorithme de Rung Kutta 4.

Input : un estimé $x_0, y_0, n, \Delta x$

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2    $k_1 = f(x_i, y_i)$ 
3    $k_2 = f(x_i + 0.5\Delta x, y_i + 0.5\Delta x k_1)$ 
4    $k_3 = f(x_i + 0.5\Delta x, y_i + 0.5\Delta x k_2)$ 
5    $k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ 
6    $y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
7 end
8 Return  $x$ 
```

CONTENU DE LA MATIÈRE

Matière 2 : Méthodes numériques (VHS : 45h00, Cours : 1h30, TD : 1h30)

Objectifs de l'enseignement :

Familiarisation avec les méthodes numériques et leurs applications dans le domaine des calculs mathématiques.

Connaissances préalables recommandées :

Mathématiques 1, Mathématiques 2, Informatique1 et informatique 2

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$ 3 semaines

Introduction sur les erreurs de calcul et les approximations, Introduction sur les méthodes de résolution des équations non linéaires, Méthode de bisection, Méthode des approximations successives (point fixe), Méthode de Newton-Raphson.

Chapitre 2 : Interpolation polynomiale 2 semaines

Introduction générale, Polynôme de Lagrange, Polynômes de Newton.

Chapitre 3 : Intégration numérique 2 semaines

Introduction générale, Méthode du trapèze, Méthode de Simpson, Formules de quadrature.

Chapitre 4 : Résolution des équations différentielles ordinaires (problème de la condition initiale ou de Cauchy). 2 semaines

1. Introduction générale, 2. Méthode d'Euler, 3. Méthode d'Euler améliorée, 4. Méthode de Runge-Kutta.

Chapitre 5 : Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires 2 semaines

Introduction et définitions, Méthode de Gauss et pivotation, Méthode de factorisation LU, Méthode de factorisation de Choleski MMt, Algorithme de Thomas (TDMA) pour les systèmes tri diagonales.

Chapitre 6 : Méthode de résolution approximative des systèmes d'équations linéaires 2 semaines

Introduction et définitions, Méthode de Jacobi, Méthode de Gauss-Seidel, Utilisation de la relaxation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Brezinski. *Introduction à la pratique du calcul numérique*. Dunod, Paris, 1988.
- [2] G.Allaire et S.M. Kaber. *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.
- [3] G.Allaire et S.M. Kaber. *Introduction à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire*. Ellipses, 2002.
- [4] A. Cot et C.-M. Marle G. Christol. *Calcul différentiel*. Ellipses, 1996.
- [5] M. Crouzeix et A.-L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1983.
- [6] S. Delabriere et M. Postel. *Méthodes d'approximation. Équations différentielles. Applications Scilab*. Ellipses, 2004.
- [7] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires, Grenoble, 1996.
- [8] S. P. Norsett et G. Wanner E. Hairer. *Solving Ordinary Differential Equations*. 1993.
- [9] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Paris, 1982.
- [10] Mazen SAAD. *Analyse Numérique*. Ecole Centrale de Nante, 2011-2012.