وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة طاهري محمد بشار

UNIVERSITE TAHRI MOHAMED BECHAR

كلية التكنولوجيا

Faculté de Technologie

قسم الهندسة الكهربائية

Département de Génie Électrique

Polycopié pédagogique

Méthodes Numériques

Cours & Exercices

Réalisé par : ABDERRAHMANI Abdesselam

Année Universitaire : 2022_2023

Préface

Les méthodes numériques sont des techniques mathématiques utilisées pour résoudre des problèmes complexes impliquant des calculs numériques. Elles sont largement utilisées dans de nombreux domaines, tels que la physique, l'ingénierie, les sciences sociales, l'informatique, l'économie, la finance, etc.

Ce polycopié a pour objectif de présenter les principales méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes courants en sciences et en ingénierie. Les méthodes numériques étudiées dans ce polycopié incluent la résolution d'équations non linéaires, l'interpolation et l'approximation de fonctions, l'intégration numérique, la résolution d'équations différentielles ordinaires et la résolution de systèmes linéaires.

Le contenu de ce polycopié est organisé de manière à offrir une compréhension théorique des concepts de base des méthodes numériques, ainsi qu'une exposition pratique des algorithmes associés. Le polycopié est destiné aux étudiants des premiers cycles universitaires en sciences et en ingénierie, ainsi qu'aux professionnels qui cherchent à appliquer les méthodes numériques à des problèmes concrets.

Nous espérons que ce polycopié sera utile pour les étudiants et les professionnels qui cherchent à comprendre et à utiliser les méthodes numériques. Nous remercions tous les enseignants et les chercheurs qui ont contribué à la réalisation de ce polycopié et nous espérons que cette ressource sera utile pour les générations futures.

Table des matières

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Table des cours (Semaines)

Cours n° 01-02

** Résolution des équations non linéaires **

1. Introduction

Les équations non linéaires sont des équations mathématiques qui ne peuvent pas être résolues par des méthodes algébriques classiques telles que la factorisation ou les équations linéaires. Nous nous intéressons à l'approximation des zéros d'une fonction(non linéaire) réelle d'une variable réelle, c'est-à-dire, la résolution approchée du problème : trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(\tilde{x}) = 0$ Pour lesquelles des solutions exactes de ce type d'équation ne sont pas connues. Toutes les méthodes que nous allons présenter sont itératives et consistent donc en la construction d'une suite de réels $\left(x^{(k)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \tilde{x} \qquad \text{(I. 01)}$$

Théorème 01. **Théorème de la valeur intermédiaire**

Soit un intervalle non vide $[a,b]$de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a) \times f(b) < 0$ Alors il existe $\tilde{x} \in]a,b[$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$.

Corollaire 01. **Unicité de la racine**

Soit $f : I = [a,b] \to R$ une application continue telle que :

$$f(a) \times f(b) < 0$$

- C'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes opposés. Alors il existe $\tilde{x} \in]a,b[$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$
- Si de plus f est strictement monotone, $\tilde{x}$ est unique.

$f(a) \times f(b) < 0 \Longrightarrow \exists \tilde{x} \in]a,b[\ \mid \ f(\tilde{x}) = 0$

$f(a) \times f(b) < 0 \ \wedge \ f \ monotone \Longrightarrow \exists! \, \tilde{x} \in]a,b[\ \mid \ f(\tilde{x}) = 0$

ⓘ $f(a) \times f(b) > 0$ On ne peut rien conclure

1.1. Localisation des racines d'une équation

Une façon de localiser les racines d'une équation est de tracer la fonction correspondante sur un graphique et d'identifier les points où la fonction coupe l'axe des abscisses (l'axe horizontal). Cela peut être utile pour visualiser les solutions possibles, mais peut ne pas être pratique pour toutes les équations.

Soit une équation $f(x) = 0$ dont on cherche la solution sur un intervalle $[a,b]$, on commence par un tracé grossier de la fonction sur l'intervalle donnée puis on isole chaque racine dans un sous intervalle le plus étroit possible.

Si le tracé est assez compliqué en décomposé la fonction en deux fonctions. Les racines sont situées à l'intersection des fonctions.

Exemple n≗01

Séparer les racines de l'équation

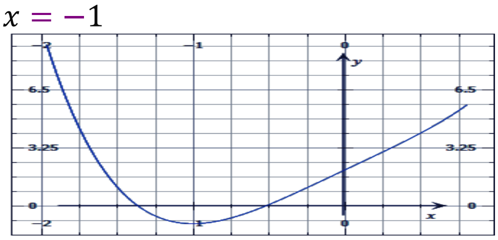
$$f(x) = x^4 + 4x + 2 = 0$$

Solution

Puisque $f(x)$ est un polynôme de degré 4, alors l'équation donnée possède au plus 4 racines. En annulant la première dérivée on trouve :

$$f'(x) = 4.x^3 + 4 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



On voit que le nombre de changements de signes de$f(x)$entre $-\infty$ *et* $+\infty$ est égal à deux. Par conséquent, nous affirmons que l'équation $f(x) = 0$ n'admet que deux racines réelles.

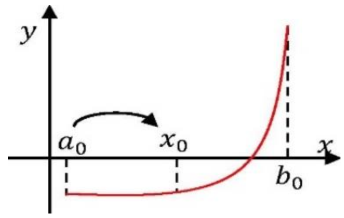
$f(-2) = 10$ Ce qui donne : $f(-2) \times f(-1) = -10 < 0$ donc : $x_1 \in [-2,-1]$

$f(0) = 2$ Ce qui donne : $f(-2) \times f(0) = -2 < 0$ *donc* : $x_2 \in [-1,0]$

2. Méthodes d'encadrement

2.1. Méthode de dichotomie (méthode de la bissection)

Cette méthode consiste à diviser continuellement un intervalle qui contient une racine jusqu'à ce que la racine soit trouvée avec une précision suffisante.



La méthode suppose que la fonction f est continue à l'intervalle$[a, b]$, n'admet qu'un seul zéro $x_0 \in]a, b[$ et vérifie $f(a) \times f\{b) < 0$.
Le principe de la méthode est de trouve le milieu de l'intervalle de départ et on évalue la fonction f en ce point.

$$x_n = (a_n + b_n)/2 \qquad \text{(I. 02)}$$

Nombre d'itération

Puisque chaque fois on divise l'intervalle en deux parties égales, on a :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Il faut que la différence $|x_n - \tilde{x}|$qui est l'erreur du calcul soit inférieure à une précision donnée ε, c'est-à-dire :

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \varepsilon \Longrightarrow (b_0 - a_0)/2^{n+1} \qquad \text{(I. 03)}$$

Cela donne : $n \geq \ln(b_0 - a_0/\varepsilon)/\ln 2$

Critères d'arrêt

Pour construite $x^{(k)}$ par la méthode itérative, il faut introduire un critère d'arrêt pour interrompre le processus itératif lorsque l'approximation courante de $\tilde{x}$ est jugée satisfaisante. Pour cela, on a principalement le choix entre trois types de critères :

01–Imposer un nombre maximum d'itérations ;

02–Contrôle de l'incrément :

$$\left|x^{(k)} - \tilde{x}\right| \leq \varepsilon; \qquad \varepsilon > 0 \qquad \text{(I. 04)}$$

03–Contrôler le résidu :

$$\left|f\left(x^{(k)}\right)\right| \leq \varepsilon \qquad \text{(I. 05)}$$

Exemple n≗02

On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ dans l'intervalle$[0,4]$.

01) Montrer qu'il existe un zéro $\tilde{x}$ pour la fonction f dans l'intervalle $[0,4]$, et trouver $\tilde{x}$ de façon analytique ;

02) Déterminer le nombre d'itération pour résoudre d'équation pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

03) Trouver la racine x_n pour $\varepsilon = 10^{-2}$, on appliquant les critères d'arrêt :

- Contrôle de l'incrément ; Contrôler le résidu.

Solution

① Unicité de la solution

On a $\begin{cases} f(0) = -2 < 0 \\ f(4) = 4e - 6 = 4.8731 > 0 \end{cases} \qquad f(0) \times f(4) < 0$

f Étant continue, alors $\exists \tilde{x} \in [0,4] \mid f(\bar{x}) = 0$

Comme f est croissante $\Longrightarrow$ $\exists! \, \tilde{x} \in [0,4] \mid f(\tilde{x}) = 0$

- Résolution analytique

$$4e^{x/4} - 6 = 0 \Longrightarrow x = 4\ln(3/2) = 1.6219$$

② *Nombre d'itération*

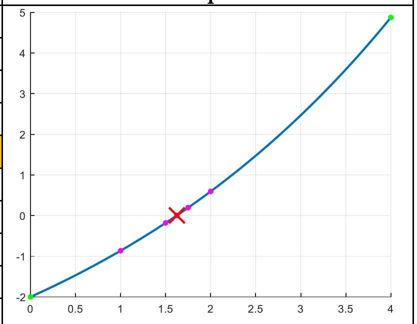
$$n \geq \ln((b_1 - a_1)/\varepsilon)/\ln 2 = 8.6439$$

$$donc\ n = 9$$

③ Résolution

n	$a_n(-)$	$b_n\ (+)$	$\lvert b_n - a_n\rvert$	$x = (a+b)/2$	Signe $f(x)$	$\lvert f(x)\rvert$
0	0	4	4	2.	(+)	|0.59|
1	0	2	2	1.	(−)	|−0.86|
2	1	2	1	1.5	(−)	|−0.18|
3	1.5	2	0.5	1.75	(+)	|0.195|
4	1.5	1.75	0.25	1.625	(+)	|0.005| < ε
5	1.5	1.625	0.125	1.5625	(−)	|−0.09|
6	1.563	1.625	0.062	1.594	(−)	|−0.04|
7	1.594	1.625	0.031	1.6095	(−)	|−0.02|
8	1.609	1.625	0.016	1.617	(−)	|−0.01|
9	1.617	1.625	0.008< ε			

Graphe



❖ Critère d'arrêt contrôle de l'incrément

$|b_9 - a_9| = 0.008 < 10^2 = \varepsilon$; d'où la racine approchée vaut $x_8 = 1.617$; nbr d'itérations i=9

❖ Critère d'arrêt : contrôle du résidu.

$|f(x_n)| = 0.005 < 10^2 = \varepsilon$; d'où la racine approchée vaut $x_4 = 1.625$; nbr d'itérations i=5

2.2. Algorithme de Bissection

1 *Entrées:* $f; n = 1;\ a_n = a;\ b_n = b; \varepsilon$

2 *Vérification du critère d'arrêt :*
- ⊳ $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, *Aller à l'étape 6.*
- ⊳ *Si non continu.*

3 *On calcul* $c_n = (a_n + b_n)/2$

4 *Si* $f(x_n)\varepsilon$, x_n *est la racine de l'équation et le problème est résolu.*
*** Si* $(x_n) \neq 0$ *, nous regardons le signe* $f(x_n) \times f(a_n)$ *:*
$f(x_n) \times f(a_n) < 0$ *Et alors le zéro* $\tilde{x} = \in$]a_n, x_n [*et on pose* $b_{n+1} = x_n$ *et* $a_n = a_n$ *;*
$f(x_n) \times f(a_n) > 0$ *Et alors le zéro* $\tilde{x} = \in$]x_n, b_n [*et on pose* $a_{n+1} = x_n$ *et* $b_n = b_n$.

5 *Nouvel itération :* $n = n + 1$ *Aller à l'étape 2*

6 *Fin*

3. Méthode des approximations successives où du point fixe

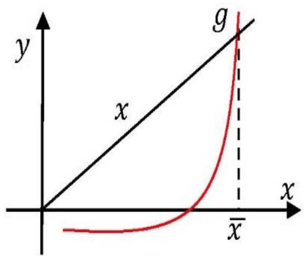
Elle consiste à trouver un point fixe d'une fonction, c'est-à-dire un point où la fonction est égale à elle-même. Plus précisément, supposons que l'on cherche à résoudre l'équation non linéaire f(x) = 0. La méthode du point fixe consiste à réécrire cette équation sous la forme x = g(x), où g(x) est une fonction arbitraire. Cette fonction peut être choisie de différentes manières, mais elle doit satisfaire certaines conditions pour que la méthode fonctionne.

Théorème 02.

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, il existe un point $\tilde{x}$ de $[a,b]$, appelé point fixe de la fonction g, vérifiant $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$

Le principe de la méthode du point fixe consiste à transformer, la fonction $f(x) = 0, f: [a\ b] \to \mathbb{R}$, en une fonction $g(x) = x$. La fonction $g: [a\ b] \to \mathbb{R}$, est construite de façon à ce que $g(x) = x$ quand $f(x) = 0$.
Trouver la racine de $f(x)$, se résume donc à déterminer un $\tilde{x} \in [a\ b]$ tel que :

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x} \qquad (06)$$



Pour pouvoir choisir la forme de « g » adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

3.1. Critère de convergence

Définition 01. **Application contractante**

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que g est une application contractante si et seulement s'il existe une constante K telle que $0 < K < 1$ vérifiant : $|g(x) - g(y)| \leq K \times |x - y|$, $\forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b]$.

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie de $[a,b]$ dans lui-même vérifiant $|g'(x)| \leq K < 1, \forall x \in [a,b]$.
Alors, g est une application contractante sur $[a,b]$.

Théorème 03.

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application contractante de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, la fonction g possède un unique point fixe $\bar{x}$ dans $[a,b]$. De plus, la suite $(x_n) \in N$ définie par la relation $g(x_n) = x_n$ converge, pour toute initialisation x_0 dans $[a,b]$

Théorème 04. Théorème de point fixe

Soit $g: I \subset \Re \mapsto \Re$. On suppose :

- est un fermé non-vide,
- $\forall x \in I, g(x) \in I$,
- g est contractante sur I . Il existe $0 \leq K \leq 1$ telle $x, y \in I$ *on a* $|g(x) - g(y)| \leq K \times |x - y|$

Alors, admet un unique point fixe $\tilde{x} \in I$

Exemple n≗03

Soit la fonction :

$$si\ f(x) = e^x - 2x - 1 \quad sur\ l'intervalle[1,2].$$

01) Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$,
02) Montre que g admit une solution unique,
03) En appliquant cinq fois de suite la méthode du point fixe, trouver la valeur approchée de la racine

Solution

① Les formes de g

$$* \ g_1(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1); \qquad ** \ g_2(x) = \ln(2x + 1)$$

② Unicité de la solution

Nous avons $f(1) < 0$ *et* $f(2) > 0$, f possède donc bien un zéro sur l'intervalle $[1,2]$

$* \quad g_1(x) = {}^1/_2\,(e^x - 1);$

$$\min|g_1(x)| = \frac{1}{2(e^1 - 1)} = 0.8591 \notin [1,2]$$

g N'est pas de valeur de $[1,2]$ dans lui-même.

$** \quad g_2(x) = \ln(2x + 1)$

$$\min|g_2(x)| = \ln(2 + 1) = 1.0986 \in [1,2]$$
$$\max|g_2(x)| = \ln(2.2 + 1) = 1.6094 \in [1,2]$$

Et puisque $g_2(x)$ est monotone (continue et croissante sur l'intervalle) sur$[l, 2]$, alors on peut affirmer que : $\forall x \in [1,2], \quad g_2(x) \in [1,2]$

$$\max|g_2'(x)| = \max\left|\frac{2}{2x+1}\right| = \frac{2}{3} = 0{,}66 < 1 \quad g_2\ contractante$$

D'après le théorème de point fixe l'équation $e^x - 2x - 1 = 0$ admet une seule racine unique dans l'intervalle$[1,2]$, et la méthode du point fixe converge vers cette racine pour g_2.

③ $\quad x_{n+1} = g(x_n) = \ln(2.x_n + 1)$

Prenons pour approximation initiale la valeur $x_0 = 1$

La première itération $n = 0 : x_1 = g_2(x_0) = \ln(2x_0 + 1) = \ln(2 + 1) = 1.0986$

La deuxième itération $n = 1 : x_2 = g_2(x_1) = \ln(2x_1 + 1) = \ln(2 \times 1.0986 + 1) = 1.1623$

La troisième itération $n = 2 : x_3 = g_2(x_2) = \ln(2x_2 + 1) = \ln(2 \times 1.1623 + 1) = 1.2013$

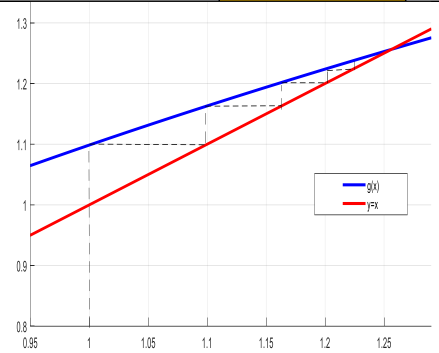
La quatrième itération $n = 3 : x_4 = g_2(x_3) = \ln(2x_3 + 1) = \ln(2 \times 1.2013 + 1) = 1.2246$

La cinquième itération $n = 4$: $x_5 = g_2(x_4) = \ln(2x_4 + 1) = \ln(2 \times 1.2246 + 1) = 1.2381$

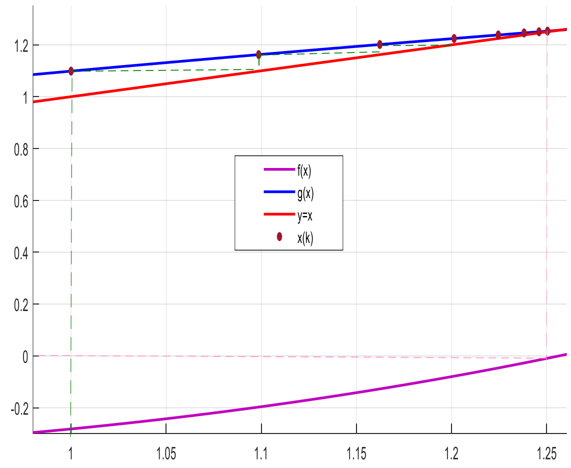
Pour $\varepsilon = 10^{-2}$

n	x_n	$x_{n+1} = g(x)$	$\lvert f(x_{n+1}) \rvert$	
0	+1.000	+1.099	$\lvert -0.197 \rvert$	
1	+1.099	+1.162	$\lvert -0.127 \rvert$	
2	+1.162	+1.201	$\lvert -0.078 \rvert$	
3	+1.201	+1.225	$\lvert -0.046 \rvert$	
4	+1.225	+1.238	$\lvert -0.027 \rvert$	
5	+1.238	+1.246	$\lvert -0.016 \rvert$	
6	+1.246	+1.250	$\lvert -0.009 \rvert < \varepsilon$	Stop

Zone



Graphe



La racine approchée vaut x =+1.250;   nombre d'itérations k=7

4. Méthode de Newton Raphson

Cette méthode utilise une approximation de la racine et sa dérivée pour calculer une meilleure approximation de la racine. Elle repose sur le développement de Taylor. Si $f(x)$ est continue et continument dérivable dans le voisinage de $\tilde{x}$solution de $f(x) = 0$, alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé x_n proche de x s'écrit :

$$f(\tilde{x}) = f(x_n) + \frac{(\tilde{x} - x_n)}{1!} \times f'(x_n) + \frac{(\tilde{x} - x_n)^2}{2!} \times f''(x_n) + \frac{(\tilde{x} - x_n)^3}{3!} \times f'''(x_n) + \cdots$$

Si x_n est un estimé proche de $\tilde{x}$, alors le carré de l'erreur $\varepsilon_n = \tilde{x} - x_n$ et les termes de degrés supérieurs sont négligeable, on obtient la relation approximative $(f(\bar{x}) = 0)$:

$$f(x_n) + \frac{(\tilde{x} - x_n)}{1!} \times f'(x_n) = 0$$

Donc

$$\bar{x} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

La relation de récurrence définissant cette méthode est alors :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \qquad \textbf{(I. 07)}$$

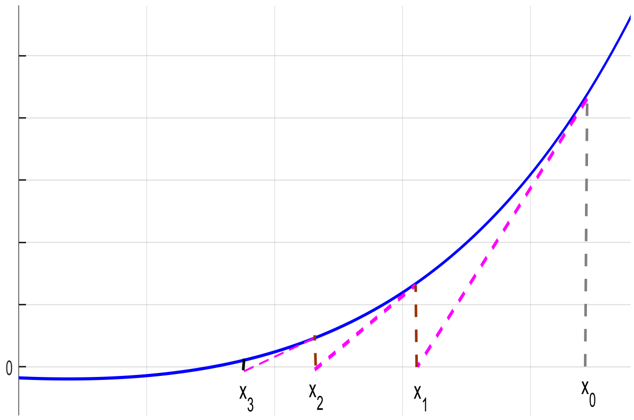
4.1. Interprétation géométrique de la méthode

Elle consiste à prendre un point du graphe d'abscisse x_0 à l'intérieur de I à droite de la solution cherchée :$f(x_0) > 0$ et à remplacer le graphe de f par celui de sa tangente en ce point. On approxime la solution par l'intersection x_1 de cette tangente avec l'axe des x.

$$y = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

Puis on itère successivement.



4.2. Critère de convergence de la méthode de Newton-Raphson

Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ telle que :

- ❖ $\boldsymbol{f}(a) \times f(b) < 0$
- ❖ $f'(x)$ *et* $f''(x)$ Sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

4.3. Théorème de convergence globale

Théorème 05. **Théorème de convergence globale**

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

- ❖ $f(a) \times f(b) < 0$;
- ❖ $f'(x) \neq 0, x \in [a, b]$;
- ❖ $f''(x) \neq 0, x \in [a, b]$;

Alors la méthode Newton engendre une suite qui converge vers une solution unique $f(x) = 0$ en partant de la proximité x_0 vérifiant :

$$x_0 \in [a, b] \quad f(x_0) \times f''(x_0) > 0$$

La suite x_n définie par : $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ converge vers $\tilde{x}$

4.4. Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Newton-Raphson

Si la condition de convergence est vérifiée, le procédé itératif doit converger. Cela veut dire que chaque nouvelle itération est meilleure que la précédente, de ce fait on peut dire que si on a une précision ε, on arrête le calcul lorsque la différence absolue entre deux approximations successives est inférieure à la précision donnée. C'est-à-dire :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \tag{I. 08}$$

Si cette condition est vérifiée on prend x_{n+1} comme solution de $f(x) = 0$.

Exemple n≗04

Reprendre l'exemple précédant avec la méthode de Newton $(\varepsilon = 10^{-4})$

Solution

$$(x) = 4e^{x/4} - 6 \text{ dans l'intervalle} [0,4].$$

① Critère de convergence

$* \quad f(0) = -2 < 0 \ \ et \ \ f(4) = 4.8731 > 0 \ \Longrightarrow f(0) \times f(4) < 0$

$** \quad f'(x) = e^{x/4} > 0 \ pour \ tout \ x \in [0,4]$

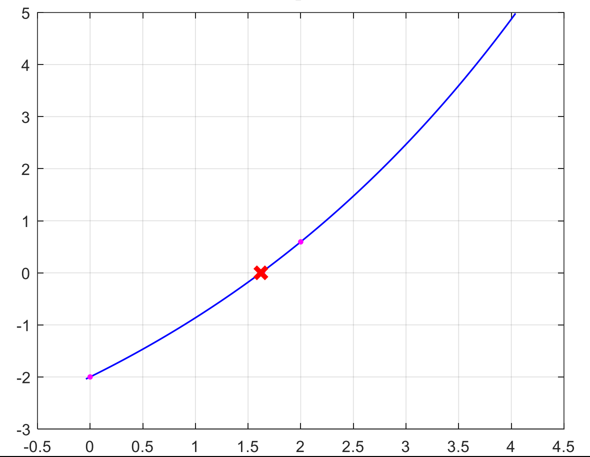
$*** \ f''(x) = e^{x} > 0 \ pour \ tout \ x \in [0,4]$

② Calcul de racine

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4e^{x_n/4} - 6}{e^{x_n/4}} = \frac{x_n . e^{x_n/4} - 4e^{x_n/4} + 6}{e^{x_n/4}}$$

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	0.00000	$\lvert -2.00000\rvert$
1	2.00000	$\lvert 0.59489\rvert$
2	1.63918	$\lvert 0.02604\rvert$
3	1.62190	$\lvert 0.00006\rvert < \varepsilon$

Graphe



La racine approchée vaut x =+1.62190;   nombre d'itérations k=3

⚠ Attention au critère de convergence globale

$* \quad f(0) = -2 < 0 \ \ et \ \ f(4) = 4.8731 > 0 \ \Longrightarrow f(0) \times f(4) < 0$

$** \quad f'(x) = e^{x/4} > 0 \ pour \ tout \ x \in [0,4]$

$*** \ f''(x) = e^{x} > 0 \ pour \ tout \ x \in [0,4]$

$**** \ x_0 = 0 \ on \ a \ \ f(0) \times f''(0) = -2 \times 1 < 0$

ⓘ La condition non vérifiée. On ne peut rien dire sur la convergence de la méthode pour $x_0 = 1$ car la condition est suffisante mais non nécessaire.

5. Exercices

Exercice n≗01 S.EX : 01

Soit la fonction : $f(x) = x - e^{-x}$

1- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admin une solution unique sur l'intervalle $[0,1]$;
2- Écrire la formule de récurrence de Newton ;
3- Montrer que la suite des interactions converge ;
4- Trouver la racine avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$

Exercice 01-TD Adrar Le 2012

Exercice n≗02 S.EX : 02

Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont contractantes et sur quel intervalle si celui-ci n'est pas indiqué :

1- $g(x) = 1 - \sin(4x)/5$, $x \in \mathcal{R}$
2- $g(x) = 2 + |x|/2$, $x \in [-1,1]$
3- $g(x) = 5 - \cos(3x)/4$, $0 \leq x \leq 2\pi/3$
4- $g(x) = 3 - \sin(3x)/2$
5- $g(x) = \sqrt{x+2}$
6- $g(x) = 1/x$, $x \in [2,3]$

Exercice 02-TD Adrar Le 2012

Exercice n≗03 S.EX : 03

Voir si chacune des fonctions suivantes admet zéro, $(f(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = x)$, puis donner pour chacun un intervalle de séparation :

1- $g_1(x) = 1/\sqrt{x}$
2- $g_2(x) = e^{-x}$
3- $g_3(x) = x + (x-2)^3$
4- $g_4(x) = (x-2)^2 + x - e^x/\pi$

Exercice 03- TD Adrar Le 2012

Exercice n≗04 S.EX : 04

1- En appliquant cinq fois de suite la méthode du point fixe, trouver la valeur approchée de la racine de l'équation $2x - \cos x = 0$ séparée sur le segment $[0, 0.5]$.
2- Donner les résultats avec 5 décimales.

Exercice 04- TD Adrar Le 2012

Exercice n≗05 S.EX : 05

Soit l'équation $x = \ln(1+x) + 0.2$ dans $[0,1]$.

1- Montrer que la méthode itérative définie par $g(x) = \ln(x+1) + 0.2$ est convergente (vérifier les hypothèses du théorème du point fixe). Choisir x_0, condition initiale de l'intervalle de convergence puis trouvez $\bar{x}$ avec $\varepsilon = 10^{-3}$

Exercice 05- TD Adrar Le 2012

Exercice n≗06 S.EX : 06

On donne l'équation : $f(x) = x^3 + x - 1$

5- Montrer que l'équation admet une racine réelle unique dans l'intervalle $[0, 1]$.
6- Utiliser la méthode de Newton pour calculer la racine de f avec 4 chiffres significatifs exacts.
7- L'équation $f(x) = 0$ peut être écrite sous la forme $x = g(x)$
   - ⓘ Trouvez les deux formes de $g(x)$. Laquelle des deux fonctions vérifie les conditions de convergence de la méthode du point fixe sur $[0, 1]$.
   - ⓘ Appliquer cette méthode pour 5 itérations.

Exercice 06- TD Adrar Le 2012

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Exercice n≗07 — S.EX : 07

Séparer les racines des équations :

1- $f(x) = x^4 - 4x - 1$

2- $f(x) = e^x + x^2 - 4$

3- $f(x) = x \times e^x - 1$

4- $f(x) = e^x + x$

5- $f(x) = 1 + 2\sin x$

6- $f(x) = x - \cos(x)$

Exercice 01-TD Béchar Le 2019

Exercice n≗08 — S.EX : 08

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine x racine de l'équation :

$$f(x) = e^x - x - 3$$

1- Montrer qu'il existe une racine unique x pour l'équation dans l'intervalle $[1,2]$.

2- Trouver deux formes de $g(x) = x$ et vérifie leurs convergences dans l'intervalle $[1,2]$.

3- Calculer par la méthode de point fixe les 5 premières estimées en partant de $x_0 = 2$

Exercice 04-TD Béchar Le 2019

Exercice n≗09 — S.EX : 09

Soit la fonction

$$f(x) = 2x^3 - x - 2$$

On se propose de trouver les racines réelles de f avec la méthode des approximations successives ; Pour cela on utilise la méthode suivante (méthode *du* point fixe):

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{x_n}{2}}$$

1- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique dans l'intervalle $[1, 2]$.

2- Montrer que cette méthode converge (on prend $x_0 \in [1,2]$).

3- Déterminer $\bar{x}$ en prenant $x_0 = 1$ à 10^{-3} près.

Exercice 01- Examen Béchar Le 24/06/2019

Exercice n≗10 — S.EX : 10

Soit l'équation suivante : $x^3 - x - 1 = 0$

1- Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle $[1,2]$;

2- Est-ce que cette solution est unique ?

3- Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode de la bissection avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$.

4- Applique la méthode de fausse position sur la même fonction

Exercice 02-TD Béchar Le 2020

Exercice n≗11 — S.EX : 11

Même questions précédente pour les deux fonctions suivantes :

1- $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1;$ $\quad x \in [-1,1],$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

2- $f(x) = 1 - xe^x$; $\quad x \in [0,1],$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

Devoir 01 : Béchar Le 2020

Exercice n≗12 — S.EX : 12

Démontrer que l'équation $\sqrt{x} + \ln x = 0$ admet une solution $\bar{x}$ unique sur l'intervalle $[0.4\,, 0.6]$ et Calculer cette solution par la méthode la bissection à la troisième décimale près.

Exercice 02-TD Révision spéciale covid-19 Béchar Le 2020

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Exercice n°13

S.EX : 13

Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I indiqué :

1- $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$; $I = [0.3, 1]$.

2- $f(x) = \tan x - 3x/2$; $I = [\pi/4, \pi/3]$

3- $f(x) = x - 2^{-x}$; $I = [0, 2]$.

4- $f(x) = x^2 \times \sin x - 2$; $I = [0, 2]$

5- $f(x) = (x - 1)^2 - e^x/2$; $I = [0, 1/2]$

Exercice 01-TD Révision spéciale covid-19 Béchar Le 2020

Exercice n°14

S.EX : 14

1- Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ *si* $f(x) = e^x - 2x - 1$ sur l'intervalle $[1,2]$.

2- En appliquant cinq fois de suite la méthode du point fixe, trouver la valeur approchée de la racine

Exercice 01- Examen de rattrapage Béchar Le 01/09/2020

Exercice n°15

S.EX : 15

Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - x$

1- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique dans l'intervalle [0,1].

2- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en utilisant une méthode itérative de votre choix ; Quelle est le nombre d'itérations nécessaires ? (La précision de $\varepsilon = 10^{-2}$)

Exercice 02- Examen 31/05/2022

Exercice n°16

S.EX : 16

1- Soit la fonction : $f(x) = x^3 + x - 1$

2- Montrer que l'équation admet une racine réelle unique dans l'intervalle $[0, 1]$.

3- Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$ sur l'intervalle [0,1], laquelle est contractante

4- En appliquant trois fois de suite la méthode du point fixe, trouver la valeur approchée de la racine $(x\_0 = 0)$

Exercice 02- Examen de rattrapage 20/06/2022

Exercice n°17

S.EX : 17

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x} - x + 2$$

1- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle$[2,3]$;

2- Est-ce que cette solution est unique ?

3- Appliquer la méthode de dichotomie pour trois itérations

4- L'équation $f(x) = 0$ peut être écrite sous la forme $x = g(x) = 1/x + 2$

5- Vérifier la condition de convergence de la méthode du point fixe sur $[2, 3]$.

6- Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode du point fixe$(x_0 = 2.5)$

7- Montre que la méthode de Newton converge, utiliser cette méthode en partant de $x_0 = 2$

La précision de $\varepsilon = 10^{-2}$

Exercice n°18

S.EX : 18

Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre irrationnel $\sqrt{31}$ en utilisant la méthode de dichotomie.

Ex02-TD BATNA 2016/2017

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Exercice n°19 S.EX : 19

Soit l'équation

$$f(x) = 2\tan(x) - x - 1 \qquad avec\ x \in]-\pi, \pi[$$

1- Séparer analytiquement les racines de cette équation.

2- On veut déterminer la racine maximale de cette équation en utilisant la méthode de dichotomie.

- (a) Donner le nombre n d'itération nécessaires pour approcher cette racine à 10^{-2} près.
- (b) Calculer cette racine.

Exercice 01-TD BATNA 2016/2017

Exercice n°20 S.EX : 20

Soit l'équation suivante :

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

1- Tracez la fonction f(x) pour x compris entre -5 et 5.

2- En utilisant la méthode de Newton-Raphson, trouvez les deux racines positives de l'équation avec une précision de 10^{-6}.

3- Vérifiez vos résultats en vérifiant que f(x) est proche de zéro pour les deux racines que vous avez trouvées.

Cours n° 03

** Interpolation polynomiale **

1. Introduction

L'interpolation polynomiale est une méthode mathématique pour trouver une fonction polynomiale qui passe par un ensemble de points donnés. Cette méthode est souvent utilisée pour approximer une fonction inconnue à partir de données expérimentales ou pour calculer des valeurs intermédiaires entre des points de données.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on connait $n+1$ points $\left(x_i, f(x_i)\right)$, pour $i = 0, \dots, n$.

Le but du problème d'interpolation est de déterminer une fonction g simple à calculer, telle que :

$$g(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n \qquad \text{(II. 01)}$$

Les points $\left(x_i, f(x_i)\right)$, sont appelés points d'interpolation ou d'appui.

Les fonctions g les plus couramment utilisées sont des polynômes des fractions rationnelles.

2. Interpolation de Lagrange

Soient $(n+1)$ couples de données $\{xi, yi\}$, avec des nœuds différents xi. On peut associer (relier) à ces données un seul et unique polynôme d'interpolation des y_i aux nœuds x_i , ayant un degré Inférieur ou égal à n. Dans le cas général, ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \times L_i(x) \quad avec \;\; L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \text{(II. 02)}$$

Les polynômes L_i sont ses polynômes caractéristiques.

- Interpolation linéaire

Permettre de trouver une valeur intermédiaire entre deux points de données connus. Elle consiste à tracer une ligne droite entre les deux points et à trouver la valeur correspondante sur cette ligne pour un point donné.

$$P_1(x) = yi \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad \text{(II. 03)}$$

Ou encore :

$$P_1(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \qquad \text{(II. 04)}$$

- Interpolation quadratique

Permettre de trouver une fonction quadratique ou parabolique qui passe par trois points de données connus. Elle consiste à trouver les coefficients d'une fonction quadratique de la forme:

$$f_1(x) = a\,x^2 + bx + c \qquad \text{(II. 05)}$$

Où a, b et c sont des constantes inconnues à déterminer.

Si nous avons trois points de données connus (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) nous pouvons écrire :

$$P_2(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} + y_{i+2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \qquad \text{(II. 06)}$$

Exemple n≗05

Construire, selon la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation de degré deux qui interpole les points : $(x_0, y_0) = (0, 1)$; $(x_1, y_1) = (1, 2)$; $(x_2, y_2) = (2, 5)$.

Solution

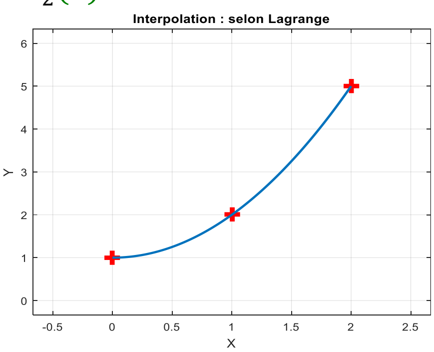
$$P_2(x) = y_0 \times L_0(x) + y_1 \times L_1(x) + y_2 \times L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 1}{0 - 1} \times \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{1 - 0} \times \frac{x - 2}{1 - 2} = -(x^2 - 2x)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \times \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{2 - 0} \times \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$P_2(x) = 1 \times \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) - 2 \times (x^2 - 2x) + 5 \times 1\,(x^2 - x)$$
$$= (1 - 2 + 5)x^2 + (-3 + 4 - 5)x + 1 = x^2 + 1$$



2.1. Algorithme

Entre les points d'appuis ce forme vecteur
Déclaration des variables
Démarrage de la boucle $i = 1$ à n
Démarrage de la boucle $j = 1$ à $n \quad avec \ j \neq i$
Construire le polynôme Lagrange L_i
Construire le polynôme P

3. Interpolation de Newton

Les polynômes de Newton sont des polynômes qui peuvent être définis récursivement à partir des différences divisées, qui sont des quantités calculées à partir des points de données. Supposons que nous connaissons $(n + 1)$ valeurs d'une fonction $f(x)$ en des points $x_0, x_1, \dots, x_n$ Le polynôme d'interpolation de Newton est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} P_n(x) = \ & a_0 \\ & + a_1(x - x_0) \\ & + a_2(x - x_0).(x - x_1) \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + a_n(x - x_0).(x - x_1)\dots.(x - x_{n-1}) \end{aligned} \qquad \text{(II. 07)}$$

On doit donc s'assurer que: $P_n(x_i) = f(x_i) \qquad pour\ i = 0,1,2, \dots, n$

Les coefficients de la forme s'annulent tous en $x = x_0$, sauf le premier.

1er étape

On peut ainsi montrer que: $P_n(x_0) = f(x_0)$

$$a_0 = f(x_0) \qquad \text{(II. 08)}$$

2ème étape

De même pour $x = x_1 \qquad f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{(II. 09)}$$

Ainsi, le coefficient a_1 peut s'écrire:

$$a_1 = f(x_0, x_1) \qquad \text{(II. 10)}$$

Le polynôme de degré 1:

$$P_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \times (x - x_0) \qquad \text{(II. 11)}$$

3ème étape

Le troisième coefficient (a_2) est à son tour déterminé par : $P_n(x_2) = f(x_2)$

On obtient :

$$a_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1).(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2).(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2).(x_0 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1)(x_2 - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_1 - x_2).(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_2).(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2).(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]$$

Ou encore ;

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]$$

$$a_2 = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \qquad \text{(II. 12)}$$

On note :

$$a_2 = f(x_0, x_1, x_2) \qquad \text{(II. 13)}$$

Le polynôme de degré 2:

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1).(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2).(x - x_0).(x - x_1) \qquad \text{(II. 14)}$$

Les coefficients de ce polynôme sont les différences divisées :

$$a_i = f(x_o, x_1, \dots, x_i) pour\ 0 < i < n$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1).(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2).(x - x_0).(x - x_1) + \cdots \qquad \text{(II. 15)}$$

$$+ f(x_0, x_1, \dots, x_n).(x - x_0).(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Avec :

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0} \qquad f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,x_3) - f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1}$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_0,x_1,x_2)}{x_3 - x_0} \qquad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_2,x_3)}{x_4 - x_1}$$

Il reste maintenant à calculer efficacement la valeur de ce polynôme. La manière la plus simple consiste à construire une table dite de différences divisées de la façon suivante :

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$

Exemple n≗06

Soit les points :(0, 1) ;(1, 4) ;(2, 9) ;(3, 16) Déterminer le polynôme de newton.

Solution

La table de différences divisées est:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,\dots,x_{i+2})$	$f(x_i,\dots,x_{i+3})$
0	$\boxed{1}$			
1	*4*	$\boxed{f(0,1) = \frac{(4-1)}{(1-0)} = 3}$		
2	*9*	$f(1,2) = \frac{(9-4)}{(2-1)} = 5$	$\boxed{f(0,1,2) = \frac{(5-3)}{(2-0)} = 1}$	
3	*16*	$f(3,2) = \frac{(16-9)}{(3-2)} = 7$	$f(1,2,3) = \frac{7+5}{3-1} = 1$	$\boxed{f(0,1,2,3) = \frac{1-1}{3-0} = 0}$

$$P_3(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x - x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f(x_0,x_1,x_2,x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$P_3(x) = 1 + 3(x - 0) + 1(x - 0)(x - 1) + 0(x - 0)(x - 1)(x - 2) = 1 + 3x + x^2 - x$$
$$P_3(x) = x^2 + 2x + 1$$

Exemple n≗07

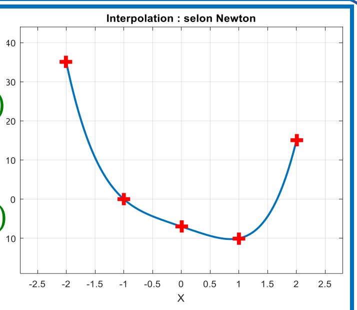
Soit les points : (-2,35) ;(-1,0); (0,-7); (1,-10); (2,15) Déterminer le polynôme de newton.

Solution

La table de différences divisées est:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,\dots,x_{i+2})$	$f(x_i,\dots,x_{i+3})$	$f(x_i,\dots,x_{i+4})$
-2	$\boxed{35}$				
-1	0	$\boxed{\frac{0-35}{-1+2} = -35}$			
0	-7	$\frac{-7-0}{0+1} = -7$	$\boxed{\frac{-7+35}{0+2} = 14}$		
1	-10	$\frac{-10+7}{1-0} = -3$	$\frac{-3+7}{1+1} = 2$	$\boxed{\frac{2-14}{1+2} = -4}$	
2	15	$\frac{15+10}{2-1} = 25$	$\frac{25+3}{2-0} = 14$	$\frac{14-2}{2+1} = 4$	$\boxed{\frac{4+4}{2+2} = 2}$

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f(x_0) + f(x_0,x_1)(x - x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f(x_0,x_1,x_2,x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= f(-2) + f(-2,-1)(x+2) + f(-2,-1,0)(x+2)(x+1) \\
&\quad + f(-2,-1,0,1)(x+2)(x+1)(x-0) \\
&\quad + f(-2,-1,0,1,2)(x+2)(x+1)(x-0)(x-1) \\
&= 35 - 35(x+2) + 14(x+2)(x+1) - 4(x+2)(x+1)(x-0) \\
&\quad + 2(x+2)(x+1)(x-0)(x-1) \\
&= 35 - 35x - 70 + 14(x^2+3x+2) - 4(x^3+3x^2+2x) + 2(x^4+2x^3-x^2-2x) \\
&= 2x^4 - 5x - 7
\end{aligned}$$



Exemple n≗08

Déterminer le polynôme de newton pour l'exemple précédant.

Solution

La table de différences divisées pour les points $(0, 1)$; $(1, 2)$ *et* $(2, 5)$ est:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i,x_{i+1})$		$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$
0	1			
1	2	$\frac{2-1}{1-0}=1$		
2	5	$\frac{5-2}{2-1}=3$		$\frac{3-1}{2-0}=1$

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x - x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 1 + 1 \times (x-0) + 1 \times (x-0)(x-1) = x^2 + 1$$

3.1. Algorithme

1 Entre les points d'appuis ce forme vecteur

2 Déclaration des variables

3 Former le tableau des différences divisées

$$f(i,j) = \frac{f(i,j-1) - f(i-1,j-1)}{X(i) - X(i-j+1)}; \quad \begin{cases} i = 2..n \\ j = 2 \dots i \end{cases}$$
$$a(i) = f(i,i)$$

4 Construire le polynôme P

$$P(x) = a(1) + \sum_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} a(i)\left(x - X(j)\right)$$

5 Simplifier le polynôme

1.1. Cas particulier

Considérons le cas particulier où les abscisses xi sont également distantes, c'est-à-dire où:

$$x_{i+1} - x_i = h$$

h est appelée le pas d'interpolation

On obtient le polynôme d'interpolation qui passe par tous les points donnés :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\ h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\ h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\ h^n}.(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

En construire une table de différences finies de la façon suivante :

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

Exemple n≗09

Traiter l'exemple précédant comme cas particulier de polynôme de newton.

Solution

La table de différences finies pour les points $(0, 1)$; $(1, 2)$ *et* $(2, 5)$ est:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	$\boxed{1}$		
1	2	$\boxed{2-1=1}$	
2	5	$5-2=3$	$\boxed{3-1=2}$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\ h}.(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\ h^2}.(x - x_0).(x - x_1)$$

$$h = 1 : \quad P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!\ 1}.(x - 0) + \frac{2}{2!\ 1^2}.(x - 0).(x - 1) = 1 + x + x^2 - x = x^2 + 1$$

3.2. Erreur d'interpolation

C'est l'erreur commise lorsqu'on remplace la fonction f par le polynôme d'interpolation équivalent. Elle est notée par $\varepsilon(x)$ car elle varie d'un point à un autre dans l'intervalle d'interpolation.

Cette erreur doit être nulle aux points d'interpolation $\varepsilon(x_i) = 0, (i = 0, \dots n)$.

Si la fonction f est continue et $(n + 1)$ fois dérivable sur l'intervalle d'interpolation $[a = x_0, b = x_n]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$ il existe $z \in [a, b]$ tel que :

$$\varepsilon(x) = |f(x) - P_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(z) \qquad \text{(II. 16)}$$

Si $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leq M \ \forall z \in [a, b]$ on peut écrire :

$$\varepsilon(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{(n + 1)!}.M \qquad \text{(II. 17)}$$

Dans ce cas M est majorant de la fonction $f^{(n+1)}(z)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

4. Exercices

Exercice n≗01 S.EX : 21

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous :

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

Exercice 01 TD Adrar 2009/2010

Exercice n≗02 S.EX : 22

Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange: $f(x) = \sqrt{x}$ associé aux points d'interpolation 100; 121; 144.

1- Calculer $P(115)$ et la comparer avec la valeur exacte ;

2- Donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice 05 TD Béchar 2017

Exercice n≗03 S.EX : 23

Soit $f(x) = \sin(\pi x)$ On pose $x_0 = 0$ *et* $x_1 = 1/2$.

1- Calculer une approximation de $\sin(\pi/4)$ par interpolation linéaire aux points x_0, x_1.

2- On pose $x_2 = 1/6$. Calculer une approximation de $\sin(\pi/4)$ par interpolation de f aux points x_0, x_1, x_2.

Exercice 07 TD Béchar 2017

Exercice n≗04 S.EX : 24

Soit f une fonction connue selon le tableau suivant :

x	0	1	3	4
$f(x)$	-0.5	-0.5	5.5	11.5

1- Trouver le polynôme d'interpolation de Newton
2- On donne

$$f(x) = x^2 - x - 0.5$$

- ❖ Calculer $P(2)$ et la comparer avec la valeur exacte ;
- ❖ Donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice n°05 — S.EX : 25

Soit la fonction $f\ (x)$ donnée par le tableau :

x	2	0	5	3
$f(x)$	1	-1	10	-4

1- Trouver le polynôme d'interpolation de Newton
2- Trouver une valeur approchée de $f\ (1)$.
3- Calculer $P(115)$ et la comparer avec la valeur exacte ;
4- Donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice n°06 — S.EX : 26

Soient les points : $\{(0,0.5);\ (1,1);\ (2,2)\}$
1- Calculer $f(0.7)\ et\ f(1.5)$par la méthode d'interpolation linéaire et quadratique.
Exercice 01 TD Béchar 2019

Exercice n°07 — S.EX : 27

Soit P le polynôme d'interpolation de Newton de : $f\ (x) = \ln(x/4)$ associé aux points d'interpolation $1, 2, 3, 4$.
1- Écrire P.
2- Calculer $P(\pi)$ et la comparer avec la valeur exacte de $\ln(\pi/4)$.
3- Donner l'erreur absolue commise.
(Écrire les résultats avec 6 décimales)
Exercice 05 TD Béchar 2019

Exercice n°08 — S.EX : 28

Soient deux fonctions définies par : $f\ (x) = \sqrt{x - 1}\ \ et\ \ g(x) = \sin\left(\pi/2\ (x - 1)\right)$
1- Montrer, sans le calculer de polynôme, *que f et g ont* le même polynôme d'interpolation aux points $x_0 = 1,\ x_1 = 3/2\ et\ x_2 = 2$.
2- Calculer, en utilisant une interpolation linéaire, la valeur approchée de $f(\ 1.75\ )$.
3- Calculer le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de Newton qui passe par les points donnés.
4- Trouver la valeur approchée de g au point $x = 1.75$ et donner l'erreur absolue commise.
Exercice 06 TD Béchar 2019

Exercice n°09 — S.EX : 29

Soit f une fonction connue aux points : $\{(0,3);\ (2,-1);\ (4,3)\}$
1- Calculer par l'interpolation linéaire l'approximation polynomiale de $f(1)$;
2- Calculer par l'interpolation quadratique l'approximation polynomiale de $f(2)$;
Examen Exercice 03 Bechar Le 01/10/2020

Exercice n°10 — S.EX : 30

Soit $f$une fonction connue selon le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$-1/2$	0	$1/2$	$2/5$

1- Donner les trois polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2, L_3
2- Donner le polynôme d'interpolation P_3 en expression symbolique polynomiale et calculer une approximation de $f(1.5)$
3- En supposant que

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

❖ Donner l'erreur absolue commise en confondant $f(1/2)$ $P_3(1/2)$.

Exercice n°11 — S.EX : 31

Construire, selon la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation de degré deux qui interpole les points :

$$(x_0, y_0) = (0, 1); \qquad (x_1, y_1) = (1, 2); \qquad (x_2, y_2) = (2, 5).$$

Examen Rattrapage Exercice 02 Bechar Le 01/09/2020

Exercice n°12 — S.EX : 32

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1- Déterminer le polynôme d'interpolation pour les points d'appui d'abscisses: $-1, 0, 1$

2- Calculer $P(-0.5) et P(0.5)$, puis comparer-les avec les valeurs exactes.

Examen Exercice 02 Bechar Le 03/06/2021

Exercice n°13 — S.EX : 33

Faire passer par les points :

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-28	-2	0	26

1- Trouver le polynôme d'interpolation de Newton ;

2- Trouver une valeur approchée de $f(0.5)$;

Exercice n°14 — S.EX : 34

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

Et trois points $x_0 = 1, \; x_1 = 3/2 \quad et \quad x_2 = 2$

1- Calculer, en utilisant une interpolation linéaire, la valeur approchée de f (1.75).

2- Calculer le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ par :

3- La méthode de Lagrange.

4- La méthode de Newton.

5- Calculer $P(1.75)$, puis comparer-la avec la valeur exacte.

Exercice n°15 — S.EX : 35

1- Utilisez l'interpolation de Newton pour trouver une approximation de $f(1.5)$, étant donné les points suivants : (1,4), (2,5), (4,2), (5,1).

2- Utilisez l'interpolation de Newton pour trouver une approximation de f(3), étant donné les points suivants :(0,1), (1,4), (2,11), (4,49).

Exercice n°16 — S.EX : 36

1- Soit $f(x) = x^2 + 1$. Trouvez un polynôme de degré 2 qui interpole les valeurs de f aux points $x = -1, 0, 1$.

2- Utilisez l'interpolation de Lagrange pour trouver le polynôme de degré 2 qui passe par les points (1, 2), (2, 5), et (3, 10).

Exercice n°17 — S.EX : 37

1- Soit $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Trouvez un polynôme de degré 2 qui interpole les valeurs de f aux points $x = -1, 0, 1$.

2- Utilisez l'interpolation de Lagrange pour trouver le polynôme de degré 3 qui passe par les points (0, 1), (1, 2), (2, 5), et (3, 10).

Exercice n°18

S.EX : 38

1- Soit $f(x) = sin(x)$. Trouvez un polynôme de degré 2 qui interpole les valeurs de f aux points $x = 0, pi/2, pi$.

2- Utilisez l'interpolation de Lagrange pour trouver le polynôme de degré 3 qui passe par les points (-1, -1), (0, 0), (1, 1), et (2, 4).

Exercice n°19

S.EX : 39

1- Soit $f(x) = e^x$. Trouvez un polynôme de degré 2 qui interpole les valeurs de f aux points $x = 0, 1, 2$.

2- Utilisez l'interpolation de Lagrange pour trouver le polynôme de degré 4 qui passe par les points (-1, 0), (-0.5, 0.5), (0, 1), (0.5, 0.5), et (1, 0).

Exercice n°20

S.EX : 40

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

1- Tracez la fonction $f(x)$ pour x compris entre -π et π.

2- Trouvez un polynôme de degré 5 qui interpole cette fonction en utilisant la méthode de Lagrange.

3- Utilisez ce polynôme pour estimer $f(0.5)$ avec une précision de 10^{-6}.

Cours n° 04-05

** Approximation des fonctions **

1. Introduction

Nous avons déjà vu au chapitre sur l'interpolation qu'augmenter le degré d'un polynôme d'interpolation de Lagrange n'améliore pas toujours l'approximation d'une fonction donnée. Ce problème peut être résolu avec l'interpolation composite (avec des fonctions linéaires par morceau). Néanmoins, aucune des deux méthodes n'est adaptée à l'extrapolation d'informations à partir des données disponibles, c'est-à-dire, à la génération de nouvelles valeurs en des points situés à l'extérieur de l'intervalle contenant les nœuds d'interpolation.

Un autre cas où ni l'interpolation de LAGRANGE ni l'interpolation composite n'est d'aucune aide est le cas où les données sont bruitées. Lorsqu'un chercheur met au point une expérience, il récolte des données sous la forme de points (x_i , y_i) mais en générale ces données sont affectées par des erreurs de mesure. Lorsqu'on en fait une représentation graphique il cherche f pour qu'elle s'ajuste le mieux possible aux points observés. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit f de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale.

2. Approximation de moindres carrés

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle$[a, b]$, pour laquelle on cherche une fonction $g(x, P)$ approximative telle que :

$$f(x) = g(x) + E(x) \qquad \textbf{(III. 01)}$$

P : Vecteur paramètres c.à.d. $P = [P_1, P_2, \dots \dots , P_n]$

E(x) : Erreur.

L'idée est de minimiser le carré de l'erreur $E(x)$ en moyenne sur l'intervalle$[a, b]$.

L'approximation au sens des moindres carrés consiste à choisir les coefficients de manière à minimiser la quantité

$$\varepsilon(P) = \int_a^b \big(f(x) - g(x, P)\big)^2 dx \qquad \textbf{(III. 02)}$$

Cette quantité est appelée moyenne quadratique de l'erreur E(x).

Minimiser $\varepsilon(P)$ revient à écrire :

$$\frac{\delta\varepsilon(P)}{\delta P_i} = 0 \Rightarrow -2\int_a^b \big(f(x) - g(x, P)\big)\frac{\delta g(x, P)}{\delta P_i} dx = 0 \qquad \textbf{(III. 03)}$$

Exemple n≗01

Soit la fonction $y(x) = e^x$ Utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver la meilleure approximation de $y(x)$ par le polynôme $P_1 + P_2 . x$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Solution

Soit $g(x, P) = P_1 + P_2 x$, alors le vecteur P s'écrit :

Écrivons la moyenne quadratique :

$$\varepsilon(P) = \int_a^b \big(f(x) - g(x, P)\big)^2 dx = \int_0^1 (e^x - P_1 - P_2 x)^2 dx$$

Dérivons par rapport à P_1 et P_2 :

$$\frac{\delta\varepsilon(P)}{\delta P_1} = 0 \Rightarrow -2\int_0^1 (e^x - P_1 - P_2 x)\frac{\delta g(x, P)}{\delta P_1} dx = 0 \qquad \Rightarrow \int_0^1 (e^x - P_1 - P_2 x).1.dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[e^x - P_1 x - \frac{1}{2}P_2 x^2\right]_0^1 = 0 \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}P_2 = e^1 - 1 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\delta\varepsilon(P)}{\delta P_2} = 0 \Rightarrow -2\int_0^1 (e^x - P_1 - P_2 x)\frac{\delta g(x, P)}{\delta P_2} dx = 0 \qquad \Rightarrow -2\int_0^1 (e^x - P_1 - P_2 x).x.dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x-1)e^x - \frac{1}{2}P_1 x^2 - \frac{1}{3}P_2 x^3\right]_0^1 = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 = 1 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Donc on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 2P_1 + P_2 = 2(e^1 - 1) \\ 3P_1 + 2P_2 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = 4e^1 - 10 = 0.8731 \\ P_2 = -6e^1 + 18 = 1.6903 \end{cases}$$

Après résolution : $g(x, P) = 0.8731 + 1.6903x$

Analyse numérique

D'une autre façon en peut écrire le minimum de la moyenne quadratique $\varepsilon(P)$ ce la forme :

$$\frac{\delta\varepsilon(P)}{\delta P_j} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - g(x_i, P)\right) \frac{\delta g(x_i, P)}{\delta P_j} = 0 \qquad \textbf{(III. 04)}$$

On obtient un système d'équations à m inconnues $P_j, (j = 1 \dots m)$

Exemple n≗02

Reprendre exemple précédent avec n=2

Solution

On a : $f(x) = e^x; \;\; g(x, P) = P_1 x + P_2 \quad et \; n = 2$

n	0	1	2
x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e
$g(x,P)$	P_2	$1/2 \,.\, P_1 + P_2$	$P_1 + P_2$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - g(x_i, P)\right) {\delta g(x_i, P)}\big/{\delta P_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \left((1 - P_2) \times 0 + \left(e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2P_1} - P_2\right) \times \frac{1}{2} + (e - P_1 - P_2) \times 1 \right) = 0$$

$$\Longrightarrow 5/4 \,.\, P_1 + \frac{3}{2P_2} = e + \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2e} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - g(x_i, P)\right) {\delta g(x_i, P)}\big/{\delta P_2} = 0$$

$$\Longrightarrow \left((1 - P_2) + \left(e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} . P_1 - P_2\right) + (e - P_1 - P_2) \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2} P_1 + 3P_2 = e + e^{\frac{1}{2}} + 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2)$$

Donc on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 5/4 \,.\, P_1 + \frac{3}{2P_2} = e + \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2e} \\ \frac{3}{2} P_1 + 3P_2 = e + e^{\frac{1}{2}} + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_1 = e - 1 = 1.7183 \\ P_2 = \frac{1}{6\left(5 + 2e^{\frac{1}{2}} - e\right)} = 0.9299 \end{cases}$$

Après résolution : $g(x, P) = 1.7183x + 0.9299$

3. Approximation par systèmes orthogonaux

3.1. Produit scalaire discret

On considère l'ensemble de points $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ et un ensemble de nombres réels positifs $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$. Soient f et g deux fonctions réelles, on définit le produit scalaire discret entre f et g aux points $x_i, i = 0, \dots, n$ avec les poids $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ par :

$$< f, g > = \sum_{i=0}^{i=n} w_i . f(x_i) . g(x_i) \qquad \textbf{(III. 05)}$$

Norme discrète d'une fonction

$$\|f\|^2 = < f . f > \sum_{i=0}^{i=n} w_i f^2(x_i) \qquad \textbf{(III. 06)}$$

Définition 02 **L'orthogonalité**

Définition On dit que f et g sont orthogonales par rapport au produit scalaire discret si

$$< f, g >= 0.$$

Exemple n≗03

Calculer le produit scalaire des fonctions tabulées suivantes ainsi que leurs normes, en supposant que $w(x) = 1$; $x(1,2,3,4)$; $f(x) = (1,3,1,3)$; $g(x) = (1,3,4,5)$

Solution

x_i	1	2	3	4	$< \dots, \dots >$
$f(x_i)$	1	3	1	3	$< f, f >= 1^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 = 20$
$g(x_i)$	1	3	4	5	$< g, g >= 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 51$
$f(x_i).g(x_i)$	1	9	4	15	$< g, g >= 1 + 9 + 4 + 15 = 29$

3.2. Polynômes Orthogonaux

Soit $P_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré $\leq$ n défini sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une famille de polynômes $p_0, p_1, \dots, p_k$ de degré inférieur ou égal à n est orthogonale si et seulement si :

$$\begin{cases} < p_i, p_j >= 0 & i \neq j \\ < p_i, p_j >= 0 & i = j \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose dans toute la suite que l'ensemble des poids $\boldsymbol{w_i}$ est constant et égal à 1.

Exemple n≗04

Soient cas des polynômes suivants ; Les polynômes p_0 *et* p_1 sont-ils orthogonaux ?

1) $p_0(x) = 1$ *et* $p_1(x) = x$
2) $p_0(x) = 1$ *et* $p_1(x) = x - 1$

Solution

Cas 1 : $p_0(x) = 1$ *et* $p_1(x) = x$

x	0	1	2	$< \dots, \dots >$
$p_0(x) = 1$	1	1	1	$< p_0, p_0 >= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$
$p_1(x) = x$	0	1	2	$< p_1, p_1 >= 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$
$p_0(x).p_1(x)$	0	1	2	$< p_0, p_1 >= 0 + 1 + 2 = 3$

On remarque que les polynômes ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire.

Cas 2 : $p_0(x) = 1$ *et* $p_1(x) = x - 1$

Considérons l'ensemble des points $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

x	0	1	2	$< \dots, \dots >$
$p_0(x) = 1$	1	1	1	$< p_0, p_0 >= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$
$p_1(x) = x - 1$	-1	0	1	$< p_1, p_1 >= (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$
$p_0(x).p_1(x)$	-1	0	1	$< p_0, p_1 >= -1 + 0 + 1 = 0$

On remarque que les polynômes sont orthogonaux.

Théorème 06 **Orthogonalisation de Gram Schmidt**

Soit $A = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ un ensemble de polynômes de degré inférieur ou égal à k, et un ensemble de points $x_0, x_1, \dots, x_n$ tel que :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x - a_1 \\ p_i(x) = (x - a_i)p_{i-1}(x) - b_i p_{i-2}(x) \quad i = 2, \dots, k \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_i = \dfrac{< x p_{i-1}(x),\ p_{i-1}(x) >}{< p_{i-1}(x),\ p_{i-1}(x) >} & i = 1, \dots, k \\ b_i = \dfrac{< x p_{i-1}(x),\ p_{i-2}(x) >}{< p_{i-1}(x),\ p_{i-1}(x) >} & i = 2, \dots, k \end{cases}$$

Exemple n≗05

Construire une base orthogonale $A = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$, associée aux points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.

Solution

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x - a_1 \end{cases} \qquad a_1 = \frac{< xp_0(x)\,,\ p_0(x) >}{< p_0(x)\,,\ p_0(x) >};$$

x	0	1/2	1	$< \dots, \dots >$
$p_0(x) = 1$	1	1	1	$< p_0, p_0 > = 3$
$x.p_0(x) = x$	0	1/2	1	
$xp_0(x).p_0(x)$	0	1/2	1	$< xp_0.p_0 > = \frac{3}{2}$
$a_1 = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_1(x) = x - 1/2$				

3.3. Approximation au sens (M.C) dans une base orthogonale

Théorème 07 **Coefficients dans une base orthogonale**

Soit $A = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ un ensemble de polynômes orthogonaux associés aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ tel que : Le polynôme $P^*(x)$ qui est la meilleure approximation d'une fonction f au sens des moindres s'écrit :

$$P^*(x) = a_0^*.p_0(x) + a_1^*.p_1(x) + \dots + a_k^*.p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i^*.p_i(x)$$

Où
$$a_i^* = \frac{< f, p_i >}{< p_i, p_i >} = \frac{\sum_{j=0}^{n} f(x_j).p_i(x_j)}{\sum_{j=0}^{n} \left(p_i(x_j)\right)^2} \qquad i = 0,1, \dots, k$$

Exemple n≗06

Reprendre exemple $f(x) = e^x$ pour trois points dans une base orthogonale

Solution

$$A = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$$

On a l'ensemble $A = \left\{p_0 = 1, p_1 = x - \frac{1}{2}, p_2 = x^2 - \frac{1}{2}x\right\}$orthogonal

$$P^*(x) = a_0^*.p_0(x) + a_1^*.p_1(x); \qquad a_0^* = \frac{< f, p_0 >}{< p_0, p_0 >}; \quad a_1^* = \frac{< f, p_1 >}{< p_1, p_1 >}$$

x	0	1/2	1	$< \dots, \dots >$
$p_0 = 1$	1	1	1	$< p_0, p_0 > = 3$
$f = e^x$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e	
$f.p_0$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e	$< f, p_0 > = 1 + e^{\frac{1}{2}} + e$
$a_0^* = \left(1 + e^{\frac{1}{2}} + e\right)/3$				
$p_1 = x - 1/2$	$-1/2$	0	1/2	$< p_1, p_1 > = \frac{1}{2}$
$f.p_1$	$-1/2$	0	$1/2.e$	$< f, p_1 > = -1/2 + 1/2.e$
$a_1^* = (-1/2 + 1/2.e)\Big/\frac{1}{2} = -1 + e$				

$$P^*(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{2}} + e}{3} 1 + (-1 + e).\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= (-1 + e)x + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}e$$
$$= 1.7182.x + 0.9299$$

3.4. Approximation au sens (M.C) dans la base canonique

Théorème 08 **Coefficients dans une base canonique**

Soit $P^*(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i . x^i$

Approximation d'une fonction f au sens des moindres.

Alors, le vecteur des coefficients (α_i) est la solution unique du système linéaire

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j < x^j, x^i > = < f(x), x^i > \qquad i = 0,1, \dots, k \quad i = 0,1, \dots, k$$

Exemple n≗07

Reprendre exemple $f(x) = e^x$ pour trois points dans la base canonique $x^i, i = 0,1$

Solution

x^0	1	1	1	
x^1	0	$1/2$	1	
$x^0.x^0$	1	1	1	$< x^0.x^0 > = 3$
$x^0.x^1$	0	$1/2$	1	$< x^0.x^1 > = 3/2$
$x^1.x^0$	0	$1/2$	1	$< x^1.x^0 > = 3/2$
$x^1.x^1$	0	$1/4$	1	$< x^1.x^1 > = 5/4$
$f = e^x$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e	
$f.x^0$	1	$e^{\frac{1}{2}}$	e	$< f, x^0 > = 1 + e^{\frac{1}{2}} + e$
$f.x^1$	0	$1/2 . e^{\frac{1}{2}}$	e	$< f(x), x^1 > = 1/2 \times e^{\frac{1}{2}} + e$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ 3/2 & 5/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{\frac{1}{2}} + e \\ 1/2 . e^{\frac{1}{2}} + e \end{pmatrix}$$

Après résolution : $\alpha_0 = 1/6 . (2e^{1/2} - e + 5) = 0.9299; \ \alpha_1 = e - 1 = 1.7182$

$$P^*(x) = 0.9299 + 1.7182 . x.$$

4. Exercices

Exercice n≗01 S.EX : 41

Si on a les points suivants :

x	1	2	3	4	5
y	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9

1- Ajuster les points donnés par la méthode des moindres carrés avec une fonction de la forme $g(x) = a.x + b$

Exercice n≗02 S.EX : 42

En utilisant la méthode des moindres carrés, trouver une approximation de la forme:

$$y^* = a.\sin x + b.\sin 3x$$

D'une fonction $y = f(x)$ définie par les mesures:

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
y	0	1.25	3	4	3	1.25	0

Exercice n≗03 S.EX : 43

1- Construire une base orthogonale $A = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$, associée aux points

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$$

Exercice n°04 S.EX : 44

1- Ajuster les points (x, y) par la meilleure approximation au sens des moindres carrés sur la base orthogonale $A = \{1, x, x^2\}$.

Exercice n°05 S.EX : 45

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 1$ sur l'intervalle [-1, 1]. Approximez $f(x)$ par un polynôme de degré 1 au sens des moindres carrés.

Exercice n°06 S.EX : 46

Ajuster les points (x,y) par la meilleure approximation au sens des moindres carrés sur la base orthogonale $A = \{1, \sin(x), \cos(x)\}$.

Exercice n°07 S.EX : 47

Soit les valeurs suivantes : $x\ (-1, -1/2)$; $(0,0)$; $(1, 1/2)$; $(2, 2/5)$

Ajustez les points donnés par la meilleure approximation au sens des moindres carrés sur une base canonique d'ordre 2.

Exercice n°08 S.EX : 48

rouvez le polynôme de degré 3 qui approche au mieux les points $(x, y) = (0,1), (1,2), (2,3)\ et\ (3,4)$ au sens des moindres carrés sur une base canonique.

Exercice n°09 S.EX : 49

Soit la fonction $f(x) = x/(x^2 + 1)$ sur l'intervalle [0,1]. Trouvez le polynôme orthogonal de degré 2 associé à la fonction pondérée $w(x) = 1$ sur l'intervalle [0,1].

Exercice n°10 S.EX : 50

1- Trouvez le polynôme orthogonal de degré 2 associé à la fonction pondérée $w(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle [0,1].

2- Trouvez le polynôme orthogonal de degré 3 associé à la fonction pondérée $w(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle [0,1].

Exercice n°11 S.EX : 51

Soit les valeurs suivantes :

x	-1	0	1	2
y	$-1/2$	0	$1/2$	$2/5$

1- Ajuster les points donnés par la meilleure approximation au sens moindres carrés sur

- Une base orthogonale $A = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$
- Une base canonique d'ordre 3.

En supposant que $f(x) = x/(1 + x^2)$ donner l'erreur absolue commise en point $x = 1/2$.

Exercice n°12 S.EX : 52

Approximation par systèmes orthogonaux : Soit la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ sur l'intervalle [-1, 1]. Approximez $f(x)$ par une série de fonctions orthogonales dans la base des polynômes de Legendre de degré 2.

Exercice n°13 S.EX : 53

Approximez la fonction $f(x) = sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ à l'aide d'un polynôme de degré 2 en utilisant la méthode des moindres carrés.

Exercice n°14 S.EX : 54

Soit la fonction $f(x) = sin(x)$ sur l'intervalle [0, π/2]. Approximez $f(x)$ par une combinaison linéaire des fonctions $\sin(nx)$ dans la base orthogonale des fonctions $\sin(nx)\cos(mx)$ avec n, m entiers.

Exercice n°15 S.EX : 55

Soit la fonction $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ sur l'intervalle [-1, 1]. Approximez $f(x)$ par un polynôme de degré 4 au sens des moindres carrés dans la base canonique.

Exercice n°16 S.EX : 56

En utilisant la base canonique de degré 3, trouvez le polynôme qui approxime le mieux la fonction $f(x) = x/(1 + x^2)$ à partir des points (-1, -1/2), (0, 0), (1, 1/2) et (2, 2/5).

Exercice n°17 S.EX : 57

Exercice n°18 S.EX : 58

En utilisant la méthode des moindres carrés, trouver une approximation de la forme
$y^* = ax^2 + bx + c$ d'une fonction $y = f(x)$ définie par les mesures:

x	-2	-1	0	1	2
y	13	5	2	1	7

Exercice n°19 S.EX : 59

En utilisant la méthode des moindres carrés, trouver une approximation de la forme
$y^* = a/x + b$; d'une fonction $y = f(x)$ définie par les mesures:

x	1	2	3	4	5
y	3	2	1	0.5	0.2

Exercice n°20 S.EX : 60

En utilisant la méthode des moindres carrés, trouver une approximation de la forme
$y^* = a.e^{(bx)}$
d'une fonction y=f(x) définie par les mesures: (0, 2.5) ; (1, 3.2) ; (2, 4.6) ; (3, 7.2) ; (4, 11.3)

Cours n° 06-07

*** Intégration numérique ***

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

1. Introduction

Très souvent le calcul explicite de l'intégrale, d'une fonction f continue sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $I = \int_a^b f(x)dx$ peut se révéler très laborieux, ou tout simplement impossible à atteindre. Par conséquent, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de I.

On donne une fonction numérique f définie et intégrable sur $[a,b]$ supposée connue en $(n+1)$ points selon le tableau :

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

Pour approcher le nombre exact $I = \int_a^b f(x)dx$, l'idée est la suivante :

- On remplace $f(x)$ par son polynôme d'interpolation $P_n(x)$;
- On calcule $I_n = \int_a^b P_n(x)dx$;
- On estime l'erreur $|I - I_n|$.

Une telle méthode est appelée souvent méthode de quadrature. On décrira celles qui font appel à l'interpolation polynomiale de degré 0,1 et 2 On obtient respectivement les formules simples des rectangles, des trapèzes et de Simpson.

2. Méthode des rectangles

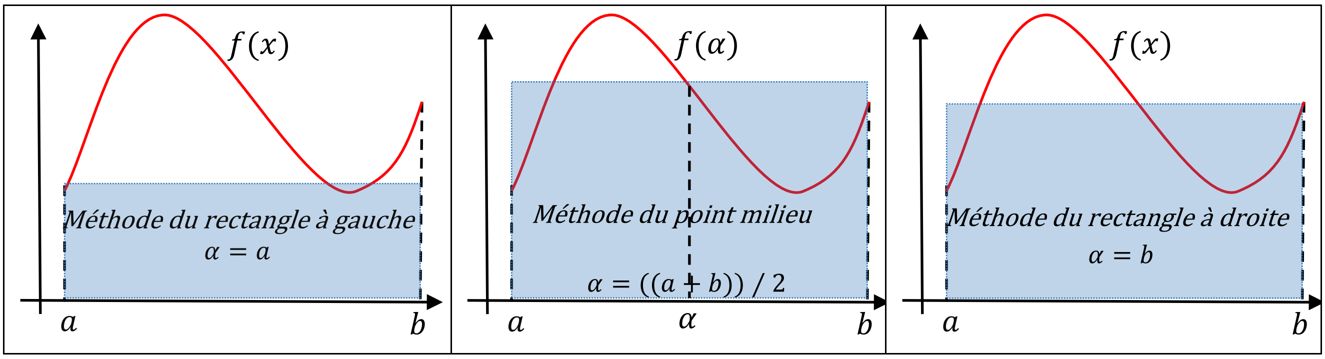
2.1. Formules simples

Supposons que « f » est connue en un point $\alpha \in [a,b]$. Le polynôme d'interpolation de f est la constante $P_0(x) = f(\alpha)$

Le nombre I est donc approché par :

$$I_0 = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(\alpha)dx = (b-a)f(\alpha) \qquad \text{(IV. 01)}$$

On aura trois cas :



Exemple n≗01

Trouver en utilisant la formule de point-milieu une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx$$

① *Analytiquement* : $I = \int_1^2 (3x^2+2x)dx \; I = [x^3 + x^2]_2^1 = 2^3 + 2^2 - 1 - 1 = 10$

② *Point − milieu* : $I_0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (2-1)f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 9.75$

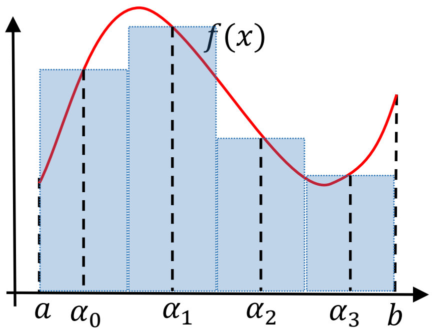
2.2. Formules composites

La méthode du point milieu composite est obtenue en subdivisant l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles

$$I_k = [x_k, x_{k+1}], k = 0, \dots, n$$

Avec $x_k = a + k \times h$, et $h = \frac{b-a}{n}$

En appliquant le même principe d'interpolation de degré 0 sur chaque intervalle. On approche $f(x)$ par $P_0(x) = f(\alpha_k)$ où $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$



Et on obtient la formule composite des rectangles :

$$I_R = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\alpha_k)dx = h \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \qquad \textbf{(IV. 02)}$$

Exemple n≗02

En reprenant l'exemple précédent, pour n=4.

Solution

$On\ a : h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$

x_k	1	1.25	1.5	1.75	2

α_k	1.1250	1.3750	1.6250	1.8750
$f(\alpha_k)$	6.0469	8.4219	11.1719	14.2969

L'intégrale :

$$I_R = h \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = 0.25(6.0469 + 8.4219 + 11.1719 + 14.2969) = 9.9844$$

2.3. Évaluation de l'erreur

C'est la différence entre l'intégrale exacte de la fonction et celle calculée par la méthode des rectangle, elle est notée par :

$$E = |I - I_1| = \left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \times \max f'(x) \qquad \textbf{(IV. 03)}$$

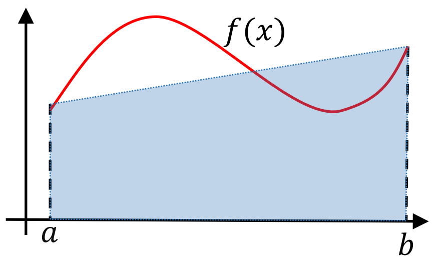
3. Méthode des trapèzes

3.1. Formules simples

Le calcul de l'intégrale dans ce cas revient au calcul de l'aire d'un trapèze.

$$I = S = \frac{(Petite_{base} + Grande_{base}) \times Hauteur}{2}$$

$$I = \frac{f(a) + f(b)}{2(b-a)}$$



c.à.d. on utilise l'interpolation à deux points. Si on suppose f aux deux points a et b, on a :

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Par intégration, on obtient

$$I_1 = \int_a^b P_1(x)dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x^2 + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} x\right]_a^b = \frac{f(a) + f(b)}{2(b-a)} \qquad \textbf{(IV. 04)}$$

Exemple n≗03

En reprenant l'exemple précédent, avec la méthode de trapèze

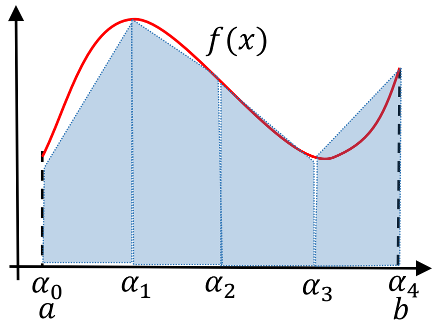
Solution

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{f(1)+f(2)}{2}(2-1) = \frac{5+16}{2} = 10.5$$

3.2. Formules composites

En généralisant le même principe aux $(n+1)$ points équidistants précédents, on obtient :

$$I_T = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_1(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$



$$I_T = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] \quad \textbf{(IV. 05)}$$

Exemple n≗04

En reprenant l'exemple précédent, avec la méthode de trapèze et n=4.

Solution

x_k	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	5.0000	7.1875	9.7500	12.6875	16.0000

$$I_T = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] = \frac{1}{4}\times\left[\frac{5+16}{2} + 7.1875 + 9.75 + 12.6875\right] = 10.0313$$

3.3. Erreur d'intégration

En formule simple

$$E = |I - I_1| = \left|\int_a^{b=a+h} f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \quad \textbf{(IV. 06)}$$

En supposant ensuite que f admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 2, on montre, grâce à un développement de Taylor de E à l'ordre 2 qu'on a :

$$|I - I_1| \le \frac{h^3}{12} \max|f''(x)|$$

En formule composite, on déduit que

$$|I - I_T| \le (b-a)^3/(12n^2) \quad \max|f''(x)|$$

Ainsi on peut déterminer le nombre de sous-intervalles de l'intervalle d'intégration tel que :

$$(b-a)^3/(12n^2) \max|f''(x)| \le \varepsilon$$

Où ε est le seuil d'erreur fixé d'avance, d'après la formule suivante :

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}M} \quad avec \ \ M = \max|f''(x)| \quad \textbf{(IV. 07)}$$

1. Formule de Simpson

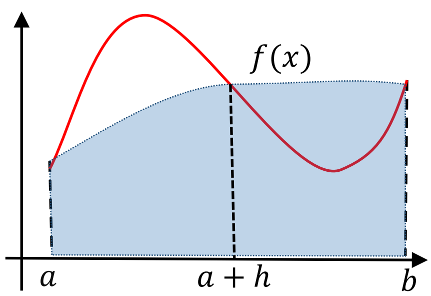
3.4. Formule simple

On suppose connue f aux trois points équidistants de $[a,b]$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = a+2h$$

$Où$: $\quad h = \dfrac{b-a}{2}$

on utilise l'interpolation à trois points.



$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{2h^2} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{h^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{h^2} f(b)$$

Et après intégration, on obtient

$$I_2 = \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \times \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad \text{(IV. 08)}$$

Exemple n≗05

En reprenant l'exemple précédent, avec formule de Simpson.

Solution

$$I_2 = \frac{b-a}{6} \times \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = \frac{1}{6} \times [f(1) + 4f(1.5) + f(2)]$$

$$= \frac{1}{6} \times [5 + 4 \times 9.75 + 16] = 10$$

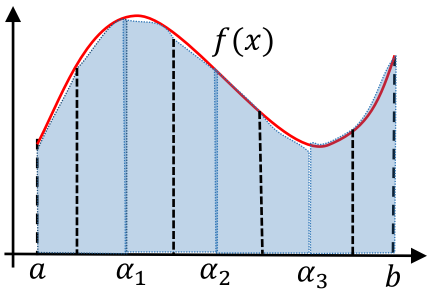
3.5. Formule composite

On réitère la formule précédente en partageant l'intervalle $[a, b]$: $s = \frac{n}{2}$

Intervalles $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, centrés en x_{2k+1} de longueur

$$2h = \frac{b-a}{s} = \frac{2(b-a)}{n}$$

Pour $k = 0,1,2, \dots, s-1$; on obtient, d'abord sur $[x_{2k}, x_{2k+2}]$,



$$I_2 = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3} \times [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

Et ensuite, la formule composite de Simpson

$$I_s = \sum_{k=0}^{s-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} P_2(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{s-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{s-1} f(a+(2k+1)h)\right] \qquad \text{(IV. 09)}$$

Exemple n≗06

En reprenant l'exemple précédent, avec la méthode de trapèze et n=4.

Solution

x_k	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	5.0000	7.1875	9.7500	12.6875	16.0000

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{s-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=1}^{s-1} f(a+(2k+1)h)\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[f(1) + f(2) + 2\big(f(1.25) + f(1.75)\big) + 4\big(f(1.5)\big)\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}[5 + 16 + 2(9.75) + 4(7.1875 + 12.6875)] = 10$$

3.6. Erreur d'intégration

Utilisant la méthode précédente on trouve l'estimation de l'erreur suivante, pour des fonctions f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4.

$$|I - I_s| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max\left|f^{(4)}(x)\right|$$

Lorsqu'on connait une majoration M de $\left|f^{(4)}(x)\right|$, le pas choisi h qui permet d'avoir au plus une erreur ε vérifie nécessairement

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M \leq \varepsilon \ \ d'où \ \frac{(b-a)}{180}\times h^4 \times M \leq \varepsilon$$

Ou bien

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)\times M}} \qquad \textbf{(IV. 10)}$$

2. Exercices

Exercice n°01 S.EX : 61

Intégrez numériquement la fonction $f(x) = 1/(1+x^2)$ sur l'intervalle [0,2] en utilisant la méthode des rectangles avec un pas de 0,1.

Exercice n°02 S.EX : 62

Intégrez numériquement la fonction définie par les points suivants : (0,0), (1,1), (2,0), (3,-1), (4,0) en utilisant la méthode des rectangles avec un pas de 0,5.

Exercice n°03 S.EX : 63

Utilisez la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale de la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle [0,1] avec un pas de 0,1.

Exercice n°04 S.EX : 64

Intégrez numériquement la fonction définie par les points suivants : (-1,0), (0,1), (1,0), (2,-1), (3,0) en utilisant la méthode des trapèzes avec un pas de 1.

Exercice n°05 S.EX : 65

Utilisez la méthode de Simpson pour approximer l'intégrale de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle [0,4] avec un pas de 0,5.

Exercice n°06 S.EX : 66

Intégrez numériquement la fonction définie par les points suivants : (-2,4), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,4) en utilisant la méthode de Simpson avec un pas de 1.

Exercice n°07 S.EX : 67

La fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle [-2,2] par $f(x) = 1 - x^2$.

1- Calculez l'intégrale exacte de $f(x)$ sur l'intervalle [-2,2].
2- Intégrez numériquement $f(x)$ sur l'intervalle [-2,2] en utilisant la méthode des trapèzes avec n = 4 sous-intervalles.
3- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°08 S.EX : 68

La fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle [0,1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1- Calculez l'intégrale exacte de $f(x)$ sur l'intervalle [0,1].
2- Intégrez numériquement $f(x)$ sur l'intervalle [0,1] en utilisant la méthode des rectangles avec n = 8 sous-intervalles.
3- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°09 S.EX : 69

La fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle [0,1] par $f(x) = x^3 + 2x$.

1- Calculez l'intégrale exacte de f(x) sur l'intervalle [0,1].
2- Intégrez numériquement $f(x)$ sur l'intervalle [0,1] en utilisant la méthode de Simpson avec n = 6 sous-intervalles.
3- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°10 S.EX : 70

1- Calculez le nombre de sous-intervalles nécessaires pour intégrer numériquement la fonction $f(x) = cos(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ avec une précision de 10^{-3} en utilisant la méthode des rectangles.
2- Calculez l'intégrale exacte
3- Intégrez numériquement $f(x)$
4- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°11 **S.EX : 71**

1- Calculez le nombre de sous-intervalles nécessaires pour intégrer numériquement la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 3$ sur l'intervalle [-1,1] avec une précision de 10^{-4} en utilisant la méthode des trapèzes.
2- Calculez l'intégrale exacte
3- Intégrez numériquement $f(x)$

Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°12 S.EX : 72

1- Calculez le nombre de sous-intervalles nécessaires pour intégrer numériquement la fonction $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ sur l'intervalle [0,1] avec une précision de 10^{-6} en utilisant la méthode de Simpson.
2- Calculez l'intégrale exacte
3- Intégrez numériquement $f(x)$
4- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°13 S.EX : 73

1- Intégrez numériquement la fonction $f(x) = x \times ln(x)$ sur l'intervalle [1,3] en utilisant la méthode des trapèzes avec une précision de 10^{-4}.
2- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°14 S.EX : 74

1- Intégrez numériquement la fonction $f(x) = x \times \ln(x)$ sur l'intervalle [1,3] en utilisant la méthode des trapèzes avec un pas de 0,2.
2- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°15 S.EX : 75

1- Utilisez la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale de la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ sur l'intervalle [0,2] avec un pas de 0,25.
2- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°16 S.EX : 76

1- Utilisez la méthode de Simpson pour approximer l'intégrale de la fonction $f(x) = x \times \sqrt{1 - x^2}$ sur l'intervalle [0,1] avec un pas de 0,2.
2- Calculez l'erreur commise en utilisant cette méthode.

Exercice n°17 S.EX : 77

Calculez numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = \sin(x)/x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ en utilisant la méthode des rectangles.

Exercice n°18 S.EX : 78

Calculez numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = \ln(x)/x$ sur l'intervalle [1,2] en utilisant la méthode des trapèzes.

Exercice n°19 S.EX : 79

Calculez numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = e^x/(x+1)^2$ sur l'intervalle [0,2] en utilisant la méthode des trapèzes.

Exercice n°20 S.EX : 80

Calculez numériquement l'intégrale de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

sur l'intervalle [0,1] en utilisant la méthode de Simpson

Cours n° 08-09

** Résolution des équations différentielles ordinaires **

1. Introduction

Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire. Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles. On dit qu'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) est d'ordre p si elle implique des dérivées d'ordre au plus p. Dans le présent chapitre, nous considérons des équations différentielles ordinaires d'ordre un.

$$f\left(y, y', \dots\dots, y^{(n)}\right) = g(x)$$

g : Appelée «second membre» de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est homogène.

Définition 03 | **Problème de CAUCHY**

Soit f : I × ℝ → ℝ une fonction donnée et y_0 la dérivée de y par rapport à x. On appelle problème de CAUCHY le problème trouver y : I ⊂ ℝ → ℝ tel que :

$$\begin{cases} y'(x) = f\left(x, y(x)\right), \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

avec x_0 un point de I et y_0 une valeur appelée donnée initiale.

Exemple n≗07

On se donne $f(x,y) = y^3 \; et \; y_0 = 1$

On cherche une fonction y : $x \in \mathbb{R}^+ \to y(x) \in \mathbb{R}$ qui satisfait $\begin{cases} y' = y^3, & \forall x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solution

$$\frac{dy}{y^3} = dx \Longrightarrow -\frac{1}{2}y^{-2} = x + C^{te} \Longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{C - 2x}}$$

On a : $y(0) = 1 \Longrightarrow C = 1$ $\quad Alors : y = 1/\sqrt{1 - 2x}$

On vérifie que la solution y est donnée par $y = 1/\sqrt{1-2x}$ qui n'est définie que pour $x \in [0; 1/2[$. C'est exemple montre qu'un problème de CAUCHY n'as pas toujours une solution pour tout $x \in [0; +\infty[$ puisqu'ici la solution explose lorsque x tend vars la valeur $1/2$.

En effet, nous avons $(lim)_{\top}(x \longrightarrow 1/2)\, y(x) = +\infty$

Exemple n≗08

On se donne $f(x,y) = y^{\frac{1}{3}} \; et \; y_0 = 0$

On cherche une fonction y : $x \in \mathbb{R}^+ \to y(x) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}}, & \forall x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = dx \Longrightarrow \frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}} = x + C^{te} \Longrightarrow y = \sqrt{(2/3\,x + C)^3}$$

On a : $y(0) = 0 \Longrightarrow C = 0$ $\quad Alors : y = \sqrt{8x^3/27}$

On vérifie que les solutions $y = 0$, $y = \sqrt{8x^3/27} \; et \; y = -\sqrt{8x^3/27}$ pour tout $x \geq 0$, sont toutes trois solutions du problème de CAUCHY donné. C'est exemple montre qu'un problème de CAUCHY n'as pas nécessairement de solution unique.

Les trois ci-dessus montrent que l'étude mathématique de l'existence et de l'unicité de solutions d'un problème de CAUCHY peut être une affaire délicate.

Dans ce chapitre, nous nous contentons de rappeler un résultat d'existence et d'unicité global, au sens où on peut intégrer le problème de CAUCHY jusqu'à $x = \infty$.

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Théorème 09 | Théorème de CAUCHY-Lipschitz

Soit un problème de CAUCHY. Si la fonction $f\ (x, y)$ est
- ❖ Continue par rapport à ses deux variables ;
- ❖ Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L.|y_1 - y_2|, \qquad \forall x \in I, \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

Alors, le problème de Cauchy admet une solution unique.

Considérons le problème de CAUCHY et supposons que l'on ait montré l'existence d'une solution y. Le principe de toutes ces méthodes est de subdiviser l'intervalle $I = [x_0, T\ ]$, avec $T < +\infty$, en n intervalles de longueur

$$h = x_{n+1} - x_n = \frac{T - x_0}{n} \qquad \textbf{(V. 01)}$$

h : Est appelé le pas de discrétisation.
Alors, pour chaque nœud :

$$x_n = x_0 + nh \qquad \textbf{(V. 02)}$$

2. Méthode D'Euler

En x_0 on connait y_0; donc aussi

$$y_0' = f(x_0, y_0) \qquad \textbf{(V. 03)}$$

Si y est la solution exacte, y est approchée sur l'intervalle $[x_0\ , x_1]$ par sa tangente au point x_0 . Et ainsi, on a

$$y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0) \qquad \textbf{(V. 04)}$$

Sur l'intervalle $[x_1\ , x_2]$; y sera remplacée par la tangente au point $(x_1;\ y_1)$: On trouve :

$$y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1) \qquad \textbf{(V. 05)}$$

Ceci conduit à la forme récurrente d'Euler

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n) \end{cases} \qquad \textbf{(V. 06)}$$

Exemple n≗09
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On veut approcher, à 10^{-3}, la solution exacte en $x = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler, en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en dix parties égales.

Solution
On a : $f(x_n, y_n) = x_n + y_n \qquad h = 0.1$
Selon l'algorithme d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n) = y_n + 0.1 \times (x_n + y_n) = 0.1 \times x_n + 1.1 \times y_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_n	1.0000	1.1000	1.2200	1.3620	1.5282	1.7210	1.9431	2.1974	2.4872	2.8159	3.1875

La solution exacte de l'équation est donnée par $y = 2e^x - x - 1$, ce qui donne $y(1) = 3,437$.
L'erreur : $|y(1) - y_{10}| = |3.437 - 3.1875| = 0.2495$
L'approximation calculée est donc très grossière.

🚩 L'erreur dans la méthode d'Euler est relativement importante. Elle peut être améliorée en choisissant plus petit pas h, ce qui augmente considérablement le volume des calculs à effectuer, ou en approchant la solution du problème de Cauchy par des méthodes permettant de réduire cette erreur.

3. Méthode d'Euler améliorée

Nous pouvons utiliser une prédiction d'EULER progressive pour approcher le $y_{n+\frac{1}{2}}$ dans le terme $f\left(x_n+\frac{h}{2}, y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)\right)$ par :{ $y_{n+\frac{1}{2}}$ Est une approximation de $y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)$}

$$\tilde{y}\left(x_n+\frac{h}{2}\right)=y_n+h.f\,(x_n,y_n) \qquad \textbf{(V.07)}$$

Nous avons construit ainsi un nouveau schéma appelé schéma d'EULER modifié qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ \tilde{y}\left(x_n+\frac{h}{2}\right)=y_n+\frac{h}{2}.f\,(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+h.f\left(x_n+\frac{h}{2},\tilde{y}\left(x_n+\frac{h}{2}\right)\right) \end{cases} \qquad \textbf{(V.08)}$$

Exemple n≗10

Le même exemple précédant avec la méthode d'Euler améliorée

On a : $f(x_n,y_n)=x_n+y_n \qquad h=0.1$

Solution

Selon l'algorithme d'Euler modifiée:

$$\tilde{y}\left(x_n+\frac{h}{2}\right)=y_n+\frac{h}{2}.f\,(x_n,y_n)=y_n+\frac{0.1}{2}.(x_n+y_n)=0.05x_n+1.05y_n$$

$$y_{n+1}=y_n+h.f\left(x_n+\frac{0.1}{2},\tilde{y}\left(x_n+\frac{0.1}{2}\right)\right)=y_n+0.1\left(x_n+\frac{0.1}{2}+0.05x_n+1.05y_n\right)$$

$$=0.105x_n+1.105y_n+0.005$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_n	1.0000	1.1100	1.2421	1.3985	1.5818	1.7949	2.0409	2.3231	2.6456	3.0124	3.4282

L'erreur : $|y(1)-y_{10}|=|3.437-3.4282|=8.8\times10^{-3}$

4. Méthode de Runge-Kutta

Le développement de Taylor d'ordre 2 implique :

$$y=y_n+\frac{h}{1!}y'_n+\frac{h^2}{2}y''_n+\varepsilon(h^2) \qquad \textbf{(V.09)}$$

Et comme :

D'une part, $$y'(x_n)=f(x_n,y_n) \qquad \textbf{(V.10)}$$

D'autre part $$y''(x_n)=\frac{df(x_n,y_n)}{dx}$$

D'où : $$y''(x_n)=\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta x}+f(x_n,y_n).\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta y} \qquad \textbf{(V.11)}$$

On est amené à considérer l'algorithme de Taylor :

$$y_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{1!}\times f(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}\times\left(\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta x}+f(x_n,y_n).\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta y}\right) \qquad \textbf{(V.12)}$$

On reprend l'algorithme de Taylor

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}.f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}.f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}.\left(h.\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta x}+h.f(x_n,y_n).\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta y}\right)$$

$$=y_n+\frac{h}{2}.f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}.\left(f(x_n,y_n)+h\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta x}+hf(x_n,y_n).\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta y}\right)$$

Selon le développement de Taylor on a, à des termes en h près,

$$f(x_n,y_n)+h\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta x}+hf(x_n,y_n).\frac{\delta f(x_n,y_n)}{\delta y}=f\left(x_n+h,y_n+h.f(x_n,y_n)\right)$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}.\left(f(x_n,y_n)+f\left(x_{n+1},y_n+h.f(x_n,y_n)\right)\right) \qquad \textbf{(V.13)}$$

L'Algorithme de Runge-Kutta (point milieu) peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ p_{n,1} = f(x_n, y_n) \\ p_{n,2} = f(x_{n+1}, y_n + h.p_{n,1}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(p_{n,1} + p_{n,2}) \end{cases} \qquad \textbf{(V.14)}$$

La méthode de Runge-kutta la plus utilisée est d'ordre 4(on néglige les dérivées du 4ème ordre dans le développement de Taylor) ; Il s'agit de l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ p_{n,1} = f(x_n, y_n) \\ p_{n,2} = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}.p_{n,1}\right) \\ p_{n,3} = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}.p_{n,2}\right) \\ p_{n,4} = f(x_{n+1}, y_n + h.p_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4}) \end{cases} \qquad \textbf{(V.15)}$$

Exemple n≗11

Le même exemple précédant avec la méthode de Runge-Kutta

01) D'ordre 2

Runge-Kutta d'ordre 2

Solution

On a :$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \qquad h = 0.1$

Selon l'algorithme de Runge-Kutta:

$$p_{n,1} = f(x_n, y_n) = x_n + y_n$$

$$p_{n,2} = f(x_{n+1}, y_n + h.p_{n,1}) = x_n + h + y_n + h.p_{n,1} = x_n + 0.1 + y_n + 0.1(x_n + y_n)$$
$$= 1.1x_n + 1.1y_n + 0.1$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}.(p_{n,1} + p_{n,2}) = y_n + \frac{0.1}{2}(x_n + y_n + 1.1x_n + 1.1y_n + 0.1)$$
$$= 0.105x_n + 1.105y_n + 0.005$$

Dans ce cas on aura les mêmes résultats d'Euler améliorée

02) D'ordre 4

Runge-Kutta d'ordre 4

$$p_{n,1} = f(x_n, y_n) = x_n + y_n$$

$$p_{n,2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.p_{n,1}\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}p_{n,1} = x_n + \frac{0.1}{2} + y_n + \frac{0.1}{2}(x_n + y_n)$$
$$= 1.05x_n + 1.05y_n + 0.05$$

- $p_{n,3} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}.p_{n,2}\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}.p_{n,2} = x_n + \frac{0.1}{2} + y_n + \frac{0.1}{2}(1.05x_n + 1.05y_n + 0.05) = 1.0525x_n + 1.0525y_n + 0.0525$
- $p_{n,4} = f(x_{n+1}, y_n + h.p_{n,3}) = x_n + h + y_n + h.p_{n,3} = x_n + 0.1 + y_n + 0.1(1.0525x_n + 1.0525y_n + 0.0525) = 1.10525x_n + 1.10525y_n + 0.10525$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4}) = y_n + \frac{0.1}{6}(x_n + y_n + 2(1.05x_n + 1.05y_n + 0.05) + 2(1.0525x_n + 1.0525y_n + 0.0525) + 1.10525x_n + 1.10525y_n + 0.10525)$
- $y_{n+1} = 0.10517x_n + 1.10517y_n + 0.00517$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_n	1.0000	1.1103	1.2428	1.3997	1.5836	1.7974	2.0442	2.3275	2.6511	3.0192	3.4366

L'erreur : $|y(1) - y_{10}| = |3.437 - 3.4366| = 3.9 \times 10^{-4}$

5. Exercices

Exercice n≗01 S.EX : 81

On considère le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1- Montrer que le problème possède une solution unique globale.
2- Avec de la méthode d'Euler et pour n=10 trouvez $y(1)$ les résultats avec trois décimales.
3- Comparer les résultats obtenus avec ceux calculés à partir de la solution exacte.
4- Reprendre les calculs avec la méthode d'Euler améliorée.

Exercice n≗02 S.EX : 82

Soit à résoudre numériquement sur l'intervalle [0,1] l'équation différentielle suivante:

$$y' = 1 + xy \qquad y(0) = 0$$

1- Utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 pour trouver une valeur approchée y(1) pour $h = 0.2$.
2- Reprendre les calculs par méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. ($\varepsilon = 10^{-3}$).

Exercice n≗03 S.EX : 83

Résoudre avec les quatre méthodes les EDO suivantes :

1- $y' = (y^2 + 1)/(x^2 + 1)$; $y(2) = 0$; $h = 0.2$; $y(3) = ?$
2- $y'y = \pi/12\, sin(\pi/3\, x)$; $y(1) = 1/2$; $h = 1$; $y(3) = ?$

Exercice n≗04 S.EX : 84

Utiliser la méthode d'Euler explicite pour résoudre l'équation différentielle $y' = x + y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, pour les valeurs de x allant de 0 à 1 avec un pas de 0,1.

Exercice n≗05 S.EX : 85

Utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 pour résoudre l'équation différentielle $y' = x + y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, pour les valeurs de x allant de 0 à 1 avec un pas de 0,1.

Exercice n≗06 S.EX : 86

Utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 4sin(x)$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, pour les valeurs de x allant de 0 à 5 avec un pas de 0,1.

Exercice n≗07 S.EX : 87

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de $h = 0,1$.

Exercice n≗08 S.EX : 88

Utiliser la méthode de Euler explicite pour résoudre l'équation différentielle $y' + y = x^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ sur l'intervalle [0, 1] avec un pas de $h = 0,1$. Comparer les résultats avec la solution exacte.

Exercice n≗09 S.EX : 89

Utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour résoudre l'équation différentielle $y' = (1 - y^2)/(1 + x^2)$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ sur l'intervalle [-1, 1] avec un pas de $h = 0,01$.

Exercice n≗10 S.EX : 90

Utiliser la méthode d'Euler améliorée pour résoudre l'équation différentielle $y' = (x^2 + y)/2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ sur l'intervalle [0, 1] avec un pas de $h = 0,1$. Comparer les résultats avec la solution exacte.

Cours n° 10-11

** Méthodes directes de résolution des systèmes d'équations linéaires **

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

1. Introduction

On appelle système linéaire d'ordre n,$(n \in N^*)$ une expression de la forme :

$$A \times X = b \qquad \textbf{(VI. 01)}$$

Où $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, désigne une matrice carrée d'ordre n de nombres réels ou complexes; La matrice A est dite régulière (inversible) si $\det(A) \neq 0$;
$b = (b_i), 1 \leq i \leq n$ Une vectrice colonne de réel ou complexe.
$X = (x_i), 1 \leq i \leq n$, est le vecteur des inconnues du système.
Pour résoudre le système linéaire on a deux catégories :

Méthodes directes :

Ce sont des méthodes qui permettent d'obtenir la solution X, si l'ordinateur faisait des calculs exacts, en un nombre fini (en relation avec n) d'opérations élémentaires.
Parmi les méthodes de résolution du système on citera :

- Méthode de Gauss (méthode du pivot)
- Méthode de Gauss-Jordan
- La méthode factorisation LU
- ....

Méthodes itératives :

Ce sont des méthodes qui consistent à construire une suite de vecteurs $X^{(n)}$ convergeant vers la solution X.

- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Seidel
- Méthode de relaxation
- .....

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$; où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n à coefficients réels.

2. Méthode d'élimination de Gauss

Principe : Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

$[A \ \vdots \ b] \xrightarrow{transformation} [A' \ \vdots \ b']$ Où A' est la matrice triangulaire supérieure.

2.1. Transformations élémentaires de matrices.

On appelle transformation élémentaire d'une matrice l'une des deux opérations suivantes:
L'échange de deux lignes (ou de deux colonnes), noté $L_i \to L_j$ (ou de colonne $C_i \to C_j$);
Le remplacement d'une ligne par une combinaison linéaire de lignes contenant cette ligne avec coefficient non nul, $L_i \to a \times L_i + b \times L_j$ (ou$C_i \to a \times C_i + b \times C_j 0$).

2.2. Algorithme d'élimination de Gauss

On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$

$$\left(A^{(1)} \ \vdots \ b^{(1)}\right) = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{array}$$

1ère étape

Si $a(1) \neq 0$ (si non on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \to L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \to L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \end{cases} \quad \text{où } \alpha_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \qquad \textbf{(VI. 02)}$$

On obtient donc

$$\left(A^{(2)} \ \vdots \ b^{(2)}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{array}$$

2ème étape

En répète la même opération avec la sous matrice $(n-1)\times(n-1)$ en éliminent la première ligne et colonne.

……………

Nième étape

En continu de la même façon à chaque fois en éliminent une ligne et une colonne.

On obtient donc :

$$\left(A^{(n)} : b^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & \vdots & b_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(n)} \end{matrix} \qquad \text{(VI. 03)}$$

Les $a_{kk}^{(k)}$, $k = 1, n$ sont appelés "pivots de la méthode de Gauss".

Exemple n≗01

Résoudre le système des équations suivant : $\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = 2 \\ 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = 11 \end{cases}$

Solution

Matrice triangulaire supérieures

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} L_2 = L_2 - L_1.(2) \\ L_3 = L_3 - L_1.(3) \end{cases}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left\{ L_3 = L_3 - L_2\left(\frac{7}{4}\right) \right.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & 15/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 0 \\ 0 & -4x_2 & -6x_3 & = 2 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{2}x_3 & = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Remarque : Il ne faut pas utiliser des pivots trop petits car les erreurs d'arrondi peuvent donner des solutions fausses. Un moyen de contourner le problème d'un pivot nul ou presque est d'utiliser la technique de pivoter. Il existe deux stratégies de pivoter.

2.3. La stratégie du pivot partiel

Principe : à la Kième étape $(1 \le k \le n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot partiel, choisir parmi les coefficients de colonne la valeur absolue la plus grande, On permute ensuite avec la ligne en question.

Exemple n≗02

Résoudre le système précédent avec la stratégie du pivot partiel.

Solution

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix}$$

k=1 première colonne (A). Le premier pivot $C_1 = \max(1,2,3) = 3;\ p_1 = a_{31} = 3.$

$$\xrightarrow{L_1 \rightleftarrows L_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} L_2 = L_2 - L_1.\left(\frac{2}{3}\right) \\ L_3 = L_3 - L_1.\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{2}{3} & -4 & \vdots & -\frac{16}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

k=2 deuxième colonne $(\Delta_{11}A)$. $C_2 = \max\left(2/3\,;\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$ $p_2 = a_{32} = \frac{7}{3}$.

$$\xrightarrow{L_2 \rightleftharpoons L_3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -4 & \vdots & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3-L_2\left(\frac{2}{7}\right)}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{30}{7} & \vdots & -\frac{30}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = 11 \\ 0 & +7x_2 & +3x_3 & = -11 \\ 0 & 0 & +x_3 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

2.4. La stratégie du pivot partiel composé

Principe : à la Kième étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot partiel, diviser les colonne sur la valeur absolue la plus grande de la ligne, puis choisir parmi les coefficients de colonne la valeur absolue la plus grande, On permute ensuite avec la ligne en question.

Exemple n≗03
Résoudre le système précédent avec la stratégie du pivot partiel composé.

Solution

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix}$$

$d_1 = \max(1,3,3) = 3;$ $\quad d_2 = \max(2,2,0) = 2;$ $\quad d_3 = \max(3,2,6) = 6;$

k=1 première colonne (A). Le premier pivot $C_1 = \max\left(\cfrac{\cfrac{\cfrac{1}{3,2}}{2,3}}{6}\right) = 1;$ $p_1 = a_{21} = 3.$

$$\xrightarrow{L_1 \rightleftharpoons L_2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{cases} L_2=L_2-L_1.\left(\frac{1}{2}\right) \\ L_3=L_3-L_1.\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 6 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

k=2 deuxième colonne $(\Delta_{11}A) \times$ $C_2 = \max\left(\frac{2}{2} ; \frac{1}{6}\right) = 1$ $p_2 = a_{22} = 2.$

$$\xrightarrow{L_3=L_3+L_2\left(\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & & = 2 \\ 0 & +2x_2 & +3x_3 & = -1 \\ 0 & 0 & +x_3 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

2.5. La stratégie du pivot total

Principe : à la Kième étape $(1 \leq k \leq n-1)$ d'élimination de Gauss le pivot partiel, choisir parmi les coefficients de la matrice la valeur absolue la plus grande, On permute ensuite avec la ligne et la colonne de telle façon d'avoir ce élément comme pivot.

Attention à chaque permutation de colonnes les inconnues changent de places.

Exemple n≗04
Résoudre le système précédent avec la stratégie du pivot partiel composé.

Solution

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1er étape : le terme le plus grand en valeur absolue de A est $p_1 = a_{33} = 6$

$$\xrightarrow{L_1 \rightleftharpoons L_3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\xrightarrow{C_1 \rightleftharpoons C_3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & \vdots & 11 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} L_2=L_2 \\ L_3=L_3-L_1.\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & \vdots & 11 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \vdots & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

2ème étape : le terme le plus grand en valeur absolue de $(\Delta_{11}A)$ est $p_2 = a_{22} = 2$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & \vdots & 11 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{5}{2} & \vdots & -\dfrac{15}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_3 & +2x_2 & 3x_1 & = 11 \\ 0 & +2x_2 & +2x_1 & = 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{5}{2x_1} & = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Méthode de Gauss-Jordan

Principe :

Transformation de la matrice A en matrice identité.

$[A \ \vdots \ b] \xrightarrow{transformation} [I \vdots b']$ Où I est la matrice identité.

4. Méthode de factorisation LU

4.1. Principe de la méthode

Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = L \times U$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.

Résolution : Le système $A \times X = b$ devient :

$$\mathrm{A} \times X = b \quad \Leftrightarrow \quad L \times U \times X = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L \times Y = b \\ U \times X = Y \end{cases} \qquad \textbf{(VI. 04)}$$

$L = (l_{ij}) 1 \leq i, j \leq n$ Triangulaire inférieure telle que $l_{ii} = 1, i = 1, n$

U une matrice triangulaire supérieure telle que $A = LU$.

4.2. Détermination des matrices L et U

On a:$A = A^{(1)}$; Au premier pas d'élimination de Gauss, on trouve

$$A^{(2)} = M^{(1)} \times A^{(1)} \qquad \textbf{(VI. 05)}$$

Où

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{21} & 1 & 1 & \dots & 0 \\ -\alpha_{31} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad avec \ \ \alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

Au deuxième pas, on trouve

$$A^{(3)} = M^{(2)} \times A^{(2)} \qquad \textbf{(VI. 06)}$$

Où

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad avec \ \ \alpha_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

De la même manière au kième pas d'élimination, on obtient :

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} \times A^{(k)} \qquad \textbf{(VI. 07)}$$

Ce qui nous donne : $A^{(n)} = M^{(n-1)} \times A^{(n-1)} = M^{(n-1)} \times M^{(n-2)} M^{(n-3)} \dots \dots M^{(1)} \times A^{(1)}$

D'où

$$A^{(1)} = M^{(n-1)} \times A^{(n-1)} = \left(M^{(n-1)} \times M^{(n-2)} M^{(n-3)} \dots \dots M^{(1)}\right)^{-1} \times A^{(n)}$$
$$= \left(M^{(1)}\right)^{-1} \times \left(M^{(2)}\right)^{-1} \dots \times \left(M^{(n-1)}\right)^{-1} \times A^{(n)}$$

Posons

$$L = \left(M^{(1)}\right)^{-1} \left(M^{(2)}\right)^{-1} \dots \left(M^{(n-1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{12} & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{12} & \alpha_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Exemple n≗05

Résoudre le système précédent avec la méthode de factorisation LU.

Solution

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule $A^{(2)} = M^{(1)} \times A^{(1)}$ où

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = M^{(1)} \times A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

On calcule $A^{(3)} = M^{(2)}.A^{(2)}$ où

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = M^{(2)}.A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(3)}$ est ainsi triangulaire supérieur, c'est la matrice U.
D'autre part, on a:

$$L = \left(M^{(1)}\right)^{-1} \times \left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi factorisé A sous la forme :

$$A = L \times U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Résoudre $A \times x = b$ revient à résoudre. $LU \times x = b$. On pose alors $y = U \times x$, la résolution du système initial revient à résoudre successivement les deux systèmes.

$$L \times y = b \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

$$Finalement, on\ résout : U \times x = y \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 15/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Exercices

Exercice n°01 S.EX : 91

Soit le système linéaire donné par : $\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = & 2 \\ 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = & 11 \end{cases}$

1- Écrire le système linéaire sous la forme matricielle $A.x = b$.
2- Résoudre le système par la méthode de Gauss.
3- En déduire $\det(A^{-1})$

Ex. 01 TD Adrar 2012

Exercice n°02 — S.EX : 92

Soit le système linéaire : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1- Vérifier que l'algorithme de Gauss sans pivotions ne peut pas être exécute jusqu'au bout.

2- Résoudre le système par la méthode de Gauss avec pivotions.

Ex. 02 TD Adrar 2012

Exercice n°03 — S.EX : 93

Soit le système $\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +3x_3 = & -2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 = & 7 \\ 3x_1 & +2x_2 & +6x_3 = & 12 \end{cases}$

1- Résoudre ce système par :

- (a) La méthode de Gauss.
- (b) La stratégie du pivot partiel.
- (c) La stratégie du pivot partiel composé.
- (d) La stratégie du pivot total.

2- Factoriser la matrice A du système en produit LU, puis résoudre le système linéaire donné.

Ex. 05 TD Adrar 2012

Exercice n°04 — S.EX : 94

Soit le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & = & -3 \end{cases}$

1- Résoudre le système par la méthode de Gauss-Jordan

Ex. 06 TD Adrar 2013

Exercice n°05 — S.EX : 95

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode du pivot partiel :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice n°06 — S.EX : 96

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode du pivot partiel composé :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice n°07 — S.EX : 97

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode du pivot total :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - 2y + z = 4 \\ 3x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

Exercice n°08 — S.EX : 98

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice n≗09 S.EX : 99

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - 2y + z = 4 \\ 3x + y + 4z = 7 \end{cases}$$

Exercice n≗10 S.EX : 100

Méthode de factorisation LU : a) Déterminer la factorisation LU de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Exercice n≗11 S.EX : 101

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de factorisation LU :

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = 17 \\ 3x + 7y + 13z = 32 \end{cases}$$

Exercice n≗12 S.EX : 102

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode factorisation LU :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 4y - z = 0 \\ -2x - y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice n≗13 S.EX : 103

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x - y + 4z = -4 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice n≗14 S.EX : 104

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss avec pivot partiel :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice n≗15 S.EX : 105

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de factorisation LU :

$$\begin{cases} 4x + y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 11 \\ -2x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice n≗16 S.EX : 106

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 3x + y + 6z = 1 \end{cases}$$

1- Mettre ce système sous la forme matricielle $Ax = b$

2- Calculer sa solution exacte par la méthode d'élimination de Gauss puis en déduire la valeur du déterminant de la matrice A.

Exercice n≗17 S.EX : 107

Considérer le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

1- Écrire l'équation matricielle $Ax = b$ puis calculer sa solution exacte à l'aide de la méthode de Gauss.

Exercice n°18

S.EX : 108

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de factorisation LU :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ 4x + 3y + 4z = 18 \end{cases}$$

Exercice n°19

S.EX : 109

Considérer le système linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

1- Mettre ce système sous la forme matricielle$Ax = b$.

2- Trouver la décomposition A = LU, puis en déduire la solution exacte de l'équation $Ax = b$ et la valeur du déterminant de la matrice A.

Exercice n°20

S.EX : 110

Résoudre avec une méthode de votre choix, détailler les étapes de votre méthode.

(a) $$\begin{cases} 4x_1 +2x_2 +x_3 = 4 \\ -x_1 +2x_2 = 2 \\ 2x_1 +x_2 +4x_3 = 9 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} -4x_1 +x_2 +x_3 +x_4 = 1 \\ x_1 -4x_2 +x_3 +x_4 = 1 \\ x_1 +x_2 -4x_3 +x_4 = 1 \\ x_1 +x_2 +x_3 -4x_4 = 1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 -2x_2 +3x_3 = 12 \\ -x_1 -3x_2 \; 2x_3 = 13 \\ 4x_1 +x_2 +2x_3 = 0 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 6x_1 -2x_2 +2x_3 +4x_4 = 16 \\ 12x_1 -8x_2 +6x_3 +10x_4 = 26 \\ 3x_1 -13x_2 +9x_3 +3x_4 = -19 \\ -6x_1 +4x_2 +1x_3 -18x_4 = -34 \end{cases}$$

Cours n° 12-13

** Méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires **

1. Introduction

Quand n est assez grand les méthodes directes ne sont plus envisageables vu le nombre très grand d'opérations à effectuer qui engendre la propagation des erreurs d'arrondi. On a alors recours aux méthodes itératives qui consistent à générer -à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$.

1.1. Principe des méthodes itératives

Écrivons d'abord la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est inversible, alors :

$$A \times X = b \Leftrightarrow (M - N) \times X = b \Leftrightarrow M \times X = N \times X + b.$$

Multiplions les deux côtés par M^{-1}, on aura :

$$X = M^{-1} \times N \times X + M^{-1} \times b$$

Le principe de toutes les méthodes itératives est le suivant :

Choisir un vecteur $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$;

Générer la suite $\left(X^{(k)}\right)$, $k \in N$ telle que $X^{(k+1)} = M^{-1} \times N \times X^{(k)} + M^{-1} \times b$

Si la suite $\left(X^{(k)}\right)$, $k \in N$ converge vers X^*, alors X^* est la solution du système.

1.2. Le critère d'arrêt

En général l'arrêt se fait sur l'erreur relative de deux itérés successifs $X^{(k)}$ et $X^{(k+1)}$:

$$\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right| \Big/ \left|X^{(k+1)}\right| \leq \varepsilon \qquad \text{(VII. 01)}$$

Où ε choisi petit. Erreur absolue est déterminée par :

$$\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right| \leq \varepsilon \qquad \text{(VII. 02)}$$

1.3. Les conditions de convergence

Si A est une matrice à diagonale dominante, alors la méthode itérative converge.

Exemple n≗06

Soient les deux systèmes linéaires $A_i.X = b$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Étudier la convergence

Solution

$$|a_{11}| = 1; \quad |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 2 = 4 \quad |a_{11}| < |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| = 1; \quad |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2 \quad |a_{22}| < |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| = 1; \quad |a_{31}| + |a_{32}| = 2 + 2 = 4 \quad |a_{33}| < |a_{31}| + |a_{32}|$$

$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ N'est pas satisfaisant, on peut rien dire.

$$|a_{11}| = 3; \quad |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 1 = 2 \quad |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| = 3; \quad |a_{21}| + |a_{23}| = 2 + 0 = 2 \quad |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| = 2; \quad |a_{31}| + |a_{32}| = 0 + 1 = 1 \quad |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Nous concluons que le processus itératif converge.

Rappel de la norme 1

Vecteur $V = (V_1; \dots; V_n) \in \mathbb{R}^n$	$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|V_i\|$
Matrice $M = (m_{ij}) \in (\mathbb{R})$	$\|M\|_i = \max\left(\sum_{j=1}^{n} \|m_{ij}\|\right)$; $\|M\|_j = \max\left(\sum_{i=1}^{n} \|m_{ij}\|\right)$; $\|M\|_k = \max\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|j_{ij}\|^2}\right)$.

Théorème 10 **Critère de convergence**

La suite $\left(X^{(k)}\right), k \in N$ définie par : $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \; quelconque \\ X^{(k+1)} = B \times X^{(k)} + c \end{cases}$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1- converge vers X^* si et si $\rho(B) < 1$

où $\rho(B) = \max\{|\lambda| / \lambda \; valeur \; propre \; de \; B\}$ le rayon spectral de B

2- $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle

2. Principales méthodes itératives

D'autres techniques sont appliques dans la méthode itérative, on décompose la matrice A : $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Où : D : la diagonale de A,
-E : la partie au-dessous de la diagonale de A,
-F : la partie au-dessus de la diagonale de A.

Pour cela il y trois techniques itératives :

03) Méthode de Jacobi : M = D, N = E+ F

04) Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E, N = F$

05) Méthode de relaxation : $M = \frac{1}{\omega} D - E, \;\; N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F, \qquad \omega \in \mathbb{R}^*$.

2.1. Méthode de Jacobi

Dans la méthode de Jacobi, on choisit : M = D, N = E+ F

$$A \times X = b \Leftrightarrow (D - E - F) \times X = b \Leftrightarrow D \times X = (E + F) \times X + b$$

$$X^{(k+1)} = D^{-1} \times (E + F) \times X^{(k)} + D^{-1} \times b \qquad \textbf{(VII. 03)}$$

$$X^{(k+1)} = J \times X^{(k)} + \beta \qquad \textbf{(VII. 04)}$$

Avec : $J = D^{-1} \times (E + F) \;\; et \;\; \beta = D^{-1} \times b$

2.1.1. Convergence

- La méthode Jacobi converge si la matrice itérative $J = D^{-1} \times (E + F)$ à une norme 1 inférieure à 1

Exemple n≗07

Soient le système linéaire $A_i . X = b$

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 2 \\ 0 & +x_2 & +2x_3 & = -4 \end{cases}$$

Étudier la convergence de la méthode Jacobi;

Solution

Étude de convergence

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \;\; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = D^{-1} \times (E + F) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etude de la convergence par la norme $\|J\|_i$

$$\|J\|_i = \max\left(\sum_{j=1}^{3} |j_{ij}|\right) = \max\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} + \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \max\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right) = 0.833 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|J\|_i$ est inférieure à 1, le processus itératif de Jacobi est convergent.
Étude de la convergence par la norme canonique $\|J\|_j$

$$\|J\|_j = \max\left(\sum_{i=1}^{3}|j_{ij}|\right) = \max\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right) = \max\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right) = 0.66 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|J\|_j$ est inférieure à 1, le processus itératif de Jacobi est convergent.
Étude de la convergence par la norme canonique $\|J\|_k$

$$\|J\|_k = \max\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|j_{ij}|^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{11}{12}} = 0.9574 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|J\|_k$ est inférieure à 1, le processus itératif de Jacobi est convergent.

2.1.2. Présentation d'algorithme

On va, dans ce qui suit, expliciter les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, et cela sur un système linéaire à trois équations (n = 3).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Les $(a_{ii}), i = 1,2,\ldots,n$ étant supposés non nuls ; tirons x_1, x_2 *et* x_3, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases}$$

La forme récurrente de la méthode de Jacobi pour un système à trois inconnus :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right)/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right)/a_{33} \end{cases}$$

La forme générale :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \times x_j^{(k)} \qquad \text{(VII. 05)}$$

Exemple n≗08
Trouvez la solution après six itérations. $X^{(0)}(0,0,0)$

Solution
Résolution du système

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 2 \\ 0 & +x_2 & +2x_3 & = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (1 - x_2 - x_3)/3 \\ x_2 = (2 - 2x_1)/3 \\ x_3 = (-4 - x_2)/2 \end{cases}$$

La forme récurrente :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{\left(1 - x_1^{(k)}\right)2}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \left(4 - x_2^{(k)}\right)/2 \end{cases} \qquad X^{(0)}(0,0,0)$$

k	x_1	x_2	x_3	$\max\left(\lvert X^{(k+1)} - X^{(k)}\rvert\right)$
0	0	0	0	-
1	0.333	0.667	-2	2

2	0.778	0.444	-2.333	0.444	
3	0.963	0.148	-2.222	0.296	
4	1.025	0.025	-2.074	0.148	
5	1.016	-0.016	-2.012	0.062	
6	1.01	-0.011	-1.992	0.021	
7	1.001	-0.006	-1.995	0.009	
8	1	-0.001	-1.997	0.006	
9	0.999	0	-2	0.003	
10	1	0.001	-2	$0.001 \leq \varepsilon$	Stop

2.2. Méthode de Gauss-Seidel

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on choisit : $M = D - E, N = F$

$$(D - E - F) \times X = B \Leftrightarrow (D - E) \times X = F \times X + b$$

$$X^{(k+1)} = (D - E)^{-1} \times F \times X^{(k)} + (D - E)^{-1} \times b \qquad \textbf{(VII. 06)}$$

$$X^{(k+1)} = G \times X^{(k)} + \beta \qquad \textbf{(VII. 07)}$$

Avec : $G = (D - E)^{-1} \times F \;\; et \;\; \beta = (D - E)^{-1}$

2.2.1. Convergence

La méthode Gauss-Seidel converge si la matrice itérative $G = (D - E)^{-1} \times F$ à une norme 1 inférieure à 1

Exemple n≗09

Prenons le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 2 \\ 0 & +x_2 & +2x_3 & = -4 \end{cases}$$

Étudier la convergence de la méthode de Gauss, en étudiant :

1- La norme 1

2- Le rayon spectral

Solution

1- La norme 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \;\; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \;\; F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = (D - E)^{-1} \times F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|D - E| = 18$$

$$X_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad X_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad X_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$X_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad X_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad X_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$X_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad X_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad X_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$adj(D - E) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(D - E)^{-1} = \frac{1}{|D - E|} \times \left(adj(D - E)\right)^t = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/9 & 1/3 & 0 \\ 1/9 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/9 & 1/3 & 0 \\ 1/9 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & -1/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Étude de la convergence par la norme canonique $\|G\|_i$

$$\|G\|_i = \max\left(\sum_{j=1}^{3}|g_{ij}|\right) = \max\left(0; \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}; \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right) = \max\left(0; \frac{6}{9}; \frac{6}{9}\right) = 0.66 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|G\|_i$ est inférieure à 1, le processus itératif de gauss est convergent.

Étude de la convergence par la norme canonique $\|G\|_j$

$$\|G\|_j = \max\left(\sum_{i=1}^{3}|g_{ij}|\right) = \max\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{2}{9}\right) = 0.66 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|G\|_j$ est inférieure à 1, le processus itératif de Gauss est convergent.

Étude de la convergence par la norme canonique $\|G\|_k$

$$\|G\|_k = \max\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|g_{ij}|^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{9}+\frac{8}{81}+\frac{2}{81}} = 0.5879 < 1$$

Puisque la norme canonique $\|G\|_k$ est inférieure à 1, le processus itératif de Gauss est convergent.

2- Le rayon spectral

$$|G-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/9-\lambda & 2/9 \\ 0 & -1/9 & -1/9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\left(\frac{2}{9}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{9}-\lambda\right)+\frac{2}{81}\right) = 0$$

$$-\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{9}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$\rho(B) = 1/9 = 0.11 < 1$ donc la méthode de gauss converge

2.2.2. Présentation d'algorithme

La forme récurrente de la méthode de Gauss

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right)/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right)/a_{33} \end{cases}$$

La forme générale :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)} \qquad \textbf{(VII. 08)}$$

Exemple n≗10

Reprendre d'exemple précédent avec la méthode de Gauss

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La forme récurrente :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_2^{(k+1)} = \left(2 - 2x_1^{(k+1)}\right)/3 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-4 - x_2^{(k+1)}\right)/2 \end{cases} \qquad X^{(0)}(0,0,0)$$

k	x_1	x_2	x_3	$\max\left(\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|\right)$
0	0	0	0	-
1	0.333	0.444	-2.222	2.222
2	0.926	0.049	-2.025	0.593
3	0.992	0.005	-2.003	0.066
4	0.999	0.001	-2	0.007
5	1	0	-2	$0.001 \leq \varepsilon$

• Stop

2.3. Méthode de relaxation

Dans la méthode relaxation, on choisit : $M = \frac{1}{\omega} D - E,\ N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F, \quad \omega \in \mathbb{R}^*$.

On a :

$A \times x = b \Longrightarrow \omega(D - E - F) \times x = b \times \omega$

$\Leftrightarrow -\omega E x + Dx = \omega(F - D)x + \omega b + Dx$

$\Leftrightarrow (D - \omega E)x = (\omega F + (1 - \omega)D)x + \omega b$

$\Leftrightarrow x = (D - \omega E)^{-1}(\omega F + (1 - \omega)D)x + \omega(D - \omega E)^{-1} b$

$x^{(k+1)} = (D - \omega E)^{-1}(\omega F + (1 - \omega)D)x^{(k)} + \omega(D - \omega E)^{-1} b$

La forme générale :

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \qquad \textbf{(VII. 09)}$$

La convergence ne se produit habituellement que pour 0<w<2.

Note :

Si w < 1, on parle de sous relaxation.

Si w = 1, c'est la méthode de Gauss Seidel.

Si w > 1, on parle de sur relaxation

2.3.1. Convergence

Théorème 11 **Convergence**

On suppose que la matrice A symétrique définie positive.

La méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$

Exemple n≗11

Soient les deux systèmes linéaires $A.x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

En partant $x^{(0)} = [0, 0, 0]$, déterminer les six premières itérés de la méthode de relaxation

Solution

01-Vérification que A est symétrique

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A$ alors la matrice est symétrique

02- Vérification que A est définie positive

Le polynôme caractéristique de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = |A-\lambda I| = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)+\lambda-2+\lambda-2$$
$$= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)+2(\lambda-2)$$
$$= (\lambda-2)\big((3-\lambda)(\lambda-4)+2\big)$$
$$= (\lambda-2)(-\lambda^2+7\lambda-10)$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-2)$$

$$P_A(\lambda)=0 \Longrightarrow \begin{cases}\lambda = 2 > 0 \\ \lambda = 5 > 0\end{cases}$$

D'où le spectre de A

$$S_p(A) = \{2, 5\}$$

Les deux valeurs propres sont positives alors A est définie positive

Alors $\forall \omega \in]0,2[$ | la méthode de relaxation converge

03- Application

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(-1+x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_2^{(k+1)} = \left(7+x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}\right)/3 \qquad \textit{Méthode de Gauss } \omega = 1 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-7-x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}\right)/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\left(-1+x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\left(7+x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\left(-7-x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}\right)/3 \end{cases}$$

On prend $\omega = 1.25$ on aura

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.75x_1^{(k)} + 1.25x_2^{(k)}/3 - 1.25x_3^{(k)}/3 - 1.25/3 \\ x_2^{(k+1)} = -0.75x_2^{(k)} + 1.25x_1^{(k+1)}/3 + 1.25x_3^{(k)}/3 + 8.75/3 \qquad x^{(0)}(0,0,0) \\ x_3^{(k+1)} = -0.75x_3^{(k)} - 1.25x_1^{(k+1)}/3 + 1.25x_2^{(k+1)}/3 - 8.75/3 \end{cases}$$

k	x_1	x_2	x_3	$\max\left(\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right|\right)$
0	0	0	0	-
1	-0.42	2.74	-1.6	2.74
2	1.5	2.19	-2.23	1.91
3	1.05	1.88	-2.01	0.45
4	0.94	2	-1.97	0.12
5	1	2.01	-2	0.06
6	1.01	2	-2	0.01

Stop

3. Exercices

Exercice n°01 S.EX : 111

Soit le système : $\begin{cases} 4x_1 & +0{,}24x_2 & -0{,}08x_3 & = & 8 \\ 0{,}09x_1 & +3x_2 & -0{,}15x_3 & = & 9 \\ 0{,}04x_1 & -0{,}8x_2 & +4x_3 & = & 20 \end{cases}$

1- Montrer que le processus itératif $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ pour ce système est convergent.

2- En utilisant la méthode de Jacobi quel est le nombre d'itérations nécessaire pour estimer la solution de ce système avec une précision de deux décimales exactes, en partant du vecteur initial $X^{(0)} = (2,3,5)^T$

Ex. 01 TD 07 Adrar 2012

Université TAHRI Mohammed Béchar*Faculté de Technologies*Département de Génie Électrique
جامعة طاهري محمد بشار * كلية التكنولوجيا * قسم الهندسة الكهربائية

Exercice n≗02

S.EX : 112

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - 4y + z = -7 \\ 2x + 3y - 7z = 15 \end{cases}$$

1- Utilisez la méthode de Jacobi pour trouver la solution approchée du système ;

2- Utilisez la méthode de Gauss-Seidel pour trouver la solution approchée du système ;

3- Comparez le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la tolérance pour chacune des méthodes.

Nous fixons une tolérance de 0,01 pour les deux méthodes.

Exercice n≗03

S.EX : 113

Soit le système: $\begin{cases} 1{,}02x_1 & -0{,}05x_2 & -0{,}10x_3 & = & 0{,}795 \\ -0{,}11x_1 & +1{,}03x_2 & -0{,}05x_3 & = & 0{,}849 \\ -0{,}11x_1 & -0{,}12x_2 & +1{,}04x_3 & = & 1{,}398 \end{cases}$

1- Monter que l'algorithme de Jacobi associé à ce système converge

2- Combien d'itération suffirait-t-il d'effectuer pour obtenir une solution approchée avec une précision de 10^{-4}

3- Appliquer le processus de la simple itération (méthode de Jacobi) jusqu'à atteindre la précision $\varepsilon = 10^{-4}$

Ex. 02 TD 07 Adrar 2012

Exercice n≗04

S.EX : 114

Soit le système $A.x = b$: $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & 2 \\ 1 & -3 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 41 \end{pmatrix}$

1- Utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour trouver la solution du système donné avec une précision de 10^{-2}. On donne l'approximation initiale de la solution $X^{(0)} = (1{,}9; -0{,}8; 2{,}9)^T$

Ex. 03 TD 07 Adrar 2012

Exercice n≗05

S.EX : 115

Soit le système $A.x = b$ où $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1- Montrer, que la méthode de Jacobi correspondante au système converge quel que soit $X^{(0)}$.

2- Donner les équations d'itération de la méthode de Jacobi

3- Reprendre les deux premières questions avec la méthode de Gauss-Seidel

4- Calculer les trois premières itérés obtenus par la méthode de Gauss-Seidel en partant de $X^{(0)} = (0; 0; 0)^T$

5- Donner le nombre suffisant d'itérations pour que la méthode de Gauss-Seidel donner une solution approchée à 10^{-3}près.

Ex. 01 TD 07 Adrar 2012

Exercice n≗06

S.EX : 116

On considère la matrice A et le vecteur b définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/3 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

1- Écrire le processus itératif de Jacobi correspondant au système $AX = b$.

2- Étudier la convergence de cette méthode.

3- Soit $X^{(0)} = (1/2\,, 0, 1)^T$, calculer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$. Donner l'erreur absolue commise dans chacun des cas.

Exercice n≗07

S.EX : 117

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de la méthode de Jacobi :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

Exercice n≗08 S.EX : 118

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de la méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Exercice n≗09 S.EX : 119

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de la méthode de relaxation :

$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 10 \\ 3x + 4y + z = 11 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice n≗10 S.EX : 120

On considère le système linéaire $A.x = b$, où la matrice A est définie de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et\ \beta\ est\ un\ paramétré\ réel.$$

1- Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre $\beta \in R$ pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes. (A doit être une matrice à diagonale dominante stricte par ligne.)

2- Calculer les matrices d'itération J et G des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, respectivement. Établir pour quelles valeurs de β les méthodes sont convergentes et indiquer quel est le rapport entre les vitesses de convergence.

Bibliographie

[1] M. Abdelbaki. Méthodes Numériques [Online]. Available: https://fac.umc.edu.dz/fstech/cours/G%20Transport/Cours-meth-num%20GT.pdf

[2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique: Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[3] O. Bachmann, Exercices avec solutions vol. 5: PPUR presses polytechniques, 1986.

[4] G. CONNAN. Une année de MAPLE et SCILAB en MP [Online]. Available: https://www.scilab.org/sites/default/files/PolyMapleMPstar_12_13.pdf

[5] E. G. Da Silva, "Méthodes et analyse numériques," 2007.

[6] J.-P. Dedieu, Points fixes, zéros et la méthode de Newton vol. 54: Springer, 2006 DOI: 10.1007/3-540-37660-7.

[7] J.-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles: EDP sciences Les Ulis, 2006.

[8] A. DKALX, "PolynBmes orthogonaux formels-applications. vl "Lecture Notes m Mathematics." Vol. 974," ed: Springer-Verlag. Heidelberg, 1983.

[9] J. Dupuis, "Recueil de problèmes numériques et d'exercices de calcul: a l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et a l'École Impériale Militaire de Saint-Cyr: Vol. 1: Problèmes sur l'arithmétique, l'algèbre, la géometrie et le trigonométrie," ed: Dezobry et E. Magdeleine Paris, 1851.

[10] M. Elkadi and B. Mourrain, Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux vol. 59: Springer, 2007 DOI: 10.1007/978-3-540-71647-1.

[11] D. Euvrard, "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles," collection Masson, pp. 58-61, 1994.

[12] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs: Presses inter Polytechnique, 2008.

[13] J.-P. Grivet, Méthodes numériques appliquées: Pour le scientifique et l'ingénieur: EDP sciences, 2020 DOI: 978-2-7598-0990-5.c001.

[14] W. Han and K. E. Atkinson, Theoretical numerical analysis: A functional analysis framework: Springer, 2009 DOI: 10.1007/978-1-4419-0458-4.

[15] F. Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques: Springer Science & Business Media, 2005.

[16] I. Lahouari, "Calcul et Programmation," 2020.

[17] M. Lakrib, "Recueil d'Exercices Résolus d'Analyse Numérique."

[18] P. Lascaux and R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur vol. 2: Masson Paris, 1986.

[19] K. MEBARKI, "Analyse Numérique."

[20] B. Nabila, "Recueil d'exercices corrigés sur les méthodes numériques," 2021.

[21] N. Puech, Maple-Règles et fonctions essentielles: Springer Science & Business Media, 2009 DOI: 10.1007/978-2-287-48607-4.

[22] L. Pujo-Menjouet. Introduction à l'analyse numérique [Online]. Available: http://math.univ-lyon1.fr/~pujo/introananum-2018.pdf

[23] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Méthodes Numériques: Algorithmes, analyse et applications: Springer Science & Business Media, 2008 DOI: 10.1007/978-88-470-0496-2.

[24] P. Rabier and J.-M. Thomas, Exercices d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles: Elsevier Masson, 1985.

[25] M. SAAD. ANALYSE NUMERIQUE [Online]. Available: https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~saad/coursanume.pdf

Biographie

Nom et Prénom : ABDERRAHMANI Abdesselam.
عبدالرحماني عبدالسلام

Email : abderrahmani_a@yahoo.fr ;
abderrahmania@gmail.com ;
abderrahmani.abdessalam@univ-bechar.dz .

Site : https://sites.google.com/site/lmdelectrotechnique/home

ORCID : 0000-0002-8690-2763

SCOPUS : 35812026400

ResearcherID : AAG-6152-2019

ABDERRAHMANI A. : est titulaire d'un doctorat de l'Université de Béchar, portant sur le contrôle et la commande des systèmes "FACTS". Il a travaillé pendant onze ans au sein d'une société de distribution électrique, dont six ans en tant que chef de projet SCADA. De 2011 à 2016, il a été professeur à l'Université d'Adrar. En 2016, il a rejoint l'Université de Béchar. Ses recherches scientifiques portent sur le contrôle et la commande des systèmes électriques, l'étude de la stabilité dynamique des réseaux d'alimentation électrique, ainsi que sur le fonctionnement et la sécurité des systèmes industriels. Actuellement, il travaille en tant qu'enseignant à l'université.