الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة طاهري محمد – بشار-

كلية العلوم الدقيقة – قسم علوم المادة -

محاضرات وتمارين في الفيزياء -1 -

مكانيك النقطة المادية

موجهة لطلبة السنة الأولى نظام ل-م-د علوم المادة

من إعداد :

- مراح بن يوسف (أستاذ محاضر قسم – أ -)

السنة الجامعية 2021/ 2022

الفهرس

مقدمة:

مقياس النقطة المادية موجه بالخصوص لطلبة السنة أولى تخصص علوم المادة و العلوم و التكنولوجيا يشمل دروس البرنامج الدراسي مرفق مع أمثلة وتمارين مصححة.

هذا المطبوع يبسط المادة العلمية بإيجاز شامل لكل التعاريف والقوانين والمفاهيم الفيزيائية ثم يورد تطبيقات شاملة على كل مفهوم. من موضوعات هذا المطبوع :

I - تذاكر رياضية

II - تذكير بالحساب الشعاعي

III - جمل الإحداثيات المشهورة

IV - حركة النقطة المادية

V - تطبيقات

VI - تحريك النقطـة المادية

V-II - الحركة النسبية

VIII- العمل والطاق

I. تذاكر رياضية　　Rappels mathématiques

I -A- التحليل ألبعدي　Analyse Dimensionnelle

1 - الوحدات

1- أ - الوحدات الأساسية : (Unités de base)

هناك العديد من جمل الوحدات لكن الأكثر شيوعا واستخداما هي جملة الوحدات الدولية أو ما يعرف اختصارا بـ SI والتي تحتوي على سبعة وحدات أساسية توافق سبع مقادير فيزيائية رئيسة نلخصها في الجدول رقم : (1.I) .

المقدار الأساسي Grandeur de base	اسم الوحدة Nom de l'unité	رمزها Symbole	البعد Dimension
الكتلة Masse	Kilogramme الكيلوغرام	Kg	M
الطول Longueur	Mètre المتر	m	L
الزمن Temps	Seconde الثانية	s	T
شدة التيار الكهربائي Intensité du courant électrique	Ampère الامبير	A	I
كمية المادة Quantité de la matière	Mole مول	mol	N
درجة الحرارة المطلقة Température Absolue	Kelvin الكلفن	K	
الشدة الضوئية Intensité lumineuse	Candela الكاندلا	Cd	J

الجدول رقم : (1.I)

الأربع وحدات الأولى تشكل ما يعرف بالنظام الدولي للوحدات (MKSA) (المتر، الكيلوغرام،الثانية والأمبير) كما توجد أنظمة أخرى لها استخداماتها في الفيزياء نذكر منها :

- النظام CGS (السنتيمتر ، الغرام والثانية) .
- النظام MTS (المتر، الطن والثانية)

1- ب - **الوحدات المشتقة : (Unités dérivées)**

تشتق وحدات المقادير الفيزيائية (عدا السبعة المذكورة أعلاه) من المقادير السبعة السابقة الذكر .

مثال 1.I : **الجدول رقم : (2.I)**

المقدار المقاس Quantité mesurée	الوحدة من القانون الفيزيائي	الرمز
المساحة Surface	الطول×الطول	m^2
الحجم Volume	الطول×الطول ×الطول	m^3
السرعة الخطية Vitesse linéaire	الطول / الزمن	m/s
الذبذبة Fréquence	1 / الزمن	Hz
الكثافة Densité	الكتلة / الحجم	kg/m^3
التسارع Accélération	السرعة / الزمن	m/s^2
القوة Force	الكتلة×التسارع	N
الضغط Pression	القوة / المساحة	N/m^2
التدفق Débit	الحجم / الزمن	m^3/s

الجدول رقم : (2.I)

1- ج - **الوحدات الثانوية** : **(Unités secondaires)**

الى جانب الوحدات الأساسية توجد وحدات ثانوية لبعض المقادير . مثلا: لتر ، الدرجة المئوية ، الحريرة ....

1- د - **الوحدات الإضافية** : **(Unités supplémentaires)**

تضاف إلى هذه الوحدات وحدتين مكملتين تستخدمان لقياس الزوايا المستوية و الزوايا المجسمة .

الجدول رقم : (3.I)

المقدار (Grandeur)	**الوحدة (Unité)**	**الرمز (Symbole)**
الزاوية المستوية Angle plane	راديان Radian	rad
الزاوية المجسمة Angle solide	ستراديان Stéradian	sr

الجدول رقم : (3.I)

ملاحظة: الزاوية المجسمة هي مساحة السطح العمودي على نصف قطر الكرة مقسوما على مربع نصف القطر.

1- ه - **المضاعفات و الأجزاء** : (**Multiples et sous multiples**)

- **الأجزاء : الجدول رقم : (4.I)**

المعامل	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
السابقة	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto
الرمز	d	c	m	µ	n	p	f	a

الجدول رقم : (4.I)

- **المضاعفات : الجدول رقم : (5.I)**

المعامل	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
السابقة	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
الرمز	da	h	k	M	G	T	P	E

الجدول رقم : (5.I)

2- معادلة الأبعاد : (Equation aux dimensions)

2- أ- **تعريف**

تتميز المقادير الواصفة للظاهرة الفيزيائية بـالبعد، (Dimension) فبعد مقدار يشرح الطبيعة الفيزيائية لهذا المقدار.

معادلة الأبعاد (هي التعبير الرمزي عن العلاقات بين المقادير الفيزيائية المختلفة. فالبعد أو معادلة الأبعاد للمقدار الفيزيائي تكتب على الشكل $[G]$.

ولفهمها نتبع الملاحظات التالية:

- عدم طرح نظام الوحدات عند كتابة معادلة أبعاد المقدار.
- بعض الدوال الأسية و اللوغاريتمية والمثلثية والثوابت و ما داخل هذه الدوال يساوي 1 .

$$[X]=1 \quad , \quad [\alpha]=1 \; , \; [\mathbf{sin}\alpha]=1 \; , \; [e^x]=1 \; ,[LogX]=1, \; [\pi]=1$$

- تكون المعادلة الفيزيائية متجانسة إذا كان لطرفيها نفس البعد.
- كل المقادير الفيزيائية مشتقة في الأصل من سبعة مقادير أساسية، سنعطي لكل منها رمزا كبعد خاص له، و باقي أبعاد المقادير الأخرى تعطى بدلالتها: **الجدول رقم : (6.I)**

المقدار الأساسي	الرمز الخاص للبعد
الطول	[الطول] L
الكتلة	[الكتلة] M
الزمن	[الزمن] T
شدة التيار	[شدة التيار] I
درجة الحرارة	[درجة الحرارة] θ
كمية المادة	[كمية المادة] N
الشدة الضوئية	[الشدة الضوئية] J

الجدول رقم : (6.I)

- بعد جداء مقدارين هو جداء بعديهما:

$$\boxed{[AB]=[A]+[B]}........(1.I)$$

- **مثال 2.I :** بعد السرعة v :

$$v=\frac{t}{x}\Leftrightarrow[v]=[t][x]^{-1}=TL^{-1}$$

- بعد المقدار A^n هو :

$$\boxed{[A]^n=[A^n]}........(2.I)$$

حيث n عدد بدون بعد ولا وحدة.

- **مثال 3.I :** بعد السطح :

$$\boxed{S=l^2\Rightarrow[S]=[l^2]=[l]^2=L^2}........(3.I)$$

- معادلة أبعاد أي مقدار فيزيائي يمكن وضعها على الشكل التالي:

$$\boxed{[G]=L^a.M^b.T^c.I^d.J^e.\theta^f.N^g}........(4.I)$$

ملاحظة: في الميكانيكا نحتاج فقط إلى ثلاثة مقادير فيزيائية هي الطول، الكتلة والزمن.

2- ب- **استعمال التحليل ألبعدي**

2 - **ب-1- التحقق من تجانس المعادلات :**

عند وضع العبارات الرياضية (القوانين)، يسمح لنا التحليل البعدي بالتحقق من تجانسها وتصحيح التناقضات فيها إذا وجدت فأية ، علاقة غير متجانسة بين المقادير الفيزيائية هي علاقة خاطئة .

مثال 4.I :

التحقق من تجانس عبارة دور النواس البسيط: $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$ حيث l هو طول النواس و g هي الجاذبية الأرضية.

كي تكون المعادلة متجانسة يجب أن يكون بُعد الطرف الأول للمعادلة يساوي بعد الطرف الثاني.

بعد الطرف الأول: $\left[T_0\right]$

بعد الطرف الثاني: $\left[2\pi\sqrt{l/g}\right]$

$$T_0=\left[2\pi\sqrt{l/g}\right]=[l]^{1/2}[g]^{-1/2}$$

لدينا: $[l]=L$ و $[g]=LT^{-2}$ فيكون : $[l]^{1/2}[g]^{-1/2}=L^{1/2}L^{-1/2}\left(T^{-2}\right)^{-1/2}=T$

ومنه بُعد الطرف الأول يساوي بُعد الطرف الثاني أي أن المعادلة متجانسة .

ملاحظة : معادلة متجانسة $\Longleftarrow$ فليست بالضرورة صحيحة .

2 – **ب - 2 - إيجاد شكل علاقة المقدار** $G=f\left(A,B,C........\right)$

نفرض أن المقدار الفيزيائي يعبر عنه بدلالة مقادير فيزيائية أخرى A و B و C ، من أجل تحديد الدالة $G=f\left(A,B,C........\right)$

- نبحث عن أبعاد المقادير الفيزيائية A و B و. C ....
- ثم نبحث عن المعاملات α و β و γ ...بمقارنة بعد طرفي المعادلة التالية:

$$\boxed{G=K.A^{\alpha}.B^{\beta}.C^{\gamma}}........(5.I)$$

حيث K ثابت بدون وحدة يتعين بطريقة أخرى.

مثال I-5:

لنحاول الوصول إلى علاقة دور النواس البسيط في المثال السابق، الذي يتعلق بطول النواس l والجاذبية الأرضية g.سنبحث عن علاقة من الشكل التالي: $T_0=f\left(l,g\right)$

نضع T_0 على الشكل التالي: $T_0=Kl^{\alpha}g^{\beta}$

أبعاد المقادير المتعلقة بدور النواس. $:\begin{cases}[T]_0=T\\ [l]=L,[g]=LT^{-2}\end{cases}$ ....(1)

البحث عن α و β : $\left[kl^{\alpha}g^{\beta}\right]=[l]^{\alpha}[g]^{\beta}=L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$ ....(2)

نقارن بين المعادلة (1) (2) نجد $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -2\beta=1\end{cases}\Rightarrow=-\beta=\dfrac{1}{2}$

ومنه : $T_0=kl^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}=k\sqrt{l/g}$ أما الثابت k فيعين بالتجربة، ولقد وجد مساويا 2π .

تمارين : من (1.I) إلى (2.I)

التمرين 1.I :

1- أعط معادلات الأبعاد للمقادير التالية:

الشحنة الكهربائية Q - الكثافة السطحية σ - الحقل الكهربائي $\vec{E}$ - الكمون الكهربائي V - المقاومة الكهربائية R - السعة C - القوة - الضغط P - الثابت k حيث $F=kx$ - الحث الذاتي L.

2- تحقق من أن : RC , $\frac{L}{R}$, $(LC)^{1/2}$ متجانسة مع بعضها البعض.

التمرين 2.I :

يعطى تردد قطرة ماء بالشكل الموالي : $f = kR^{\alpha}\rho^{\beta}\tau^{\gamma}$

حيث k ثابت بدون وحدة ، R نصف قطر القطرة، ρ كتلتها الحجمية و τ التوتر السطحي (وهو عبارة عن قوة على وحدة طول) .

أوجد المقادير الحقيقية γ, β, α باستخدام التحليل ألبعدي ؟ ثم اكتب عبارة التردد f ؟

حلول التمارين من (1.I) إلى (2.I)

حل التمرين 1.I :

معادلات الأبعاد للمقادير:

الشحنة الكهربائية Q:
$$Q=I.t \Rightarrow [Q]=[I][t]=IT$$

الكثافة السطحية σ :
$$\sigma=\frac{Q}{S} \Rightarrow [\sigma]=ITL^{-2}$$

الحقل الكهربائي $\vec{E}$:
$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{Q} \Rightarrow [E]=\frac{[F]}{[Q]} \Rightarrow [E]=MLT^{-3}I^{-1}$$

الكمون الكهربائي V :
$$\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$\Rightarrow [V]=[E][x] \Rightarrow [V]=ML^2T^{-3}I^{-1}$$

المقاومة الكهربائيةR :
$$R=\frac{V}{I} \Rightarrow [R]=[V]/[I]=ML^2T^{-3}I^{-2}$$

السعة C :
$$C=\frac{Q}{V} \Rightarrow [C]=\frac{[Q]}{[V]}=M^{-1}L^{-2}T^4I^2$$

القوة $\vec{F}$:
$$\vec{F}=m.\vec{a} \qquad [F]=[m].[a]=MLT^{-2}$$

الضغط P :
$$P=\frac{F}{S} \qquad [P]=ML^{-1}T^{-2}$$

الثابت k حيث $F=kx$:
$$F=Kx \Rightarrow [K]=\frac{[F]}{[x]}=MT^{-2}$$

الحث الذاتL :
$$e=-L\frac{di}{dt} \Rightarrow [L]=\frac{[e][t]}{[i]} \Rightarrow [L]=ML^2T^{-2}I^{-2}$$

2 - التحقق من تجانس المقادير

$$[R][C]=ML^2T^{-3}I^{-2}M^{-1}L^{-2}T^{-3}I^{-1}$$
$$\frac{[L]}{[R]}=\frac{ML^2T^{-2}I^{-2}}{ML^2T^{-3}I^{-2}}=T$$
$$[L]^{1/2}[C]^{1/2}=\left(ML^2T^{-2}I^{-2}\right)^{1/2}\left(ML^{-1}T^4I^2\right)^{1/2}=T$$

نلاحظ أن الكميات $RC, \frac{L}{R}, (LC)^{1/2}$ متجانسة مع بعضها البعض.

حل التمرين 2.I :

- التردد هو مقلوب الدور اذن $[f]=T^{-1}$
- من جهة أخرى وبالإنتقال الى المعادلة البعدية للتردد نجد

$$[f]=[K][R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\tau]^{\gamma}$$

$$[k]=1;[R]=L$$

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow\rho=[m][V]^{-1}=M.L^{-3}$$

$$\tau=\frac{F}{l}\Rightarrow\tau=[F][l]^{-1}=MLT^{-2}L^{-1}=MT^{-2}$$

- بالتعويض في المعادلة البعدية نجد:

$$[f]=[K][R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\tau]^{\gamma}=L^{\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}M^{\gamma}T^{-2\gamma}=L^{(\alpha-3\beta)}M^{(\beta+\gamma)}T^{-2\gamma}=T^{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\alpha-3\beta)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1) & \Rightarrow\alpha=3\beta\\(\beta+\gamma)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2) & \Rightarrow\beta=-\gamma\\-2\gamma=-1\ldots\ldots\ldots\ldots(3) & \Rightarrow\gamma=\frac{1}{2}\end{cases}$$ -

$$\gamma=\frac{1}{2}\quad;\quad\beta=-\frac{1}{2}\quad;\quad\alpha=-\frac{3}{2}$$

ومنه تعطى عبارة التردد ب :

$$f=K\sqrt{\frac{\tau}{R^{3}\rho}}$$

I -B/ حساب الارتيابات Calcul des incertitudes

1 - **المقدار الفيزيائي (Grandeur physique)** :

هي الصفة الفيزيائية القابلة للقياس تسمى مقدار فيزيائي مثلا : "اللون" لا يعني مقدار فيزيائي لكن "شدة اللون" أو طول موجة اللون" فهي مقادير فيزيائية لأنها صفات يمكن قياسها.

كل عملية فيزيائية تعرف باستخدام طريقتين هما:

- التعريف من خلال طريقة قياسـها.
- التعريف من خلال طريقة حسابها.

مثال 6.I:

- نستخدم المسطرة لقياس المسافات.
- نستخدم ساعة الإيقاف « Chronomètre » لقياس الوقت بين حدثين.

2 - نوعا القياس الفيزيائي وطبيعة الخطأ

يمكننا التمييز بين نوعين من القياس :

2 - أ - القياس المباشر: وهو يتم مباشرة باستخدام أجهزة القياس كقياس طول باستخدام مسطرة، أو قياس زمن باستخدام كرونومتر..

2 - ب - القياس غير المباشر: و يتم بالحساب من عدة مقادير فيزيائية، كحساب المساحة و الحجم بعد قياس الأبعاد، و حساب الطاقة الحركية بعد قياس الكتلة وحساب السرعة.

تقسم الأخطاء إلى نوعين:

2 - ج - الأخطاء النظامية: تتمثل في الأخطاء الناتجة عن تشغيل أجهزة القياس أو تدريجاتها .

2 - د - الأخطاء العرضية : هي تعود إلى نقص دقة حواس المجرب .

3 - الخطأ في القياس: نجري قياسا ما ولتكن X_m القيمة المقاسة و X_R القيمة الحقيقية.

3- أ - الخطأ المطلق: هو الفرق بين القيمة المقاسة والقيمة الحقيقية وهو مقدار جبري يمكن أن يكون موجبا أو سالبا.

$$\boxed{\delta X = X_m - X_R} \quad ....(6.I)$$

3 - ب - الخطأ النسبي: هو النسبة بين الخطأ المطلق و القيمة المقاسة

$$\boxed{\frac{\delta X}{X_m}} \quad ....(7.I)$$

ملاحظة: يتعذر معرفة الخطأ المطلق والخطأ النسبي لأنه لا يمكن معرفة القيمة الحقيقة للمقدار المقاس، لذلك نلجأ إلى مفهوم الارتياب.

4 - الارتياب في القياس

4 - أ- **الارتياب المطلق:** الارتياب المطلق للمقدار X نرمز له ΔX هو الحد الأعلى للقيمة المطلقة للخطأ .

$|\delta X| \leq \Delta X$ وهو عدد موجب يأخذ وحدة المقدار X. نعبر عن نتيجة القياس عندئذ كما يلي :

$$\boxed{X=(X_m \pm \Delta X)[u]}........(8.I)$$

حيث : X : القيمة الحقيقية X_m : القيمة التقريبية

ΔX : الارتياب المطلق u :الوحدة المناسبة

4 - ب- **الارتياب النسبي:** وهو النسبة بين الارتياب المطلق والقيمة المقاسة

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X_m}}........(9.I)$$

وهو عدد حسابي بدون وحدة، يعطى أيضا على شكل نسبة مئوية. ويستعمل لتمييز دقة القياس.

5/ الطرق الرياضية لحساب الارتياب

5 - أ- **حالة القياس المباشر:** نجري قياسات متكررة للمقدار X. يحدد الارتياب المطلق ΔX بأكبر فرق بالقيمة المطلقة بين القيمة المتوسطة X_{moy} والقيم المقاسة X_i أي :

$$\boxed{\Delta X=\max|X_{moy}-X_i|}........(10.I)$$

تحسب X_{moy} كما يلي:

$$\boxed{X_{moy}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} X_i}{n}}........(11.I)$$

مثال 7.I: قمنا بقياس طول قطعة خشبية عدة مرات وسجلنا النتائج التالية بوحدة (cm) :

$X(cm)$	20.0	19.9	20.1	20.2	20.0

- نريد حساب الارتياب المطلق و النسبي على المقدار X.

الجواب :

- حساب الارتياب المطلق: نبدأ بحساب القيمة الوسطى:

$$X_{moy}=\frac{\sum_{i=1}^{i=5}X_i}{5}=\frac{20.0+19.9+20.1+20.2+20.0}{5}=20.04cm$$

$$\Delta x=\left|X_{max}-X_{moy}\right|=|20.2-20.04|=0.16cm$$

$$\Delta x=\left|X_{moy}-X_{min}\right|=|20.04-19.9|=0.14cm$$

إذن نأخذ أكبر فرق هو يمثل الارتياب المطلق ونكتب: $\Delta x=0.16cm$

- نكتب القياس على الشكل التالي: $X=(20.04\pm0.16)cm$

- نحسب الارتياب النسبي: $\frac{\Delta x}{X_{moy}}=\frac{0.16}{20.04}=0.0079$

5 - ب- **حالة القياس غير المباشر:** إذا لم نتمكن من قياس مقدار فيزيائي مباشرة لأسباب ما، لـكن يمكن استنتاجه من علاقة رياضية، فإن الارتياب المطلق يحدد كالتالي:

- **طريقة التفاضل التام**

ليكن المقدار X مقاس بطريقة غير مباشرة عن طريق قياس المقادير x, y, z بطريقة مباشرة، حيث:

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ الارتيابات المطلقة للمقادير السابقة على الترتيب.

أ- نريد حساب الارتياب المطلق والنسبي للمقدار X حيث: $X = f(x, y, z)$

يكتب التفاضل التام للمقدار X كما يلي:

$$\boxed{dX=\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy+\frac{\partial X}{\partial z}dz}..........(12.I)$$

ب- لحساب الارتياب المطلق نأخذ القيمة المطلقة لمعاملات الأخطاء، ونحول d إلى Δ ي

المعادلة السابقة:

$$\boxed{\Delta X=\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial X}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial X}{\partial z}\right|\Delta z}..........(13.I)$$

6 - الارتياب النسبي:

- **طريقة التفاضل أللوغاريتمي**

- نأخذ الدالة السابقة نفسها $X = f(x, y, z)$

- ندخل اللوغاريتم على طرفيها ثم نقوم بمفاضلتها.
- نقوم بتحويل رمز التفاضل إلى رمز الارتياب ونعتبر جميع الحدود الجبرية موجبة.
- نحصل في الأخير على عبارة الارتياب النسبي التي يمكن أن نستنتج منها الارتياب المطلق.

مثال 8.I: أحسب بطريقة التفاضل التام و التفاضل أللوغاريتمي الارتياب النسبي للمقدار X حيث:

$$\mathrm{X}(a,b,c)=\frac{a}{b-c}$$

الإجابة:

- **طريقة التفاضل التام:** $$d\mathrm{X}=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a}da+\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial b}db+\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial c}dc$$

لدينا : $$\frac{\partial X}{\partial c}=\frac{a}{(b-c)^2}\quad , \quad \frac{\partial X}{\partial b}=\frac{-a}{(b-c)^2}\quad , \quad \frac{\partial X}{\partial a}=\frac{1}{b-c}$$

إذن $$dX=\left(\frac{1}{b-c}\right)da+\left(\frac{-a}{(b-c)^2}\right)db+\left(\frac{a}{(b-c)^2}\right)dc$$

نقسم الطرفين على $X=\dfrac{a}{b-c}$ نجد: $$\frac{dX}{X}=\frac{da}{a}+\left(\frac{-b}{b-c}\right)\frac{db}{b}+\left(\frac{c}{b-c}\right)\frac{dc}{c}$$

ومنه الارتياب النسبي : $$\frac{\Delta X}{X}=\frac{\Delta a}{a}+\left|\frac{-b}{b-c}\right|\frac{\Delta b}{b}+\left|\frac{c}{b-c}\right|\frac{\Delta c}{c}$$

- **طريقة التفاضل أللوغاريتمي:**

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد: $$\log X=\log\left(\frac{a}{b-c}\right)=\log a-\log(b-c)$$

نفاضل الطرفين : $$d\log X=d\log a-d\log(b-c)\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{da}{a}-\frac{d(b-c)}{b-c}$$

$$\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{da}{a}-\frac{db}{b-c}+\frac{dc}{b-c}$$

$$\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{da}{a}+\left(\frac{-b}{b-c}\right)\frac{db}{b}+\left(\frac{c}{b-c}\right)\frac{dc}{c}$$

نقوم باستبدال رمز التفاضل برمز الارتياب ونجعل الحدود الجبرية موجبة فنجد الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta X}{X}=\frac{\Delta a}{a}+\left|\frac{-b}{b-c}\right|\frac{\Delta b}{b}+\left|\frac{c}{b-c}\right|\frac{\Delta c}{c}$$

تمارين : من (3.I) إلى (7.I)

تمرين 3. I:

قامت مجموعة من الطلبة بقياسات داخل قاعة الدراسة، بعد عدة قياسات للأرضية المستطيلة اتفقوا على النتائج الآتية : الطول: $L=(10.0\pm 0.1)m$　العرض : $d=(6.00\pm 0.05)m$

1- ما هي نتيجة قياس مساحة أرضية القاعة ؟

2- .هل دقة القياس مقبولة إذا علمنا أن القياسات أنجزت بمسطرة طولها 1متر؟

التمرين 4. I :

قمن بقياس القطر الداخلي D_1 لأسطوانة و القطر الخارجي D_2 فوجدنا :

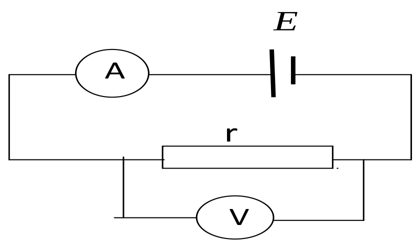
$$D_1=(19.5\pm 0.1)mm \qquad D_2=(26.7\pm 0.1)mm$$

1- احسب السمك e لأسطوانة و اكتب نتيجة قياسه ؟

2- احسب دقة القياس في السمك ؟

التمرين 5.I:

من أجل تحديد مقاومة وشيعة نقوم بربطها في الدارة الممثلة في الشكل المقابل شدة التيار $i=(0.50\pm 0.02)A$, التوتر بين طرفي الوشيعة $U=(5.0\pm 0.1)V$



الشكل (1.I)

1- جد نتيجة قياس مقاومة الوشيعة. ؟

التمرين 6.I :

قمنا بقياس ارتفاع h وقطر أسطوانة D معدنية مملوءة بواسطة قدم قنويّة ، فوجدنا :

$h=D=(4.000\pm 0.005)cm$ ووجدنا كتلتها $m=(392.05\pm 0.05)g$

1- احسب الكتلة الحجمية للمعدن الذيُ صنعت منه هذه الأسطوانة ؟

2- احسب دقة القياس في الكتلة الحجمية ، ثم اكتب نتيجة القياس. ؟

يُعطى حجم الأسطوانة : $V=\pi\times\left(\frac{D}{2}\right)^2\times h$

التمرين 7.I :

احسب الارتياب النسبي المرتكب على قياس السعة (C) لمكتفة مكافئة لمكتفتين موصلتين على :

أ- التسلسل

ب- التفرع

و ذلك بدلالة الدقة على كل من (C_1) و (C_2)

حلول تمارين : من (3.I) إلى (7.I)

حل التمرين 3.I :

1- نتيجة قياس مساحة أرضية القاعة :

لدينا : $S_0 = L_0 \times d_0 \Rightarrow S_0 = 60m^2$

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta d}{d_0} \Rightarrow \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{0.1}{10.0} + \frac{0.05}{6.00} = 0.018$$
$$\Rightarrow \Delta S = (60 \times 0.018) = 1.08m^2$$

ومنه نتيجة القياس : $S = S_0 \pm \Delta S \Rightarrow S = (60 \pm 1.08)m^2$

2- دقة القياس : $\frac{\Delta S}{S_0} \times 100 = 0.018 \times 100 = 1.8\%$

دقة القياس (1.8%) مقبولة في حدود معينة، لكن طول المسطرة 1متر ينقص من الدقة التي يمكن أن تكون أحسن من ذلك لو استعملنا شريط متري طوله 12متر.

حل التمرين 4.I :

1- سمك الأسطوانة هو: $e = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{26.7 - 19.5}{2} = 3.6mm$

$$\Delta e = \frac{1}{2}(\Delta D_2 + \Delta D_1) = \frac{1}{2}(0.1 + 0.1) = 0.1mm$$

نتيجة القياس : $e = (3.6 \pm 0.1)mm$

دقة القياس : $\frac{\Delta e}{e} \times 100 = \frac{0.1}{3.6} \times 100 = 2.7\% mm$

حل التمرين 5.I :

مقاومة الوشيعة : $r = \frac{U}{i} = \frac{5}{0.5} = 10\Omega$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta i}{i} \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{0.1}{5} + \frac{0.02}{0.5} = 0.06$$
$$\Delta r = r \times 0.06 = 0.06 \times 10 = 0.6\Omega$$

نتيجة القياس هي: $r = (10.0 \pm 0.61)\Omega$

حل التمرين 6.I :

الكتلة الحجمية هي النسبة بين الكتلة والحجم $\rho = \dfrac{m}{V}$

لدينا : $V = 3.14 \times 2^2 \times 4 = 50.24 cm^3$ و $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{392.05}{50.24} = 7.800\, g/_{cm^3}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times h} = \frac{4}{\pi} \times \frac{m}{D^2 h}$$

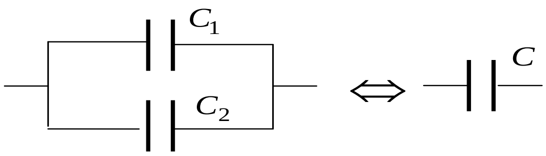
الارتياب النسبي في الكتلة الحجمية هو:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0.05}{392.05} + 2\frac{0.005}{4} + \frac{0.005}{4} = 0.0038$$

دقة القياس هي : $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \times 100 = 0.0038 \times 100 = 0.38\, ^0/_0$

حل التمرين 7.I :

أ/ التوصيل على التفرع :



الشكل (2.I)

سعة المكتفة المكافئة لمكتفتين موصلتين على التفرع تحسب بالعبارة : $C = C_1 + C_2$

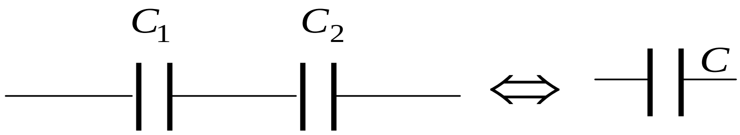
نطبق الدالة أللوغاريتمية على طرفي المعادلة ثم نمر إلى التفاضل أللوغاريتمي :

$$LogC = Log\left(C_1 + C_2\right) \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1 + C_2} + \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

ومنه فان الارتياب النسبي هو :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2} \Leftrightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) + \frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

ب/ التوصيل على التسلسل :



الشكل (3.I)

سعة المكتفة المكافئة لمكتفتين موصلتين على التسلسل تحسب بالعبارة :

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

نطبق الدالة ألوغاريتمية على طرفي المعادلة ثم نمر إلى التفاضل ألوغاريتمي :

$$LogC=Log\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\Rightarrow LogC=LogC_1+LogC_2-Log\left(C_1+C_2\right)$$

$$\frac{dC}{C}=\frac{dC_1}{C_1}+\frac{dC_2}{C_2}-\frac{dC_1}{C_1+C_2}-\frac{dC_2}{C_1+C_2}$$

نجمع الجدود ذات العوامل المشتركة : $\frac{dC}{C}=dC_1\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1+C_2}\right)+dC_2\left(\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_1+C_2}\right)$

يمكن كتابة العبارة السابقة على الشكل : $\frac{dC}{C}=\frac{dC_1}{C_1}\left(1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)+\frac{dC_2}{C_2}\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)$

الارتياب النسبي المطلوب هو : $\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left(1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)$

C- I/ المعادلات التفاضلية : Equations différentielles

1 - تعريف : المعادلة التفاضلية هي العلاقة التي تربط بين: متغير مستقل و ليكن x و متغير تابع و ليكن $y(x)$ و واحدة او أكثر من المشتقات $\left(y^{'},y^{''},y^{'''}.......y^{n}\right)$ أي أنها على الصورة العامة

$$\boxed{F\left(x,y^{'},y^{''},y^{'''}........y^{n}\right)}..........(14.I)$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية.

- أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان و كان $z(x,y)$ متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من $y\ x$, جزئيا , سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقل والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ,معادلة تفاضلية جزئية , وهي الصورة :

$$\boxed{G\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.......\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)}..........(15.I)$$

مثال 9.I : لتكن المعادلات التفاضلية :

$$1)\ y^{'''2}+2y^{'3}-5y=\sin\theta$$

$$2)\ y^{'}+xy=x^2$$

$$3)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

- نلاحظ أن المعادلتين 1 و 2 كلا منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة 3 معادلة تفاضلية جزئية.
- من الممكن تصنيف المعادلات إلى فئات مختلفة بحسب رتبة و درجة المعادلة:

- **رتبة المعادلة:** هي رتبة أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة
- **درجة المعادلة:** هي درجة (الأس) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوة الكسرية.

مثال 10.I : $\left(y^{'''}\right)^9-5y=x$ المعادلة من الرتبة 3 والدرجة 9.

مثال 11.I : أوجد رتبة و درجة المعادلة التفاضلية : $y^{''}=\left(5-2y^{''}\right)^{3/2}$

-بتربيع طرفي المعادلة $y^{''2}=\left(5-2y^{''}\right)^3$. المعادلة من الرتبة 2 والدرجة 3

2 ـ المعادلة التفاضلية

الدالة $y = y(x)$ حل المعادلة التفاضلية: اذا كانت:

$$\boxed{F\left(x, y^{'}, y^{''}, y^{'''} ....y^{n}\right)}..........(16.I)$$

ت- قابلة للاشتقاق n مرة

ث- تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$\boxed{F\left(x, y(x), y^{'}(x) ....y^{n}(x)\right)}..........(17.I)$$

مثال 12.I : اثبت أن: $y(x) = c\sin\theta$ حل المعادلة التفاضلية: $y^{'} + y = 0$ حيث c ثابت

الحل: $y(x) = c\sin\theta$ $y^{''}(x) = -c\sin\theta$ $y^{'}(x) = c\cos\theta$

و على ذلك نجد أن : $y^{'} + y = -c\sin\theta + c\sin\theta = 0$

إذن : $y(x) = c\sin\theta$ حل المعادلة التفاضلية : $y^{'} + y = 0$

1-2- المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى , هي علاقة بين دالة (تعتبر مجهولة) y وبين مشتقاتها الأولى والمتغير x لـ y .

$$\boxed{\left(P(x, y)dx + Q(x, y)dx\right) = 0}..........(18.I)$$

1-1-2- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة:

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة التالية:

$$\boxed{\left(M(x)dx + N(y)dy\right) = 0}..........(19.I)$$

حيث أن $M(x)$ دالة لـ x فقط و $N(y)$ دالة لـ y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل , نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل:

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}..........(20.I)$$

حيث C ثابت اختياري. ويسمى ذلك الحل بالحل العام , ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام. وإذا علم شرط ابتدائي , نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا.

مثال 13.I : حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2dx + y^2dy = 0$

$$\int x^2dx+\int y^2dy=C\Rightarrow\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}=C\Rightarrow x^3+y^3=3C=C^{'}\Rightarrow x^3+y^3=C^{'}$$

مثال 14.I : حل المعادلة التفاضلية التالية: $y^{'}=3x^2-1$

$$y=\int y^{'}dx=\int\left(3x^2-1\right)dx\Rightarrow y=x^3-x+c$$

2-1-2- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للفصل:

تكون من الشكل:

$$\boxed{M_1(x).N_1(y)dx+M_2(x).N_2(y)dy=0}..........(21.I)$$

للفصل نقسم المعادلة على : $N_1(y)\times M_2(x)$

نتحصل على:

$$\boxed{\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0}..........(22.I)$$

حلها هو :

$$\boxed{\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C}..........(23.I)$$

مثال 15.I :

حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy^2dx+\left(1-x^2\right)dy=0$

الحل :

نقسم طرفي المعادلة على $y^2\left(1-x^2\right)$ فنحصل على: $\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{dy}{y^2}=0$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كما يلي :

بتكامل الطرفين : $\int\frac{xdx}{1-x^2}+\int\frac{dy}{y^2}=c\Rightarrow-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-y^{-1}=c$

$$\ln\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-y^{-1}=c\Rightarrow y^{-1}=\ln\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-c$$

و بتالي فان حل المعادلة التفاضلية هو: $y=\left(\ln\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-c\right)^{-1}$

2-2 - المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية :

تكون من الشكل:

$$\boxed{ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)}..........(24.I)$$

ج- ندرس هذه المعادلات في حالة : (a,b,c) ثوابت حقيقية .

فيكون حل المعادلة (1) عبارة عن مجموع حلين: الحل العام و الحل الخاص:

$$\boxed{y(x)=y_h(x)+y_p(x)}..........(25.I)$$

✓ $y_h(x)$: **الحل العام (حل المعادلة المتجانسة) :**

ح- نأخذ المعادلة (1) بدون طرف ثان:

$$\boxed{ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0}..........(26.I)$$

✓ $y_p(x)$: **الحل الخاص**

نأخذ المعادلة (1) بطرف ثان:

$$\boxed{ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)}..........(27.I)$$

2-2 -1- طريقة حل المعادلة المتجانسة (الحل العام)

نبحث عن الحل من الشكل: $y=e^{rx}$, ثم نعوض في المعادلة نجد:

$$y=e^{rx}\Rightarrow y'=re^{rx}\Rightarrow y''=r^2e^{rx}$$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0\Rightarrow ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$$

$$\left(ar^2+br+c\right)e^{rx}=0\Rightarrow e^{rx}\neq 0,\left(ar^2+br+c\right)=0$$

$\left(ar^2+br+c\right)=0$: تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية.

خ- لحل المعادلة المميزة نبحث عن Δ : $\Delta=b^2-4ac$ فنجد 3 حالات:

➢ $\Delta\succ 0$: $\Delta=b^2-4ac\succ 0$

يوجد حلان للمعادلة: $r_1\neq r_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \end{cases}$ حلي المعادلة المميزة (1) و هما مستقلين خطيا : $y_1 / y_2 \neq cst$

فيكون الحل العام: $y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \Rightarrow y_h(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(Ae^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x} + Be^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x} \right)$

مثال 16.I : حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 4y' + 3y = 0$

توجد المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow (r-3)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 1$

حل المعادلة التفاضلية هو : $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \Leftrightarrow y = Ae^{x} + Be^{3x}$

➢ $\Delta = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ يوجد حل مضاعف للمعادلة: $r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a} = \alpha$

$\begin{cases} y_1 = xe^{\alpha x} \\ y_2 = e^{\alpha x} \end{cases}$ حلي المعادلة المميزة (1) و هما مستقلين خطيا :

$$y_h(x) = (Ax + B)e^{\alpha x} \Rightarrow y_h(x) = (Ax + B)e^{-\frac{b}{2a}x}$$

مثال 17.I : حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 2y + y = 0$

توجد المعادلة المميزة:

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$$

حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (Ax + B)e^{rx} \Rightarrow y = (Ax + B)e^{-x}$

$\Delta \prec 0$ $\Delta = b^2 - 4ac \prec 0$ يوجد حلين مركبين بحيث $(i^2 = -1)$ أي :

يوجد حلين للمعادلة:

نضع: $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, $\alpha = \dfrac{-2b}{a} \Leftrightarrow r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$

الحل العام للمعادلة المتجانسة يكتب على الشكل: $y_h(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

مثال 18.I : حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$

توجد المعادلة المميزة $\Delta = (0)^2 - 4 \times 1 \times 16 = -64 = 64i^2$ $r^2 + 16 = 0$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times 1 \times 16 = -64 = 64i^2$$

$$\vec{V}=\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -2\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{V}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\theta$$

$$\beta=4 \qquad\qquad \alpha=0$$

حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y=e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)\Rightarrow y=e^{0x}\left(A\cos 4x+B\sin 4x\right)$$

$$y=\left(A\cos 4x+B\sin 4x\right)$$

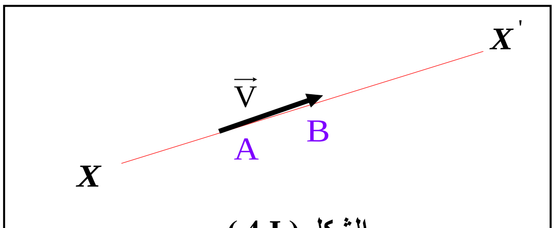
D-I - تذكير بالحساب ألشعاعي : Rappel sur le calcul vectoriel

1- المقادير الفيزيائية (Grandeurs physiques)

1- أ - **المقدار السلمي :** (Grandeur scalaire) يعبر عنه بقيمة ووحدة معينتين مثل: كتلة جسم m ، الشحنة الكهربائية q . الزمن، الحرارة...

1- ب - **المقدار ألشعاعي** : (Grandeur vectorielle) فبالإضافة إلى القيمة والوحدة يجب أن تعرف أيضا بمنحى (حامل) واتجاه مثل: شعاع السرعة $\vec{V}$ ، التسارع $\vec{a}$ القوة $\vec{F}$

2 - مفهوم الشعـــــاع : A و B نقطتان منه ، الثنائيـة (A,B) تعين لنا شعـاعا نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}$ أو نرمز له برمز آخر وليكن $\vec{V}$ حيث $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ الشكل **(4.I)**



الشكل (4.I)

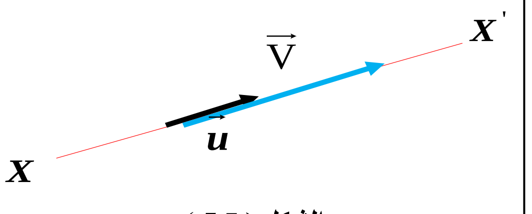
2 - أ - مميزات الشعاع $\vec{V}$:

- A هي نقطة تأثيره و هي بداية الشعاع $\vec{V}$.
- طويلة الشعاع $\vec{V}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها بـ : $\|\vec{V}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$
- منحى أو حامل الشعاع $\vec{V}$ هو منحى المستقيم (xx')
- اتجاه الشعاع $\vec{V}$ من A نحو B

2 - ب - شعاع الوحدة : (Vecteur Unitaire)

كل شعاع يكتب على شكل طويلة هذا الشعاع في شعاع وحدته : $\vec{V}=\|\vec{V}\|.\vec{u}$ حيث الشعاع $\vec{u}$ موازي للشعاع $\vec{V}$ و طويلته تساوي الواحد : $\|\vec{u}\|=1$

مثال 19.I : $\vec{V}=2.\vec{u}$



الشكل (5.I)

3 - خواص الأشعة

- $\left|\vec{V_1}\right| = \left|\vec{V_2}\right| \Leftarrow$ لهما نفس المقدار (الطويلة) و الاتجاه .
- ضرب شعاع بقيمة سلمية :جداء الشعاع $\vec{V}$ بالعدد السلمي a هو الشعاع $a\vec{V}$ حيث $\vec{V}//a\vec{V}$:

- إذا كان $a \succ 0 \Leftarrow$ له نفس اتجاه $\vec{V}$ وطويلته هي $a\left|\vec{V}\right|$.
- إذا كان $a = 0 \Leftarrow a\vec{V} = 0$.
- إذا كان $a \prec 0 \Leftarrow$ له عكس اتجاه $\vec{V}$ و طويلته هي $-a\left|\vec{V}\right|$.

- جداء شعاع بسلمي هو توزيعي على المجموع السلمي : $(a+b).\vec{V} = a.\vec{V} + b.\vec{V}$
- يكون شعاعان متوازيين إذا و فقط إذا كانا مرتبطين خطيا :

$\Leftarrow \vec{V_1}//\vec{V_2}$ يوجد $\alpha \ni R$ حيث $a.\vec{V_2} = \vec{V_1}$

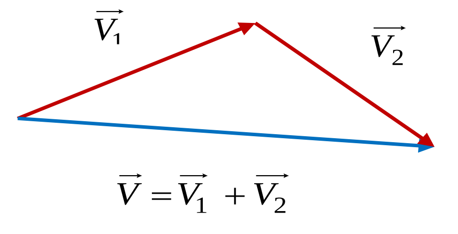
4 - جمع الأشعة

1-4- جمــع شعاعين:

1-4- أ- الطريقة الهندسية

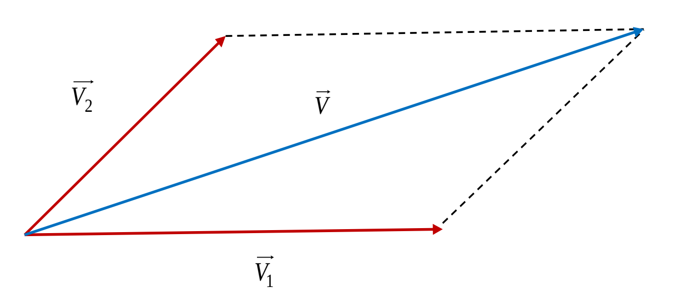
مجموع الشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ هو شعاع يرمز له ب $\vec{V_1} + \vec{V_2}$ ، ينشأ هندسيا بإحدى الطريقتين التاليتين:

ط 1:نضع بداية الشعاع الثاني عند نهاية الأول ويكون المجموع الشعاع الذي يربط بداية الأول بنهاية الثاني يصنع الضلع الثالث للمثلث المشكل من $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ (triangle) . **الشكل (6.I)**



الشكل (6.I)

ط 2:نضع بدايتي الشعاعين عند النقطة نفسها ونرسم متوازي الأضلاع (parallélogramme) حيث يكون الشعاعان ضلعيه المجموع إذن هو قطر متوازي الأضلاع وبدايته هي نفسها بداية الشعاعين **الشكل (7.I)**



الشكل (7.I)

ملاحظات :

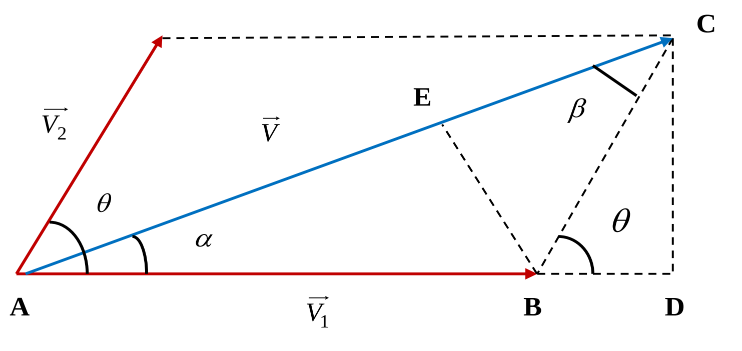
* نحصل على شدة الشعاع بواسطة العلاقة التالية و التي تسمى بقانون جيوب التمام **(Loi du cosinus)**

$$\boxed{V=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\left(\vec{V_1}.\vec{V_1}\right)}}..........(28.\text{I})$$

* لتحديد جهة (أي حامل) $\vec{V}$ يكفي تحديد الزاوية α حيث نلاحظ **الشكل (8.I)**

- في المثلث ACD

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CD}{V}\\ \sin\theta=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{CD}{V_2}\end{array}\right|\Rightarrow\dfrac{V}{\sin\theta}=\dfrac{V_2}{\sin\alpha}\Rightarrow V\sin\alpha=V_2\sin\theta}..........(29.\text{I})$$



الشكل (8.I)

- في المثلث **BEC :**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\sin\beta=\dfrac{BE}{BC}\\ \sin\alpha=\dfrac{BE}{AB}\end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{V_2}{\sin\alpha}=\dfrac{V_1}{\sin\beta}\Rightarrow V_2\sin\beta=V_1\sin\alpha}\text{..........}(30.\mathrm{I})$$

من (2.2) و (2.3)نستنتج العلاقة العامة التالية والتي تسمى بقانون الجيوب **(Loi des sinus)**

$$\boxed{\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_1}{\sin\beta}=\frac{V_2}{\sin\alpha}}\text{..........}(31.\mathrm{I})$$

حالة خاصة : ادا كانت $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ **فان** $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ **و** $tg\alpha=\dfrac{V_2}{V_1}$

4-1- ب- الطريقة التحليلية:

تعطي عبارتي الشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ كما يلي:

$$\Leftrightarrow \quad \Rightarrow \quad \vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}\quad , \quad \begin{cases}\vec{V_1}=V_{1x}\vec{i}+V_{1y}\vec{j}\\ \vec{V_2}=V_{2x}\vec{i}+V_{2y}\vec{j}\end{cases}$$

$$V=\Big(\underbrace{V_{1x}+V_{2x}}_{V_x}\Big)\vec{i}+\Big(\underbrace{V_{1y}+V_{2y}}_{V_y}\Big)\vec{j}\Leftrightarrow\boxed{\vec{V}=V_x\,\vec{i}+V_y\,\vec{j}}\text{..........}(32.\mathrm{I})$$

مثال 20.I:

في معلم متعامد و متجانس $(OXYZ)$.نعتبر الأشعة التالية :

$$\vec{V_1}=3\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k} \qquad \vec{V_2}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$$

- أحسب مركبة الشعاع $\vec{A}=\vec{V_1}+\vec{V_2}$

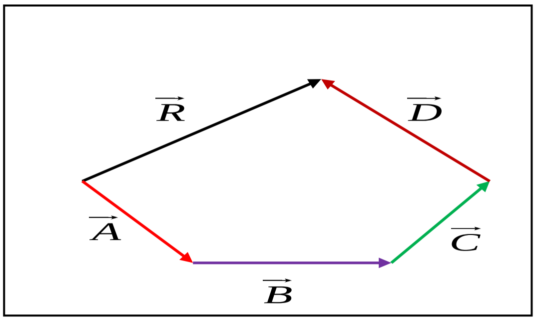
الحل :

$$\vec{A}=\vec{V_1}+\vec{V_2}=(3+2)\vec{i}+(-4+3)\vec{j}+(4-4)\vec{k}=5\vec{i}-\vec{j}$$

4-2- جمــع عدة أشعة:

عندما يكون الجمع لأكثر من شعاعين نستعمل الطريقة الهندسية التي تتطلب ربط الأشعة بحيث تكون نهاية الشعاع الأول بداية الشعاع الثاني وهكذا إلى آخر شعاع. ثم يتم ربط من أول شعاع إلى آخر شعاع .

مثال:21.I $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ **الشكل (9.I)**



الشكل (9.I)

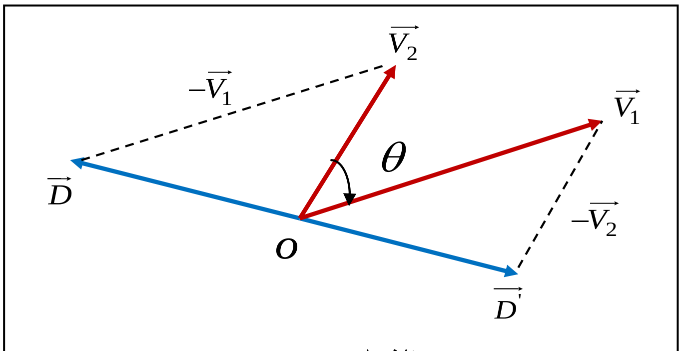
4 -3- خصائص الجمع في الأشعة:

- تبديلي: $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1$
- تجميعي: $\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)+\vec{V}_3=\vec{V}_1+\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)$
- العنصر الحيادي في عملية الجمع هو الشعاع المعدوم $\vec{V}+\vec{0}=\vec{V}$
- $\left\|\vec{V}_1+\vec{V}_2\right\|\neq\left\|\vec{V}_1\right\|+\left\|\vec{V}_2\right\|$

5 – طـــــــرح شعاعين:

5- أ - الطريقة الهندسية:

هندسيا يمثل الشعاع $\vec{D}$ الطرح بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ حيث : $\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$ إن طرح الشعاع $\vec{V}_2$من الشعاع $\vec{V}_1$ هو نفسه جمع الشعاعين $\vec{V}_1$ و $-\vec{V}_2$ **الشكل (10.I)**



الشكل (10.I)

طويلة الشعاع $\vec{D}$:

$$\boxed{D=\sqrt{V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\cos\left(\vec{V}_1.\vec{V}_1\right)}}..........(33.\mathrm{I})$$

5- ب - الطريقة التحليلية:

تعطى مركبة الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ في معلم ثنائي الأبعاد بما يلي:

$$\begin{cases}\vec{V_1}=V_{1x}\vec{i}+V_{1y}\vec{j}\\ \vec{V_2}=V_{2x}\vec{i}+V_{2y}\vec{j}\end{cases}$$

فإن الشعاع $\vec{D}$ يكتب على الشكل $\vec{D}=\vec{V_1}-\vec{V_2}$

$$\boxed{\vec{D}=\left(V_{1x}-V_{2x}\right)\vec{i}+\left(V_{1y}-V_{2y}\right)\vec{j}}.........(34.I)$$

الطرح في الأشعة عملية ليست تبديلية أي أن : $\vec{V_1}-\vec{V_2}\neq\vec{V_2}-\vec{V_1}$

مثال 22.I:

في معلم متعامد و متجانس $(OXYZ)$.نعتبر الأشعة التالية :

$$\vec{V_1}=3\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}\qquad\qquad \vec{V_2}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$$

أحسب مركبة الشعاع $\vec{A}=\vec{V_1}-\vec{V_2}$

الحل :

$$\vec{A}=\vec{V_1}-\vec{V_2}=(3-2)\vec{i}+(-4-3)\vec{j}+(4-(-4))\vec{k}=\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$$

مثال 23.I:

اوجد المسافة الفاصلة بين النقطتين $A(10,-4,4)u$ و $B(10,6,8)u$ الممثلتين في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث u تمثل وحدة .

الحل :

نعين النقطتين على المعلم الديكارتي يتبين لنا ان المسافة المطلوب حسابها هي : $\vec{D}=\vec{V_2}-\vec{V_1}$ و بالتالي فان المسافة المطلوبة هي طويلة الشعاع $\vec{D}$.

$$\vec{D}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\Rightarrow D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\vec{D}=(0)\vec{i}+(10)\vec{j}+(4)\vec{k}\Rightarrow D=\sqrt{116}=10.77u$$

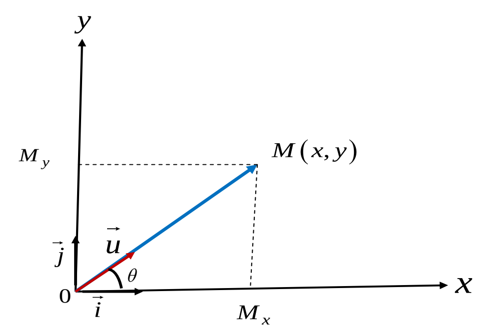
6 - مركبات شعاع : (Composantes d'un vecteur)

6 - أ - في المستوى:

لتكن النقطة M معرفة في معلم (O,X,y) المزود بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{i},\vec{j})$ وضعية النقطة M في المستوي (O,X,y) معرفة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ كما يبينه **الشكل (11.I)** حيث :

M_x: هو إسقاط النقطة M على المحور (O,X)

M_y : هو إسقاط النقطة M على المحور (O,y)



الشكل (11.I)

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} OM_x \\ OM_y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}$$

$$\begin{cases} OM_x = OM_x\vec{i} = OM\cos\theta\vec{i} \\ OM_y = OM_y\vec{j} = OM\sin\theta\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = OM\cos\theta\vec{i} + OM\sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{OM} = OM\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) \\ \overrightarrow{OM} = OM\vec{u} \end{cases}$$

من هنا نستنتج:

$$\boxed{\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}} \text{..........}(35.\text{I})$$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$

أما طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ فهي :

$$\boxed{OM = \sqrt{\overrightarrow{OM}_x^{\,2} + \overrightarrow{OM}_y^{\,2}}} \text{......}(36.\text{I})$$

مثال 24.I: لدينا الشعاعين : $\overrightarrow{OM_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OM_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ أوجد :

1- محصلة الشعاعين

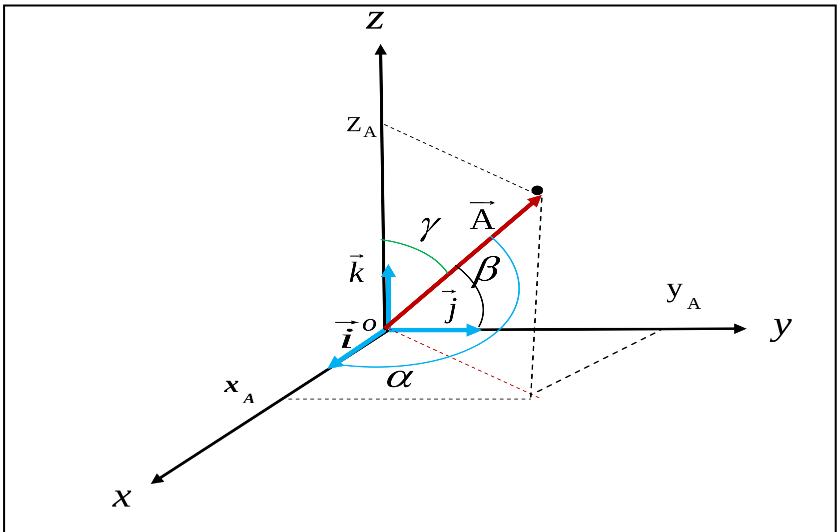
2- الفرق بين الشعاعين

الحل :

-1 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}\rightarrow OM=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

-2 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OM}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}\rightarrow OM=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

6 - ب - في الفضاء : المعلم ممثل بثلاثة محاور متعامدة و متجانسة $OXYZ$ وثلاث أشعة وحدة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$. الشكل **(12.I)** .



الشكل (12.I)

يمثل الشعاع $\vec{A}$ في هذه الجملة بثلاث إحداثيات : $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ و $\vec{A}_z$ هي عبارة عن مسقط الشعاع $\vec{A}$ على المحاور OX، OY و OZ حيث :

$$\boxed{\vec{A}=A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}+A_z\,\vec{k}}\,..........(37.I)$$

فيكون لدينا:

$$A_x=|\vec{A}|\cos\alpha \qquad A_y=|\vec{A}|\cos\beta \qquad A_z=|\vec{A}|\cos\gamma$$

حيث β، α و γ زوايا التوجيه التي يشكلها $\vec{A}$ مع الجهة الموجبة للمحاور OX و OY و OZ على الترتيب و ، نسمي $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ جيوب تمام توجيه الشعاع $\vec{A}$.

إذا علمنا أن إحداثيات نقطة النهاية $b(x_b,y_b,z_b)$ والبداية $a(x_a,y_a,z_a)$ لشعاع $\vec{A}$ يكون لدينا:

$$\vec{A}=\overrightarrow{ab}\begin{cases}x_b-x_a\\y_b-y_a\\z_b-z_a\end{cases}\qquad \boxed{\vec{A}=\left(x_b-x_a\right)\vec{i}+\left(y_b-y_a\right)\vec{j}+\left(z_b-z_a\right)\vec{k}}\;..........(38.I)$$

6 -ج - **مركبات** حاصل **جمع الشعاعين** $\vec{A}+\vec{B}$ حيث $\vec{A}=\begin{cases}A_x\\A_y\\A_z\end{cases}$ و $\vec{B}=\begin{cases}B_x\\B_y\\B_z\end{cases}$ هي مجموع

المركبات:

$$\vec{A}+\vec{B}=\begin{cases}A_x+B_x\\A_y+B_y\\A_z+B_z\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x\right)\vec{i}+\left(A_y+B_y\right)\vec{j}+\left(A_z+B_z\right)\vec{k}}\;..........(39.I)$$

6 - د - **مركبات حاصل طرح الشعاعين** $\vec{A}-\vec{B}$:

$$\vec{A}-\vec{B}=\begin{cases}A_x-B_x\\A_y-B_y\\A_z-B_z\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{A}-\vec{B}=\left(A_x-B_x\right)\vec{i}+\left(A_y-B_y\right)\vec{j}+\left(A_z-B_z\right)\vec{k}}\;..........(40.I)$$

6 - ه - طويلة الشعاع $\vec{A}=\begin{cases}A_x\\A_y\\A_z\end{cases}$ هي :

$$\boxed{\left|\vec{A}\right|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\;..........(41.I)$$

ملاحظة :جيوب تمام التوجيه تحقق :

$$\boxed{\cos\alpha=+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1}\;..........(42.I)$$

يمكن كتابة جيوب تمام التوجيه للشعاع $\vec{A}=\begin{cases}A_x\\A_y\\A_z\end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\\ \cos\beta &= \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}\end{aligned}} \text{..........}(43.\mathrm{I})$$

مثال 25.I:

أوجد جيوب تمام التوجيه وشعاع الوحدة للشعاع: $\vec{A} = 4\vec{i} + -2\vec{j} + -3\vec{k}$

الحل :

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_y^{\ 2}} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{4}{\sqrt{29}} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{-3}{\sqrt{29}}$$

شعاع الوحدة : $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{-2}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\vec{k}$

**7 - الجداء السلمي : ** Produit scalaire

7 - أ - **تعريف:**

نعرف الجداء السلمي بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالمقدار السلمي **:**

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}\right\|\cos\alpha} \text{..........}(44.\mathrm{I})$$

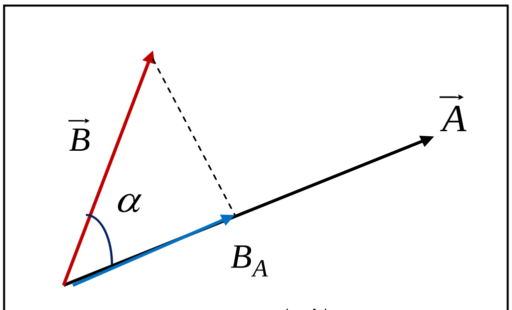
$\alpha\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$: ي الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

نتيجة الجداء السلمي هو قيمة سلمية (عدد حقيقي).

7 – ب - الشكل الهندسي للجداء السلمي: الشكل (13.I)

يكتب الجداء السلمي بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بـ :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|.\underbrace{\left\|\vec{B}\right\|\cos\alpha}_{\vec{B}_A}} \text{..........}(45.\mathrm{I})$$



الشكل (13.I)

$\left\|\vec{B}_A\right\|$ هو إسقاط الشعاع $\vec{B}$ على الشعاع $\vec{A}$

$$\vec{A}.\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}_A\right\|$$

إذن الجداء السلمي لشعاعين يساوي جداء طويلة أحد الشعاعين في إسقاط طويلة الشعاع الآخر على حامل هذا الشعاع .

7 – ج - العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان معرفان في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث:

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{A}=A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}+A_z\,\vec{k}\\ \vec{B}=B_x\,\vec{i}+B_y\,\vec{j}+B_z\,\vec{k}\end{matrix}\Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=\left(A_x\,\vec{i}+A_y\,\vec{j}+A_z\,\vec{k}\right).\left(B_x\,\vec{i}+B_y\,\vec{j}+B_z\,\vec{k}\right)}\quad\text{..........}(46.\text{I})$$

حيث:

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{i}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{i}=1\\ \vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0\end{matrix}}\quad\text{..........}(47.\text{I})$$

7 – د - خصائص الجداء السلمي:

- تبديلي: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$
- تجميعي: $\left(\vec{A}+\vec{B}\right).\vec{C}=\vec{A}.\vec{C}+\vec{B}.\vec{C}$
- خطي : $\left(\alpha\vec{A}\right).\left(\beta\vec{B}\right)=\left(\alpha\beta\right).\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$
- خاصية تعامد وتوازي شعاعين:

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\alpha\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow\vec{A}.\vec{B}=0$$
$$\vec{A}//\vec{B}\Rightarrow\alpha\left(\vec{A},\vec{B}\right)=0\Rightarrow\cos 0=1\Rightarrow\vec{A}.\vec{B}=A.B$$

7 - ه- تطبيقات الجداء السلمي في الهندسة:

- إيجاد الزاوية α بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لدينا : $\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\alpha$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}.\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}}\text{..........}(48.I)$$

مثال 26.I : احسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث :

$$\vec{A}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\quad,\quad\vec{B}=5\vec{i}-\vec{j}$$

الحل :

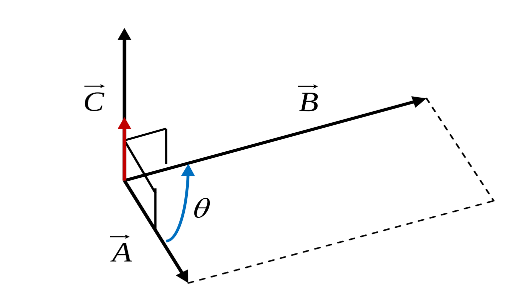
$$\|\vec{A}\|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(1)^2}=\sqrt{11}\quad,\quad\|\vec{B}\|=\sqrt{(5)^2+(-1)^2+}=\sqrt{26}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}=\frac{(1)(5)+(-3)(-1)+(1)(0)}{\sqrt{11}.\sqrt{26}}=\frac{8}{\sqrt{11\times26}}\Rightarrow\alpha=61.76^0$$

8 - الجداء الشعاعي : Produit Vectoriel

8 - أ - تعريف :

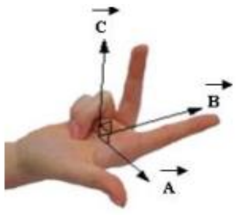
الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو الشعاع $\vec{C}$ حيث : $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$ $\vec{C}\perp\vec{A}$ و $\vec{C}\perp\vec{B}$ أي أن $\vec{C}$ عموديا على المستوي $(\vec{A}.\vec{B})$. **الشكل (14.I)**



الشكل (14.I)

$$\boxed{\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\sin\theta\,\vec{u}}\text{..........}(49.I)$$

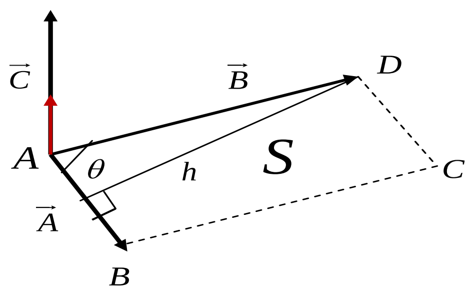
- حيث $\vec{u}$ شعاع وحدة و يكون عمودي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في نفس الوقت .
- $\theta(\vec{A}.\vec{B})$ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.
- اتجاه الشعاع $\vec{C}$ يحدد بتطبيق قاعدة اليد اليمنى (الإبهام يشير إلى $\vec{C}$). **الشكل (15.I)**



الشكل (15.I)

8 - ب - الشكل الهندسي للجداء ألشعاعي: الشكل (16.I)

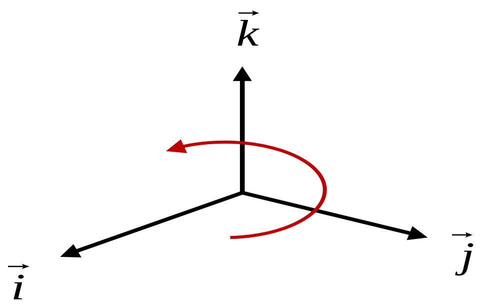
$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = \left\|\vec{A}\right\|.\underbrace{\left\|\vec{B}\right\|\sin\theta}_{h}$$
$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = \left\|\vec{A}\right\|.h = S_{ABCD} \quad \text{..........(50.I)}$$



الشكل (16.I)

حيث: S_{ABCD} هي مساحة متوازي الأضلع المتكون من الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

ملاحظة : $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$ $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, (خاصية التبديل الدائري)



الشكل (17.I)

8 - ج - العبارة التحليلية للجداء ألشعاعي:

نفرض أن $\vec{A}$ و $\vec{B}$. شعاعان معرفان في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ليكن $\vec{C}$ هو الجداء ألشعاعي بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\vec{k}\\ \vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}-\left(A_xB_z-A_zB_x\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_{x\leftarrow}\right)\vec{k}\end{gathered}}\ \text{.........}(51.\text{I})$$

8 - د- خصائص الجداء ألشعاعي:

- تبديلي مضاد: $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$.
- توزيعي بالنسبة للجمع $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\wedge\vec{C}\right)$.
- غير تجميعي : $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\wedge\vec{C}$.
- الخاصية الخطية: $\left(\alpha\vec{A}\right)\wedge\left(\beta\vec{B}\right)=(\alpha\beta).\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$.
- خاصية تعامد وتوازي شعاعين:

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\theta\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow\left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\|=A.B$$

$$\vec{A}//\vec{B}\Rightarrow\theta\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=0\Rightarrow\sin 0=0\Rightarrow\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$$

8 – ه - تطبيقات الجداء ألشعاعي في الهندسة

- يستعمل الجداء ألشعاعي في :

- حساب مساحة متوازي الأضلع $ABCD$ من خلل حساب $\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\right\|$.
- حساب مساحة المثلث ABD من خلل حساب $\frac{1}{2}.\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\right\|$.
- إيجاد معادلة مستقيم (Δ) يمر بنقطتين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لمستوي OXY اذا كانت النقطة$(\Delta)\ni$ M اذن : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}$.

مثال 27.I :

$$\vec{B} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + -\vec{k}$$

أ- ما هي العلقة بين y,x و z حتى يكون $A \perp B$ و $A//B$.

ب- ما هي قيم y,x و z حتى يكون $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$.

الحل :

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 0$$

$$\vec{A}//\vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow (3z + y)\vec{i} + (-x - 2z)\vec{j} + (2y - 3x)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 3z + y = 0 \\ -x - 2z = 0 \Rightarrow -6z = 2y = 3x \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$$

ب- $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + -\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{14}} \quad , \quad y = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad , \quad z = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

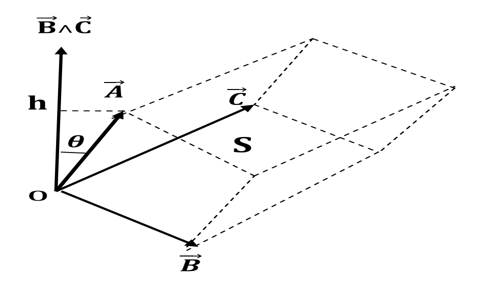
9 - الجداء المختلط : Produit mixte

9 - أ - تعريف: لتكن الأشعة $\vec{A}\,\vec{B}$, و $\vec{C}$ معرفة في القاعدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ الجداء المختلط لهذه الأشعة الثلاثة هو القيمة السلمية a حيث : $a = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$

- الجداء المختلط عبارة عن الجداء السلمي لأحد الأشعة مع الجداء الشعاعي للشعاعين الأخريين. هنا الترتيب مهم في الأشعة لذلك نعبر عن الجداء المختلط كذلك بـ : $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$
- نتيجة الجداء المختلط هو قيمة سلمية .

9 -ب - الشكل الهندسي للجداء المختلط : الشكل (18.I)

$$\boxed{\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \|\vec{A}\|.\|\vec{B} \wedge \vec{C}\|\cos\theta} \quad ....(52.I)$$



الشكل (18.I)

- مساحة القاعدة : $S=\left\|\vec{B}\wedge\vec{C}\right\|$ $h=\left\|\vec{A}\right\|.\cos\theta$: الارتفاع
- $V=S.h=\left\|\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right\|$ حيث V هو حجم متوازي السطوح

9 -ج - خصائص الجداء المختلط:

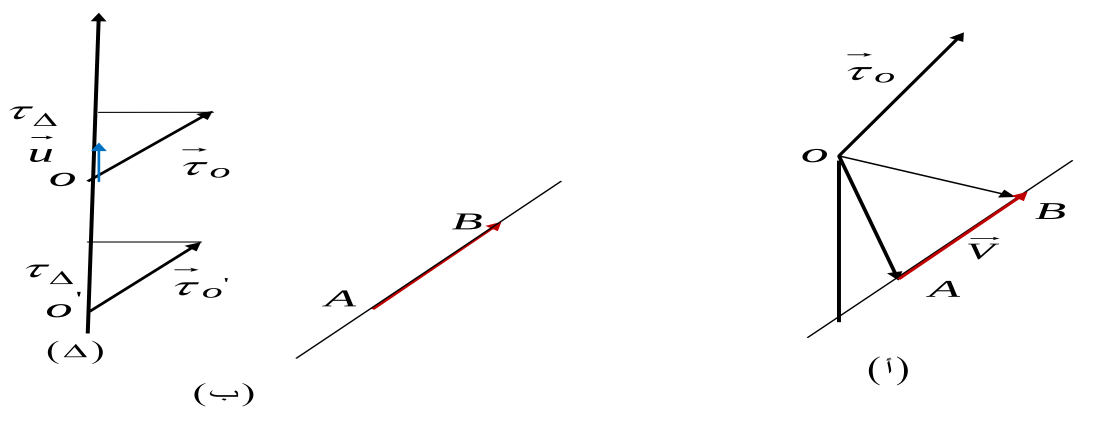
- التبديل الدائري : $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)=\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$
- يمكن كتابة : $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right).\vec{C}$
- يكون الجداء المختلط معدوما إذا كان أحد الأشعة معدوم $\vec{B},\vec{A}$ أو $\vec{C}$
- إذا كانت الأشعة $\left(\vec{C},\vec{B},\vec{A}\right)$ تنتمي الى نفس المستوى (ليس هنالك حجم)

10 - عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء :

10- أ- تعريف : عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء هو الشعاع المعرف ب :

$$\boxed{\vec{\tau}_0=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}}..........(53.I)$$

ملاحظة : $\left\|\vec{\tau}_0\right\|=$ **ضعف مساحة المثلث** AOB **.** **الشكل (19.I)**



الشكل (19.I)

11 - عزم شعاع بالنسبة لمحور: Moment d'un vecteur par rapport à un axe

11- أ- التعريف الأول : عزم شعاع بالنسبة لمحور يساوي مسقط عزم هدا الشعاع بالنسبة لنقطة من المحور مهما كانت .

11- ب- التعريف الثاني : عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة لمحور Δ مبدأه O شعاع واحدته $\vec{u}$ يساوي الجداء المختلط :

$$\boxed{\vec{\tau}_{\Delta} = \vec{\tau}_{0}\vec{u} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}\right)\vec{u}} \quad ....(54.\mathrm{I})$$

12 - اشتقاق الأشعة

12- أ- تعريف الاشتقاق لشعاع نفسه بالنسبة للمقدار السلمي : ليكن φ دالة سلمية بدلالة x فان:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}} \quad ....(55.\mathrm{I})$$

بالنسبة إلى $\vec{A}$ شعاع يتعلق بـ x فيكون:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x) - \vec{A}(x)}{\Delta x}} \quad ....(56.\mathrm{I})$$

اشتقاق الأشعة له نفس خواص اشتقاق المقادير السلمية: $\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\vec{u} = A\vec{u}$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{dA\vec{u}}{dx} = \frac{dA}{dx}\vec{u} + A\frac{d\vec{u}}{dx}} \quad ....(57.\mathrm{I})$$

سوف نهتم بالأشعة المتعلقة بالزمن والتي ، لها دور مهم في ميكانيكا النقطة المادية. ليكن الشعاع في الإحداثيات الديكارتية: $A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

فيكون :

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{dA_x}{dx}\vec{i} + \frac{dA_y}{dx}\vec{j} + \frac{dA_z}{dx}\vec{k}} \quad ....(58.\mathrm{I})$$

ملاحظة : يعرف المستقيم في المستوي بمعادلة واحدة، أما في الفضاء يعرف بدلالة معادلتين يكون فيها احد المجاهيل وسيطا والمجهولين المتبقين يعطيان بدلالة الوسيط .

في الإحداثيات الديكارتية تعتبر أشعة الوحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثابتة مقدارا واتجاها، وعليه فإن:

$$\boxed{\frac{d\vec{i}}{dx}=\frac{d\vec{j}}{dx}=\frac{d\vec{k}}{dx}}\ ....(59.I)$$

و لكننا قد نفقد هذه الخاصية في إحداثيات آخرى.

12 - ب- خواص

- $\dfrac{d\left(\vec{A}.\vec{B}\right)}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\dfrac{d\vec{B}}{dt}$
- $\dfrac{d\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}$
- $\dfrac{d\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{dt}+\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

مثال 28.I :

ليكن الشعاع: $\vec{A}=2\vec{i}+\left(t^2+2\right)\vec{j}+\left(t^2-6t+9\right)\vec{k}$

- أحسب $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ و $\dfrac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ ثم عينهما في النقطة $t=1$ ؟

الحل :

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}=-2\vec{j}+2\vec{k} \qquad \frac{d\vec{A}}{dt}=-2t\vec{j}+\left(2t-6\right)\vec{k}$$

$$\left.\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)_{t=1}=-2\vec{j}+2\vec{k} \qquad \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{t=1}=-2\vec{j}-4\vec{k}$$

12 - ج- المشتق الجزئي:

مثال 29.I :

لتكن دالة ذات متغيرات عديدة حيث: $f=x^2-y^2+5xz$

د- احسب المشتقات الجزئية بالنسبة لكل متغير بفرض باقي المتغيرات ثابتة ؟

الحل :

- المشتق الجزئي لـ f/x هو: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+5z$
- المشتق الجزئي لـ f/y هو: $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y$

- المشتق الجزئي لـــ $f\ /\ z$ هو: $\frac{\partial f}{\partial z}=5x$

12- د- المشتق الكلي : يعطى المشتق الكلي ل $f\left(x,y,z,t,.......\right)$ بالنسبة للزمن t بـ:

$$\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dt}}..........(60.\mathrm{I})$$

12 - ه- التفاضل الجزئي و الكلي:

نفرض دالة متعددة المتغيرات $f\left(x,y,z,t,.......\right)$ يمكن حساب التفاضل الجزئي و الكلي بحيث:

- التفاضل جزئي لـ x /f هو: $\partial f_x=\frac{\partial f}{\partial x}dx$
- التفاضل جزئي لـ $f\ /\ y$ هو: $\partial f_y=\frac{\partial f}{\partial y}dy$
- التفاضل جزئي لـ $f\ /\ $z هو : $\partial f_z=\frac{\partial f}{\partial z}dz$

و التفاضل الكلي هو: $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

مثال 30.I :

لتكن دالة ذات متغيرات عديدة حيث : $f=x^2+2y-z^3$

$$df=2xdx+2dy-3z^2dz$$

13 - العمليات الرئيسية الأربعة في التفاضل ألشعاعي هي:

13- أ - **مؤثر التدرج :** (Gradient)

إذا كانت $f\left(x,y,z,t,.......\right)$ دالة سلمية فإن تدرجها مقدار شعاعي معرف كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,f=\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}..........(61.\mathrm{I})$$

مثال 31.I :

احسب تدرج الدالة $f\left(x,y,z\right)=f=3x^2y^3z$

الجواب : $\overrightarrow{grad}\,f=\vec{\nabla}f=6xy^3z\vec{i}+9x^2y^2z\vec{j}+3x^2y^3\vec{k}$

13- ب - **مؤثر التباعد** (Divergence **):**

يحسب التباعد لحقل متجهي بالجداء السلمي بين $\vec{\nabla}$ و شعاع $\vec{A}$ وفقا لما يلي :

$$\boxed{div\vec{A}=\vec{\nabla}\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{k}}..........(62.I)$$

حيث : $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$

مثال 32.I : أحسب تباعد الدالة الشعاعية التالية: $v(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$

الجواب : $div\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=2y-3z^2+0=2y-3z^2$

13- ج - **مؤثر الدوران** : (Rotationnel)

يعرف دوران المتجه عموما بأنه الحداء ألشعاعي بين $\vec{\nabla}$ و شعاع $\vec{A}$.

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}}..........(63.I)$$

مثال 33.I : أحسب دوران الشعاع: $\vec{V}(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$

الجواب : $\vec{V}(x,y,z)=\left(27xy^2+6yz\right)\vec{i}-9y^3\vec{j}-2x\vec{k}$

ملاحظة: ذا كان $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\vec{0}$ نقول عن $\vec{A}$ أنه محافظ أو مشتق من كمون .

13- د - **مؤثر لابلاس أو لابلاسيان** (Laplacien)

وفقا لتعريف لابلاس تمثل "نابلا $(\vec{\nabla})$ "معدل تغير دالة بالنسبة لمتغير $(\vec{\nabla}A)$ ويعبر عن هذا التعريف بالصياغة الرياضية التالية:

- يعرف لابلاسيان لحقل سلمي $A(x,y,z)$ كالتالي: $\Delta A=\vec{\nabla}^2 A)=\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}A$

$$\boxed{\Delta A=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\Leftrightarrow\Delta A=div\left(\overrightarrow{grad}A\right)}..........(64.I)$$

- يعرف لابلاسيان لحقل شعاعي $\vec{A}(A_x,A_y,A_z)$ كالتالي:

$$\boxed{\Delta\vec{A}=\overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right)-\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right)\Rightarrow\Delta\vec{A}=\nabla\left(\nabla.\vec{A}\right)-\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)}..........(65.I)$$

$$\boxed{\Delta\vec{A}=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}}...(66.I)$$

$$\boxed{\Delta\vec{A}=\Delta A_x\vec{i}+\Delta A_y\vec{j}+\Delta A_z\vec{k}}..........(67.I)$$

مثال 34.I : أحسب لابلاسيان للدالة السلمية التالية $f(x,y,z)=f=3x^2y^3z$:

الجواب : $\Delta f=div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Rightarrow\Delta f=6y^3z+18x^2yz$

تمارين : من (8.I) إلى (14.I)

التمرين8.I:

ليكن في المعلم الديكارتي الاشعة : $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{i}+A_z\vec{i}$

حيث: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- المطلوب حساب كل من : $\overrightarrow{grad}r$ و $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}$ و $div\vec{r}$ و $\overrightarrow{rot}\vec{r}$ و $\nabla^2 r$

تمرين 9.I :

في المعلم المتعامد و المتجانس (O,X,Y,Z) تعطى الأشعة كما يلي:

$\vec{V_1}=3\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{V_2}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{V_2}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

1- أحسب طويلة كل من: $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$

2- أحسب مركبات و طويلة الأشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث: $\vec{B}=2\vec{V_1}-\vec{V_2}+\vec{V_3}$ و

$\vec{A}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$

3- عين شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$ حيث : $\vec{C}=\vec{V_1}+\vec{V_3}$

4- أحسب الجداء السلمي لـ $\vec{V_1}.\vec{V_3}$ ثم استنتج الزاوية المحصورة بينهما.

5- أحسب الجداء الشعاعي $\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}$.

تمرين 10.I:

تعطى إحداثيات النقاط D,C,B,A في المعلم المتعامد و المتجانس (O,X,Y,Z) كما يلي:

$D(-3,-3,2)$ $A(1,-2,0)$, $B(2,2,-2)$, $C(-2,0,1)$,

1- أوجد الأشعة $\vec{V_2}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{V_1}=\overrightarrow{AB}$

2- أوجد الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ عمودي على المستوي $(\vec{V_1},\vec{V_2})$:

3- برهن أن $\vec{V_3}=\vec{j}-\vec{k}$ ينتمي إلى المستوي $(\vec{V_1},\vec{V_2})$.

4- إذا كان ، $\vec{V_3}=X\vec{V_1}-Y\vec{V_2}$ أوجد (X,Y) .

تمرين 11.I :

في معلم متعامد و متجانس (O,X,Y,Z) نعتبر النقطتين $P(2,-1,3)$ و $Q(5,1,-1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q .

2- أوجد $\vec{U}$ شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OA}$ حيث : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$.

3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_2}$ $\overrightarrow{OA_1}$, و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_2 A_1 , و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxz) (Oxy) , و (Oyz) .

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$.

ب- لشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$.

ت- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$.

تمرين : 12.I

لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ التابعة للزمن $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$:

1- بين في الحالة العامة أن $\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} \neq \left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\|$: متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة $\|\vec{V}\|.\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \vec{V}.\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ صحيحة مهما كانت عبارة $\vec{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\vec{V}\| = Cst$ بين أن $\vec{V}(t) \perp \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\vec{V}(t)$ من الشكل: $\vec{V}(t) = (3t^2+2)\vec{i} + (t^3-5)\vec{j} + (3t^2-5t)\vec{k}$

حسب $\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}$ و $\dfrac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}$ ؟

5- أحسب $\left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\|$ و $\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}$ ماذا تلاحظ ؟

6- ادا كانت : $t = 5s$ تحقق من نتيجة السؤال السابق

التمرين 13.I:

لتكن الأشعة : $\vec{A} = -2\vec{i} + j + 3\vec{k}$ $\quad \vec{B} = 2\vec{i} - j + \vec{k}$ $\quad \vec{C} = x\vec{i} + j - y\vec{k}$

1- احسب : $\vec{A}+\vec{B}$ ، $\vec{A}.\vec{B}$ ، $\vec{A}.(\vec{A}+\vec{B})$

2- أحسب مسقط الشعاع $\vec{A}$ على الشعاع $\vec{B}$.

3- أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاع $\vec{A}$ و $\vec{A}+\vec{B}$.

أوجد x و y حتى يكون C • متعامد مع • $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد.

التمرين 14.I:

ليكن في معلم متعامد ومتجانس Œ: $OXYZ$ $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}=3\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{Oc}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ $\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

1- أوجد الشعاعين $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Ob}$.

2- أحسب الزوايا المحصورة بين الشعاعين: $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}$ و الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.

3- أحسب مسقط الشعاع $\overrightarrow{Oa}$ على الشعاع $\overrightarrow{Ob}$.

4- أحسب زوايا التوجيه (جيوب تمام التوجيه) ل $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Ob}$.

5- أحسب مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.

6- أحسب حجم متوازي الوجوه المتشكل من الأشعة $\overrightarrow{Oa}$ ، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.

7- أوجد شرط انتماء الأشعة $\overrightarrow{Oa}$ ، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oc}$ إلى مستو واحد .

8- أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطتين a و b .

حلول التمارين : من (8.I) إلى (14.I)

حل التمرين 8.I :

$$\overrightarrow{grad}r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} \;......................(1)$$

حيث :
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{z}{r} \qquad , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

نعوض قيمة المشتقات الجزئية في المعادلة (1) فنحصل على:

$$\overrightarrow{grad}r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

لدينا:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right) = \frac{-1}{2}2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$$

و منه:
$$\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = -\left(\frac{x}{r^3}\vec{i} + \frac{y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{k}div\vec{r} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3$$

استعمال تعريف دوران شعاع نحسب:

$$\overrightarrow{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

بالنسبة إلى $\nabla^2 r$:
$$\nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} ....2$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

نعوض المشتقات في المعادلة 2 فنحصل على:

$$\nabla^2 r=\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

حل التمرين 9.I :

$\vec{V_1}=3\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$ $\vec{V_2}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{V_2}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$,

1- حساب طويلة الأشعة $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$

$$\left\|\vec{V_1}\right\|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{41}=6.40$$

$$\left\|\vec{V_2}\right\|=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{29}=5.38$$

$$\left\|\vec{V_3}\right\|=\sqrt{(5)^2+(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{35}=5.91$$

2- حساب مركبات و طويلة الأشعة $\vec{A}$ **و** $\vec{B}$حيث:

$\vec{B}=2\vec{V_1}-\vec{V_2}+\vec{V_3}$ و $\vec{A}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$

$$\vec{A}=10\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\left\|\vec{A}\right\|=\sqrt{(10)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{113}=10.63$$

$$\vec{B}=9\vec{i}-12\vec{j}+15\vec{k}\Rightarrow\left\|\vec{A}\right\|=\sqrt{(9)^2+(-12)^2+(15)^2}=\sqrt{450}=21.21$$

3- تعيين شعاع الوحدة المحمول على الشعاع شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$حيث :

$\vec{C}=\vec{V_1}+\vec{V_3}$

$$\vec{C}=\vec{V_1}+\vec{V_3}=8\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\vec{C}=\left\|\vec{C}\right\|.\vec{U}_c\Rightarrow\vec{U}_c=\frac{\vec{C}}{\left\|\vec{C}\right\|}=\frac{8\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}}{\sqrt{(8)^2+(-5)^2+(7)^2}}$$

$$\vec{U}_c=\frac{8}{\sqrt{138}}\vec{i}+\frac{-5}{\sqrt{138}}\vec{j}+\frac{7}{\sqrt{138}}\vec{k}$$

4- حساب الجداء السلمي لــ $\vec{V_1}.\vec{V_3}$

$$\vec{V_1}.\vec{V_3} = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_3} = 15+4+12 \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_3} = 31$$

-استنتاج الزاوية المحصورة بين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_3}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V_1}.\vec{V_3}}{\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_3}\|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{41}.\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha = 35.0$$

5- حساب الجداء الشعاعي $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$.

$$\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = (9-4)\vec{i} - (6+20)\vec{j} + (-2-15)\vec{k}$$

$$\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = 5\vec{i} - 26\vec{j} - 17\vec{k}$$

حل التمرين 10.I:

1- إيجاد الأشعة $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$:

$$\vec{V_2} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{V_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

-2 $\vec{V} \perp (\vec{V_1}, \vec{V_2}) \Leftarrow \vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

$$\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-3 $\vec{V_3} \in (\vec{V_1}, \vec{V_2}) \Leftarrow \vec{V_3} \perp \vec{V} \Leftarrow \vec{V_3}.\vec{V} = 0$

$$\vec{V_3}.\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-1 = 0 \Leftarrow \vec{V_3} \in (\vec{V_1}, \vec{V_2})$$

-4 إيجاد (X, Y) :

$$\vec{V_3} = X\vec{V_1} - Y\vec{V_2}$$

$$\vec{V_3} = X(\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) - Y(-\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{V_3} = (X+Y)\vec{i} + (4X+3Y)\vec{j} + (-2X-Y)\vec{k} = \vec{j} - \vec{k}$$

$$\begin{cases} X+Y=0 \\ 4X+3Y=1 \\ -2X-Y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=-Y \\ 4X+3Y=1 \Rightarrow X=1 \\ Y=-1 \end{cases}$$

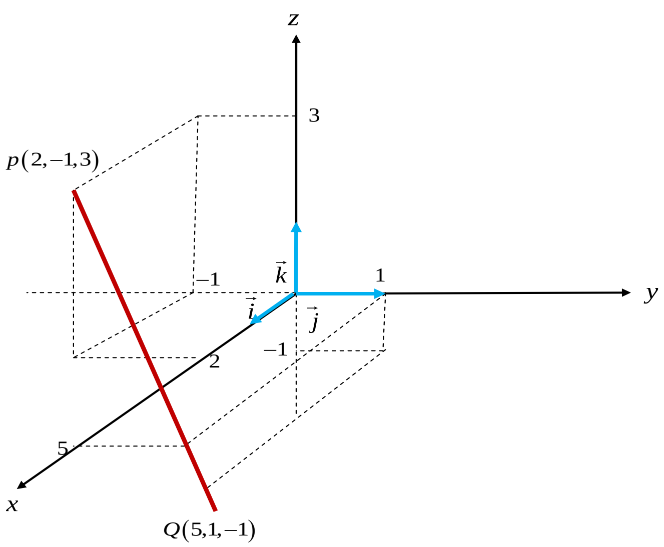
حل التمرين 11.I:

1- مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي:

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} X_Q-X_P \\ Y_Q-Y_P \\ Z_Q-Z_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

المسافة بين P و Q هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{PQ}$

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{(3)^2+(2)^2+(4)^2}=\sqrt{29}$$



الشكل (20.I)

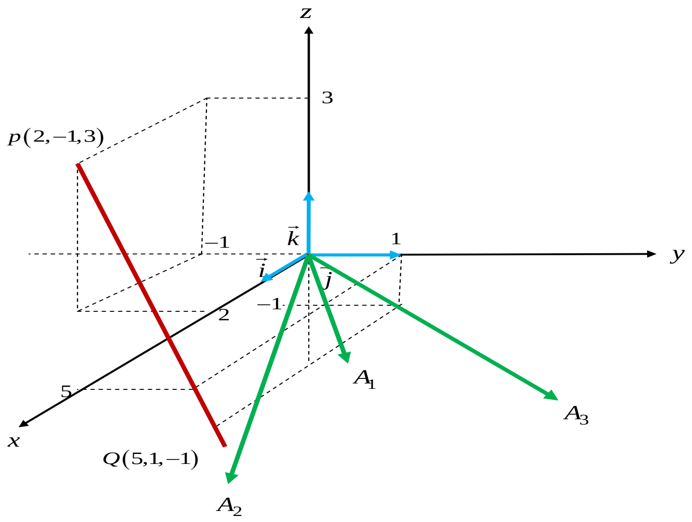
2- لشعاع $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}$ نحصل على شعاع الوحدة $\vec{U}$ كما يلي

$$\vec{U}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{-4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

3- تكون النقاط $A_1(3,2,0), A_2(3,0,-4), A_3(0,2,-4)$ وتكون الأشعة:

- $\overrightarrow{OA_1}$ يقع في المستوي (OXY) .

- $\overrightarrow{OA_2}$ يقع في المستوي (OXZ) .
- $\overrightarrow{OA_3}$ يقع في المستوي (OYZ) .



الشكل (21.I)

4- إحداثيات النقطة $B(x,y)$

أ- لشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_2}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right).\left(3\vec{i}-4\vec{k}\right)=3x=0$$

أي $x=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (oy) .

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عمودي على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$.

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_3}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right).\left(2\vec{i}-4\vec{k}\right)=2y=0$$

أي $y=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (ox) .

ت- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عمودي على الشعاع $\overrightarrow{OA_1}$

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA_1}=\vec{0}\Leftarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\Leftarrow 2x-3y=0$ أي تمثل معادلة مستقيم في المستوي (oxy) ميله $\frac{2}{3}$

حل التمرين 12.I :

1- $\vec{V}(t)=V_x(t)\vec{i}+V_y(t)\vec{j}+V_z(t)\vec{k}\Rightarrow\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dV_x}{dt}\vec{i}+\frac{dV_y}{dt}\vec{j}+\frac{dV_z}{dt}\vec{k}$

$$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}$$

نلحظ إذن أن : $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| \neq \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$ و تحدث المساواة إذا كانت الزاوية $\left(\vec{V},\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=0$ وهي حالة خاصة

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{(V_x)^2+(V_y)^2+(V_z)^2} = \frac{V_x\frac{dV_x}{dt}+V_y\frac{dV_y}{dt}+V_z\frac{dV_z}{dt}}{\sqrt{(V_x)^2+(V_y)^2+(V_z)^2}}$$

- يمكن إعادة كتابة العلقة الأخيرة من الشكل:

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}\|\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}.\cos\left(\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)}{\|\vec{V}\|} \quad \Rightarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.\cos\left(\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)$$

2- لتكن عبارة الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|.\cos\left(\vec{V},\vec{V}\right) = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|$ نشتقها فنجد:

$$\frac{d\left(\vec{V}.\vec{V}\right)}{dt} = \frac{d\left(\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|\right)}{dt} = 2\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = 2\|\vec{V}\|\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \Rightarrow \vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = \|\vec{V}\|\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

1- في حالة $\|\vec{V}\| = Cst \Rightarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = 0$ و حسب العلقة (2) نجد : $\Rightarrow \vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow V \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$

2- لدينا : $\vec{V}(t) = \left(3t^2+2\right)\vec{i} + \left(t^3-5\right)\vec{j} + \left(3t^2-5t\right)\vec{k}$

أ- $\frac{dV}{dt} = 6t\vec{i} + \left(3t^2\right)\vec{j} + (6t-5)\vec{k}$ و $\frac{d^2V}{dt^2} = 6\vec{i} + 6t\vec{j} - 6\vec{k}$

ب- $\left\|\frac{dV}{dt}\right\| = \sqrt{(6t)^2+\left(3t^2\right)^2+(6t-5)^2}$ و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{\left(3t^2+2\right)^2+\left(t^3-5\right)^2+\left(3t^2-5t\right)^2}\right)}{dt}$$

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{5t^5+36t^3-60t^2+37t}{\sqrt{\left(3t^2+2\right)^2+\left(t^3-5\right)^2+\left(3t^2-5t\right)^2}}$$

نلاحظ أن: $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| \neq \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$

ت- في حالة $t=5s$ نجد أن :

$$\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{(6\times5)^2+(3\times25)^2+(6\times5-5)^2}=\sqrt{7150}=84.56$$

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{3(5)^5+36(5)^3-60(5)^2+37(5)}{\left(3(5)^2+2\right)^2+\left((5)^3-5\right)^2+\left(3(5)^2-5(5)^2\right)^2}=83.128$$

نلاحظ الفرق بين القيمتين .

حل التمرين 13.I:

-1 $$\vec{A}+\vec{B}=(-2+2)\vec{i}+(1-1)j+(3+1)\vec{k}=4\vec{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=(-2).(2)+(1).(-1)+(3).(1)=-2$$

$$\vec{A}.\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=(4).(3)=12$$

-1 $$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{14}\quad,\quad\left|\vec{B}\right|=\sqrt{6}\qquad\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=4\quad P_{\vec{A}/\vec{B}}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}=\frac{-2}{\sqrt{6}}$$

-2 $$\cos\left(\vec{A},\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{\vec{A}.\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{\left|\vec{A}\right|.\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\right|}=\frac{12}{\sqrt{144}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

-3 $$\vec{C}\perp\vec{A}\Rightarrow\vec{A}.\vec{C}=0\Rightarrow\vec{A}.\vec{C}=-2x+1+-3y=0$$

$$\vec{C}\perp\vec{B}\Rightarrow\vec{B}.\vec{C}=0\Rightarrow\vec{B}.\vec{C}=2x-1+-y=0$$

بحل جملة المعادلة نجد: $x=\frac{1}{2}$ و $y=0$

حل التمرين 14.I:

1 - $$\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}=3\vec{i}+\vec{k};\ \left|\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}\right|=\sqrt{10}\ ;\ \overrightarrow{oa}-\overrightarrow{ob}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k};\ \left|\overrightarrow{oa}-\overrightarrow{ob}\right|=\sqrt{6}$$

بجمع المعادلتين: $\left|\overrightarrow{Ob}\right|=\sqrt{2}$ $\qquad 2\overrightarrow{Oa}=2\vec{i}+\overrightarrow{2j}\Rightarrow\overrightarrow{Oa}=\vec{i}+\vec{j}$

طرح المعادلتين: $\left|\overrightarrow{Ob}\right|=\sqrt{6}$ $\qquad 2Ob=4\vec{i}-\overrightarrow{2j}+2\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{Ob}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

$$\cos\left(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Oa}.\left(\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)}{\left|\overrightarrow{Oa}\right|.\left|\left(\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)\right|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

-2

$$\cos\left(\overrightarrow{Ob},\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Ob}.\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)}{\left|\overrightarrow{Ob}\right|.\left|\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)\right|}=\frac{7}{2\sqrt{15}}$$

-3 $$P_{\overrightarrow{Oa}/\overrightarrow{Ob}}=\left|\overrightarrow{Oa}\right|\cos\left(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Oa}.\overrightarrow{Ob}}{\left|\overrightarrow{Ob}\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

-4 من أجل $\overrightarrow{Oa}$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0$$

من أجل $\overrightarrow{Ob}$:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}},\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{6}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

-5

$$S=\left|\overrightarrow{Ob}\times\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{Ob}\times\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)\right|=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&1\\3&0&1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow S=\sqrt{11}$$

-6 $$V=\left|\overrightarrow{Oa}.\left[\overrightarrow{Ob}\times\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)\right]\right|=0$$

$$\overrightarrow{Oc}.\left(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}\right)=0$$

$$\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Oc}.\left(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}\right)=x-y-3z=0$$

7 - شرط انتماء الأشعة $\overrightarrow{Oa}$ ، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oc}$ إلى مستوي واحد هو : $x-y-3z=0$:

$$\overrightarrow{aM}\times\overrightarrow{ab}=0$$

حيث : $\overrightarrow{aM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{ab}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{aM}\times\overrightarrow{ab}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x-1 & y-1 & z\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(y+2z-1)\vec{i}+(x-z-1)\vec{j}+(-2x-2y+3)\vec{k}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} y+2z-1=0\\ x-z-1=0\\ -2x-2y+3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} z=x-1\\ y=3-2x\end{pmatrix}$$ معادلة مستقيم

ـ الأنظمة الرئيسية للإحداثيات

1- المرجع و المعلم :

لا يمكن دراسة حركة جملة مادية دون تحديد مرجع لذلك .ان المرجع جسم صلب يرتبط دوما بمعلمين :

- معلم فضائي $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ الشكل , مختار بحيث يكون وصف الحركة ابسط ما يمكن .
- معلم للزمن : مبدأ الأزمنة يختار عادة بحيث يتطابق مع لحظة بداية الحركة .

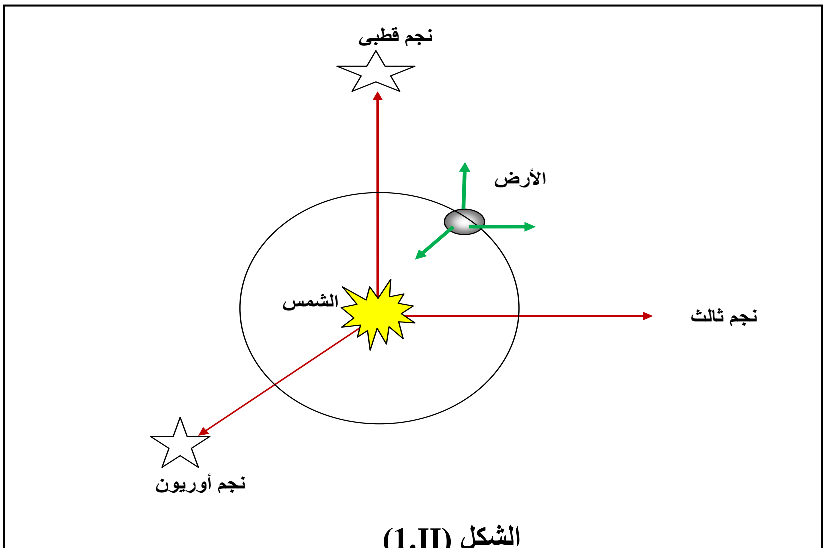
1 ـ أ ـ المراجع العطالية أو الغاليلية : Repères d'inertie ou galiléens

لا يطبق مبدأ العطالة إلا في بعض المراجع التي تدعى بالمراجع الغاليلية . قبل حل مسألة في الميكانيك يجب التأكد من أن المرجع المختار لدراسة حركة مركز عطالة جملة غاليلي.

1- ب - المراجع العملية :

- **المرجع الهيليومركزي :المرجع المركزي الشمسي**

معلم بثلاثة محاور موجهة نحو ثلاثة نجوم ومبدؤه مركز الشمس **الشكل (1.II)**, نعتبر هذه النجوم فيه تقريبا ساكنة بالنسبة للشمس خلال مدة طويلة .

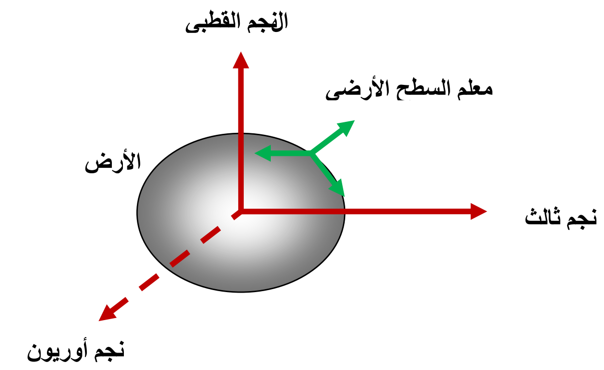


الشكل (1.II)

يستعمل في دراسة حركة الكواكب .المذنبات و بعض المركبات الفضائية فهو يشكل معلما غاليليا إلى حد كبير .

- **المرجع الجيومركزي : المرجع المركزي الأرضي**

معلم له مبدأ في مركز الأرض و ثلاثة محاور موازية لمحاور المعلم الشمسي **الشكل (2.II)** . أي موجهة لنفس النجوم الثابتة (لا تدور مع دوران الأرض) .



الشكل (2.II)

فهو غاليلي بكفاية لدراسة حركة القمر و الأقمار الاصطناعية و بعض الحركات الأرضية .

- **المرجع السطحي الأرضي :**

معلم مرتبط بسطح الأرض و اعتباره غاليليا اقل دقة من سابقيه , لكنه عطالي بالكفاية التي تسمح بدراسة معظم الحركات الجارية على للأرض خلال مدات زمنية قصيرة مقارنة بمدة دوران الأرض .

2 - جمل الإحداثيات في المستوى :

1-2 - جملة الإحداثيات الديكارتية :

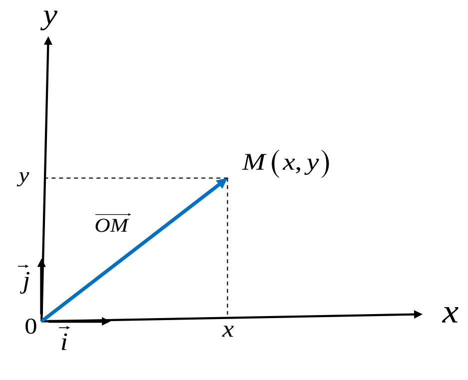
في هذه الجملة يحدد موقع أي نقطة M بإحداثيتين (x,y) أو بشعاع الموقع : **الشكل (3.II)**

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}}\ ....(1.II) \quad \text{مع} \quad \boxed{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}}\ ....(2.II)$$

تتميز هذه الجملة بكون أشعة الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ لقاعدة الإسناد $O(\vec{i},\vec{j})$ المتعامدة المتجانسة ثابتة .

أي :

$$\boxed{\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{0}}\ ....(3.II)$$

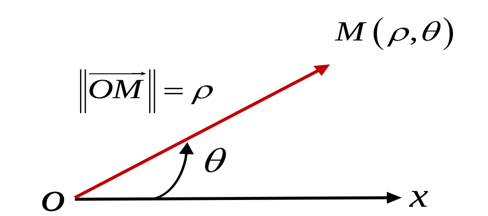


الشكل (3.II)

2-2 - جملة الإحداثيات القطبية : الشكل (4.II)

لتعريف هذه الجملة نأخذ نقطة O كمبدأ و المحور $\overrightarrow{Ox}$.

المبدأ O يسمى القطب و المحور $\overrightarrow{Ox}$ المحور القطبي .



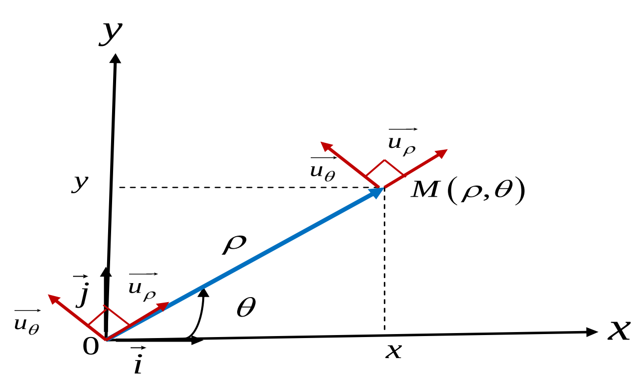
الشكل (4.II)

أي نقطة M من المستوى يحدد موقعها في هذه الجملة بالمسافة ρ التي تبعد بها عن القطب O و الزاوية التي يشكلها الشعاع $\overrightarrow{OM}$ مع المحور $\overrightarrow{Ox}$. ومنه : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$ و $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right) = \theta$.

لتحديد مواقع جميع نقاط المستوي يجب : $\rho \in [0,\infty[$ و $\theta \in [0,2k\pi]$

عند المرور من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية أو العكس نختار المحور القطبي $\overrightarrow{Ox}$ هو نفسه المحور $\overrightarrow{Ox}$ للأحداثيات الديكارتية. علاقة المرور هي : **الشكل (5.II)**

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}} \text{..........(4.II)} \quad \text{أو :} \quad \boxed{\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &tg\theta = \frac{y}{x} \end{aligned}} \text{..........(5.II)}$$



الشكل (5.II)

- أشعة الواحدة للمعلم القطبي $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ للمعلم القطبي $\left(o,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta\right)$ تعرف كما يلي :

- $\vec{u}_\rho$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$ أي : $\vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$ إذن شعاع الموقع في

الأحداثيات القطبية يكتب دائما : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$.

$\vec{u}_\theta$ نحصل عليه بدوران $\vec{u}_\rho$ بزاوية $\dfrac{\pi}{2}$ في اتجاه دوران الزاوية θ (كما في الشكل 5.II)

- الشعاع في الاحداثيات الديكارتية يكتب :

$$\boxed{\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\rho} = \frac{\rho\cos\theta\vec{i} + \rho\sin\theta\vec{j}}{\rho}} \text{..........}(6.\text{II})$$

أي : $\boxed{\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}}$ ....(7.II) أو $\boxed{\vec{u}_\rho\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}}$ ....(8.II)

بما أن $\vec{u}_\theta$ هو $\vec{u}_\rho$ بدوران $\dfrac{\pi}{2}$ فإنه يكتب :

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\rho\left(\theta = \theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}} \text{..........}(9.\text{II})$$

إذن : $\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}}$ ....(10.II) أو $\boxed{\vec{u}_\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}}$ ....(11.II)

- يتميز المعلم القطبي $\left(o,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta\right)$ بكون أشعة الواحدة $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ غير ثابتة , فعندما تنتقل النقطة M من موقع إلى موقع أخر فان الزاوية θ تتغير و يتغير معها اتجاهي $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ و نتيجة لذلك فان مشتقات $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ ليست معدومة . عندما نشتق بالنسبة للمتغير t لدينا :

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta} \text{..........}(12.\text{II})$$

إذن : $\boxed{\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta}$ ....(13.II) $\boxed{\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt}}$ ....(14.II)

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \theta'.\vec{u}_\theta \;\; ; \;\; \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho = -\theta'.\vec{u}_\rho} \text{.....}(15.\text{II})$$

مثال (1.II):

- أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $M_1\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$

الجواب : للإنتقال من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية أي : $(x,y)\leftarrow(\rho,\theta)$ لدينا:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=6\cos\frac{\pi}{6}=6\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3} \\ y=\rho\sin\theta=6\sin\frac{\pi}{6}=6\frac{1}{2}=3 \end{cases}$$

$$M_1\left(3\sqrt{3},3\right)\leftarrow M_1\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$$

3 - جمل الأحداثيات في الفضاء :

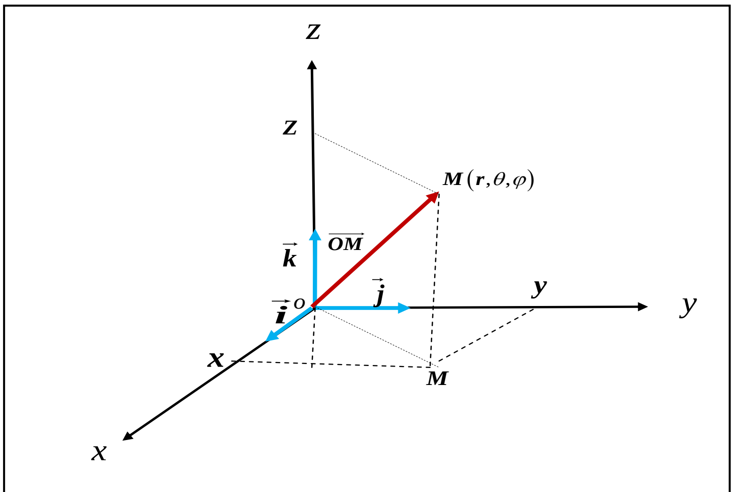
3-1- الإحداثيات الديكارتيـــــة : (Coordonnées cartésiennes)

لتكن M نقطة في معلم ثلثي الأبعاد (O,X,Y,Z) المزود بالقاعدة المتعامدة والمتجانسة والمباشرة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (x,y,z) **الشكل (6.II)** هي الإحداثيات الديكارتية للنقطة M وفي نفس الوقت هي الإسقاطات العمودية على المحاور Oz,Oy,Ox كذلك هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$ بحيث:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}\text{..........}(16.\text{II})$$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{.........}(17.\text{II})$$



الشكل (6.II)

3 -2 - الإحداثيات الأسطوانية : Coordonnées cylindriques

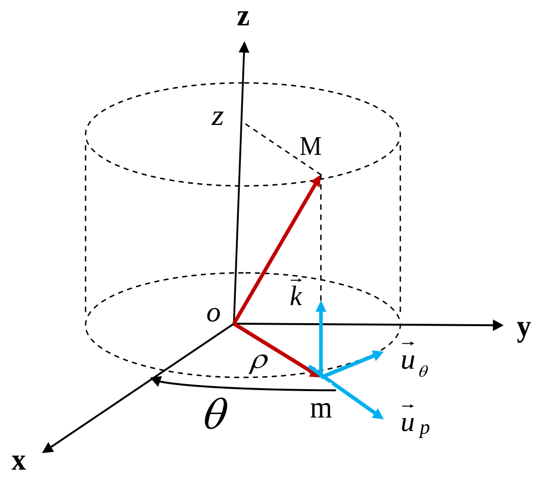
نظام الإحداثيات الأسطوانية هو نظام إحداثيات قطبي ثلاثي الأبعاد حيث يتم تمثيل نقطة M في نظام

الإحداثيات الأسطوانية ب$M(\rho,\theta,z)$ في القاعدة $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k})$. يعبر عن النقطة M باستخدام مصطلحات النظام الديكارتي كما يلي:

- ρ : لبعد عن المحور OZ , $(\rho \geq 0)$
- θ : زاوية الدوران حول المحور OZ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- z : هو المسافة ذات الإشارة (الموجبة أو السالبة) بين المستوي oxy و النقطة M حيث : $(-\infty \leq z \leq +\infty)$

3-2-أ- شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$: يكتب كما يلي   **الشكل (7.II)**

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}} \text{..........}(18.\text{II})$$



الشكل (7.II)

3 -2- ب - عبارة $M(\rho,\theta,z)$ **في المعلم الكارتيزي:**

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arc\cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = arc\sin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}} \text{..........}(19.\text{II})$$

ملاحظة : القاعدة $\left(\vec{U}_{\rho},\vec{U}_{\theta},\vec{k}\right)$ متعامدة متجانسة ومباشرة حيث: $\vec{k}=\vec{U}_{\rho}\wedge\vec{U}_{\theta}$

حيث : القاعدة الأسطوانية متعامدة و متجانسة ومباشرة.

$$\boxed{\begin{cases}\vec{u}_{\rho}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\\ \vec{u}_{\theta}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\\ \vec{k}=\vec{k}\end{cases}}\quad ....(20.II)$$

مثال (2.II):

أوجد الإحداثيات الأسطوانية للنقطة : $M\left(2,3,1\right)$

الحل : للإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية أي : $\left(\rho,\theta,z\right)\leftarrow\left(x,y,z\right)$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

لدينا : $\theta=arctg\dfrac{y}{x}=arctg\dfrac{3}{2}\Rightarrow\theta=56.30^0,z=1$

$$\left(\sqrt{13},56.30^0,1\right)\leftarrow\left(2,3,1\right)$$

4 - الإحداثيات الكروية : Coordonnées Sphériques

يُحدد موضع النقطة المادية M في الإحداثيات الكروية بالتوابع السلمية $\left(r,\theta,\varphi\right)$ و تكتب المقادير الشعاعية وفق اتجاهات أشعة الوحدة $\left(\vec{U}_r,\vec{U}_{\theta},\vec{U}_{\varphi}\right)$. **الشكل (8.II) ، الشكل (9.II)**

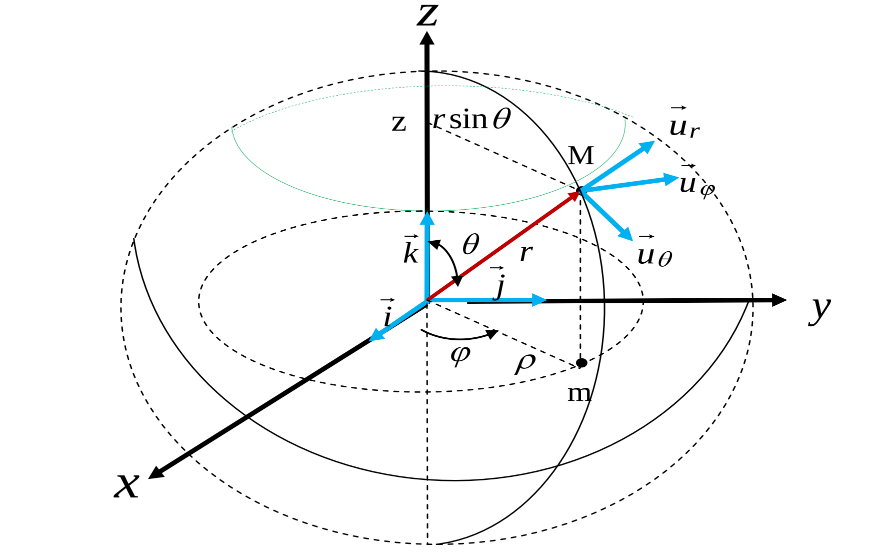
يكتب شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}}\quad ....(21.II)$$

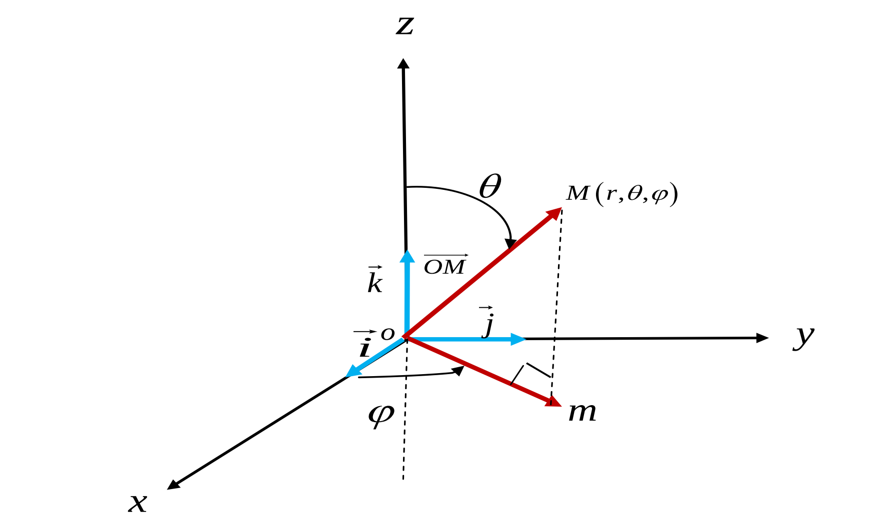
m هو إسقاط M في المستوى Oxy .

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{Om}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{mM}\right\|^2=\rho^2+z^2}\quad ....(22.II)$$

$$\boxed{r^2=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2=x^2+y^2+z^2\Rightarrow\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad ....(23.II)$$



الشكل (8.II)



الشكل (9.II)

لدينا :

$$\begin{cases} \theta\left(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM}\right): 0 \le \theta \le \pi \\ \varphi\left(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{Om}\right): 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \infty \end{cases} \quad ....(24.II)$$

و

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad ......(25.II)$$

علما أن : $\rho = r\sin\theta$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}} \text{........}(26.II)$$

4 - أ - إيجاد (r,θ,φ) في المعلم الديكارتي (O,X,Y,Z) :

$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \varphi = \pm Arc\cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm Arctg\dfrac{y}{x} \\ \theta = \pm Arc\cos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm Arctg\dfrac{\rho}{z} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}} \text{...........}(27.II)$$

4- ب - أشعة الوحدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ بدلالة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عبارة $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكروية: $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r}$ ....(28.II)

عبارة $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكارتيزية: $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$ ....(29.II)

حيث: $\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$ ......(30.II) و $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r \Rightarrow \vec{U}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}}$ ....(31.II)

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r \Rightarrow \vec{U}_r &= \frac{r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}}{r} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \end{aligned}} \text{...........}(32.II)$$

بما أن $\vec{U}_r \perp \vec{U}_\theta$:

- يكفي إضافة $\dfrac{\pi}{2}$ إلى θ لإيجـــاد $\vec{U}_\theta$
- نحصل على $\vec{U}_\varphi$ بـ : $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

$$\boxed{\vec{U}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}} \text{...........}(33.II)$$

نلاحظ بالفعل أن القاعدة مباشرة.

مثال (3.II): أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة : $M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$

الحل : للإنتقال من

الإحداثيات الكروية إلى

الإحداثيات الكارتيزية

أي:

$(x,y,z)\leftarrow(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi = 5\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = r\sin\theta\sin\varphi = 5\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ z = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{6} = 5\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$M\left(5\frac{\sqrt{2}}{4},5\frac{\sqrt{2}}{4},5\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\leftarrow M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$$

5 - الإنتقالات العنصرية في جمل الإحداثيات:

5- أ- الإحداثيات الديكارتية: الشكل (10.II)

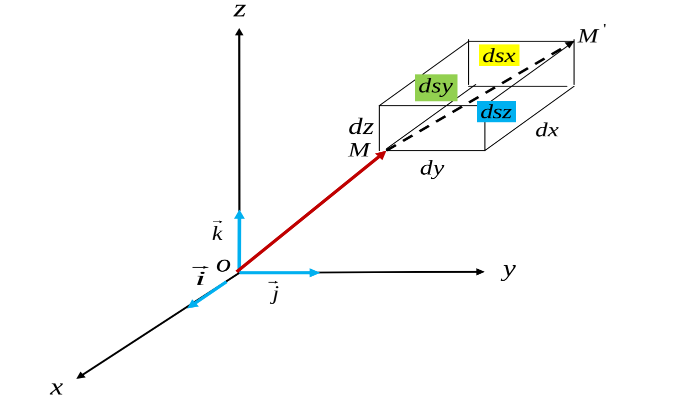
عبارة عن ثلاثية مباشرة متعامدة و متجانسة نرمز للإحداثيات الكارتيزية بالمقادير (x,y,z) والمبدأ عادة بـ O مزود بأشعة الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إحداثيات النقطة M في الفضاء تعطى بدلالة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث: $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$.........(34.II)

في الإحداثيات الكارتيزية الإنتقال المتناهي في الصغر يمكن تحليله إلى ثلاثة إنتقالات صغيرة جدا وفق أشعة الوحدة حيث يكون إنتقال النقطة M خلل زمن عنصري dt كما يلي:

$\boxed{d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}}$..........(35.II)

إي أن الإنتقال يكون على المحاور الثلاثة .

و الطول العنصري هو : $\boxed{\left\|d\vec{r}\right\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$..........(36.II)



الشكل (10.II)

المساحة العنصرية : $dS_z = dx.dy$ $\quad dS_y = dx.dz$ $\quad dS_x = dy.dz$

الحجم العنصري : $dV = dx.dy.dz$

5-ب- الإحداثيات القطبيـــــــة: الشكل (11.II)

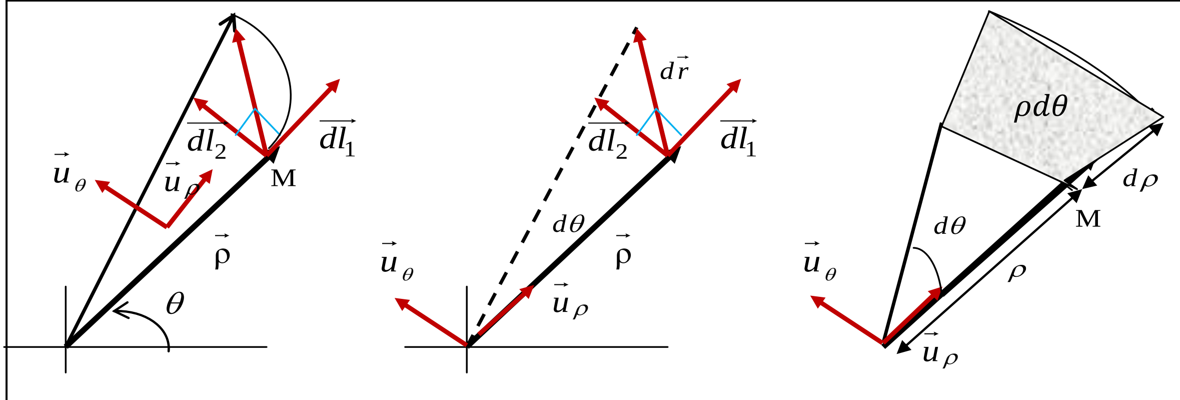
عندما تتم الحركة في مستوي، فإن تعيين موضع المتحرك M في الإحداثيات الكارتيزية يستدعي بعدين $x(t)$ و $y(t)$ مثلا. لكن في بعض الحالات و لتبسيط الحساب نفضل استعمال المعلم القطبي و هو معلم إحداثياته $(\rho(t),\theta(t))$ تُدعى الإحداثيات القطبية وأشعة وحدته $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$.

لتكن النقطة $M(\rho,\theta)$ معرفة في القاعدة القطبية $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$ حيث يكتب شعاع الموضع:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{U}_\rho} \quad (37.II)$$

- الإنتقال العنصري في الإحداثيات القطبية يكافئ مجموع إنتقالين عنصريين متعامدين فيما بينهما أحدهما قطري و الآخر عرضي.

$$\boxed{d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}} \quad (38.II) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{d\vec{r} = dl_1\vec{U}_\rho + dl_2\vec{U}_\theta} \quad (39.II)$$



الشكل (11.II)

الإنتقال القطري $\overrightarrow{dl_1}$: هو إنتقال ناتج عن تغير ρ في الطول بالمقدار $d\rho$ مع ثبات الزاوية θفهو وفق اتجاه $\vec{U}_\rho$.

$$\boxed{\overrightarrow{dl_1} = d\rho\vec{U}_\rho} \text{..........(40.II)}$$

الإنتقال القطري $\overrightarrow{dl_2}$: هو إنتقال ناتج عن تغير $\vec{\rho}$ في الاتجاه بسبب تغير الزاوية θبالمقدار $d\theta$ مع ثبات الطول ρ و التغير في هذه الحالة يتم وفق دائرة نصف قطرها ρ بإزاحة عنصرية $\overrightarrow{dl_2} = \rho d\theta$ محمولة على $\vec{U}_\theta$.

$$\boxed{\overrightarrow{dl_2} = \rho d\theta\vec{U}_\theta} \text{...........(41.II)}$$

- أما الإنتقال العنصري الكلي فهو المجموع:

$$\boxed{d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\theta\vec{U}_\theta} \text{.........(42.II)}$$

- طول الإنتقال العنصري:

$$\boxed{\left\|d\vec{r}\right\| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}} \text{..........(43.II)}$$

مثال (4.II): أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R .

الإجابة:

- محيط الدائرة : $dl = \int_0^{2\pi} Rd\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow l = 2\pi R$
- مساحة الدائرة: $ds = \rho d\rho d\theta \Rightarrow s = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \Rightarrow s = \pi R^2$

5-ج- **الإحداثيات الأسطوانية: الشكل (12.II)**

$M\left(\rho,\theta,z\right)$معرفة في المعلم $\left(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k}\right)$ يكتب شعاع الموضع كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}} \text{..........(44.II)}$$

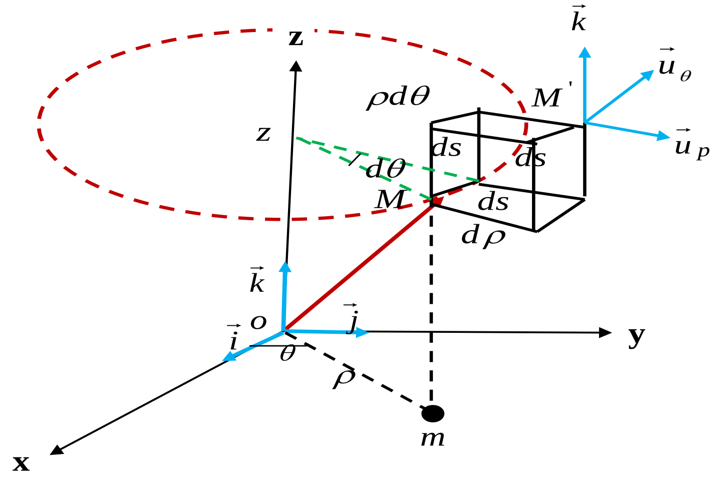
الإنتقال العنصري في الإحداثيات الاسطوانية يكافئ مجموع ثلثة إنتقالات عنصرية متعامدة في الاتجاهات الثلث $\left(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k}\right)$.

يكون إنتقال M العنصري في القاعدة $\left(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k}\right)$ بالتغيير في كل من:

$$\rho \to d\rho \quad , \quad \theta \to \rho d\theta \quad , \quad z \to dz$$

إنتقال الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ يكون كما يلي:

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr = d\rho.\vec{u}_\rho + \rho d\theta.\vec{u}_\theta + dz\vec{k}} .....(45.II) \qquad \boxed{dr = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}} .....(46.II)$$



الشكل (12.II)

مثال (5.II): أحسب باستعمال الإحداثيات الأسطوانية المساحة الجانبية و حجم الاسطوانة للاسطوانة نصف قطرها R .

الإجابة :

- المساحة الجانبية للأسطوانة : $ds = Rd\theta dz \Rightarrow s = \iint Rd\theta dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \Rightarrow s = 2\pi Rh$
- حجم الأسطوانية : $dV = \rho d\rho d\theta dz \Rightarrow V = \iiint \rho d\rho d\theta dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \Rightarrow V = \pi R^2 h$

5-د - الإحداثيات الكروية: **الشكل (13.II)**

تعرف $M(r,\theta,\varphi)$ في القاعدة الكروية $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r} ....(47.II)$$

يكون إنتقال M العنصري في القاعدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ بالتغيير في كل من:

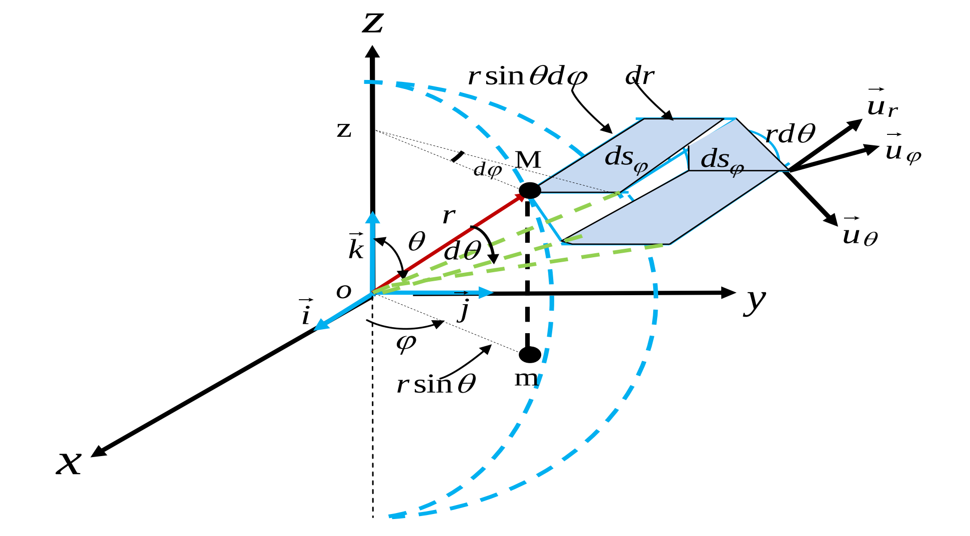
$$r \to dr \quad , \quad \theta \to rd\theta \quad , \quad \varphi \to \rho d\varphi$$

يكون إنتقال M في الفضاء بالتحرك في كل الاتجاهات حيث أن شعاع الإنتقال أو الإزاحة يكتب:

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{U}_r + rd\theta\overrightarrow{U}_\theta + \rho d\varphi\overrightarrow{U}_\varphi} \text{..........}(3.48)\ \rho(\ 48.\text{II}\ )$$

بما أن :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{dr}\right\| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}} \text{..........}(\ 49.\text{II}\ )$$



الشكل (13.II)

مثال (6.II): احسب باستعمال الإحداثيات الكروية مساحة و حجم كرة نصف قطرها R .

- مساحة الكرة : $ds = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$$s = \iint R^2\sin\theta d\theta d\varphi = R^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-\cos\theta]_0^\pi + [\varphi]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow s = 4\pi R^2$$

- حجم الكرة : $dV = dr.rd\theta.r\sin\theta d\varphi \Rightarrow V = \iiint r^2 dr\sin\theta d\theta.d\varphi$

- $$V = \int_0^R r^2 dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

تمارين : من (1.II) إلى (5.II)

تمرين 1.II :

أوجد الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية للنقطة M المعطاة بالإحداثيات الكروية كما يلي:

$$M\left(4,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$

تمرين 2.II :

أوجد الإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكروية للنقطة M المعطاة ديكارتياً بالإحداثيات $M(-1,1,1)$

تمرين 3.II :

تتحرك النقطة M على مسار معادلته في الإحداثيات القطبية من الشكل: $\rho = a.\theta$ حيث أن a ثابت موجب . - شكل جدول تغير ρ بدلالة θ ثم أرسم هذا المسار في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.

التمرين 4.II:

تكتب معادلة مسار النقطة المادية M في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلقة $\rho = Cst$ و $z = a.\theta$ حيث أن a ثابت موجب . أرسم هذا المسار من أجل $0 \le \theta \le 4\pi$ ثم مثل أشعة الوحدة عند النقطة $\left(\theta_0 = 4\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

التمرين 5.II:

تعطى حركة جسيم بالنسبة إلى مرجع (R) بالمعادلات الوسيطية التالية في النظام الكارتيزي للإحداثيات (x,y,z) :

$$x = a\cos wt \quad , \quad y = a\sin wt \quad , \quad z = h$$

حيث : a,w,h ثوابت موجبة .

1- ما هو مسار مسقط موضع الجسيم النقطة M' في المستوي (Oxy) (تعريف كل خصائصه) ؟

2- ما هو مسار الجسيم في المرجع (R) (تعريف كل خصائصه) ؟

3- حدد في لحظة ما t و في المرجع (R) عبارات كل من شعاع الموضع $\vec{r}$, شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ في : أ) الأساس الكارتيزي $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ب) الأساس الأسطواني $(\vec{u}_p,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ ج) الأساس الكروي $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$

4- جد قيمة انحناء المسار إنطلاقا من قيمتي السرعة و ا

حلول التمارين : من (1.II) إلى (5.II)

حل التمرين 1.II :

من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والكروية نجد: $z=\rho\cos\varphi \quad , \quad \rho=4$

$$\rho=4 \qquad \varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow z=4\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$r^2=\rho^2-z^2=16-4=12 \qquad \Rightarrow r=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$x=r\cos\theta\Rightarrow x=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\sqrt{3}$$

$$y=r\sin\theta\Rightarrow y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow y=3$$

وعليه تكون الإحداثيات الديكارتية للنقطة M هي : $M\left(\sqrt{3},3,2\right)$

وتكون الإحداثيات الأسطوانية هي : $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3},2\right)$

حل التمرين 2.II :

2- الإحداثيات الأسطوانية: $r=\sqrt{y^2+x^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{-1}=-1\Rightarrow\theta=arctg\left(-1\right)\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4} \quad , \quad z=1$$

وعليه الإحداثيات الأسطوانية : $M\left(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4},1\right)$

3- الإحداثيات الكروية:

$$\rho=\sqrt{y^2+x^2+z^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \quad , \quad \theta=-\frac{\pi}{4}$$

$$tg\varphi=\frac{r}{z}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}\Rightarrow\varphi\,\square\,\frac{11\pi}{36}$$

وعليه تكون الإحداثيات الكروية: $M\left(\sqrt{3},-\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{36}\right)$

حل التمرين 3.II:

- جدول تغير ρ بدلالة θ لمعادلة المسار $\rho=a.\theta$ في المجال $0\le\theta\le2\pi$

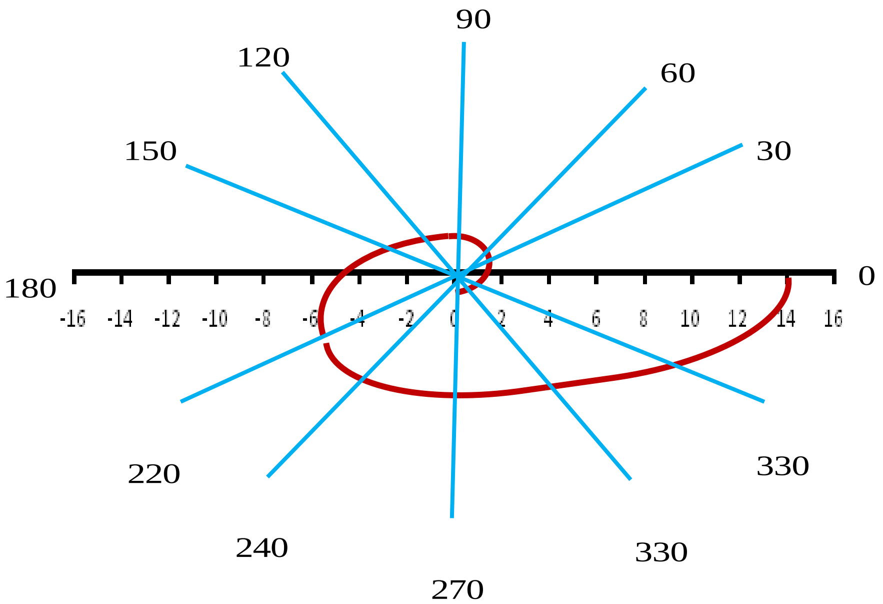
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
ρ	0	$\frac{a\pi}{6}$	$\frac{a\pi}{4}$	$\frac{a\pi}{3}$	$\frac{a\pi}{2}$	$\frac{2a\pi}{3}$	$\frac{3a\pi}{4}$	$\frac{5a\pi}{6}$	$a\pi$	$\frac{7a\pi}{6}$	$\frac{5a\pi}{4}$

θ	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	$\frac{4a\pi}{3}$	$\frac{3a\pi}{2}$	$\frac{5a\pi}{3}$	$\frac{7a\pi}{4}$	$\frac{11a\pi}{6}$	$2a\pi$

- من الناحية العملية يجب تحديد قيمة الثابت a لكي نستطيع رسم المنحني، نأخذ مثل $a = 2.5$

θ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
ρ	0	1.31	2.62	3.92	5.23	6.54	7.85	9.16	10.47	11.78	13.08	14.39	15.70

- رسم المسار $\rho = a.\theta$ في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$

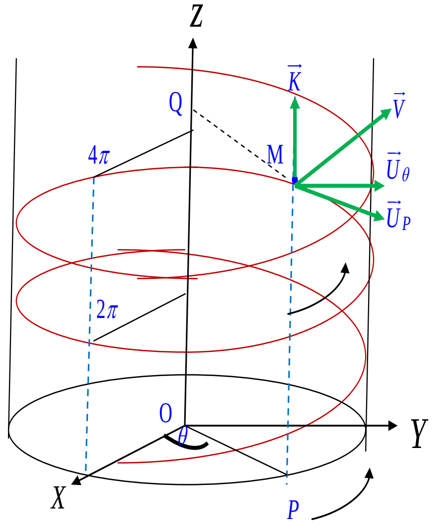


الشكل (14.II)

حل التمرين 4.II :

هنا الحركة لولبية تصاعدية منتظمة تتم على مسار منتظم متكئ على أسطوانة شاقولية محورها OZ و تساوي $2a\pi$. المسافة الشاقولية بين حلقتين متتاليتين تكون دائما ثابتة و .

عند الزاوية $\theta_0 = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ تكون النقطة M قد قامت بدورتين كاملتين و زاوية $\frac{\pi}{3}$



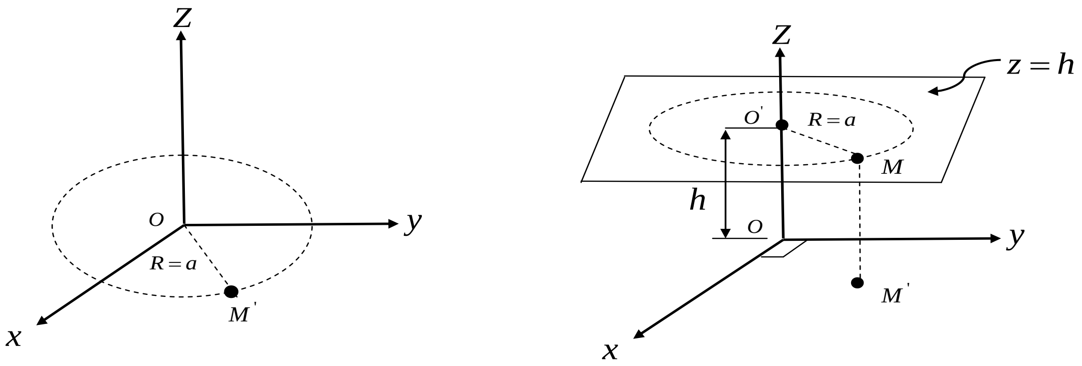
الشكل (15.II)

- نلاحظ كذلك أن السرعة تكون مائلة و تصنع زاوية معينة مع شعاع الوحدة $\vec{U}_\theta$.

حل التمرين 5.II :

1- لدينا من المعادلات الوسيطية : $x^2 + y^2 = a^2$ و احداثيات النقطة M' مسقط موضع الجسم في المستوي (Oxy) : $M'(x,y,o)$ و بالتالي مسارها عبارة عن دائرة مركزها النقطة مبدأ المرجع و نصف قطرها $R = a$.

2- $z = h \leftarrow$ يتحرك الجسيم في مستوى مواز للمستوي (Oxy) و المبتعد عنه بمسافة $oo' = h$ و بالتالي مسار الجسم عبارة عن دائرة مركزها النقطة (o') الواقعة على المحور Oz بحيث $oo' = h$ ونصف قطرها $R = a$ و واقعة في المستوي الذي معادلته المرجع (R) من الشكل $z = h$.



الشكل (16.II)

3- عبارات كل من شعاع الموضع $\vec{r}$, شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$:

أ) في الأساس الكارتيزي $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a\cos wt\vec{i} + a\sin wt\vec{j} + h\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -aw\sin wt\vec{i} + aw\cos wt\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -aw^2\sin wt\vec{i} - aw^2\sin wt\vec{j}$$

ب) في الأساس الأسطواني :

$$M\begin{cases}\rho = a\\ \varphi = wt\\ z = h\end{cases}$$

لدينا :

$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z = \sqrt{x^2+y^2}\ \vec{u}_\rho + h\vec{u}_z = a\vec{u}_\rho + h\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_\rho + h\vec{u}_z\right) = a\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = a\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = aw\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi\right) = aw\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -aw\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = -aw^2\vec{u}_\varphi$$

ج) الأساس الكروي $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$

$$M\begin{cases}r = \sqrt{a^2+h^2}\\ \theta = arctg\,\frac{a}{h}\\ \varphi = wt\end{cases}$$

لدينا :

$$\vec{r} = r\vec{u}_r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \vec{u}_r + \sqrt{a^2+h^2}\ \vec{u}_r$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{a^2+h^2}\ \vec{u}_r\right)=\sqrt{a^2+h^2}\,\frac{d\vec{u}_r}{dt}\Rightarrow\vec{v}=\sqrt{a^2+h^2}\left(\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}_\varphi\right)=aw\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(aw\vec{u}_\varphi\right)=aw\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\Leftrightarrow\vec{a}=aw\left[-\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{u}_r+\cos\theta\vec{u}_\theta\right)\right]$$

$$\vec{a}=-\frac{a^2w^2}{\sqrt{a^2+h^2}}\vec{u}_r-\frac{ahw^2}{\sqrt{a^2+h^2}}\vec{u}_\theta$$

$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v^2}{\sqrt{a^2-a_t^2}}=\frac{v^2}{\sqrt{a^2-\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}=a$$ -1

حيث : $|\vec{v}|=aw$, $a_t=0$, $|\vec{a}|=aw^2$

III . حركة النقطة المادية

III - A - مفاهيم عامة

1 - مدخل : حركة النقطة المادية هي دراسة حركة الأجسام دون التعرض إلى الأسباب التي أدت إليها أو بعبارة أخرى تبحث في وصف الحركات دون تفسيرها .

وصف حركة نقطة مادية يتطلب الجواب على سؤالين :

- ما هو مسار الجسم المتحرك ؟ تحديده يستدعي معرفة موقع الجسم المتحرك في كل لحظة .
- كيف يتحرك الجسم على هدا المسار ؟ تحديد شعاع السرعة و شعاع التسارع يجيب على ذلك.

2- مفاهيم عامة :

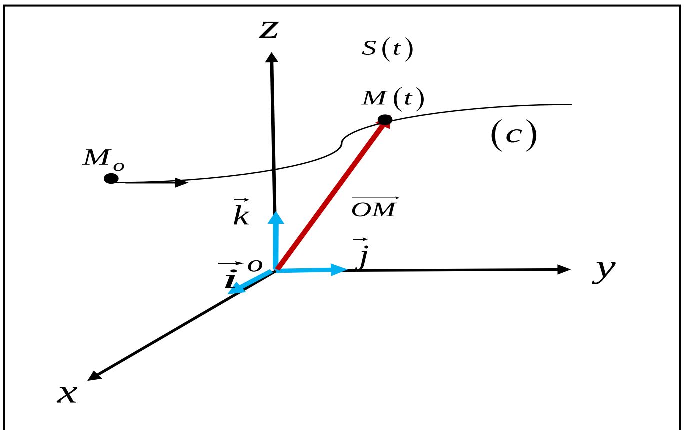
أ- الجسم المتحرك هو جسم طبيعي له كتلة و يُفترض أن أبعاده الطبيعية متناهية في الصغر ، فهو يُدعى **بالنقطة المادية** لا أبعاد لها مقارنة بالمسافة المقطوعة .

ب- **الحركة و السكون مفهومان نسبيان:** لذلك لدراسة حركة أي جسم مادي لابد من اختيار معلم أو جمله إسناد(مرجع) يعطينا المسافات و الأبعاد كذلك نحتاج الى مقدار حقيقي يدعى الزمن لتحديد لحظات مرور المتحرك بمختلف النقاط.

ت- **المرجع :** نختاره كمبدأ O لجملة الإحداثيات التي ندرس فيها الحركة (نسمي المرجع مجموعة احداثيات مقيدة بمشاهد لدية ساعة يسجل بها الزمن t)

ث- **الزمن :** هو وسيط يعبر عنه رياضيا بواسطة متغير حقيقي موجب حيث تكون إحداثيات النقطة المادية تابعة له ونرمز له بـــ t .

ج- **المسار و الفاصلة المنحنية** : نعتبر نقطة مادية M تتحرك بالنسبة لمرجع كما هو مبين على **الشكل (1.III)** . المنحنى (C) الذي ترسمه M أثناء حركتها يسمى مسار النقطة M في المرجع المعتبر.



مسار النقطة M الشكل (1.III)

فالمسار هو مجموعة النقط التي يمر بها جسم متحرك بالنسبة لمرجع معين . في المرجع الديكارتي , يحدد المسار بالمعادلات الوسيطية بدلالة الزمن t : $z(t),y(t),x(t)$. (x,y,z) هي احداثيات النقطة M عند الزمن t .

عندما نعوض الزمن t في هذه المعادلات نحصل على معادلة المسار (C) للنقطة M التي لا تتعلق بالزمن : $F(x,y,z)=0$.

نعتبر نقطة ثابتة M_0 على المسار (هي عادة نقطة بداية الحركة) .يمكن ان نحدد موضع النقطة M على المسار (C) عند الزمن t بالطول الجبري للقوس M_0M بحيث نكتب : $M_0M=S(t)$.

حيث $S(t)$ تسمى الفاصلة المنحنية للنقطة M عند الزمن t .القانون الذي يعطي كيف تتغير S بدلالة t أي الدالة $S(t)$ يسمى المعادلة الزمنية للحركة .

الفاصلة المنحنية $S(t)$ $\Leftrightarrow$ المعادلة الزمنية للحركة $S(t)$

مثال(1.III): $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$

هي معادلة كرة مركزها O ونصف قطرها R في المعلم الديكارتي (O,X,Y,Z) .

مثال (2.III)-: $f(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$

هي معادلة دائرة نصف قطرها R و مركزها O في المعلم الديكارتي (O,X,Y) .

مثال (3.III) : تعطى إحداثيات المتحرك M بحيث:

$$\begin{cases} x=at \\ y=at(1-\alpha t) \end{cases}$$

a . α:ثابتان موجبان t: الزمن

1- أوجد معادلة المسار و طبيعته ؟

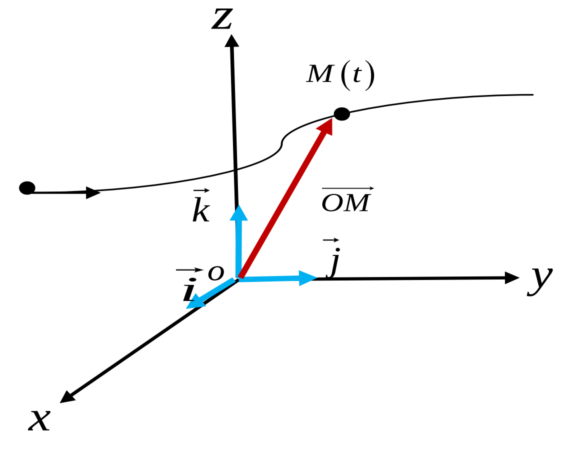
معادلة المسار و طبيعته: $x=at \Rightarrow t=\dfrac{x}{a}$

$$y=at(1-\alpha t)=a\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\alpha\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$y=x\left(1-\alpha\frac{x}{a}\right)=x-\frac{\alpha}{a}x^2 \Rightarrow y=-\frac{\alpha}{a}x^2+x$$ المسار قطع مكافئ **.**

3 - شعاع الموضع و السرعة و التسارع

3- أ- **شعاع الموضع:** في معلم كيفي مبدؤه O يعرف موضع نقطة مادية M في لحظة t في معلم كارتيزي **الشكل (2.III)** .



شعاع الموضع الشكل (2.III)

$R(OXYZ)$ (بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث: $\boxed{\overrightarrow{OM}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}}$.....(1.III)

حيث : $x(t),y(t),z(t)$ هي المعادلات الزمنية للحركة .

مثال (4.III) : يتحرك جسم في المستوي oxy بحيث :

$$x=5t^2-1 \qquad\qquad y=-t+1$$

- اكتب صيغة شعاع الموضع ؟

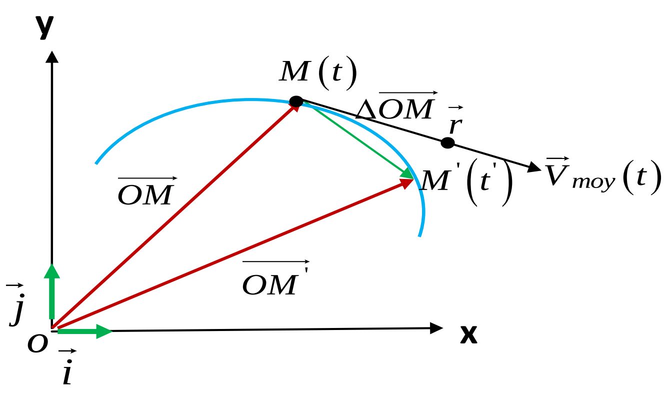
الجواب : $\vec{r}=(5t^2-1)\vec{i}+(-t+1)\vec{j}$

3- ب - شعاع السرعة

3- ب -1- شعاع السرعة المتوسطة: الشكل (3.III)

السرعة المتوسطة لمتحرك بين زمنيين t و t' متعلقة بالموضعين M و M' معرفة بالنسبة:

$$\left(\vec{V}_{moy}\right)_t^{t'}=\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{OM}'(t')-\overrightarrow{OM}(t)}{t'-t}\Rightarrow\boxed{\vec{V}_{moy}=\frac{\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}}{\Delta t}}.........(2.III)$$



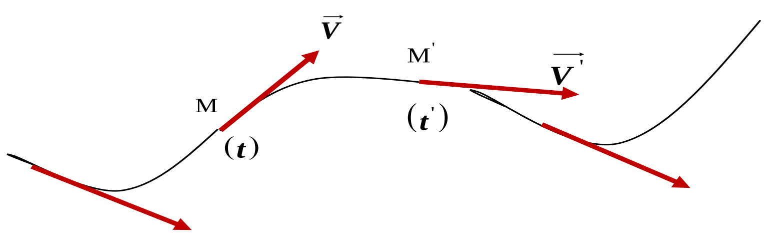
شعاع السرعة المتوسطة الشكل (3.III)

$\overrightarrow{MM'}$: شعاع الإنتقال .

3- ب -2 - شعاع السرعة اللحظيـة:

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t أنه مشتقة شعاع الموضع بالنسبة للزمـن: الشكل (4.III)

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$
$$\Updownarrow$$
$$V(t)=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\Leftrightarrow V(t)=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k} \quad \text{.......}(3.III)$$



شعاع السرعة اللحظية الشكل (4.III)

- يكون شعاع السرعة مماسيا للمسار عند M+اتجاهه في اتجاه الحركة.
- إذا كانت طويلة السرعة ثابتة نقول أن الحركة منتظمة.

مثال (5.III) : تعطى إحداثيات المتحرك M بحيث: $\begin{cases} x = at \\ y = at(1-\alpha t) \end{cases}$ ، a ، α : ثابتان موجبان

1- أوجد سرعة المتحرك ؟

الإجابة :

1- شعاع السرعة: $\vec{V}\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = a - 2a\alpha t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = a\vec{i} + a - 2a\alpha t\,\vec{j}$

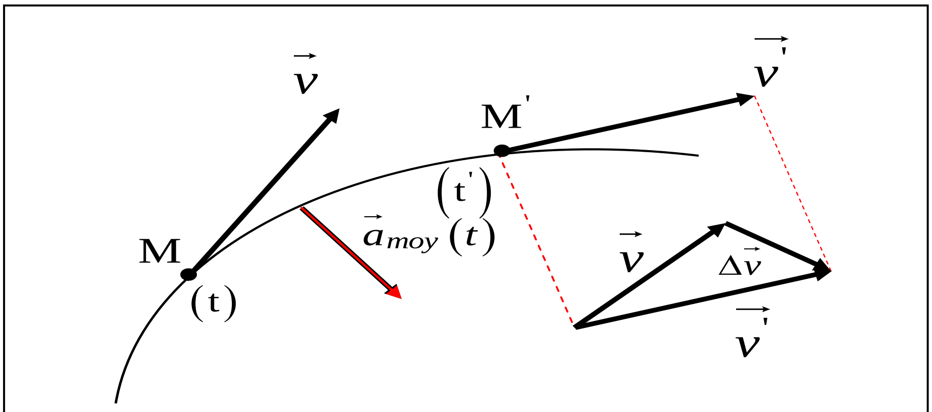
4- شعاع التسارع:

يوجد نوعين من التسارعات و نرمز للتسارع ب $\vec{a}$ أو $\vec{\gamma}$.

4- أ- شعاع التسارع المتوسط:

اذا اعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t' المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM}'$ خلال السرعة اللحظية $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ فان شعاع التسارع المتوسط معرف كما يلي: **الشكل (5.III)**

$$\boxed{\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V}' - \vec{V}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}} \quad ....(4.III)$$



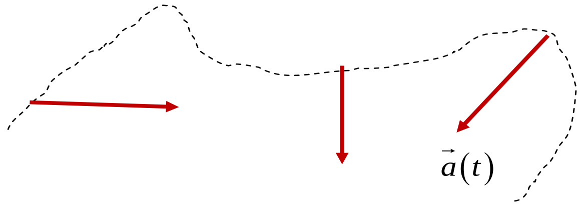
شعاع التسارع المتوسط الشكل (5.III)

- شعاع التسارع المتوسطة $\vec{a}_{moy}$ موازي لـ $\Delta\vec{V}$ و يتجه نحو تقعر المسار.

4- ب- شعاع التسارع اللحظي:

- **تعريف :** شعاع التسارع اللحظي أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن. **الشكل (6.III)**

-



شعاع التسارع اللحظي الشكل (6.III)

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}'-\vec{V}}{t'-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\quad\text{........}(5.\text{III})$$

$$\vec{a}(t)=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

- إذا كانت $\vec{a}=\vec{0}$ ← الحركة منتظمة أو ساكنة.
- $\vec{a}=Cst$ ← الحركة متغيرة بانتظام.
- إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في نفس الاتجاه ← الحركة متسارعة $\left(\vec{a}.\vec{V}\succ 0\right)$.
- إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في اتجاهين متعاكسين ← الحركة متباطئة $\left(\vec{a}.\vec{V}\prec 0\right)$.

مثال (6.III) : تعطى إحداثيات المتحرك M بحيث:

$$\begin{cases} x=at \\ y=at(1-\alpha t) \end{cases}$$

a . α: ثابتان موجبان t: لزمن

1- أوجد شعاع التسارع ؟

الإجابة :

شعاع التسارع:

$$\vec{a}\begin{cases} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=-2a\alpha \end{cases} \Rightarrow=-2a\alpha\,\vec{j}$$

5 - شعاع الموضع و السرعة و التسارع في جمل الإحداثيات **المشهورة**

5-1- جملة الإحداثيات الديكارتية :

5-1- أ- شعاع الموضع :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}} \quad ....(6.III)$$

5-1- ب- شعاع السرعة :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{V}(M)=\vec{V}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}\\ \Updownarrow \\ \vec{V}(M)=\dot{x}(t)\vec{i}+\dot{y}(t)\vec{j}+\dot{z}(t)\vec{k}\end{gathered}} \quad ....(7.III)$$

طويلة شعاع السرعة :

$$\boxed{\left\|\vec{V}(M)\right\|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \quad ....(8.III)$$

5-1- ج- شعاع التسارع :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{\gamma}(M)=\vec{\gamma}(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}\\ \Updownarrow \\ \vec{\gamma}(M)=\vec{\gamma}(M)=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}+\ddot{z}(t)\vec{k}\end{gathered}} \quad ....(9.III)$$

طويلة شعاع التسارع : $\boxed{\left\|\vec{\gamma}(M)\right\|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}} \quad .....(10.III)$

عند معرفة شعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يمكن الحصول على شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$ كما يلي :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M)=\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\Rightarrow d\vec{V}(M)=\vec{\gamma}(M)dt\Leftrightarrow\int_{V_0}^{V}d\vec{V}=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}(t)dt} \quad ....(11.III)$$

$\vec{V}_0$: هي السرعة الابتدائية عند اللحظة $t=0$

حل تكامل السابق يعطينا :

$$\boxed{\vec{V}(M)-\vec{V}(0)=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}(t)dt} \quad ....(12.III)$$

المعادلة السابقة تعني أن :

$$\begin{cases} V_x(t)-V_{x_0}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}_x(t)dt \\ V_y(t)-V_{y_0}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}_y(t)dt \\ V_z(t)-V_{z_0}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{\gamma}_z(t)dt \end{cases} \quad ....(13.III)$$

و كذلك نكامل شعاع السرعة $\vec{V}(t)$ الذي يكتب $d\overrightarrow{OM}=\vec{V}(t)$ نحصل على :

$$\int_{\overrightarrow{OM}_0}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM}=\int_{t_0}^{t}\vec{V}(t)dt \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t)-\overrightarrow{OM}_0=\int_{t_0}^{t}\vec{V}(t)dt$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{OM}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{V}(t)dt+\overrightarrow{OM}_0 \quad ....(14.III)$$

العبارة التالية مكافئة للعبارات التالية :

$$\begin{cases} x(t)=\int_{t_0}^{t}V_x(t)dt+x_0 \\ y(t)=\int_{t_0}^{t}V_y(t)dt+y_0 \\ z(t)=\int_{t_0}^{t}V_z(t)dt+z_0 \end{cases} \quad ....(15.III)$$

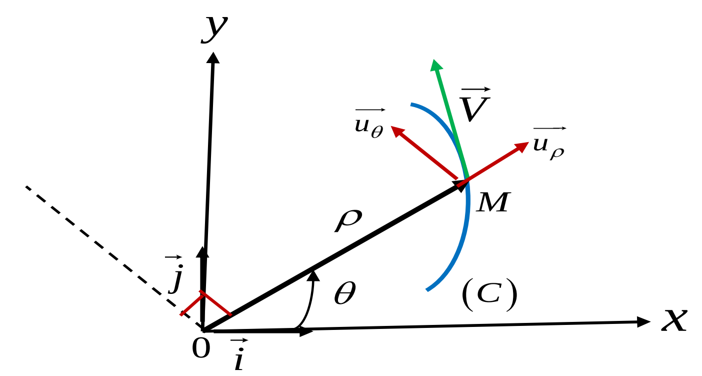
2-5- جملة الإحداثيات القطبية :

2-5- أ- شعاع موضع المتحرك:

M نقطة مادية مسارها المنحنى (c) شعاع الموضع في المعلم القطبي $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ يكتب كما يلي:

الشكل (7.III) $\boxed{\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}_\rho}$ ....(16.III)

- هي المعادلة الزمنية للحركة في المعلم القطبي $\rho(t)$ و $\theta(t)$.



شعاع موضع المتحرك بالإحداثيات القطبية الشكل (7.III)

- $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ هي أشعة الوحدة في المعلم القطبي حيث أن :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\\ \vec{u}_\theta &= -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\end{aligned}} \quad ....(17.III)$$

2-5- ب - شعاع سرعة المتحرك:

$$\boxed{\begin{aligned}V(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\rho(t), \vec{u}_\rho\right]\\ V(t) &= \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho + \rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}\end{aligned}} \quad ....(18.III)$$

نحتاج إلى حساب الاشتقاق:

ومنه عبارة $V(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}\right) = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta(t)\vec{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta(t)\vec{j}\\ &\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j}\right)\\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad \text{أو} \quad \frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta}\end{aligned}} \quad ....(19.III)$$

$$V(t)=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$
$$V(t)=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho(t).\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta \qquad ....(20.III)$$
$$V(t)=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

طويلة شعاع السرعة :

$$\left\|\vec{V}\right\|=V=\sqrt{\dot{\rho}^{2}+\left(\rho.\dot{\theta}\right)^{2}} \qquad ....(21.III)$$

- $\dot{\theta}$: هي السرعة الزاوية للنقطة المادية M .
- $V_\rho=\dot{\rho}$: المركبة القطرية لشعاع السرعة.
- $V_\theta=\rho\dot{\theta}$:هي المركبة العرضية لشعاع السرعة ..
- شعاع السرعة في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\vec{V}=\vec{V}_\rho+\vec{V}_\theta \qquad ....(22.III)$$

5 -2- ج- شعاع تسارع المتحرك:

لإيجـاد عبارة التسارع نشتق العبارة السابقة لشعاع السرعة. نحتاج الى اشتقاق عبارة $\vec{u}_\theta$.

$$\vec{V}=\vec{V}_\rho+\vec{V}_\theta \qquad ....(23.III)$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\right)$$
$$\vec{a}(t)=\ddot{\rho}\vec{u}_\rho+\dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \qquad ....(24.III)$$

إذن عبارة $\vec{a}(t)$:

$$\vec{u}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$$
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\cos\theta(t)\vec{i}-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta(t)\vec{j}=\frac{-d\theta}{dt}\left(\cos\theta(t)\vec{i}+\sin\theta(t)\vec{j}\right) \qquad ....(25.III)$$
$$\Rightarrow\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\frac{-d\theta}{dt}.\vec{u}_\rho \qquad \text{أو} \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}.\vec{u}_\rho$$

a_θ : المركبة العرضية لشعاع التسارع. $\ddot{\theta}$: التسارع الزاوي للنقطة M .

شعاع التسارع في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta} \text{.......(26.III)}$$

3-5 - جملة الإحداثيات الاسطوانية:

3-5- أ- شعاع موضع المتحرك:

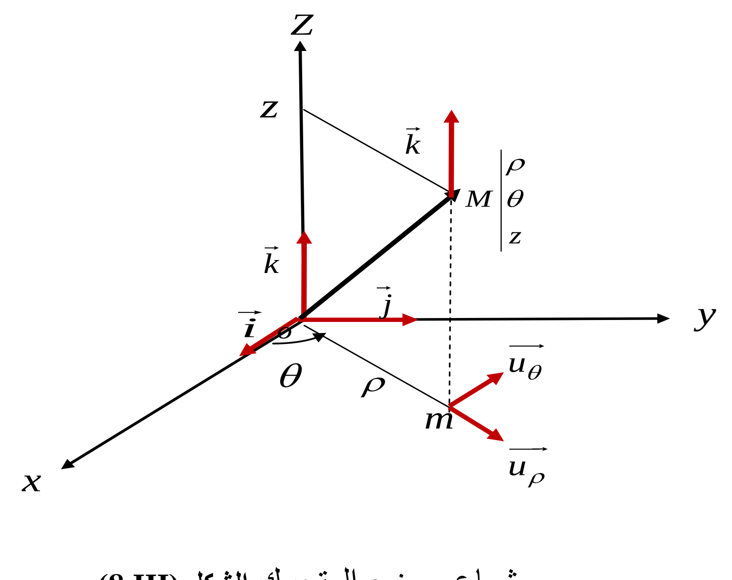
عندما تحدث الحركة على مستوى اسطواني أو دوامة نستخدم دائما الإحداثيات الأسطوانية التي نعرفها بالنسبة للإحداثيات الديكارتية حيث يحدد موضع المتحرك M.

- إحداثياته القطبية ρ و θ لمسقط M في المستوي (O,X,Y)
- إحداثياته المحورية z.

نلاحظ من هنا أن الإحداثيات الأسطوانية ما هي إلا امتداد للإحداثيات القطبية في معلم ثلاثي الأبعاد.يعطى شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بـ:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}} \text{.......(27.III)}$$

ملاحظة: الشعاع $\vec{u}_\rho$ متعلق بالزمن t و هو ثابت في الطول و غير ثابت في الاتجاه. **الشكل (8.III)**



شعاع موضع المتحرك **الشكل (8.III)**

3-5- ب- شعاع سرعة المتحرك :

نقوم باشتقاق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ لإيجاد شعاع السرعة $\vec{V}$:

$$V=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\rho\vec{u}_\rho+z\vec{k}\right)$$
$$V=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \quad ....(28.III)$$

كما لاحظنا هنا أن نصف القطر القطبي ρ هو تابع زمني، أما الشعاع $\vec{k}$ فهو ثابت عكس $\vec{u}_\rho$ $\vec{u}_\theta$, المتغيرة بدلالة الزمن .

$$\vec{V}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{V}=\vec{V}_\rho+\vec{V}_\theta+\vec{V}_z \quad ....(29.III)$$

طويلة شعاع السرعة :

$$\left\|\vec{V}\right\|=V=\sqrt{\left(\dot{\rho}\right)^2+\left(\rho.\dot{\theta}\right)^2+\left(\dot{z}\right)^2} \quad ....(30.III)$$

- مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الاسطوانية:

- $V_\rho=\frac{d\rho}{dt}$: المركبة القطرية.
- $V_\theta=\rho\frac{d\theta}{dt}$: المركبة العرضية .
- $V_z=\frac{dz}{dt}$: المركبة المحورية.

3-5- ج- شعاع تسارع المتحرك :

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}\right)$$
$$\vec{a}=\ddot{\rho}\vec{u}_\rho+\dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta+\rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+\ddot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a}=\ddot{\rho}\vec{u}_\rho+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta-\rho.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho+\ddot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho.\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho+\left(2\dot{\rho}.\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta+\ddot{z}\vec{k} \quad ....(31.III)$$

طويلة شعاع التسارع :

$$\boxed{\left\|\vec{\gamma}\right\| = \gamma = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^{2}\right)^{2} + \left(2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^{2} + \left(\ddot{z}\right)^{2}}} \text{.......(32.III)}$$

- مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات الاسطوانية هي:

- $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^{2}$: المركبة القطرية .
- $a_\theta = 2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$: المركبة العرضية .
- $a_z = \ddot{z}$: المركبة المحورية .

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z} \text{........(33.III)}$$

مثال (7.III) : : تتحرك نقطة مادية في الفضاء بحيث يتغير موقعها مع الزمن حسب العلاقات التالية

في الإحداثيات الاسطوانية : $z = 0.10t$ 　　 $\varphi = 30t$ 　　 $\rho = 0,2$

حيث الزمن مقدر بالثانية و الزوايا بالراديان والأطوال مقدرة بالمتر .

- اكتب شعاع موضع النقطة المادية في الاحداثيات الاسطوانية ؟
- احسب شعاع سرعة النقطة المادية في هذه الإحداثيات ؟

الحل :

- شعاع الموضع **:** $\vec{r} = 0,20\vec{u}_\rho + 0,10\vec{u}_z$
- شعاع السرعة : نشتق شعاع الموضع $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0\vec{u}_\rho + 0,20\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} + 0,10\vec{u}_z$

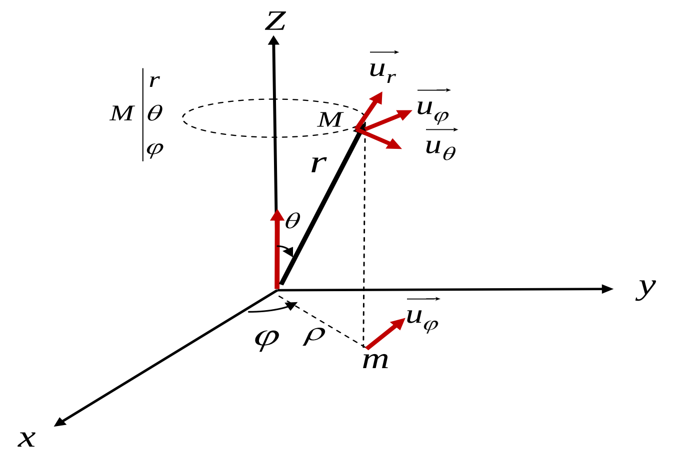
و بما أن : $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$ بالتعويض نجد **:** $\vec{v} = 0,20\times 30\vec{u}_\varphi + 0,10\vec{u}_z = \left(6,0\vec{u}_\varphi + 0,10\vec{u}_z\right)m.s^{-1}$

4-5- جملة الإحداثيات الكروية:

4-5- أ- شعاع موضع المتحرك:

$M\left(r,\theta,\varphi\right)$ متحرك في جملة الإحداثيات الكروية المرفقة بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $\left(\vec{U}_r,\vec{U}_\theta,\vec{U}_\varphi\right)$ حيث نعرف شعاع الموضع :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r} \text{.......(34.III)}$$. **الشكل (9.III)**



شعاع موضع المتحرك بالإحداثيات الكروية **الشكل (9.III)**

4-5- ب- شعاع سرعة المتحرك :

- نحصل على شعاع السرعة للمتحرك باشتقاق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن علمًا أن أشعة الوحدة $\left(\vec{U}_r,\vec{U}_\theta,\vec{U}_\varphi\right)$ متعلقة بالزمن.

$$\boxed{V=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\vec{U}_r\right)=\dot{r}\vec{U}_r+r\frac{d\vec{U}_r}{dt}}\;.......(35.III)$$

- نذكر بعبارات أشعة الوحدة في القاعدة الكروية $\left(\vec{U}_r,\vec{U}_\theta,\vec{U}_\varphi\right)$ بدلالة أشعة الوحدة للمعلم الكارتيزي.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{U}_r&=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}\\ \vec{U}_\varphi&=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\\ \vec{U}_\theta&=\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\vec{j}+\sin\theta\vec{k}\end{aligned}}\;.......(36.III)$$

علما أن $\vec{U}_\varphi=\vec{U}_r\wedge\vec{U}_\theta$:

تسمية الزوايا $\theta\left(Oz,0M\right),\varphi\left(Ox,0m\right)$ قد تختلف من مرجع إلى آخر :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\vec{U}_r}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}\right)\\ \frac{d\vec{U}_r}{dt}&=\dot{\theta}\vec{U}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi\end{aligned}}\;.......(37.III)$$

$$\vec{V}=\dot{r}\vec{U}_r+r\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$
$$\vec{V}=\dot{r}\vec{U}_r+r.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta+r.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi \quad ....(38.III)$$
$$\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_\theta+\vec{V}_\varphi$$

طويلة شعاع السرعة :

$$\left\|\vec{V}\right\|=V=\sqrt{\left(\dot{r}\right)^2+\left(r.\dot{\theta}\right)^2+\left(r.\dot{\varphi}.\sin\theta\right)^2} \quad .....(39.III)$$

حيث : $\vec{V}_r,\vec{V}_\theta,\vec{V}_\varphi$ المركبات الكروية لشعاع السرعة.

5-4- ج- شعاع تسارع المتحرك:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{U}_r+r.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta+r.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi\right)$$
$$\vec{a}=\ddot{r}\vec{U}_r+\dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt}+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta+r.\ddot{\theta}.\vec{U}_\theta+r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}+\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi \quad ....(40.III)$$
$$+r.\ddot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi+r.\dot{\theta}.\dot{\varphi}.\cos\theta\vec{U}_\varphi+r.\dot{\varphi}.\sin\theta\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt}$$

وباستعمال اشتقاق الدوال المتعددة المتغيرات نجد:

بالتعويض نجد:

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt}=\dot{\theta}.\vec{U}_\theta+\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi$$
$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}.\vec{U}_r+\dot{\varphi}.\cos\theta\vec{U}_\varphi \quad ....(41.III)$$
$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt}=-\dot{\varphi}\vec{U}_\rho$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\left(\dot{\varphi}\sin\theta\right)^2\right)\vec{U}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{U}_\theta+$$
$$\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+r\ddot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{U}_\varphi \quad ....(42.III)$$
$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta+\vec{a}_\varphi$$

حيث : $\vec{a}_{\varphi}, \vec{a}_{\theta}, \vec{a}_{r}$ المركبات الكروية لشعاع التسارع $\vec{a}$.

5-5- جملة الإحداثيات المنحنية (الذاتية) :

5-5- أ- شعاع السرعة : عندما يكون مسار النقطة المادية منحنيا **الشكل (10.III)** , يمكن يمكن تحديد موقعها باستعمال الفاصلة المنحنية :

$$\boxed{MoM = S(t)} \text{.......(43.III)}$$

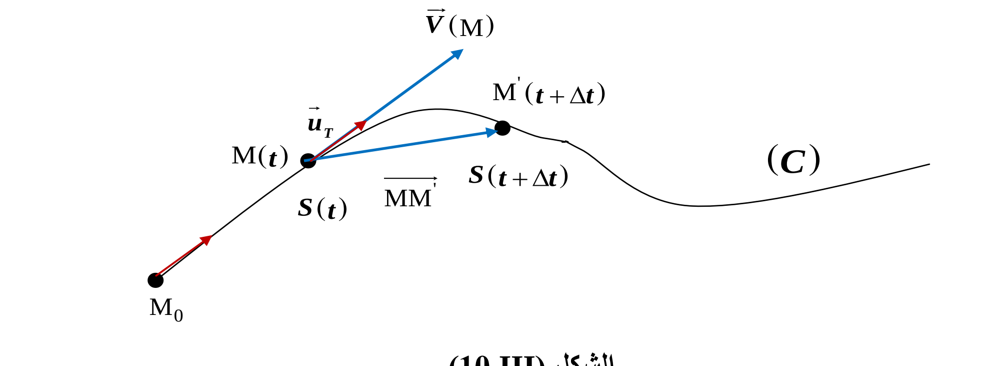
رأينا أن شعاع السرعة اللحظية يكتب :

$$\boxed{\vec{V}(M) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM^{/}}{\Delta t}} \text{........(44.III)}$$

لما : $\Delta t \to 0$ فان : $M^{'} \to M$ و يصير الشعاع مماسي للمسار (C) في M و طويلته $\left\| \overrightarrow{MM^{'}} \right\|$ تساوي طول القوس $MM^{'}$ حيث : $MM^{'} = \Delta S$.

يمكن ان نكتب :

$$\boxed{\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM^{'}}}{\left\| \overrightarrow{MM^{'}} \right\|} \frac{\left\| \overrightarrow{MM^{'}} \right\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \vec{U}_T} \text{...(45.III)}$$



الشكل (10.III)

$\vec{U}_T$ هو شعاع الواحدة لشعاع $\overrightarrow{MM^{'}}$. عندما يؤول الى الصفر $(\Delta t \to 0)$ يصير $\vec{U}_T$ يمثل شعاع الواحدة المماسي للمسار في M و الموجه في اتجاه الحركة .

اذن :

$$\boxed{\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \vec{U}_T = \frac{dS}{dt} \vec{U}_T} \text{........(46.III)}$$

أو :
$$\boxed{\vec{V}(M)=\dot{S}(t)\vec{U}_T} \quad ....(47.III)$$

طويلة شعاع السرعة :

$$\boxed{\vec{V}(M)=\dot{S}(t)\vec{U}_T} \quad ....(48.III)$$

5-5- ب- شعاع تسارع المتحرك: **الشكل (11.III)**

$$\boxed{\vec{\gamma}(M)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dS}{dt}\vec{U}_T\right]} \quad ....(49.III)$$

أو :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M)=\frac{d^2S(t)}{dt^2}\vec{U}_T+\frac{dS(t)}{dt}\frac{d\vec{U}_T}{dt}} \quad ....(50.III)$$

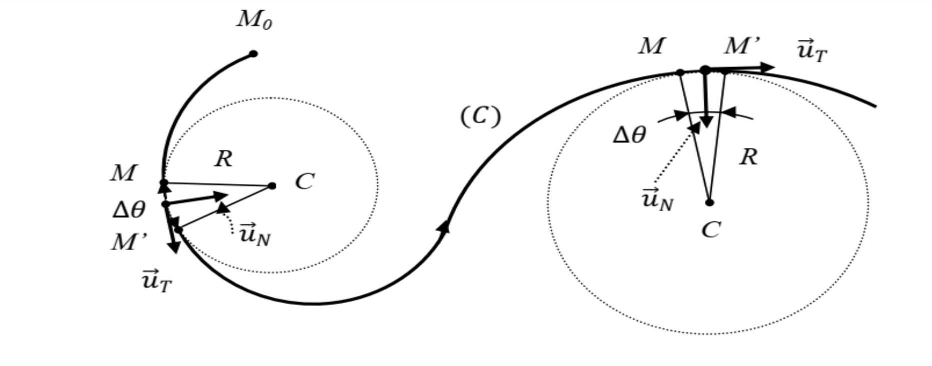
مع العلم أن :

$$\boxed{\frac{d^2S(t)}{dt^2}=\frac{d\left\|\vec{V}(M)\right\|}{dt}} \quad ....(51.III)$$

للحصول على العبارة الكاملة لشعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يجب حساب $\frac{d\vec{U}_T}{dt}$.

يمكن أن نكتب : $\frac{d\vec{U}_T}{dt}=\frac{d\vec{U}_T}{dS}\frac{dS}{dt}$

حساب $\frac{d\vec{U}_T}{dt}$ يتطلب استعمال مفهوم الانحناء و نصف قطر الانحناء للمسار (C) كما هو في الشكل . الجزاء العنصري ΔS من المسار يمكن أن يتطابق مع قوس عنصري من محيط دائرة مركزها (C) و نصف قطرها R .



الشكل (11.III)

حيث : $CM = CM^{'} = R$ و $MM^{'} = \Delta S = R\Delta\theta$

لدينا : $MM^{'} = \Delta S = R\Delta\theta$ حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية التي يحجزها هدا القوس ΔS على الدائرة التي مركزها C و نصف قطرها R. و منه يمكن ان نكتب :

$$\boxed{\frac{d\vec{U}_T}{dS} = \frac{d\vec{U}_T}{R\Delta\theta} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{U}_T}{d\theta} = \frac{1}{R}\vec{U}_N} ....(52.III)$$

$\vec{U}_N$ هو شعاع الواحدة العمودي على المسار (C) في النقطة M و الموجه نحو مركز الانحناء للمسار C. ومنه :

$$\boxed{\frac{d\vec{U}_T}{dt} = \frac{dS}{dt}.\frac{1}{R}\vec{U}_N} ....(53.III)$$

و عندما نعوض في عبارة شعاع التسارع نحصل على :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2.\frac{1}{R}\vec{U}_N} ....(54.III)$$

أو :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \ddot{S}(t)\vec{U}_T + \frac{\dot{S}^2(t)}{R}\vec{U}_N} ....(55.III)$$

أو :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M) = \frac{d\left\|\vec{V}(M)\right\|}{dt}\vec{U}_T + \frac{\left\|\vec{V}(M)\right\|^2}{R}\vec{U}_N \Leftrightarrow \vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{U}_T + \frac{V^2}{R}\vec{U}_N} ..(56.III)$$

نتائج هامة : في قاعدة الأحداثيات المنحنية (الذاتية) $\left(\vec{U}_T, \vec{U}_N\right)$, التسارع $\vec{\gamma}(M)$ هو عبارة عن مجموع مركبتين :

مركبة مماسية للمسار :
$$\vec{\gamma}_T = \ddot{S}(t)\vec{U}_T = \frac{dV}{dt}\vec{U}_T$$

و مركبة ناظميه عمودية على المسار :
$$\vec{\gamma}_N = \frac{V^2}{R}\vec{U}_N$$

و نكتب :
$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N} ....(57.III)$$

ملاحظة : التسارع المماسي $\vec{\gamma}_T$ ناتج عن تغير شدة السرعة $\left\|\vec{V}\right\|$ و أما التسارع ألناظمي $\vec{\gamma}_N$ فهو ناتج عن تغير اتجاه شعاع السرعة $\vec{V}$ أي عن انحناء المسار .

و يمكن أن نكتب :
$$\boxed{\left\|\vec{\gamma}\right\|=\sqrt{\vec{\gamma}_T^{\,2}+\vec{\gamma}_N^{\,2}}}\;........(\,58.\text{III}\,)$$

نصف قطر انحناء المسار (C) في أي نقطة من (C) هو :
$$\boxed{R=\frac{V^2}{\left\|\vec{\gamma}_N\right\|}}\;......(\,59.\text{III}\,)$$

نشير إلى أن $\vec{\gamma}_N$ تكون دائما موجهة نحو مركز الانحناء (C) أي في اتجاه $\vec{U}_N$ و لكن $\vec{\gamma}_T$ يمكن أن تكون :

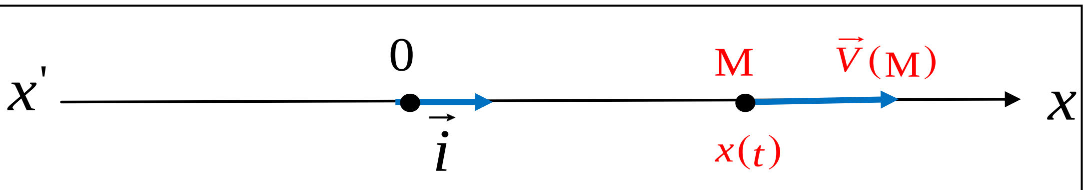
في اتجاه الشعاع $\vec{U}_T$ و ذلك عندما تكون الحركة متسارعة : أي $\dfrac{d\left\|\vec{V}(M)\right\|}{dt}\succ 0$

في اتجاه معاكس للشعاع $\vec{U}_T$ لما تكون الحركة متباطئة : أي $\dfrac{d\left\|\vec{V}(M)\right\|}{dt}\prec 0$

B- III - تطبيقات

1- تعريف الحركة المستقيمة :

تكون الحركة مستقيمة عندما يكون المسار عبارة عن خط مستقيم **الشكل (12.III)**. في هذه الحالة يمكن أخذ المحور $\overrightarrow{x'O}$ كمسار ، شعاع السرعة محمول بالمحور و كذلك شعاع التسارع عندما لا يكون معدوما.



الشكل (12.III)

$$\vec{\gamma}(M)=\ddot{x}(t)\vec{i}\qquad,\qquad\vec{V}(M)=\dot{x}(t)\vec{i}\qquad,\qquad\overrightarrow{OM}=x(t)\vec{i}$$

1-أ- الحركة المستقيمة المنتظمة:

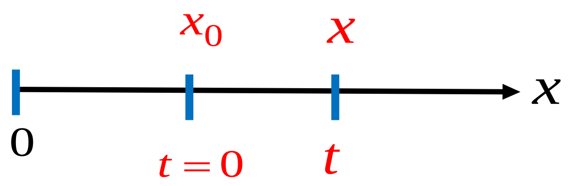
نقول عن الحركة أنها مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيمـا و شعاع سرعتها ثابتا و بالتالي شعاع تسارعها معـدوما. ندرس الحركة على محور واحد Ox

الشروط الابتدائية : $V=V_0$, $x=x_0$, $t=0$

$$V=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t=0}^{t}V_0dt\Rightarrow(x-x_0)=V_0(t-0)\Rightarrow\boxed{x=V_0t+x_0}$$ ....(60.III)

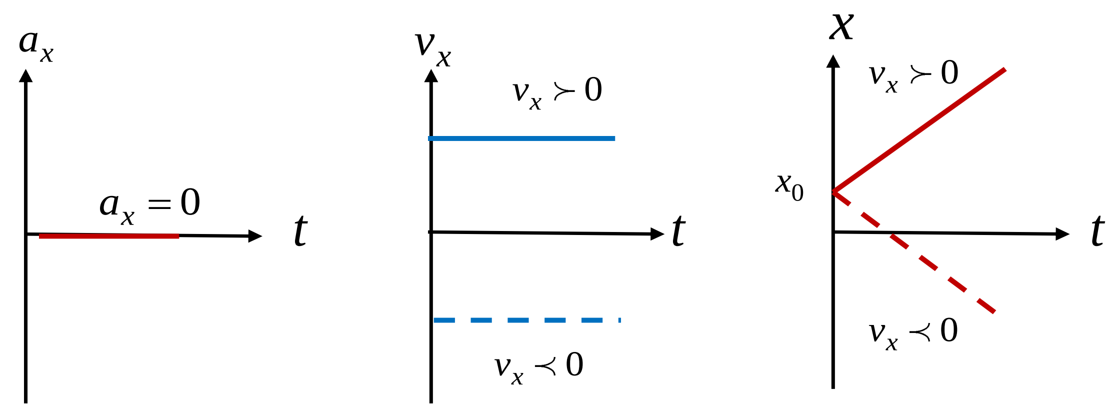
x : الفاصلة اللحظية. x_0 : الفاصلة الابتدائية.

1-أ-1- **معلم الحركة** :   **الشكل (13.III)**



معلم الحركة **الشكل (13.III)**

1-أ-2- مخططات الحركة: **الشكل (14.III)**



- مخططات الحركة **الشكل (14.III)**

1-ب- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام $\vec{a}=\overrightarrow{Cst}=\vec{a}_0$ **على محوره:**

تكون الحركة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا. ندرسها على محور واحد (OA)

انطلاقا من عبارة a :

الشروط الابتدائية : $V=V_0$, $x=x_0$, $t=0$

$$a_0=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=a_0dt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t=0}^{t}a_0dt\Rightarrow(v-v_0)=a_0(t-0)\Rightarrow\boxed{v=a_0t+v_0}$$ ....(61.III)

لدينا كذلك : (62.III)...

$$V=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=Vdt=\left(a_0t+v_0\right)dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t=0}^{t}a_0tdt+\int_{t=0}^{t}V_0dt$$

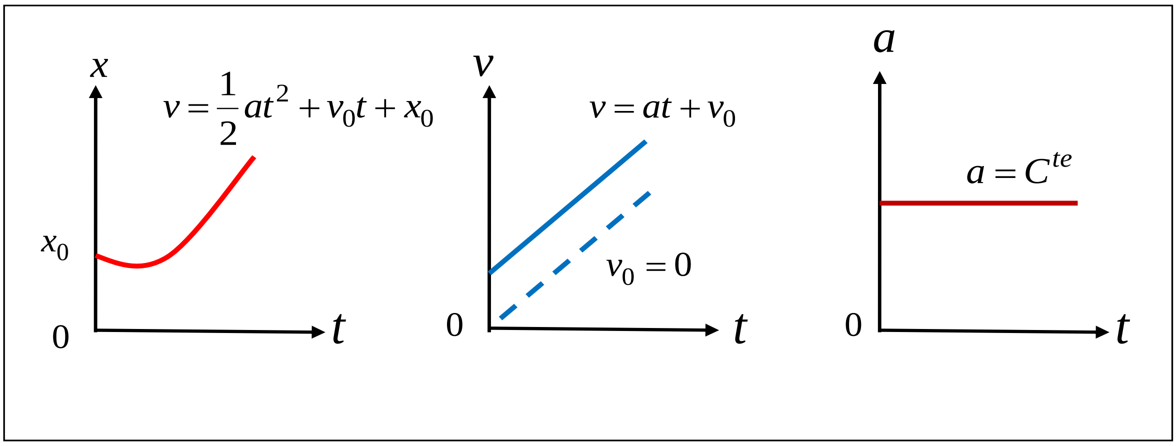
$$\Rightarrow\left(x-x_0\right)=a_0\frac{t^2}{2}+V_0t\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{2}a_0t^2+V_0t+x_0}$$

عندما نعوض t في المعادلات نجد العلاقة :

$$\boxed{2\left(x-x_0\right)a_0=V^2-V_0^2}\text{........(63.III)}$$

- $\overrightarrow{a_0}.\overrightarrow{V}\succ 0$ الحركة متسارعة.
- $\overrightarrow{a_0}.\overrightarrow{V}\prec 0$ الحركة متباطئة.

1-ب-1- مخططات الحركة: الشكل (15.III)



مخططات الحركة **الشكل (15.III)**

مثال (8.III) : يتحرك جسم وفق محور OX بسرعة معادلتها $v=2t-6\left(ms^{-2}\right)$ حيث $t\geq 0$

- استنتج معادلة التسارع و المعادلة الزمنية لهذه الحركة علما أن عند اللحظة $t=0$ تكون $x=5m$
- ما طبيعة الحركة ؟
- بين الأطوار (متسارعة و متباطئة) للحركة ؟

الجواب :

- نحصل على معادلة التسارع باشتقاق عبارة السرعة : $a=\frac{dv}{dt}=2ms^{-2}$
- المعادلة الزمنية للحركة نتوصل إليها بتكامل عبارة السرعة :

$$\begin{cases} v=\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow x=x_0+\int_0^t v dt \Rightarrow x=x_0+\int_0^t (2t-6)dt \\ \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=t^2-6t+5}$$

- اطوار الحركة :

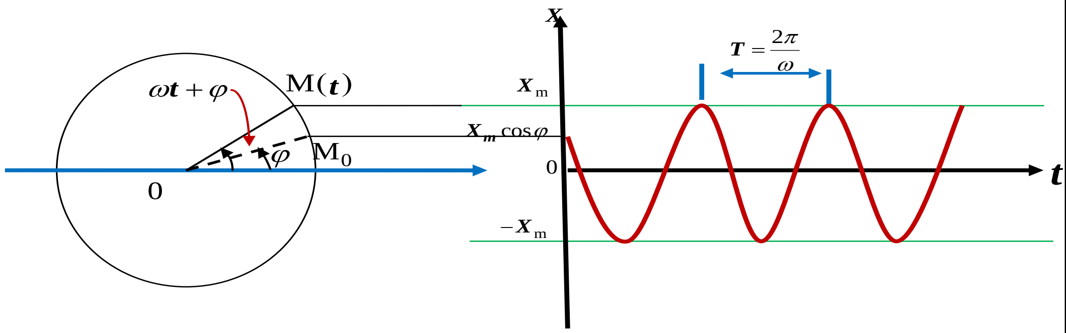
t	0	1	3	5	∞
v		-	0	+	
a		+		+	
x		0	-4	0	
av		-	0	+	
		الحركة متباطئة		الحركة متسارعة	

1-ج- الحركة المستقيمة الجيبيـة:

يمكن الحصول على الحركة الجيبية المستقيمة بإسقاط الحركة الدائرية على $x'ox$ إسقاط النقطة M يعطي الفاصلة $x(t)$. الشكل (16.III)

حيث : $\boxed{x(t)=x_m\sin(\omega t+\varphi)}$.....(65.III) $\Leftrightarrow$ $\boxed{x(t)=x_m\cos(\omega t+\varphi)}$.....(64.III)

- $x(t)$: الفاصلة أو المطال اللحظي.
- x_m: سعة الحركة أو المطال الأعظمي.
- ω: نبض الحركة.
- φ: الطور أو الصفحة الإبتدائية.
- $(\omega t+\varphi)$: الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية .



الحركة المستقيمة الجيبيـة الشكل (16.III)

1-ج-1- السرعة : نشتـق المعادلة الزمنية:

$$\boxed{V=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-\omega x_m\sin(\omega t+\varphi)} \quad ....(4.65)\quad (66.III)$$

$$\boxed{a=\ddot{x}=\frac{dV}{dt}=-\omega^2 x_m\cos(\omega t+\varphi)} \quad ....(4.66)\quad (67.III)$$

التسارع يتناسب طـردا مع المطال و يعاكسه في الاتجاه.

1-ج-2- المعادلة التفاضلية للحركة:

انطلاقا من معادلة التسارع:

$$\boxed{a=-\omega^2 x\Rightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x\Rightarrow \boxed{\ddot{x}+\omega^2 x=0}} \quad ....(4.67)\quad (68.III)$$

هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يكون من الشكل:

$$\boxed{x=A\cos\omega t=B\sin\omega t} \quad ....(4.68)\quad (69.III)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة بعد التحويلات المثلثية على الشكل:

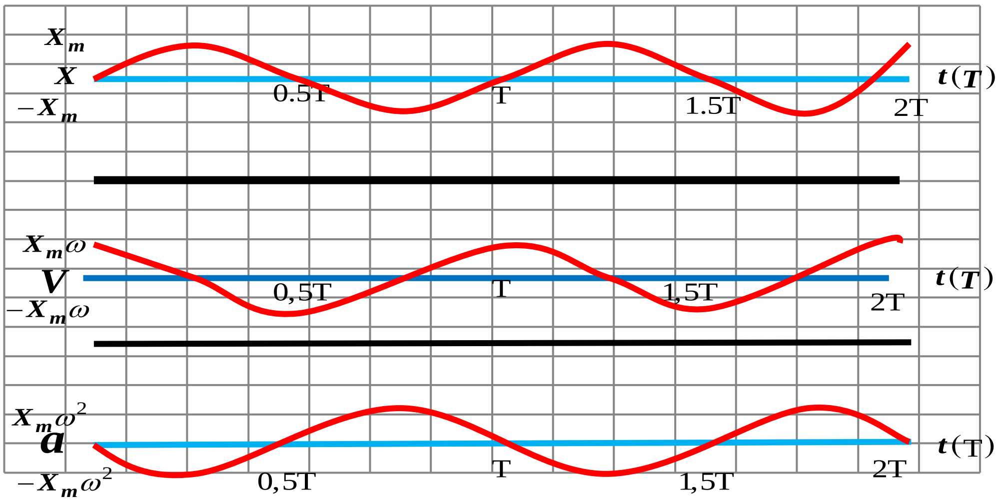
$$\boxed{x=x_m\cos(\omega t+\varphi)} \quad ....(4.69)\quad (70.III)$$

نحدد ثابت التفاضل x_m و φ بمعرفة الشروط الابتدائية لكل من المطال x_0 و السرعة V_0 الابتدائيين

حيث نحصل على جملة معادلتين ذات مجهولين تسمح لنا بتعيين x_m و φ .

$$\boxed{\begin{array}{c} x=x_m\cos\varphi \\ V_0=-x_m\sin\varphi \end{array}} \quad ....(4.70)\quad (71.III)$$

1-ج-3- مخطط الحركة : **الشكل (17.III)** من أجل : $\varphi=\frac{\pi}{2}$



مخطط الحركة الشكل (17.III)

مثال (9.III) :

هزاز جيبي ممثل بالمعادلة $x=4\sin(0.1t+0.5)$ (كل المقادير معبر عنها في وحدات MKS)

. أوجد :

أ- السعة , الدور ,التواتر و الصفحة الابتدائية للحركة .

ب- السرعة و التسارع .

ت- الشروط الابتدائية.

ث- الموضع , السرعة و التسارع في $t=5s$.

ج- ارسم مخططات الحركة ؟

الجواب :

نطابق المعادلة الزمنية العامة للحركة المستقيمة الجيبية مع المعادلة الزمنية الواردة في التمرين .

أ- السعة , الدور ,التواتر و الصفحة الابتدائية للحركة :

$$\boxed{X_m=4m}, T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \boxed{T=20\pi=62.8s}\ ,\ N=\frac{1}{T}\Rightarrow \boxed{N=1.59\times10^{-2}\,HZ}, \boxed{\varphi=0.5rad}$$

ب- حساب السرعة و التسارع :

$$\boxed{v=\dot{x}=0.4\cos(0.1t+0.5)}$$

$$\boxed{a=\dot{v}=-0,04\sin(0,1t+0,5)=-0,01x}$$

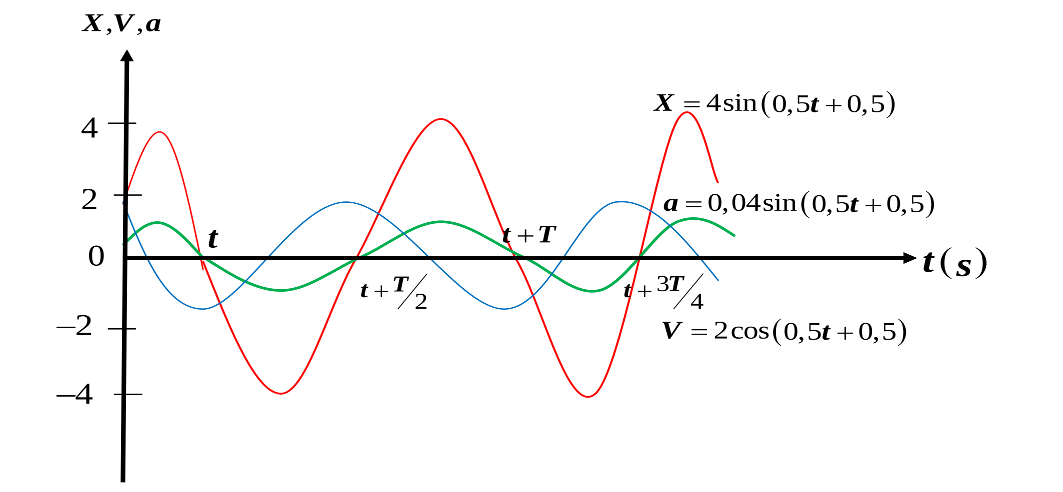
ج - تحديد الشروط الابتدائية :

$$t=0 \Rightarrow x_0 = 4\sin(0.5) \Rightarrow \boxed{x=1.92m} \;,\; t=0 \Rightarrow v_0 = 0.4\cos(0.5) \Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m.s^{-1}}$$

د - تعيين الموضع , السرعة و التسارع في $t=5s$

$$x=4\sin(0.5+0.5)=3.36m \,, v=0.4\cos(1)=0.22m.s^{-1} \,, a=0.04\sin(1)=0.034m.s^{-2}$$

ه- رسم مخططات الحركة :



الشكل (18.III)

2- الحركة الدائرية:

المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها R ومركزها O يمكن دراسة الحركة في الإحداثيات القطبية أو الذاتية.

2- أ- عبارة شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية:

- شعاع الموضع :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho = R.\vec{u}_\rho} \quad ....(4.71) \quad (72.III)$$

- شعاع السرعة :

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \quad ....(4.72) \quad (73.III)$$

- شعاع التسارع :

$$\boxed{\vec{\gamma} = -R.\dot{\theta}^2\,\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_\rho + \vec{\gamma}_\theta} \quad ....(4.73) \quad (74.III)$$

2-ب- عبارة شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات المنحنية : الشكل (19.III)

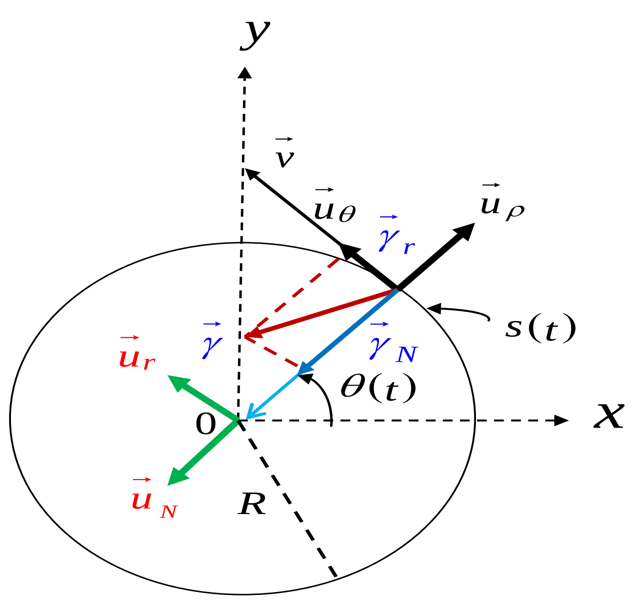
$$S(t) = R\theta(t)$$

- شعاع السرعة :

$$\boxed{\vec{V}=V\vec{U}_T=\frac{dS}{dt}\vec{U}_T=R\dot{\theta}\vec{U}_T}\text{........}(75.III)$$

- شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}=\frac{dV}{dt}\vec{U}_T+\frac{V^2}{R}\vec{U}_N\Rightarrow\boxed{\vec{\gamma}=R\ddot{\theta}\vec{U}_T+R\dot{\theta}^2\vec{U}_N\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_T+\vec{\gamma}_N}\text{........}(4.75)\quad(76.III)$$



عبارة شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات المنحنية الشكل (19.III)

نلاحظ من الرسم أن:

$$\vec{U}_T=\vec{U}_\theta\ \text{،}\ \vec{U}_\rho=-\vec{U}_N\ \text{و}\ \left\|\vec{U}_T\right\|=\left\|\vec{U}_\theta\right\|\ \text{،}\ \left\|\vec{U}_\rho\right\|=\left\|\vec{U}_N\right\|$$

2-ج- المعادلة الزمنية للحركة الدائرية المنتظمة:

الحركة الدائرية المنتظمة هي حركة مسارها دائري و سرعتها الزاوية ثابتة .

$$V=\frac{dS}{dt}\Rightarrow\int^{S}dS=\int^{t}Vdt\Rightarrow(S-S_0)=V(t-0)\Rightarrow\boxed{S=Vt+S_0}\text{........}(4.76)\quad(77.III)$$

بما أن : $S=R\theta$

$$S=Vt+S_0\Rightarrow R\theta=Vt+R\theta_0\Rightarrow\theta=\frac{V}{R}t+\theta_0\text{........}(4.77)\quad(78.III)$$

لدينا :

(79.III)

$$\boxed{S = R\theta \Rightarrow \underbrace{\frac{dS}{dt}}_{V} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega} ....(4.78)$$

ω:هي السرعة الزاوية و تمثل الزاوية الممسوحة خلال وحدة الزمن $\left(rad/s\right)$.

3- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام: هي حركة مسارها دائري و تسارعها الزاوي ثابت:

(80.III)

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = Cst = c} ....(4.79)$$

نختار كشروط ابتدائية: $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \quad , \quad t = 0$

(81.III)

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(0) + c \\ &\dot{\theta}_0 = 0 + c \Rightarrow \dot{\theta}_0 = cst = c \end{aligned}} ....(4.80)$$

(82.III)

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}\,dt \\ &\int^{\theta} d\theta = \int^{t} \left(\ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0\right)dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0\, t \end{aligned}} ....(4.81)$$

III - C - الحركة النسبية Mouvement relatif

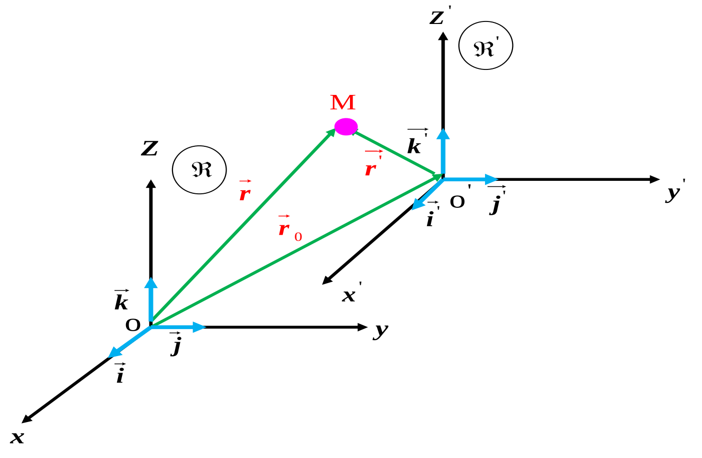
1 - مقدمـة:

ندرس في هذا الفصل مفهوم الحركة النسبية في حالة حركة نقطة مادية Mبالنسبة لمعلمين (R) و (R')إحداهما معلم ثابت (مطلق) والآخر معلم متحرك (نسبي) **الشكل (20.III)** حيث:

R : المعلم الثابت (المطلق) $R(O,x,y,z)$ (Repère absolu)وقاعدته $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

R' : المعلم المتحرك (النسبي) $R'(O',x',y',z')$ (Repère relatif) وقاعدته $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$

M : النقطة أو الجسم المتحرك Point matériel en mouvement



الشكل (20.III)

- حركة M بالنسبة إلى R : حركة مطلقة : Mouvement absolu.
- حركة M بالنسبة إلى R' :حركة نسبية : Mouvement relatif.
- حركة R' بالنسبة إلى : R حركة مكتسبة: Mouvement d'entrainement.

2 - المقادير المطلقة:

دراسة حركة النقطة M في المعلم الثابت أو المطلق $R(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

2- أ- شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$:

هو شعاع موضع الجسم M بالنسبة للمعلم المطلق (الثابت) (R) و يكتب على الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}} \quad \text{........(83. III)}$$

2- ب- شعاع السرعة المطلقة $\vec{V}_a(t)$:

هو شعاع سرعة الجسم M بالنسبة للمعلم المطلق (R) و يكتب على الشكل:

$$\vec{V}_a(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (84.\ \text{III})$$

$$\vec{V}_a(t)=\vec{V}_a(t)/R=\vec{V}_a=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k} \text{.........}(4.83)$$

2-ج- شعاع التسارع المطلق $\vec{a}_a(t)$:

هو شعاع تسارع M بالنسبة للمعلم المطلق (R) و يكتب على الشكل:

$$\vec{a}_a(t)=\frac{d\vec{V}_a(t)}{dt}/R=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (85.\ III)$$

$$\vec{a}_a(t)=\vec{a}_a(t)/R=\vec{a}_a=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k} \quad ....(4.84)$$

3- المقادير النسبية:

هي دراسة الحركة في المعلم النسبي $R'(O'x'y'z')$ و هو متحرك بالنسبة للمعلم المطلق $R(O,x,y,z)$

3- أ- شعاع الموضع $\overrightarrow{OM'}(t)$:

هو شعاع موضع الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي (R') و يكتب على الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM'}(t)=x'(t)\vec{i'}+y'(t)\vec{j'}+z'(t)\vec{k'}} \quad ....(86.\ III)$$

3-ب- شعاع السرعة النسبية $\vec{V}_r(t)$:

هو شعاع سرعة الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي (R') و يكتب على الشكل:

$$\vec{V}_r(t)=\vec{V}(t)/R'=\vec{V}_r=\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R'=\frac{dx'}{dt}\vec{i'}+\frac{dy'}{dt}\vec{j'}+\frac{dz'}{dt}\vec{k'} \qquad (87.\ III)$$

$$\vec{V}_a(t)=\vec{V}_a(t)/R=\vec{V}_a=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k} \quad ....(4.86)$$

3-ج- شعاع التسارع النسبي $\vec{a}_r(t)$:

هو شعاع تسارع M بالنسبة للمعلم النسبي (R') و يكتب على الشكل:

(88. III)

$$\vec{a}_r(t)=\frac{d\vec{V}_r(t)}{dt}/R'=\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/R'=\frac{d^2\dot{x}}{dt^2}\vec{i'}+\frac{d^2\dot{y}}{dt^2}\vec{j'}+\frac{d^2\dot{z}}{dt^2}\vec{k'} \quad ....(4.87)$$

ملاحظة : أن أشعة الواحدة $\left(\vec{i}^{'},\vec{j}^{'},\vec{k}^{'}\right)$ تكون ثابتة داخل المعلم النسبي غير أنها متغيرة داخل المعلم المطلق و بالتالي يجب أخذها بالاعتبار عند الاشتقاق داخل هذا المعلم .

4 -علاقات التركيب:

تتحرك النقطة M بالنسبة لمعلمين إحداهما ثابت (R) و الآخر متحرك $\left(R^{'}\right)$ يتحرك بالنسبة للمعلم (R) بحركة كيفية (دورانية أو انسحابية) .

4- أ- أشعة الموضع: تكتب علاقة تركيبة أشعة الوضع كما يلي:

(89. III)

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OO^{'}}(t)+\overrightarrow{O^{'}M}(t)}\;.........(4.88)$$

4-ب- أشعة السرعات :

(90. III)

$$\vec{V}_a(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R=\frac{d\overrightarrow{OO^{'}}(t)}{dt}/R+\frac{d\overrightarrow{O^{'}M}(t)}{dt}/R$$

$$\vec{V}_a(t)=\frac{d\overrightarrow{OO^{'}}(t)}{dt}/R+\frac{d}{dt}\left(x^{'}\vec{i}^{'}+y^{'}\vec{j}^{'}+z^{'}\vec{k}^{'}\right)\;.........(4.89)$$

$$\vec{V}_a(t)=\frac{d\overrightarrow{OO^{'}}(t)}{dt}/R+x^{'}\frac{d\vec{i}^{'}}{dt}+y^{'}\frac{d\vec{j}^{'}}{dt}+z^{'}\frac{d\vec{k}^{'}}{dt}+\frac{dx^{'}}{dt}\vec{i}^{'}+\frac{dy^{'}}{dt}\vec{j}^{'}+\frac{dz^{'}}{dt}\vec{k}^{'}$$

(91. III)

$$\vec{V}_e(t)\frac{R^{'}}{R}=\frac{\frac{d\overrightarrow{OO^{'}}(t)}{dt}}{R}+\vec{\omega}_{R^{'}/R}\wedge\overrightarrow{O^{'}M}(t)\quad,\quad\vec{V}_r(t)/R^{'}=\frac{d\overrightarrow{O^{'}M}(t)}{dt}/R^{'}\;.........(4.90)$$

$\vec{V}_r(t)$: السرعة النسبية .

$\vec{V}_e(t)$: السرعة المكتسبة (سرعة الجر) هي سرعة المعلم $R^{'}/R$.

$\vec{V}_a(t)$: السرعة المطلقة .

ملاحظة : $\vec{V}_e$ تتعلق من جهة بالشعاع $\overrightarrow{OO^{'}}$ و بإحداثيات النقطة المتحركة و بدوران المعلم النسبي داخل المعلم المطلق من جهة ثانية. أي حركة كيفية للمعلم النسبي، يمكن تحليلها إلى مجموع حركتين؛ إنسحابية ودورانية .

4-ج- أشعة التسارعات:

تكتب علاقة تركيب التسارعات كما يلي:

$$\vec{a}_a(t)=\frac{d\vec{V}_a(t)}{dt}/R=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R=\frac{d\vec{V}_e(t)}{dt}/R+\frac{d\vec{V}_r(t)}{dt}/R$$

$$\vec{a}_a(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R+x'\frac{d\vec{i'}}{dt}+y'\frac{d\vec{j'}}{dt}+z'\frac{d\vec{k'}}{dt}+\frac{dx'}{dt}\vec{i'}+\frac{dy'}{dt}\vec{j'}+\frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\vec{a}_a(t)=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}/R+x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}}_{\vec{a}_e(t)}+\underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}}_{\vec{a}_r(t)}$$

$$+\underbrace{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)}_{\vec{a}_c(t)} \quad ....(92.\ III)$$

(93. III)

$$\vec{a}_a(t)/R=\vec{a}_e(t)R'/R+\vec{a}_r(t)/R'+\vec{a}_c(t)/R'$$

$$\vec{a}_e(t)R'/R=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2}\Big/R+\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right)+\frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} \quad ....(4.92)$$

حيث:

$\vec{a}_a$: شعاع التسارع المطلق .

$\vec{a}_r$: شعاع التسارع النسبي .

$\vec{a}_e$: شعاع التسارع المكتسب (أو الجر) .

$\vec{a}_c$: شعاع التسارع كوريوليس أو الإضافي

5 -حركة المعلم النسبي إنسحابية :

5- أ- أشعة السرعات:

في هذه الحالة تكون الأشعة $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ ثابتة في المعلم المطلق و مشتقاتها معدومة، لنجد:

(94. III)

$$\vec{V}_e(t)=\vec{V}_T(t)=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/\mathrm{R} \quad ....(4.93)$$

حيث $\vec{V}_T(t)$: هي سرعة الانسحاب

- من هنا يكتب شعاع السرعة المطلقة كما يلي:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_T + \vec{V}_r \quad \text{.........(95. III)}$$

حالة خاصة:

إذا كانت سرعة الانسحاب ثابتة، يمكن أن نختار المعلمين متوازيين لهما نفس المحور Ox و الانسحاب يتم وفق هذا المحور في هذه الحالة، نكتب العلاقة بين حركتي النقطة في المعلمين من الشكل:

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + V_T.t \\ y(t) &= y'(t) \end{aligned} \quad \text{.........(4.95) (96. III)}$$

مجموعة المعالم التي تتحرك في ما بينها حركة انسحابية منتظمة تعرف باسم المعالم العطالية أو المعالم الغليلية ، تملك أهمية خاصة في الميكانيك .

5-ب- أشعة التسارعات:

الأشعة $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ ثابتة في المعلم المطلق و بالتالي يكون تسارع كوريوليس معدوما و التسارع المكتسب يأخذ الشكل:

$$\vec{a}_e(t) = \vec{a}_T(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} / \mathrm{R} \quad \text{.........(4.96) (97. III)}$$

$\vec{a}_T(t)$: هو تسارع الانسحاب .

- من هنا يكتب شعاع التسارع المطلق كما يلي :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_T + \vec{a}_r \quad \text{.........(98. III)}$$

6-حركة المعلم النسبي دورانية :

6- أ- أشعة الدوران اللحظية:

في هذه الحالة تكون O' ثابتة، نأخذها متطابقة مع O في حين تدور أشعة الواحدة $\left(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$ حول محور لحظي $\Delta(t)$ مرتبط بالمعلم المطلق و بالتالي نكتب أشعة الدوران اللحظية للمعلم النسبة للمعلم (R) في حالة الحركة الدائرية كما يلي: $\left(R'\right)$

(99. III)

$$\frac{d\vec{i}}{dt}/R=\frac{d\vec{i}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}=\vec{\omega}.\vec{j'}=\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\vec{i'}\quad\text{.........}(4.98)$$

$\vec{\omega}_{R'/R}=\frac{d\theta}{dt}$: شعاع السرعة الزاوية لدوران محاور المعلم النسبي R' بالنسبة للمعلم المطلق R

6-ب- أشعة السرعــات: تصبح السرعة المكتسبة:

(100. III)

$$\vec{V}_e(t)=x'\frac{d\vec{i'}}{dt}+y'\frac{d\vec{j'}}{dt}+z'\frac{d\vec{k'}}{dt}=\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\left(x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'}\right)\quad\text{.........}(4.99)$$

$\vec{V}_{Rot}(t)$: السرعة المكتسبة نتيجة دوران المعلم النسبي .

$\vec{\omega}$: شعاع السرعة الزاوية لدوران محاور المعلم النسبي R'/R .

من هنا تعطى عبارة السرعة المطلقة:

(101. III)

$$\Rightarrow\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_{Rot}(t)\quad\text{.........}(4.100)$$

6-ج- أشعة التسارعات:

O' ثابتة و متطابقة مع O والأشعة $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ تدور حول محور لحظي $\Delta(t)$ بالتالي نكتب:

(102. III)

$$\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}=\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{i'}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{i'}$$

$$\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2}=\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{j'}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{j'}\quad\text{.........}(4.101)$$

$\vec{a}_e$:تسارع الجر .

(103. III)

$$\vec{a}_e(t)=\vec{a}_{Rot}(t)=\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\quad\text{.........}(4.102)$$

$\vec{a}_c$: تسارع كريوليس $\vec{a}_c=2\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\vec{V}_r$

$\vec{a}_r$: التسارع النسبي $\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} / R'$

$\vec{a}$: التسارع المطلق:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{a} \quad \text{.........}(4.103) \quad (104.\ \text{III})$$

ملاحظة:

إذا كانت M نقطة ثابتة في المعلم المتحرك (R) فإن:

$\vec{V}_r = \vec{V}(t) / R' = \vec{0}$ كذلك: $\vec{a}_c = \vec{0}$

- إذا كانت حركة المعلم المتحرك (R') انسحابية منتظمة بالنسبة للمعلم الثابت (R) فإن:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r \Leftarrow \begin{cases} \vec{a}_e = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases} \Leftarrow \frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2} = \vec{0} \text{ و } \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0} \quad \text{.........}(4.104) \quad (105.\ \text{III})$$

في هذه الحالة نقول أن المعلم (R') هو معلم غاليلي أو عطالي لأن التسارع المطلق يساوي دائما التسارع النسبي.

7-حركة المعلم النسبي كيفية :

هي عبارة عن تركيب لحركتين، إنسحابية و دورانية، و تكون السرعة المكتسبة هي مجموع سرعتي الانسحاب و الدوران:

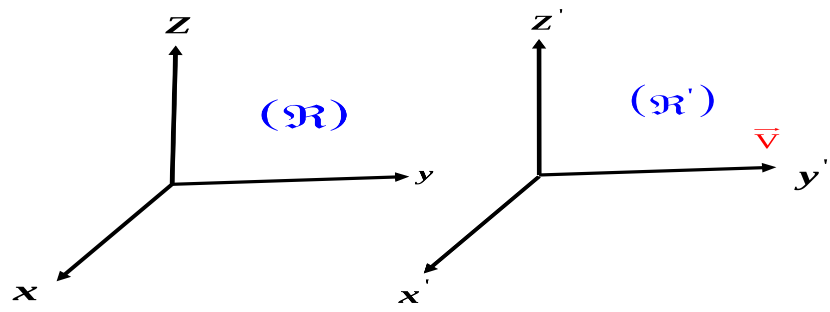
$$\vec{V}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} / R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_T(t) + \vec{V}_{Rot}(t) \quad \text{.........}(4.105) \quad (106.\ \text{III})$$

التسارع المطلق يكتب من الشكل:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_T + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{a}_r \quad \text{...}(107.\ \text{III})$$

8- تطبيقات :

8- أ- الحركة الإنسحابية الخطية: الشكل (21.III)



الشكل (21.III)

لدينا $\left(R'\right)//\left(R\right)$: $\vec{\omega}_{R'/R}=\vec{0} \Leftarrow \vec{i}//\vec{i}\ ,\vec{j}//\vec{j},\ \vec{k}//\vec{k}$

8-أ-1- شعاع السرعة:

(108. III)

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r=\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}/R'=\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'=\dot{x}'\vec{i}+\dot{y}'\vec{j}+\dot{z}'\vec{k} \quad ....(4.107)$$

8-أ-2- شعاع التسارع:

(109. III)

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$$

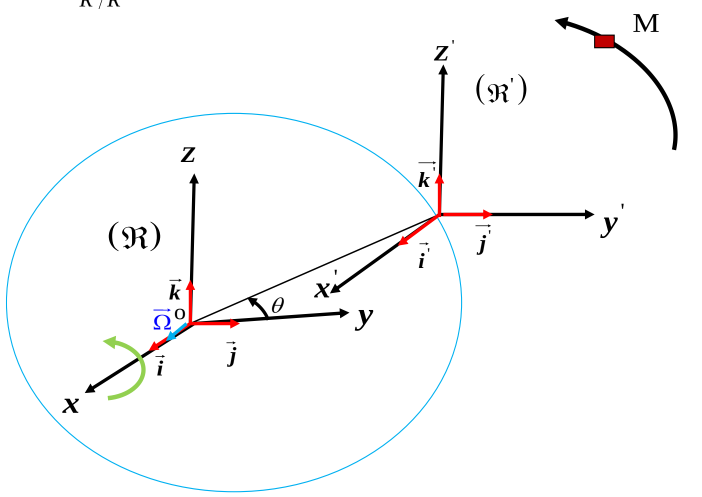
$$\frac{d\vec{V}_r'}{dt}/R'=\ddot{x}'\vec{i}+\ddot{y}'\vec{j}+\ddot{z}'\vec{k} \quad ....(4.108)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}\left(O'\right)/R} \ldots\ldots\ldots (110.\ \mathrm{III})\ (4.109)$$

8-ب- الحركة الإنسحابية الدورانية الشكل (22.III)

لدينا $\left(R'\right)//\left(R\right)$:

$$\vec{i'}//\vec{i} \quad \overrightarrow{k'}//\vec{k} \ , \quad \vec{j'}//\vec{j} \ , \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$$



الشكل (22.III)

8-ب-1- شعاع السرعة:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \\ \vec{V} \quad d\overrightarrow{OO'} / R + \vec{\ } \ldots \overrightarrow{O'M} \quad d\overrightarrow{OO'} / R \quad \Omega \wedge \overrightarrow{OO'}\end{gathered}} \ldots\ldots\ldots (111.\ \mathrm{III})\ (4.110)$$

حيث :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{i'} = \dot{\theta}\vec{i}} \ldots\ldots\ldots (112.\ \mathrm{III})$$

$\vec{\Omega}$: تمثل سرعة الدوران للنقطة O' و ليس سرعة الدوران المعلم النسبي R' بالنسبة للمعلم المطلق R أي أن

$$\dot{\theta} \neq \vec{\omega}_{R'/R}$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \Omega \wedge \overrightarrow{OO'}} \ldots\ldots\ldots (113.\ \mathrm{III})$$

8-ب-2- شعاع التسارع:

(114. III)

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\frac{d\vec{V}_r{}'}{dt} / R' = \ddot{x}'\vec{i} + \ddot{y}'\vec{j} + \ddot{z}'\vec{k} \quad ....(4.113)$$

لدينا : 　(115. III)

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} / R = \Omega \wedge \overrightarrow{OO'} = \dot{\theta}\vec{i} \wedge \overrightarrow{OO'}$$

$$\vec{a}_e == \ddot{\theta}\vec{i} \wedge \overrightarrow{OO'} + \dot{\theta}\vec{i} \wedge \left(\dot{\theta}\vec{i} \wedge \overrightarrow{OO'}\right) \quad ....(4.114)$$

تمارين : من (1.III) إلى (6.III)

تمرين 1.III :

ينتقل جسم نقطي M وفق المعادلات:

$$\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 3t + 4 \end{cases}$$

1- أوجد معادلة المسار و طبيعته .

2- أوجد أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$ ، السرعة $\vec{V}$ و التسارع γ

تمرين 2.III :

يتحرك الجسم M وفق المعادلات:

$$\begin{cases} \rho = 2ae^{\theta} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

a, ω: ثابتان موجبان

1- أوجد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية ثم الديكارتية .

2- أوجد شدة $\vec{V}$ و $\vec{\gamma}$ ثم احسب γ_T, γ_N و نصف قطر الانحناء R .

3- احسب طول المسار $L(\theta)$ علما أن $L(0) = 0$.

تمرين 3.III :

تعطى إحداثيات المتحرك M بـ:

$$\begin{cases} x = R(1 + \cos 2\theta) \\ y = R\sin 2\theta \end{cases} , \quad \theta = \omega t$$

ω و R ثابتان موجبان

1- أوجد في الإحداثيات الديكارتية معادلة المسار و أرسمه ثم أوجد أشعة السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{\gamma}$,

2- أوجد في الإحداثيات القطبية معادلة المسار ثم أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$ ، السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{\gamma}$

3- بين أن الحركة ذات تسارع مركزي و حدد هذا المركز .

تمرين 4.III :

نعرف شعاع الموضع لنقطة مادية بالمعادلة التالية: $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

لدينا :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

R, V_0 و ω :ثوابت موجبة

1- أوجد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية ثم الاسطوانية.

2- أوجد معادلة المسار و طبيعته .

3- عين الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{V}$ و $\overrightarrow{oz}$

4- أوجد الفاصلة المنحنية $S(t)$ ثم بين بدون حساب أن الحركة ذات تسارع مركزي في حالة

$V_0 = 0$

تمرين 5.III :

تعطى إحداثيات متحرك في معلم ديكارتي ثابت بـــ:

$$(R)\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \end{cases} \qquad (R')\begin{cases} x' = t^2 + t - 1 \\ y' = -2t^4 + 5 \end{cases}$$

- علما أن محاور المعلمين تبقى دوما متوازية

- اوجد طبيعة حركة (R'/R) و ما نوع هذه الحركة.

تمرين 6.III :

يسقط جسم M من أعلى عمارة على شخص متوقف على الطريق. عندما يكون الجسم على ارتفاع h من الطريق ينطلق الشخص جاريا بحركة متسارعة تسارعها γ . أوجد عبارة:

1- شعاع التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$ للجسم M .

2- شعاع السرعة النسبية $\vec{V}_r$ للجسم M .

3- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص

حلول التمارين : من (1.III) إلى (6.III)

حل التمرين 1.III :

$$\begin{cases} x(t)=5t \\ y(t)=3t+4 \end{cases}$$

1- معادلة المسار و طبيعته .

$$x=5t \Rightarrow t=\frac{x}{5} \qquad y=3t+4 \Rightarrow y=\frac{3}{5}x+4$$

معادلة المسار من الشكل: $y=Ax+B$

2- و التي تمثل معادلة مستقيم لا يمر بالمبدأ ميله $\frac{3}{5}$ و يقطع محور التراتيب في النقطة $(0,4)$

- عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x=5t \\ y=3t+4 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=5t\vec{i}+(3t+4)\vec{j}$$

- عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=5\vec{i}+3\vec{j}$$

- عبارة شعاع التسارع $\vec{\gamma}$.

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\vec{0}$$

- نلاحظ أنه سواء من عبارة السرعة الثابتة الاتجاه والمقدار أو من عبارة التسارع المعدوم فان الحركة مستقيمة منتظمة .

حل التمرين 2.III :

-1

- **في الإحداثيات القطبية**

- شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM}=\rho.\overrightarrow{U}_\rho=2ae^{\theta}\overrightarrow{U}_\rho$

- شعاع السرعة :

$$\vec{V}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2ae^{\theta}\overrightarrow{U}_\rho\right)=2a\omega e^{\theta}\left(\overrightarrow{U}_\rho+\overrightarrow{U}_\theta\right)$$

- شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}(t)=\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2a\omega e^{\theta}\left(\vec{U}_{\rho}+\vec{U}_{\theta}\right)\right)=4a\omega^{2}e^{\theta}\vec{U}_{\theta}$$

- **في الإحداثيات الديكارتية**

- شعاع الموضع :

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=2ae^{\theta}\left(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right)$$

- شعاع السرعة :

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=2a\omega e^{\theta}\left[\left(\cos\theta-\sin\theta\right)\vec{i}+\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\vec{j}\right]$$

- شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}=\vec{a}=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=4a\omega^{2}e^{\theta}\left(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right)$$

2- شدة $\vec{V}$: $\|\vec{V}\|=2\sqrt{2}a\omega e^{\theta}$

شدة $\vec{\gamma}$: $\|\vec{\gamma}\|=4a\omega^{2}e^{\theta}$

حساب γ_T ، γ_N و R

$$a_{T}=\gamma_{T}=\frac{d\vec{V}}{dt}=2\sqrt{2}a\omega^{2}e^{\theta}$$

$$a_{N}=\gamma_{N}=\sqrt{\gamma^{2}-\gamma_{T}^{2}}=2\sqrt{2}a\omega^{2}e^{\theta}$$

من هنا نستنتج عبارة نصف قطر الانحناء R :

$$R=\frac{V^{2}}{\gamma_N}=2\sqrt{2}ae^{\theta}$$

3- طول المسار $L(\theta)$

$$V=\frac{dS}{dt}=\frac{dL}{dt}=2\sqrt{2}a\omega e^{\theta}\Rightarrow dL=2\sqrt{2}a\omega e^{\theta}dt$$

$$\Rightarrow\int dL=2\sqrt{2}a\int e^{\theta}\left(\omega dt\right)=2\sqrt{2}ae^{\theta}+Cst$$

$$\left[L(\theta=0)=0\Rightarrow Cst=-2\sqrt{2}a\right]\Rightarrow L=2\sqrt{2}a\left(e^{\theta}-1\right)$$

حل التمرين 3.III :

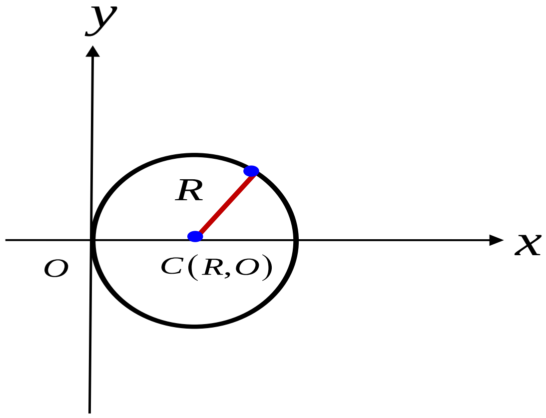
1- ايجاد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases}x=R\left(1+\cos2\theta\right)\\ y=r\sin2\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-R=R\cos2\theta\\ y=r\sin2\theta\end{cases}\Rightarrow\left(x-R\right)^{2}+y^{2}=R^{2}$$

المسار عبارة عن دائرة مركزها $C(R,0)$ و نصف قطرها R .

عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\left(1+\cos 2\theta\right) \\ y = R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = R\left(1+\cos 2\theta\right)\vec{i} + R\sin 2\theta\,\vec{j}$$



الشكل (23.III)

- عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\left(2R\omega\sin 2\theta\right)\vec{i} + 2R\omega\cos 2\theta\,\vec{j}$$

- عبارة شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -4R\omega^2\left[\cos 2\theta\vec{i} + \sin 2\theta\,\vec{j}\right]$$

2- إيجاد معادلة المسار في الإحداثيات القطبية:

$\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{U}_{\rho}$ أين : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \omega t \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{R^2\left(1+\cos 2\theta\right)^2 + R^2\left(\sin 2\theta\right)^2}$$

$$\rho = R\sqrt{1+2\cos 2\theta + \left(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\right)} = R\sqrt{2+2\cos 2\theta} = R\sqrt{2\left(1+\cos 2\theta\right)}$$

لدينا : $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

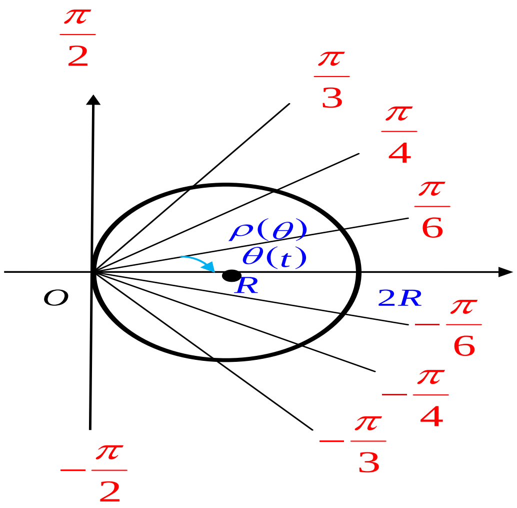
$$\rho = 2R\sqrt{\left(1+1-2\sin^2\theta\right)} = 2R\sqrt{\left(1-\sin^2\theta\right)} = 2R\sqrt{\cos^2\theta} = 2R\left|\cos\theta\right| = \boxed{2R\cos\theta}$$

$$\begin{cases} \rho = 2R\cos\theta \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

- جدول تغير ρ بدلالة θ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	0	R	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{3}$	$2R$	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R	0

المسار عبارة عن دائرة مركزها $C(R,0)$ و نصف قطرها. R



الشكل (24.III)

- في الإحداثيات القطبية:

- شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{U}_\rho=2R\cos\theta\vec{U}_\rho$

- شعاع السرعة :

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=2R\omega\left(-\sin\theta\vec{U}_\rho+\cos\theta\vec{U}_\theta\right)$$

- شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=-4R\omega^2\left(\cos\theta\vec{U}_\rho+\sin\theta\vec{U}_\theta\right)$$

3- الحركة ذات تسارع مركزي:

- ليكن مركز التسارعات C'

مركز التسارعات يكون بحيث: $\overrightarrow{C'M}//\vec{\gamma}(M)$

$$\forall t:\overrightarrow{C'M}//\vec{\gamma}(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{C'M}\wedge\vec{\gamma}(M)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{C'M} \wedge \vec{\gamma}(M) = -4R\omega^2 \begin{pmatrix} R(1+\cos 2\theta) - x_{C'} \\ R\sin 2\theta - y_{C'} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4R\omega^2 \cos 2\theta \left(R\sin 2\theta - y_{C'}\right) = -4R\omega^2 \sin 2\theta \left(R\left(1+\cos 2\theta\right) - x_{C'}\right)$$

$$\Rightarrow y_{C'} \cos 2\theta - \left(R - x_{C'}\right)\sin 2\theta = 0$$

- الحل الرياضي: $\forall t,\theta$

$$\begin{cases} y_{C'} = 0 \\ R - x_{C'} = 0 \end{cases}$$

إحداثيات المركز C' :

$$\begin{cases} y_{C'} = 0 \\ x_{C'} = 0 \end{cases}$$

أي أن : $C'(R,0) = C(R,0)$

- إذن نقطة المركز هي نفسها النقطة Cو هو نقطة ثابتة فالحركة ذات تسارع مركزي .

حل التمرين 4.III :

لدينا : $z(t) = V_0 t \qquad y(t) = R\sin(\omega t) \qquad x(t) = R\cos(\omega t)$

R,V_0 و ω : ثوابت موجبة

1- إيجاد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j} + V_0 t\vec{k} \\ z(t) = V_0 t \end{cases}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (-R\omega\sin\theta)\vec{i} + (R\omega\cos\theta)\vec{j} + V_0\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(-R\omega^2\cos\theta\right)\vec{i} + \left(-R\omega^2\sin\theta\right)\vec{j}$$

- إيجاد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الاسطوانية.

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{R^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}=R\Rightarrow\boxed{\rho=R}$$

$$\overrightarrow{OM}=R\vec{U}_\rho+V_0t\vec{k}$$

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=R\omega\vec{U}_\theta+V_0\vec{k}$$

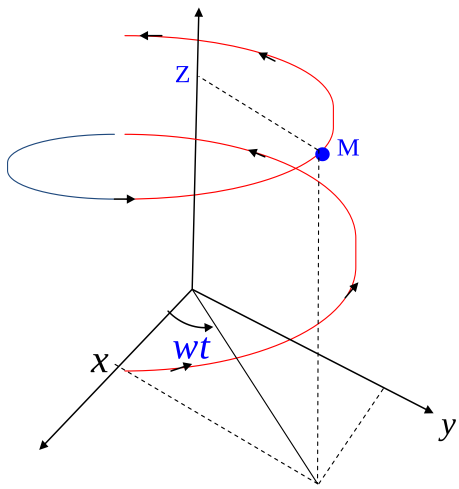
$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=-R\omega^2\vec{U}_\rho$$

2- معادلة المسار و طبيعته:

$$\begin{cases}x(t)=R\cos\theta\\ y(t)=R\sin\theta\end{cases}$$ و $x^2+y^2=R^2$

- في المستوي oxy المسار عبارة عن دائرة مركزها $C(0,0)$ و نصف قطرها R .

و بما أن المتحرك ينتقل وفق $\overrightarrow{oz}$ حركة متغيرة بدلالة الزمن t $\left(z(t)=V_0t\right)$ فالمسار الكلي أسطواني أو لولبي وفق $\overrightarrow{oz}$ (متصاعد نحو الاعلى) .



الشكل (25.III)

3- تعيين الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{V}$ و $\overrightarrow{oz}$

$$\vec{V}.\vec{k}=\left\|\vec{V}\right\|.\left\|\vec{k}\right\|\cos\alpha=V\cos\alpha=V_0\Rightarrow\cos\alpha=V_0/V$$

$$\alpha = Arc\cos\left(V_0/V\right) \Rightarrow \alpha = Arc\cos V_0 \Big/ \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}$$

4- إيجاد الفاصلة المنحنية $s(t)$

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = Vdt$$

$$s = \int \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}\,dt \Rightarrow s = \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}.t + c$$

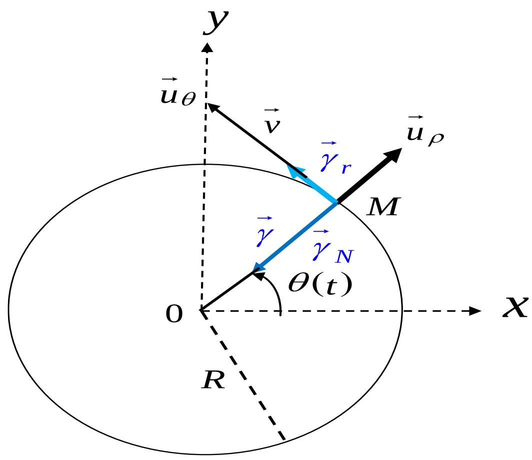
$$s(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Leftrightarrow s(t) = \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}.t$$

- ثم بين بدون حساب أن الحركة ذات تسارع مركزي في حالة $V_0 = 0$

• في حالة V_0: الحركة تكون في المستوي oxy

من عبارة التسارع $-R\omega^2\vec{U}_\rho$ نلاحظ أن التسارع $\vec{\gamma}$ يتجه دائما عكس $\vec{U}_\rho$ أي عكس $\overrightarrow{OM}$ الذي بدوره يتجه نحو (O).

من هنا نستنتج أن $\vec{\gamma}$ تتجه دوما نحو (O) مركزى المعلم. إذن الحركة ذات تسارع مركزي و مركز التسارعات هو المركز (O).



الشكل (26.III)

حل التمرين 5.III :

- طبيعة حركة (R'/R):

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_e(R'/R) + \vec{V}_r(M/R')$$

- إيجاد $\vec{V}_e(R'/R)$:
$$\vec{V}_e(R'/R) = \vec{V}_a(M/R) - \vec{V}_r(M/R')$$

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_a\left(M/R\right)\begin{cases} \dot{x} = 2t - 1 \\ \dot{y} = -8t^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_e\left(R'/R\right)\begin{cases} x' - \dot{x}' = -5 \\ y' - \dot{y}' = 0 \\ z' - \dot{z}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_e\left(R'/R\right) = -5\vec{i}$$

$$\left(\overrightarrow{OM'}\right)\begin{cases} x' = t^2 + t - 1 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_r\left(M/R'\right)\begin{cases} \dot{x}' = 2t + 1 \\ \dot{y}' = -8t^3 \\ \dot{z}' = 6t \end{cases}$$

- نلاحظ أن السرعة المكتسبة ثابتة هذا يدل أن حركة $\left(R'/R\right)$ مستقيمة منتظمة . إذن المعلمان عطاليان (غالليان).

حل التمرين 6.III :

R : المعلم الثابت (المطلق) هو العمارة.

R' : المعلم المتحرك (النسبي) هو الشخص.

M : النقطة أو الجسم المتحرك.

أشعة السرعـات : $\vec{V}a\left(t\right)_{M/R} = \vec{V}e\left(t\right)_{R'/R} + \vec{V}r\left(t\right)_{M/R'}$:

أشعة التسارعات: $\vec{\gamma}_a\left(t\right)_{M/R} = \vec{\gamma}_e\left(t\right)_{R'/R} + \vec{\gamma}_r\left(t\right)_{M/R'} + \vec{\gamma}_c\left(t\right)_{M/R}$:

1- إيجاد شعاع التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$ للجسم M :

$$\vec{\gamma}_c\left(t\right)_{M/R'} = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{V_r} \quad , \quad \left(\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}\right) \Rightarrow \vec{\gamma}_c\left(t\right)_{M/R'} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_r\left(t\right)_{M/R'} = \vec{\gamma}_a\left(t\right)_{M/R} - \vec{\gamma}_e\left(t\right)_{R'/R} \qquad , \quad \vec{\gamma}_a\left(t\right)_{M/R} = -g\vec{j}$$

لأن الجسم M يسقط سقوطا حرا من أعلى العمارة . $\vec{\gamma}_e(t)_{R'/R} = \gamma\vec{i}$

لأن الشخص يتحرك بحركة متسارعة. $\vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} = -(\gamma\vec{i} + g\vec{j})$

2- إيجاد شعاع السرعة النسبية $\overrightarrow{V_r}$ للجسم M

$$\vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt} / R'$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{V_r} = \vec{\gamma}_r dt \Rightarrow \overrightarrow{V_r} = \int \vec{\gamma}_r dt = \int -(\gamma\vec{i} + g\vec{j})dt$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_r} = -(\gamma t\vec{i} + gt\vec{j})$$

3- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص:

أي: مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للمعلم المتحرك (النسبي) R' .

- يجب إيجاد مركبات الشعاع $\overrightarrow{O'M}$

$$\vec{V}_r(t)_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} / R' \Rightarrow d\overrightarrow{O'M} = \vec{V}_r(t)_{M/R'}\, dt$$

$$\overrightarrow{O'M} = \int(-\gamma t\vec{i} - gt\vec{j})dt \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \left(-\gamma\frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(h - g\frac{t^2}{2}\right)\vec{j}$$

إيجاد معادلة المسار

$$\overrightarrow{O'M} = \begin{cases} x' = -\gamma\dfrac{t^2}{2} \\ y' = h - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = \begin{cases} t^2 = \dfrac{-2x'}{\gamma}.........(1) \\ y' = h - g\dfrac{t^2}{2}......(2) \end{cases}$$

- نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد: $y' = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{-2x'}{\gamma}\right) \Rightarrow y' = \frac{g}{\gamma}x' + h$

- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص عبارة عن خط مستقيم مائل و ميله $\frac{g}{\ }$.

IV - تحريك النقطـة المادية Dynamique du point matériel

1- مفاهيم أساسية:

1- أ - **نص مبدأ العطالة:**

نص المبدأ : إدا كان جسم مادي غير خاضع لأية قوة فانه :

- إما في حركة مستقيمة منتظمة .
- إما في سكون إدا كان منذ البداية في سكون .

بالنسبة لجسيمة فان نص مبدأ العطالة هو : الجسيمة الحرة و المعزولة تتحرك وفق مسار مستقيم بسرعة ثابتة .

1- ب - **المعلم العطالي:**

- المعلم العطالي هو المعلم الذي يتحقق فيه مبدأ العطالة.
- تدعـى الجمل التي يكون فيها مبدأ العطالة محققا بالجمل الغاليلية أو العطالية وفيه تنتقل الجسيمة بسرعة ثابتة.
- هناك عدد لا نهائي من المعالم العطالية في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها البعض وهي كلها متكافئة ولا وجود لمعلم مطلق مفضل **.**
- المعالم العطالية هي المعالم التي لا تتسارع و لا تدور.

1- ج - **أمثلة عن بعض المعالم :**

في الحقيقة في الفراغ المطلق، لا توجد هذه الجمل (المعالم الغاليلية) فهناك معالم مقربة فقط أهمها:

1- ج - **1- معلم كوبرنيك:**

هو معلم مرتبط بالمجموعة الشمسية، مركزه هو مركز كتل المجموعة، و محاوره موجهة نحو نجوم بعيدة تعتبر من وجهة نظرنا ثابتة.

1- ج - **2- معلم كيبلر:**

مركز المعلم هو مركز عطالة الشمس و محاوره تعطى بثلاث نجوم بعيدة و تبدو ثابتة.

1- ج **-3 - المعلم الأرضي:**

محاوره مرتبطة بالأرض و مركزه نقطة من نقاط الأرض. تدور الكواكب ، و منها الأرض حـــول الشمس، فإذا أردنا دراسة حركة كوكب من على سطح الأرض فإننا نجد مسارا معقدًا و ليس في مقدورنا تفسيره.

مثال (1.IV) :هل يمكن اعتبار المعلم الأرضي معلما عطاليًا ؟

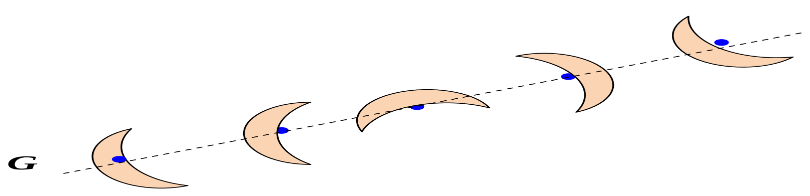
من الناحية النظرية لا يمكن اعتبار المعلم المرتبط بالأرض معلما عطاليًا لأن الأرض تدور بسرعة زاوية ومركزها لا يتحرك بسرعة منتظمة نتيجة لتفاعلها مع الشمس و بقية الكواكب الأخرى ، لكن من الناحية العملية يمكن اعتبار المعلم المرتبط بالأرض معلما عطاليًا إذا تعلق الأمر بتجارب ذات مدّة زمنية قصيرة تجرى في المعلم ألمخبري بجوار سطح الأرض وفق ارتفاعات لا تتعدى عشرات الأمتار.

1- د - أهمية الكتلة في التحريك:

الكتلة تُعبر عن كمية المادة التي يحتويها الجسم و هي مقدار محفوظ في إطار الميكانيك الكلاسيكي و تُعبر عن عطالة الجسم .

1- **د-1- مركز العطالة :** Centre d'inertie

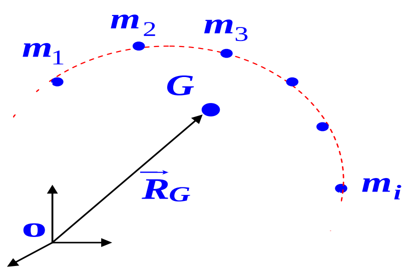
إذا كانت لدينا جملة من النقاط المادية **الشكل (1.IV)** ، و كانت بعيدة عن كل التأثيرات الخارجية الأخرى أي جملة معزولة . فإن التجارب تبين بأن هذه الجملة المعزولة تتميز بنقطة واحدة على الأقل ساكنة أو لها حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمعلم عطالي.



الشكل (1.IV)

تسمى هذه النقطة مركز عطالة الجملة و يرمز لها غالبًا بالرمز G.
توضح التجارب في الميكانيك الكلاسيكي أن مركز العطالة Gمنطبق على مركز الكتلة ، و يعطى مركز العطالة Gلجملة جسيمات $m_i.........m_2, m_1$ حيث يوافق نقطة مركز الأبعاد المتناسبة بينهما. بالعلاقة التالية: **الشكل (2.IV)**

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \vec{R}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}}..........(5.1) \quad (1.\ IV)$$



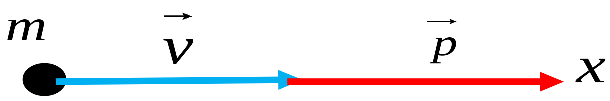
الشكل (2.IV)

2- كمية الحركة : Quantité de mouvement

- كمية الحركة مقدار شعاعي له نفس اتجاه السرعة ، و هو مقدار فيزيائي هام لأنه يجمع بين عنصرين يميزان الحالة الحركية للجسيم وهما كتلته و سرعته. يُعرف شعاع كمية الحركة لنقطة مادية كتلتها m و سرعتها $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم (R) كما يلي: الشكل (3.IV)

(2. IV)

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}} \text{..........}(5.2)$$



الشكل (3.IV)

- شعاع كمية الحركة الإجمالي لجملة نقاط مادية كتلة كل منها m_i و سرعة كل منها $\vec{v}_i$ هو مجموع كمية الحركة لكل نقطة مادية :

(3. IV)

$$\boxed{\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{P}_i} \text{..........}(5.2)$$

2-أ - إنحفاظ كمية الحركة :

في معلم عطالي (R)،إذا كانت الجملة معزولة أو شبه معزولة فإنه يكون لدينا:

(4. IV)

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}} \text{..........}(5.3)$$

إذن:

(5. IV)

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = Cst \Rightarrow m\vec{v} = Cst} \text{..........}(5.4)$$

شعاع كمية الحركة الكلي لجملة معزولة محفوظ دوما ، أي ثابت في القيمة و ثابت في الاتجاه.

$$\boxed{\vec{P}=\sum \vec{P}_i=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+.......=Cst} \qquad (6.\ IV)$$

3- **القوانين الثلاثة لنيوتن:**

3-أ - القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة) :

ينص هذا القانون على أنّ الجسم الساكن يظل ساكناً، والجسم المتحرك الذي يكون بسرعة محددة أي ثابتة على خط مستقيم يستمر ويبقى بحركته بالسرعة والاتجاه نفسه بالنسبة لمعلم (R) ، إن لم تؤثر قوة خارجية عليه تجبره على تغيير ذلك.

3-ب - القانون الثاني لنيوتن: **(المبدأ الأساسي للتحريك)**

في معلم عطالي (R) ، يتناسب تغير كمية الحركة لجسيم مع محصلة القوى التي يخضع لها . و يكون لهذا التغير نفس الحامل و نفس اتجاه محصلة القوى المطبقة :

$$\boxed{\sum \vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}} \qquad (7.\ IV) \quad ....(5.6)$$

- **الكتلة متغيرة:** إذا كانت كتلة الجسم متغيرة يكتب القانون كما يلي:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}=\vec{v}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (8.\ IV) \quad ....(5.7)$$

$\vec{P}$: تمثل كمية الحركة (لجسيمة

- **الكتلة ثابتة :** إذا كانت كتلة الجسم ثابتة فإن المبدأ الأساسي للتحريك يصبح:

$$\boxed{\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow \vec{F}=m\vec{\gamma}} \qquad (9.\ IV) \quad ....(5.8)$$

كل جسم كتلته m وله تسارع $\vec{\gamma}$ يكون خاضعا لقوة خارجية $\vec{F}$ حيث:

$$\boxed{\vec{F}=\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{\gamma}} \qquad (10.\ IV)$$

ملاحظة : هذا القانون يعتبر بمثابة حجر الأساس في الميكانيك وضعه العالم إسحاق نيوتن و هو يصف الحركة انطلاقا من مفهوم القوة.

- **حالات خاصة:**

- إذا كانت محصلة القوى ثابتة $\vec{F} = Cst$ فإن التسارع $\vec{\gamma} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ هو كذلك ثابت و حركة الجسم تكون مستقيمة متغيرة بانتظام .
- إذا كانت محصلة القوى معدومة: $\vec{F} = \vec{0}$ فإن التسارع $\vec{\gamma} = \vec{0}$ وبالتالي حركة الجسم تكون عطالية $\vec{v} = Cst$ (القانون الأول لنيوتن هو حالة خاصة من القانون الثاني).

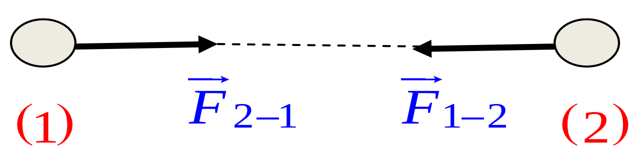
- **صلاحية القانون الثاني للحركة:**

- القانون الثاني لنيوتن لا يصلح إلا في معلم عطالي.
- يصلح هذا القانون ويعطي نتائج جيدة فقط على الأجسام التي لا تتعدى سرعتها عشر سرعة الضوء .

3-ج - القانون الثالث لنيوتن: (مبدأ الفعل ورد الفعل)

إذا أثر جسم (1) على جسم (2) بقوة $\vec{F}_{21}$ فإن الجسم (2) يؤثر على الجسم (1) بقوة $\vec{F}_{2\to1}$ تساوي $\vec{F}_{1\to2}$ في الشدة و تعاكسها في الاتجاه. **الشكل (4.IV)**

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}} \quad \text{..........} (11.\,\text{IV})$$



الشكل (4.IV)

أهم خصائص مبدأ الفعلين المتبادلين:

- هاتين القوتين لهما نفس الحامل.
- هاتين القوتين لهما نفس طبيعة التأثير (تجاذبية أو تباعدية).
- القوتين متزامنتين أي تحدثان في آن واحد.
- لا يمكن اعتبار أحدهما سببًا للآخر .

4- القوى في الطبيعة:

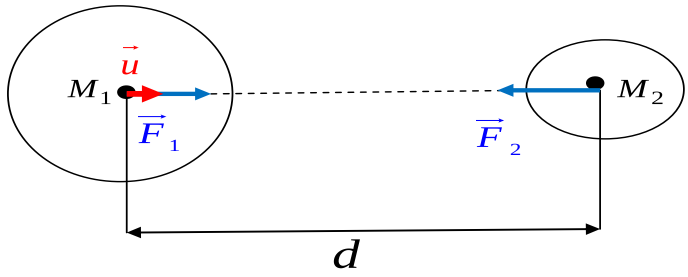
تنقسم القوى في الطبيعة الى قسمين:

4- أ - القوى ذات التأثير عن بعد : (القوى الأساسية)

4- أ - 1- قوة الجاذبية :

قانون الجاذبية الكونية:

يفسر هذا القانون قوة التجاذب بين جسمين ذي كتلتين M_1 و M_2 تفصل بينهما مسافة d حيث تنشأ بينهما قوتي تجاذب الشكل **(5.IV)**:



الشكل (5.IV)

(12.VI)

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Leftrightarrow \vec{F}_1 = G\frac{M_1M_2}{d^2}\vec{u} \Rightarrow \vec{F}_1 = G\frac{M_1M_2}{d^2}} ....(5.11)$$

حيث: G : ثابت الجاذبية الكونية $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2.kg^{-2}$

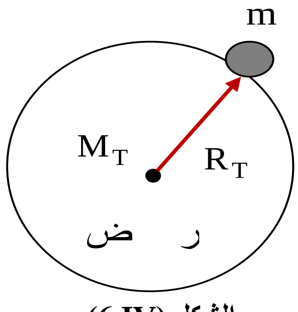
4- أ - 2- حقل الجاذبية :

قوة الجاذبية الأرضية هي الثقل. بفضل قانون الجذب العام لنيوتن وقانون القوة يمكن تحديد عبارة $\vec{g}$

- **على سطح الأرض الشكل (6.IV) :**

(13.VI)

$$\boxed{\vec{F} = \vec{P} = G\frac{M_Tm}{R^2} = mg_0 \Rightarrow g_0 = G\frac{M_T}{R^2}} ....(5.12)$$



الشكل (6.IV)

حيث:

M_T : كتلة الأرض $M_T = 5,98\times10^{24}kg$

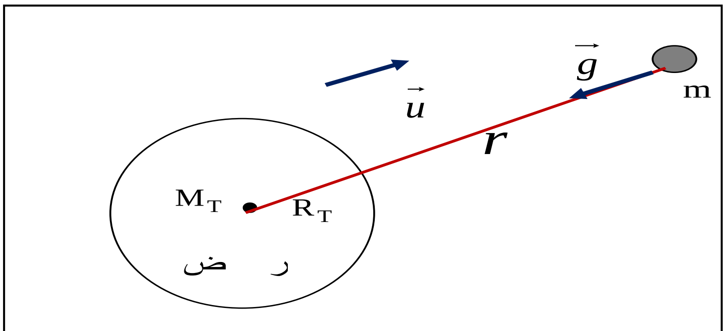
R_T : نصف قطر الأرض $R_T = 6,37\times10^{6}m$ ت.ع : $g_0 = 9.8N.kg^{-1}$

- **على ارتفاع** Z **من سطح الأرض** : شعاع حقل الجاذبية الأرضية على ارتفاع Z من سطح الأرض أي على بعد $r = R_T + Z$ من مركز الأرض **الشكل (7.IV)** نحصل عليه كما يلي

$$\boxed{P = mg = G\frac{M_T m}{r^2} \Rightarrow g = g_0\frac{R_T^2}{r^2}} \qquad (14.VI)\;\ldots\ldots\ldots(5.13)$$

أما العبارة الشعاعية فهي : (15. IV)

$$\boxed{g = -g_0\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}} \;\ldots\ldots\ldots(5.14)$$



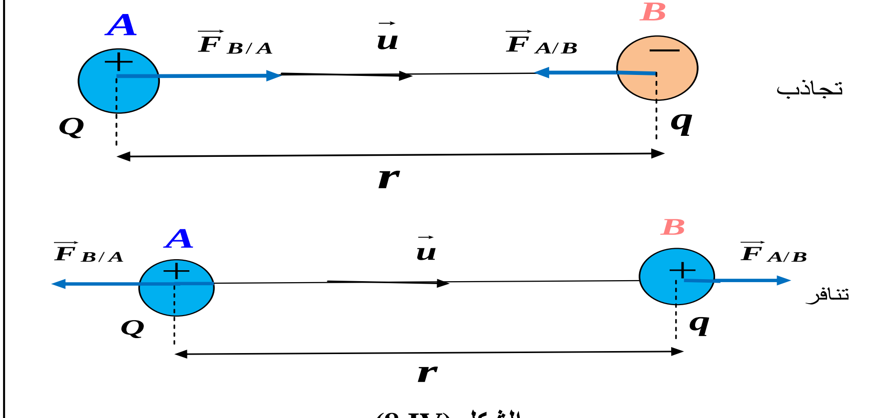
الشكل (7.IV)

4- أ - 3- القوة الكهروساكنة:

تكون بين الشحن الكهربائية **الشكل (8.IV)**:

(16. IV)

$$\boxed{\vec{F}_{Q\to q} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = q\vec{E}} \;\ldots\ldots\ldots(5.15)$$



الشكل (8.IV)

4- أ - 4- القوة الكهرومغناطسية:

ي قوة تأثر على شحنة q موجودة في حقل كهربائي $\vec{E}$ وحقل مغناطسي $\vec{B}$ وتدعى بقوة لورنتز ..Lorent

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right)} \quad ....(17.\ IV)$$

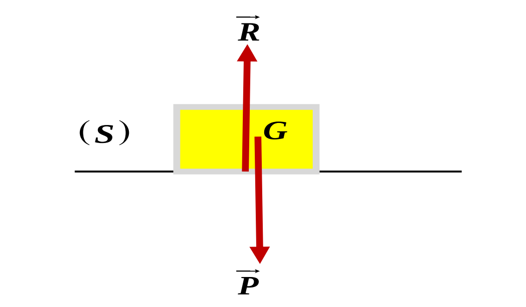
$\vec{V}$: سرعة الشحنة q

4- أ - 5- القوة النووية: تكون داخل النواة حيث تحافظ على تماسكها.

4- ب- **القوى ذات التأثير عن قرب:**

4- ب - 1- قوة رد فعل لحامل صلب أملس (بدون احتكاك):

لدينا جسم (د) موضوع فوق طاولة **الشكل (9.IV)** :



الشكل (9.IV)

$\vec{P}$: قوة ثقل الجسم الناتجة عن الجاذبية.

$\vec{R}$: قوة معاكسة لثقل الجسم (تمثل رد فعل الطاولة على الجسم)

إذن الجسم يبقى في حالة سكون ومنه: $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

4- ب - 2- قوى الاحتكاك :

الاحتكاك هو القوة المقاومة التي تحدث عند تحرك سطحين متلاصقين باتجاهين متعاكسين عندما يكون بينهما قوة ضاغطة تعمل على تلاحمهما معا (وزن أحد الجسمين مثلا) و تنتج كمية من الحرارة.

يحدث الاحتكاك بين المواد الصلبة السائلة و الغازية أو أي تشكيلة منهم.

4- ب - 3- انواع الإحتكاك:

- **الاحتكاك الصلب الساكن :** Frottement statique solide

ينشأ الاحتكاك السكوني من ملامسة أو اتصال جسم ساكن ما بسطح أو جسم آخر. في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك $\vec{R}_T$ معاكسة للحركة مماسية للمسار وطويلتها تتناسب مع طويلة رد الفعل الناظمي $\vec{R}_N$

حيث يعرف معامل الاحتكاك كما يلي:

$$\boxed{\mu = tg\varphi = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|}} \quad ....(5.17) \qquad (18.\ IV)$$

حيث رد الفعل للحامل هو:

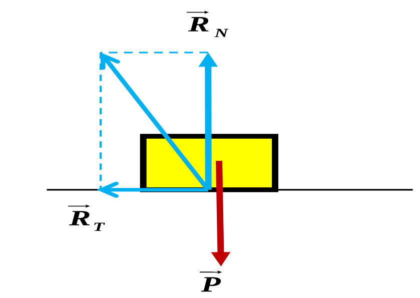
$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N} \quad ....(5.18) \qquad (19.\ IV)$$

لما يكون جسمان مماسيين و ساكنان نسبيا ، تكون هنالك قوة احتكاك سكونية لازمة لتحريك أحد الجسمين **الشكل (10.IV)** و **الشكل (11.IV)** حيث:

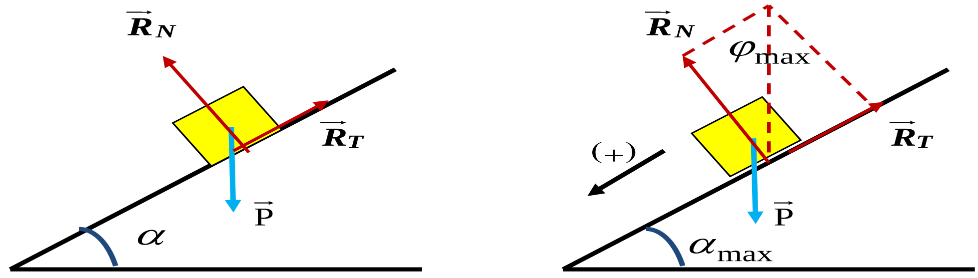
$$\boxed{\vec{R}_T = -\mu_s . R_N . \vec{U}_T \Leftrightarrow \|\vec{R}_T\| = \mu_s . \|\vec{R}_N\|} \quad ....(5.19) \qquad (20.\ IV)$$

حيث: μ_s : هو معامل الاحتكاك السكوني.

$$\mu_s = tg\varphi_{max}$$



الشكل (10.IV)



لاتوجد حركة للقيمة α　　　　الجسم يبدأ يتحرك من اجل قيمة α_{max}

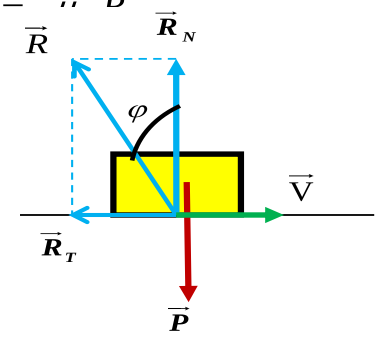
الشكل (11.IV)

- **الإحتكاك الصلب الحركي :**

تلك القوة التي تظهر عندما يتحرك جسمان متلاصقان ،أي يتحرك الجسم على سطح الجسم الاخر (المتلاصق معه.) **الشكل (12.IV)** :

$$\vec{R}_T = -\mu_c . R_N . \vec{U}_T \Leftrightarrow \left\|\vec{R}_T\right\| = \mu_c . \left\|\vec{R}_N\right\| \qquad (21.\ IV)$$

$\vec{V}$ ....(5.20)



الشكل (12.IV)

هنا μ_c :يمثل معامل الإحتكاك الحركي .

- من هنا نلاحظ أن مفهومي الاحتكاك الحركي و الاحتكاك السكوني مختلفان عن بعضهما ، ففي حالة يكون الجسم متحرك و في الحالة الأخرى يكون الجسم ساكنا.
- عادة ما يكون معامل الإحتكاك السكوني أكبر من معامل الإحتكاك الحركي. $\mu_S \succ \mu_c$

- **الإحتكاك الميوعي: Frottement visqueux**

حين ينتقل جسم صلب في مائع (غاز أو سائل) بسرعة ضعيفة نسبيا تنشأ قوة احتكاك تحسب بالقانون التالي: $\vec{f} = -k\eta\vec{V}$

$\vec{V}$: سرعة الجسم

η : معامل اللزوجة ويتعلق بالمائع (kg/ms)

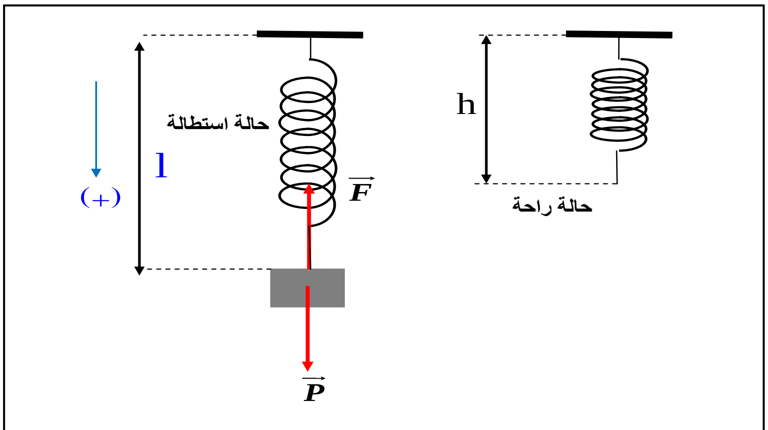
k : ثابت يتعلق بشكل الجسم (m)

مثال (2.IV) : مثلا بالنسبة لكرة نجد: $k = 6\pi R$ حسب ستوكس Stokess في هذه الحالة:

$$\vec{f} = -6\pi R\eta\vec{V}$$

4- ب - 4- القوى المرنة : Les forces élastiques

نجدها في الحركات التوافقية لأن القوى المرنة تحدث حركات دورية. كما عرفنا سابقا عبارة التسارع في الحركات المستقيمة الجيبية **الشكل (13.IV)** يكتب كما يلي:



الشكل (13.IV)

$$\boxed{\vec{a} = -w^2\overrightarrow{OM}} \quad ....(22.\ IV)$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma} = -mw^2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{F} = -k\overrightarrow{OM}} \quad ......(23.\ IV)$$

نتحصل على قانون القوة بالإسقاط على المحور Ox

$$\boxed{F = -kx} \quad ....(24.\ IV)$$

حيث k : ثابت الإرجاع أو ثابت المرونة للنابض.

4- ب - 5- قوى التوتر (Forces de tension **)** : نجدها في حالات كثيرة, مثلا الحركة التوافقية للنواس .

5 - **العزم الحركي :** Moment cinétique

5-أ - عزم القوة : Moment d'une force

يعبر عن مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم حول محور الدوران.

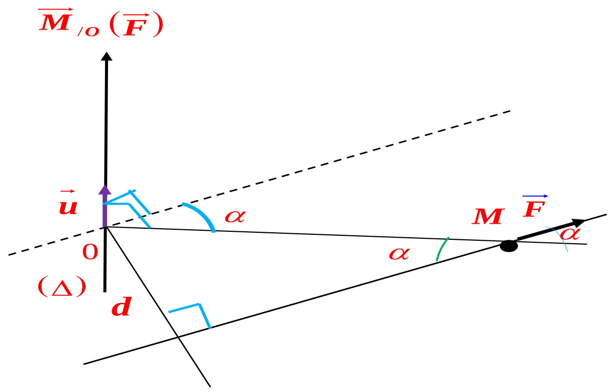
مثال: القوة المبذولة عند فتح الباب، فتح صنبور الماء، ربط صامولة بمفتاح الربط. (إذا أردت جعل الجسم يدور فأنت تستخدم عزم القوة لأنه مسبب للدوران) .

5-ب - عزم القوة بالنسبة لمحور (Δ) **:**

ليكن المحور (Δ) ، شعاع وحدته $\vec{u}$. (Δ) و $\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه و لتكن (O) نقطة من المحور (Δ). نسمي عزم القوة المطبق في النقطة M بالنسبة للمحور (Δ) المقدار السلمي:

$$\boxed{M_{/\Delta}(\vec{F}) = M_{/0}(\vec{F}).\vec{u}} \quad ....(25.IV)$$

5-ج - عزم القوة بالنسبة لنقطة (O) **:** عزم القوة $\vec{F}$ المطبقة على النقطة M بالنسبة الى النقطة (O) **الشكل (14.IV)** يكون معرف كما يلي:



الشكل (14.IV)

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{/0}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \\ \left\| M_{/0}(\vec{F}) \right\| = \left\| \vec{OM} \right\| . \left\| \vec{F} \right\| . \mathrm{Sin}\,\alpha = d . \left\| \vec{F} \right\| \end{array}} \text{...........}(26.\mathrm{IV})$$

$M_{/0}(\vec{F})$: يمثل عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة (O) .

5-د - العزم الحركي:

العزم الحركي، وسيلة مهمة مساعدة للمبدأ الأساسي في التحريك. فهي تسمح بإيجاد معادلة الحركة، خاصة في حالة نقطة مادية تتحرك حول محور ما .

5-ه - العزم الحركي بالنسبة لنقطة من الفضاء :

لتكن O نقطة من الفضاء (ليس ضروريا أن تكون ساكنة في مرجع R) نسمي العزم الحركي لنقطة مادية كتلتها m وكمية حركتها $\vec{P}$ موجودة في النقطة M بالنسبة للنقطة O المقدار الشعاعي:

$$\boxed{\vec{L}_{/0} = \vec{OM} \wedge \vec{P}} \text{...........}(5.26) \quad (27.\ \mathrm{IV})$$

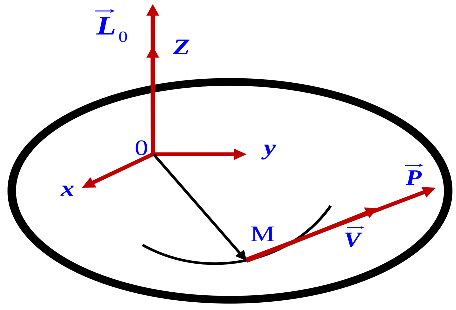
نظرا للتشابه بين هذه العبارة وعبارة عزم القوة يمكن أن نقول أن العزم الحركي هو عزم كمية الحركة

$$\boxed{\vec{L}_{/0} = \vec{OM} \wedge \vec{P} \Leftrightarrow M_{/O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}} \text{...........}(5.27) \quad (28.\ \mathrm{IV})$$

5-و - العزم الحركي بالنسبة لمحور (Δ)

نسمي العزم الحركي المطبق في النقطة M بالنسبة للمحور (Δ) **الشكل (15.IV)** المقدار السلمي:

$$\boxed{\vec{L}_{/\Delta} = \vec{L}_{/0}.\vec{u}} \quad ....(29.\ IV)$$



الشكل (15.IV)

5-ي- نظرية العزم الحركي:

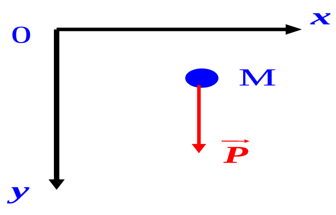
في نقطة ثابتة O من مرجع غاليلي, المشتقة بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية يساوي عزم القوة المطبقة عليه في هذه النقطة .

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum M_{/0}\left(\vec{F}\right)_{ext} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}} \quad ....(30.\text{IV})$$

- **خصائصه:**

- $\vec{L}_{/0} = Cst \Rightarrow \forall t.\overrightarrow{OM} // \sum \vec{F}_{ext}$
- لما $\vec{L}_{/0}$ يكون ثابتا $\Leftarrow$ الحركة تكون مستوية .
- لما $\vec{L}_{/0} = \vec{0}$ $\Leftarrow$ الحركة تكون مستقيمة $\Leftarrow$ $\overrightarrow{OM} // \vec{V}$

مثال (3.IV) : تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي OZ عمودي على المستوي الشاقولي (OX, Oy) للحركة موضعها معرف في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية. أحسب:



الشكل (16.IV)

1- عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة (O) ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة m,x,g .

2- العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة (O) ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة m,x,y,x^2,y^2

3- جد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M .

الإجابة:

1- حساب عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة (O) .

$$\overrightarrow{OM}=\begin{cases} x\vec{i}+y\vec{j} \\ \vec{p}=mg\,\vec{j}\end{cases} \quad , \quad M_{/0}\ \vec{p}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}=(x.m.g)\vec{k}$$

حساب عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للمحور OZ :

$$M_{/\Delta}\left(\vec{F}\right)=M_{/0}\left(\vec{F}\right).\vec{u} \qquad , \quad M_{/OZ}\left(\vec{P}\right)=M_{/0}\left(\vec{P}\right).\vec{k}=x.m.g$$

2- حساب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة (O) :

$$\overrightarrow{OM}=\begin{cases} x\vec{i}+y\vec{j} \\ \vec{P}=m\vec{V}_x+m\vec{V}_y\end{cases} \Rightarrow L_{/o}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ mx' & my' & 0\end{vmatrix}=m\left(my'-mx'\right)\vec{k}$$

حساب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للمحور OZ :

$$\left.\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt}\right|_{Rg}=\sum\vec{\pi}_{/O}\left(\vec{P}\right)\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}\right)=(xmg)\vec{k}$$

$$\vec{L}_{/\Delta}=\vec{L}_{/0}.\vec{u}\Leftrightarrow\vec{L}_{/OZ}=\vec{L}_{/0}.\vec{k}\Rightarrow\vec{L}_{/OZ}=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)$$

3- بتطبيق نظرية العزم الحركي لدينا:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\sum M_{/0}\left(\vec{F}\right)_{ext}$$

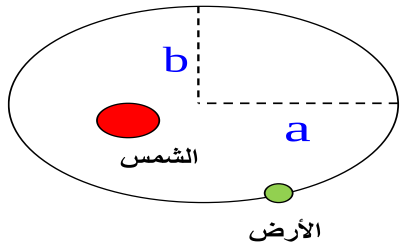
$$\Rightarrow m\left(\dot{x}\dot{y}-x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-\ddot{x}y\right)\vec{k}=(xmg)\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \left(x\ddot{y}-\ddot{x}y\right)=gx$$

6 - حركة الكواكب: قوانين " كيبلر " Lois de Kepler

قام كيبلر بملاحظة معظم كواكب المجموعة الشمسية، مستفيدا ممن سبقوه (كوبرنيك و غاليلي،..) ثم استخرج القوانين الثلاثة المشهورة باسمه:

6-أ- قانون كيبلر الأول (قانون المدارات) الشكل (17.IV)

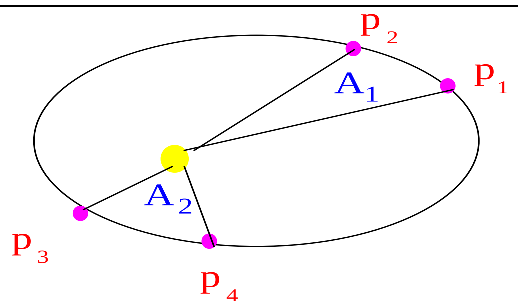
نص القانون: " يدور الكوكب حول الشمس على مسار بشكل قطع ناقص حيث مركز الشمس يمثل إحدى بؤرتيه . "



الشكل (17.IV)

6-ب- قانون كيبلر الثاني (قانون المساحات) الشكل (18.IV)

نص القانون " :إن نصف القطر الذي يربط بين مركز الشمس S و مركز الكوكب P يقطع مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية " .



الشكل (18.IV)

توضيح:

إذا كانت المساحة $A_1 = A_2$ هذا يعني أن المدِّة الزمنية لحركة الكوكب من P_1 إلى P_2 تكون مساوية لمدِّة حركته من P_3 إلى P_4 . و حتى يقطع الكوكب مسافات مختلفة في أزمنة متساوية ، هذا يعني أن سرعته تكون أكبر في المواضع بين P_3 و P_4 و تقل كلما ابتعد الكوكب عن الشمس.

7-ج- قانون كيبلر الثالث (قانون الدوران)

نص القانون " :إن مربع دور T الكوكب الذي يدور حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف القطر الأكبر للقطع الناقص."

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3}=k}..........(5.30) \quad (31.\ \text{IV})$$

الثابت k لا يتعلق بكتلة الكوكب الذي يدور بل له علاقة بالكوكب المركزي.

ملاحظات:

- القانون الثالث يعني أن دور الكواكب حول الشمس هو ثابت لا يتعلق بكتلة الكواكب ، و إنما يتعلق بكتلة الشمس التي هي في المركز.
- قوانين كيبلر تُطبق كذلك على الأقمار الطبيعية و الاصطناعية.

7- تطبيقات عامة حول القانون الأساسي للتحريك

7-أ - حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية :

مثال (4.IV):

تنطلق قذيفة كتلتها m من نقطة O بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{V}_0$ في اللحظة $t=0$ ندرس الحركة في معلم متعامد ومتجانس (O,X,Y) نعتبره غاليليا (لأن مدة حركة القذيفة جد قصيرة.) تعمل سرعة القذيفة $\overrightarrow{V}_0$ زاوية α مع مسارها. في حالة ما إذا كان الجسم خاضع لقوة ثقله $\vec{p}$ و قوة مقاومة الهواء $\vec{f}$

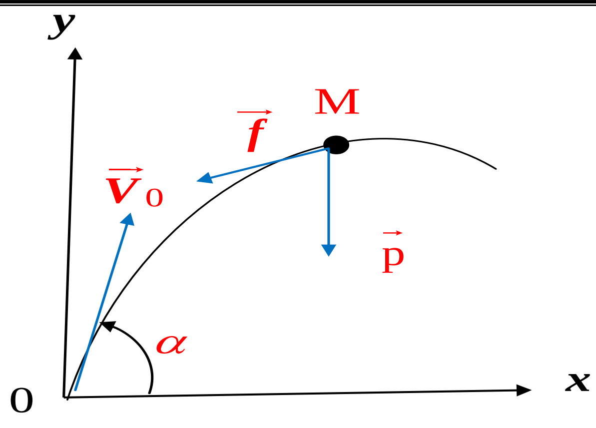
حيث : $\vec{f}=-k\vec{V}$ وهي معاكسة للحركة. k:ثابت

- **دراسة حركة القذيفة:**

تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

المجموعة المدروسة (القذيفة) اختيار المعلم المناسب (O,X,Y) نعتبره غاليليا لأن حركة القذيفة مستوية (تتم في المستوي الذي يضم $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{oy}$) . **الشكل (19.IV)**

القوى المؤثرة : الكرية تخضع لوزنها $\vec{P}$ و مقاومة الهواء $\vec{f}$.



الشكل (19.IV)

$$\vec{V}_0 \begin{cases} \vec{V}_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ \vec{V}_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{\gamma}$$

المعادلات الزمنية للحركة:

إسقاط العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن في المعلم (O, X, Y)

بالإسقاط على المحاور نجد:

$$\begin{cases} ox: -kV_x = m\gamma_x \\ oy: -kV_y - mg = m\gamma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} + kV_x = 0 \\ \dfrac{dV}{} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + \dfrac{k}{m}V_x = 0 ....(1) \\ \dfrac{dV}{} \quad k \end{cases}$$

المعادلة (1) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني.

المعادلة (2) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بوجود طرف ثاني.

حل المعادلة (1) :

$$\frac{dV_x}{dt} + \frac{k}{m}V_x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0$$

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + \frac{k}{m}r = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \succ 0 \Rightarrow \Delta = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \Rightarrow \Delta \succ 0$$

تقبل حلين:

$$r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = -\frac{k}{m}$$

حلها هو من الشكل :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \Leftrightarrow A + Be^{-\frac{k}{m}t}$$

من الشروط الابتدائية لدينا :

$$t = 0 \quad , \quad x = 0$$

$$A + Be^{-\frac{k}{m}(0)} = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$t = 0 \quad , \quad V_{0x} = V_0 \cos\alpha$$

$$x(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t} = \dot{x}(t) = V_x = -\frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow V_0 \cos\alpha = -\frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}(0)}$$

$$\Rightarrow A = -B = \frac{V_0 m}{k}\cos\alpha \quad \Rightarrow V_0 \cos\alpha = -\frac{k}{m}B \Rightarrow B = -\frac{V_0 m}{k}\cos\alpha$$

لدينا:

$$x(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t}$$

ومنه:

$$x(t) = \frac{V_0 m}{k}\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \Rightarrow V_x(t) = V_0 \cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow \gamma_x(t) = -\frac{k}{m}V_0 \cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}$$

حل المعادلة (2) :

$$\frac{dV_y}{dt} + \frac{k}{m}V_y = -g \Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$$

فيكون حل المعادلة(2) عبارة عن مجموع حلين :الحل العام و الحل الخاص: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

الحل العام y_h (حل المعادلة المتجانسة) :

حل المعادلة بدون طرف ثاني أي:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = 0$$

الحل من الشكل:

$$y_h(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t}$$

الحل الخاص y_p :

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$$

إذا كان الطرف الثاني كثير الحدود درجته n فان y_p يكون عبارة عن كثير الحدود درجته $n+1$ و

بما ان الطرف الثاني في حالتنا عبارة عن كثير حدود درجته صفر، نفرض أن y_p كثير حدود من الدرجة الأولى وعليه:

$$y_p = cst \Rightarrow \dot{y}_p = C \Rightarrow \ddot{y}_p = 0$$

نعوض في المعادلة فنجد:

$$0+\frac{k}{m}c=-g \Rightarrow c=-\frac{gm}{k} \Leftrightarrow y_\rho = -\frac{gm}{k}t$$

فعليه فالحل الكلي:

$$y(t)=y_G(t)+y_\rho(t) \Leftrightarrow y(t)=A'+B'e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}t$$

من الشروط الابتدائية:

$$* \quad t=0 \;,\quad y=0$$

$$A'+B'e^{-\frac{k}{m}(0)}-\frac{gm}{k}(0)=0 \Rightarrow A'=-B'$$

$$* \quad t=0 \;, \quad V_{0y}=V_0\sin\alpha$$

$$y(t)=A'+B'e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}t \Rightarrow \dot{y}(t)=V_y=-\frac{k}{m}B'e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}$$

$$V_0\sin\alpha=\frac{k}{m}B'e^{\frac{k}{m}(0)}-\frac{gm}{k} \Rightarrow B'=-\frac{m}{k}\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right) \Rightarrow A'=-B'=\frac{m}{k}\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)$$

لدينا:

$$y(t)=A'+B'e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}t$$

ومنه:

$$y(t)=\frac{m}{k}\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-\frac{gm}{k}t$$

$$V_y=\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k} \qquad \gamma_y=-\frac{k}{m}\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

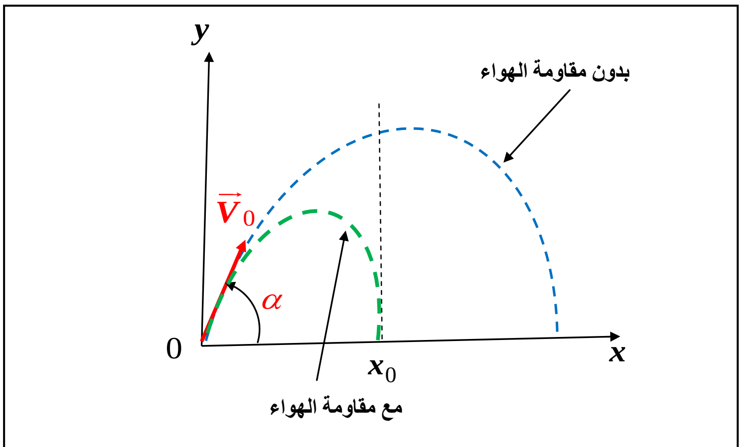
$$\overrightarrow{OM}\left\{ \; x(t)=\frac{V_0 m}{k}\cos\alpha\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \right.$$

إحداثيات متجه السرعة :

$$\vec{V}_M \left\{ \; V_x(t)=V_0\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t} \right.$$

إحداثيات متجه التسارع :

$$\vec{\gamma}_M \left\{ \begin{array}{l} \gamma_x(t)=-\frac{k}{m}V_0\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t} \\ \gamma_y(t)=-\frac{k}{m}\left(V_0\sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} \end{array} \right.$$



الشكل (20.IV)

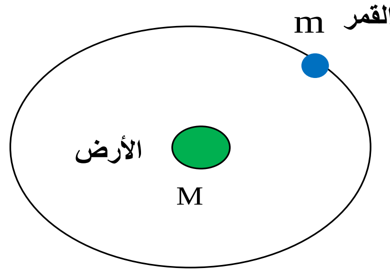
7ـب - تطبيق قوانين نيوتن على حركة القمر حول الأرض:

مثال (5.IV):

لمعرفة القوة المتسببة في حركة كوكب القمر ذو الكتلة m و هو يدور حول كوكب الأرض ذو الكتلة M ، نتبع الطريقة التالية: نفرض أن الجملة (قمر + أرض) معزولة في هذا الفضاء . و سنحاول دراسة حركة القمر بالنسبة لمعلم أرضي مع اعتبار حركة القمر دائرية منتظمة حول الأرض.

- الدراسة النظرية:

بفرض أن القمر يدور حول الأرض بحركة دائرية منتظمة **الشكل (21.IV)**، هذا يعني أن القمر خاضع لتسارع مركزي $\vec{a}$ شدّته: $a=\frac{v^2}{r}$



الشكل (21.IV)

و حسب القانون الثاني لنيوتن ، القمر يخضع لقوة شدّها: $F=ma=m\frac{v^2}{r}$

بما أن الحركة دائرية فإن السرعة الخطية v لها علاقة بالدور T للحركة.

$$v=\frac{2\pi}{T}.r \Rightarrow v^2=\frac{4\pi^2}{T^2}.r^2 \Leftrightarrow F=\frac{4\pi^2}{T^2}mr$$

و حسب قانون كيبلر الثالث فإن مربع الدور يتناسب مع مكعب نصف القطر

$$\frac{T^2}{r^3}=k \Rightarrow T^2=kr^3$$

و بتعويض T^2 عبارة في علاقة القوة نجد: $F=\frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$

المقدار $\frac{4\pi^2}{k}$ له علاقة بالكوكب الموجود في المركز فقط ، وفي هذه الحالة له علاقة بكتلة الأرض فقط أي أن: $\frac{4\pi^2}{k}=GM$ و منه عبارة القوة تصبح: $F=G\frac{Mm}{r^2}$

و منه عبارة القوة تصبح:

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

هذه العبارة تمثل قوة الجذب بين كتلتين m و M يبعدان عن بعضهما البعض بمسافة r اكتشفه إسحاق نيوتن سنة 1687م و تم تعميمه على كل الأجسام التي لها كتل.

نص القانون:

هناك قوة جذب بين كل جسمين لهما كتلتين m_A و m_B تفصل بين مركزيهما مسافة r تعطى بالعلاقة:

(32. IV)

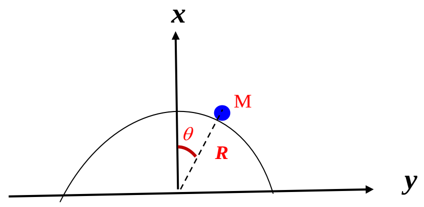
$$\boxed{\left|\vec{F}_{A/B}\right| = \left|\vec{F}_{B/A}\right| = G\frac{m_A m_B}{r^2}} \text{...........} (5.31)$$

حيث G : ثابت الجاذبية الكونية وقيمته في جملة الوحدات الدولية هي: $G = 6,67\times10^{-11}(\mathrm{SI})$

تمارين : من (1.IV) إلى (3.IV)

تمرين 1.IV:

جسم كتلته m موجود عند قمة نصف كرة من الجليد نصف قطرها R ينزلق دون احتكاك و دون سرعة ابتدائية.



الشكل (22.IV)

1- حدد مجموع القوى التي تؤثرعلى الجسم، ثم أحسب قوة رد الفعل عند النقطة M بدلالة الزاوية θ , g و m حيث g يمثل تسارع جاذبية الأرض.

2- أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة.

تمرين 2.IV:

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته $6kg$ بـ : $\vec{r}=(3t^2-6t)\vec{i}+(-4t^3)\vec{j}+(3t+2)\vec{k}$. أوجد:

1- القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم.

2- عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمبدأ.

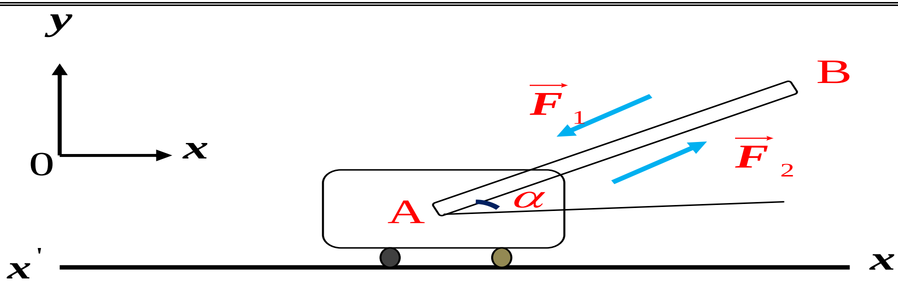
3- كمية الحركة $\vec{P}$ للجسم و عزمه الحركي $\vec{L}_{/0}$ بالنسبة للمبدأ.

4- تأكد أن $\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ و أن $\vec{M}_{/0}(\vec{F})=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

تمرين 3.IV :

يحرك رجل عربة كتلتها m على طريق أفقي خشن (معامل احتكاكه μ) فيدفعها بقوة $\vec{F}_1$ لتتحرك نحوى الأمام بتسارع $\vec{\gamma}$ ثم يدفعها بقوة $\vec{F}_2$ (بواسطة الذراع AB)نحو الخلف فتتحرك بنفس التسارع

- أثبت أن إحدى القوتين أكبر من الأخر.

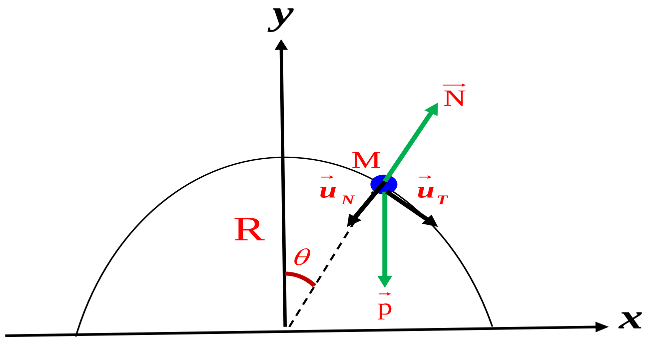


الشكل (23.IV)

حلول التمارين : من (1.IV) إلى (5.IV)

حل التمرين 1.IV :

مجموع القوى التي تؤثر على الجسم (عدم وجود احتكاك) هي: قوة الثقل $\vec{P}$ قوة رد الفعل الناظمي $\vec{N}$



الشكل (24.IV)

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$

بالإسقاط في القاعدة الذاتية $\vec{U}_T$، $\vec{U}_N$ نجد :

وفق $\vec{U}_T$:

$$P\sin\theta = m\vec{\gamma}_T = m\frac{dV}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

وفق $\vec{U}_N$:

$$-N + P\cos\theta = m\vec{\gamma}_N = m\frac{V^2}{R} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بما أن الحركة دائرية لدينا: $V = Rw = R\frac{d\theta}{dt}$ حيث w هي السرعة الزاوية لـ M.

نضرب (1) في $\frac{d\theta}{dt}$:

$$mg\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}\frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}\frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{V}{R} \Leftrightarrow \int_0^\theta g\sin\theta d\theta = \frac{1}{R}\int_0^V VdV \Rightarrow Rg\int_0^\theta \sin\theta d\theta = \int_0^V VdV$$

$$\int_0^\theta g\sin\theta d\theta = \frac{1}{R}\int_0^V VdV \Rightarrow Rg\int_0^\theta \sin\theta d\theta = \int_0^V VdV \Rightarrow V^2 = 2Rg(1-\cos\theta) \Rightarrow V^2 = 2Rg(1-\cos\theta)$$

من (2) نستنتج عبارة رد الفعل N : $N = mg(3\cos\theta - 2)$

2-إيجاد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة:

أثناء المغادرة $N=0$ $\quad N=mg(3\cos\theta-2)=0 \Rightarrow \theta=\arccos 2/3=48.19^0$

حل التمرين 2.IV :

1- القوة المؤثرة على الجسم: $\vec{F}=m\vec{\gamma}=m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}=36\vec{i}-144t\,\vec{j}$

2- عزم القوة بالنسبة للمبدأ:

$$\vec{M}_{/o}(\vec{F})=\vec{r}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2-6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{/o}(\vec{F})=\left(432t^2+288t\right)\vec{i}+\left(108t+72\right)\vec{j}+\left(-288t^3+864t^2\right)\vec{k}$$

3- كمية الحركة الجسم: $\vec{P}=m\vec{v}=36(t-1)\vec{i}-72t^2\vec{j}+18\vec{k}$

4- العزم الحركي بالنسبة للمبدأ:

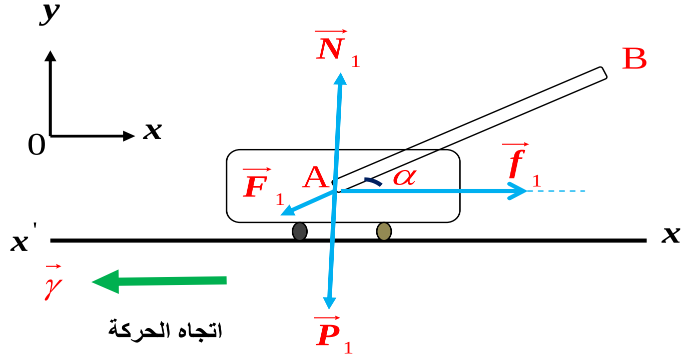
$$\vec{L}_{/o}=\vec{r}\wedge\vec{P}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2-6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t-36 & -72t^2 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L}=\left(144t^3+144t^2\right)\vec{i}+\left(54t^2+72t-72\right)\vec{j}+\left(-72t^4+288t^3\right)$$

$\vec{P}=36(t-1)\vec{i}-72t^2\vec{j}+18\vec{k}$ $\quad \dfrac{d\vec{P}}{dt}=36\vec{i}-114t\,\vec{j}=\vec{F}$ ، كذلك $\quad \vec{M}_{/o}(\vec{F})=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

حل التمرين 3.IV :

1- حالة الدفع نحو الأمام:



الشكل (25.IV)

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}_1 = m\vec{\gamma}$

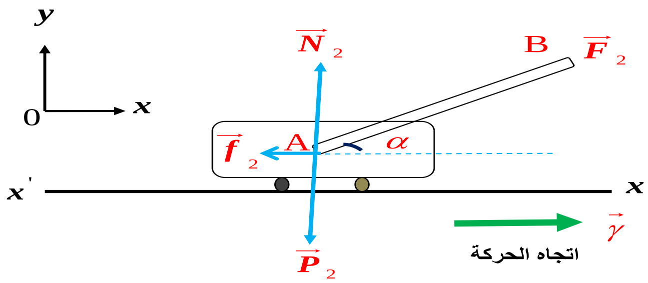
بالإسقاط على المحاور Oy Ox, نجد:

$$Ox: f_1 - F_1 \cos\alpha = -m\gamma ....(1)$$
$$Oy: N_1 - P_1 - F_1 \sin\alpha = 0 ....(2)$$

لدينا :

$$f_1 = \mu N_1 \Rightarrow F_1 = \frac{m(\gamma - \mu g)}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}$$

حالة السحب نحو الخلف:



الشكل (26.IV)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{f}_2 = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور Ox, Oy نجد:

$$Ox: -f_2 + F_2 \cos\alpha = m\gamma ....(3)$$
$$Oy: N_2 - P_2 + F_2 \sin\alpha = 0 ....(4)$$

لدينا :

$$f_2 = \mu N_2 \Rightarrow F_2 = \frac{m(\gamma + \mu g)}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$$

- نلاحظ أن:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \succ 1 \Rightarrow F_1 \succ F_2$$

لأن: $\cos\alpha + \mu\sin\alpha \succ \cos\alpha - \mu\sin\alpha$

V- العمل والطاقة Travail et Energie

1- مقدمـة:

العمل الميكانيكي في علم الفيزياء هو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما وبمسافة ما.

العمل الميكانيكي يتوقف على :

- شدة القوة $\vec{F}$ المنجزة للعمل.
- مقدار الإنتقال لنقطة تأثيرها من A إلى B
- الزاوية (α) المحصورة بين شعاع القوة $\vec{F}$ و شعاع الإنتقال $\overrightarrow{AB}$

تعريف القوة الثابتة : نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها ثابتة إذا كانت:

- ثابتة في القيمة (الشدة).
- ثابتة في الاتجاه

الطاقـة : تُعرف في الفيزياء بأنها القدرة على أداء عمل. فنحن نحتاج الطاقة لطهي الطعام , ولقيادة السيارة , وللقفز في الهواء...... وتقاس الطاقة والعمل بالوحدات نفسها.

2- تعريف عمل قوة:

2-أ- تعريف عمل قوة ثابتة:

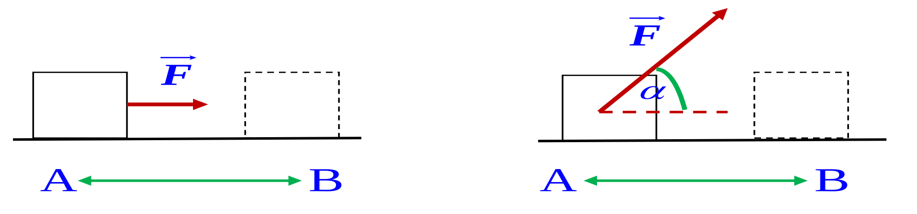
إن عمل قوة ثابتة $\vec{F}$ عندما تنتقل نقطة ثابتة تأثيرها من A إلى النقطة B **الشكل (1.V)** يعطى بالجداء السلمي:

$$\boxed{W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F.AB.\cos\alpha} \quad ....(1.V)$$

وحدة قياس العمل في نظام الوحدات الدولية هي الجول ويرمز له بـ : J حيث:

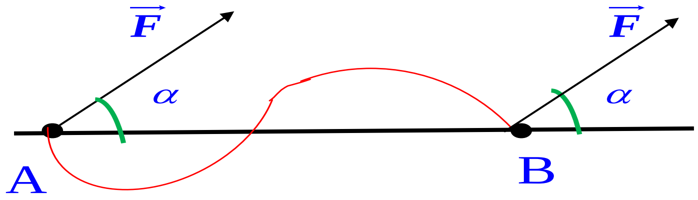
$$1Joule=1Nm$$

وفي الكهرباء نستعمل الإلكترون فولط: $1ev=1.6\times10^{-19}\,Joule$



الشكل (1.V)

ملاحظة: عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع لنقطة التأثير من A إلى B **الشكل (2.V)** أي أن العمل $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$ له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيم أو منحني.



الشكل (2.V)

2ـب - تعريف عمل قوة غير ثابتة:

إذا كانت القوة $\vec{F}$ متغيرة في الشدّة فإن عملها لا يساوي $\vec{F}.\vec{AB}$ بل يجب تقسيم المسار إلى إنتقالات عنصرية $d\vec{r}$ و ندعو عمل القوة خلال الإنتقال العنصري بالعمل العنصري dw.

أ- العمل العنصري:

ليكن الجسم M ينتقل على مسار كيفي خلال فترة زمنية صغيرة dt ينتقل خلالها من الموضع M الى الموضع M' يعبر عن هذا الإنتقال بـ $d\vec{r}$ **الشكل (3.V)** حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$$

يعرف العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ بـــ:

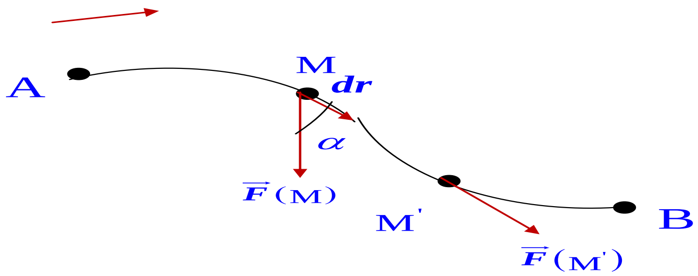
$$\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{r} = F.dr.\cos\alpha} \text{..........(2.V)}$$

حيث:

$$\boxed{F_T = F\cos\alpha} \text{.........(3.V)}$$

F_T : المركبة المماسية للقوة المؤثرة في هذه الحالة :

$$\boxed{dW = F_T.dr} \text{..........(4.V)}$$



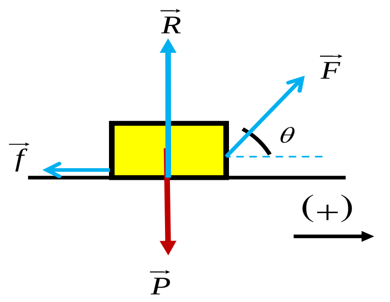
الشكل (3.V)

هذا يعني أن المركبة المماسية للقوة المؤثرة هي التي تعمل. أما المركبة العمودية على المسار لا تعمل أي أن عملها يساوي الصفر.

- $\theta=\frac{\pi}{2} .\ \vec{F}\perp d\vec{r} \Leftarrow dw=0$ (كل قوة عمودية على مسار الحركة يكون عملها معدوما.)
- $0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$ فإن: $dw\succ 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ قوة محركة $\Leftarrow$ العمل محرك.
- $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$ فإن: $dw\prec 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ قوة مقاومة $\Leftarrow$ العمل مقاوم.
- اذا كانت $\vec{F}$ ثابتة: $W_{A\to B}=\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}=\vec{F}\int_A^B d\vec{r}=\vec{F}\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)$
- $\theta=0 .\ \vec{F}//d\vec{r} \Leftarrow W=\int_A^B F.dr$

مثال 1.V:

الجسم الممثل على الشكل خاضع لأربع قوى ثابتة و هو ينتقل على مستوى أفقي. ليكن S إنتقال الجسم:



الشكل (4.V)

- عمل القوة $\vec{F}$: $W_{\vec{F}}=F.S.\cos\theta$
- مل القوة المقاومة $\vec{f}$: $W_{\vec{f}}=-f.S$
- عمل الثقل $\vec{P}$: $W_{\vec{P}}=0$
- عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $W_{\vec{N}}=0$

3- العبارة التحليلية للعمل:

أ- الإحداثيات الديكارتية:

نكتب عبارة القوة كما يلي : $\boxed{\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}}$ ....(5.V)

و نكتب عبارة الإنتقال العنصري كما يلي: $\boxed{d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}}$ ....(6.V)

فنحصل على العبارة التحليلية للعمل العنصري:

$$\boxed{W=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int F_x.dx+\int F_y.dy+\int F_z.dz}\;.........(7.V)$$

ب- الإحداثيات الأسطوانية :

$$\boxed{W=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int F_x.dx+\int F_y.dy+\int F_z.dz}\;.......\;(6.7)\;(8.V)$$

عبارة القوة :

$$\boxed{\vec{F}=F_\rho\vec{u}_\rho+F_\theta\vec{u}_\theta+F_z\vec{k}}\;........(9.V)$$

عبارة الإنتقال العنصري :

$$\boxed{d\vec{r}=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta\vec{u}_\theta+dz\vec{k}}\;........(10.V)$$

العبارة التحليلية للعمل العنصر

$$\boxed{W=\int F_\rho d\rho+\int F_\theta\rho d\theta+\int F_z dz}\;.........(11.V)$$

ج- الإحداثيات الذاتية:

عبارة القوة :

$$\boxed{\vec{F}=F_T\vec{U}_T+F_N\vec{U}_N}\;........(12.V)$$

عبارة الإنتقال العنصري :

$$\boxed{d\vec{r}=ds\vec{U}_T=vdt\vec{U}_T}\;.....(13.V)$$

العبارة التحليلية للعمل العنصري :

$$\boxed{W=\int F_T.v.dt}\;.....(14.V)$$

د- **الإحداثيات الكروية** :

عبارة القوة :

$$\boxed{\vec{F}=F_r\vec{U}_r+F_\theta\vec{U}_\theta+F_\varphi\vec{U}_\varphi}\;.........(15.V)$$

عبارة الإنتقال العنصري :

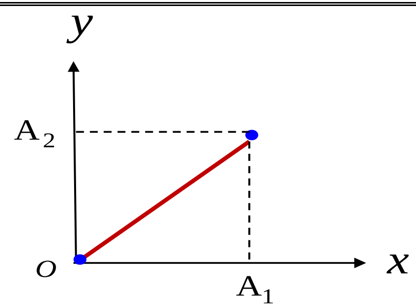
$$\boxed{d\vec{r}=dr\vec{U}_r+rd\theta\vec{U}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{U}_\varphi}\;......(16.V)$$

العبارة التحليلية للعمل العنصري :

$$\boxed{W=\int F_r.dr+\int F_\theta.r.d\theta+\int F_\varphi.r\sin\theta d\varphi}\;.......(17.V)$$

مثال 2.V:

لتكن القوة $\vec{F}$ معطاة بالعلاقة التالية: $\vec{F}=a(x+2y)\vec{i}+bxy\vec{j}$



الشكل (5.V)

ولنحسب عمل هذه القوة لدى إنتقالها بين النقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$ (لإحداثيّات m وذلك بإتباع طريق مستقيم مباشر من O إلى A (انظر الشكل) . ثم بإتباع الطريق OA_1A حيث A_1 مسقط A على المحور OX

الحل:

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy$$

$$W = \int a(x+2y)dx + \int bxydy$$

إذا اتّبعنا الطريق المستقيمة المباشرة ن OA لاحظ أن ثّمة علاقة بين x و y أثناء هذا الإنتقال ، هي معادلة المستقيم OA وهي : $x = y$ فنستنتج من ذلك أ ّن $dx = dy$ ومن ثَم:

$$W = \int a(x+2x)dx + \int bxxdx = \int \left(3ax + bx^2\right)dx$$

ويكون عمل القوة $\vec{F}$ أثناء الإنتقال من O إلى A على المستقيم OA :

$$W_{OA} = \int_O^A dw = \int_O^A \left(3ax + bx^2\right)dx = 3a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + b\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \Leftrightarrow W_{OA} = \frac{3a}{2} + \frac{b}{3}$$

أما على المسار OA_1A فيمكن اعتبار عمل القّوة $\vec{F}$ مجموع عملين، الأ ّول أثناء الإنتقال OA_1 والآخر لدى الإنتقال A_1A .

ونلاحظ أنّه أثناء الإنتقال OA_1 (على المحور Ox) تبقى قيمة $y = 0$ ثابتة $\Leftarrow dy = 0$.

على حين تتغيّر x من 0 إلى 1 .

$$W_{OA_1} = \int_0^{A_1} a\left(x + 2(0)\right)dx = \int_0^1 axdx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}$$

على حين تظل قيمة $x=1$ ثابتة أثناء الإنتقال A_1A ومن ثَم $dx=0$ على حين تتغيّر y من 0 إلى 1 .

$$W_{A_1A}=\int_{A_1}^{A}a\left((1)+2y\right)(0)+b(1)ydy=\int_{0}^{1}bydy=b\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{b}{2}$$

نستنتج مما سبق أ ّن عمل الق ّوة $\vec{F}$ أثناء الإنتقال OA_1A هو:

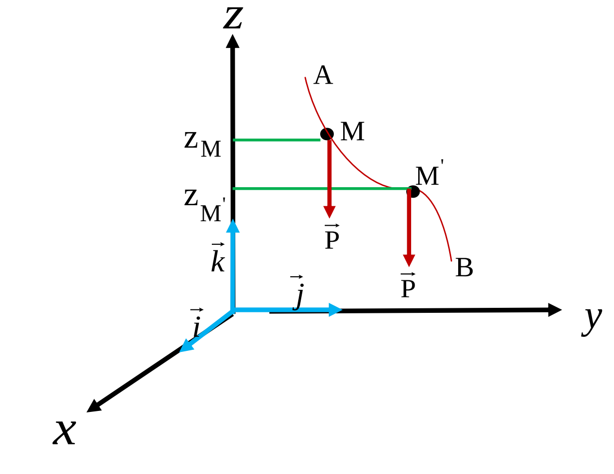
$$W_{OA_1A}=W_{OA_1}+W_{A_1A}\Rightarrow W_{OA_1A}=\frac{a+b}{2}$$

نلاحظ أن : $W_{OA_1A}\neq W_{OA}$ مختلفان في الحالة العامة (لقيم a و b)

4- أمثلة على بعض أعمال القوى:

ليكن جسم M ينتقل تحت تأثير ثقله وفق مسار MM' في معلم ثلاثي الأبعاد $R(O,X,Y,Z)$ المزود بأشعة الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{P}$ قوة الثقل تعطى بالعلاقة $\vec{P}=-m\vec{g}$ وتمثل قوة جذب الأرض لهذا الجسم. قوة الثقل $\vec{P}$ تكون دائما شاقولية نحو الأسفل نقطة تأثيرها هي مركز الثقل لهذا الجسم. عندما ينتقل الجسم من النقطة M إلى M' الشكل **(6.V)** فإن:



الشكل (6.V)

$$\boxed{W_{\vec{P}}=\int_{M}^{M'}\vec{P}.\vec{dl}\ ,\ \begin{cases}\vec{P}=-mg\vec{k}\\ \vec{dl}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\end{cases}}\quad\text{.........(18.V)}$$

$$\boxed{W_{\vec{P}}=-\int_{M}^{M'} mg.dz=-mg\int_{M}^{M'} dz=-mg\left(Z_{M'}-Z_{M}\right)} \qquad ....(19.V)$$

$$W_{\vec{P}}=-\int_{M}^{M'} mg.dz=-mg\int_{M}^{M'} dz=-mg\left(Z_{M'}-Z_{M}\right)=mg\left(Z_{M}-Z_{M'}\right) \qquad .....(20.V)$$

$$h=Z_{M}-Z_{M'} \Rightarrow W_{\vec{P}}=mgh$$

ب - عمل قوة المرونة:

ليكن لدينا نابض تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$

l_0 : طول النابض وهو في حالة راحة.

l : طول النابض تحت تأثير القوة $\vec{F}$

لتكن $\vec{T}$ هي قوة إرجاع النابض في حالة التوازن $\vec{F}=\vec{T}$

عند حساب عمل النابض نجد: $\vec{F}=-kx\vec{i}$

$$W_{\vec{F}}=\int\vec{F}.d\vec{l}=\int_{x_1}^{x_2}\left(-kx\vec{i}\right).\left(dx\vec{i}\right)=-\int_{x_1}^{x_2} kxdx=-k\int_{x_1}^{x_2} xdx \qquad ....(21.V)$$

$$W_{\vec{F}}=-\frac{1}{2}k\left(x_2^2-x_1^2\right)\Rightarrow W_{\vec{F}}=\frac{1}{2}kX^2$$

5- الإستطاعة (القدرة) :

1- **تعريف :** تعرف الاستطاعة بأنها مشتق العمل بالنسبة للزمن.

$$\boxed{P=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt}\Rightarrow \vec{P}=\vec{F}.\vec{v}} \qquad ....(22.V)$$

- حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الجسم.
- $\vec{v}$: سرعة الجسم المتحرك.
- وحدة الإستطاعة هي الواط $(watt)$ حيث $1w=1J/s=1Nm/s$

6- الطاقة الحركية: Energie cinétique

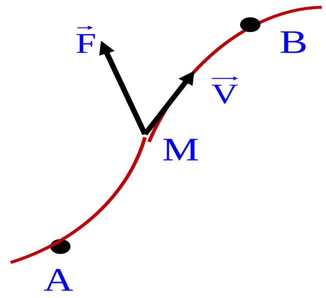
1- **تعريف :** نعّرف الطاقة الحركية لنقطة مادية M كتلتها m ومتحركة بسرعة $\vec{V}$ بالمقدار E_c

حيث: $\vec{P} = m\vec{V}$ (كمية الحركة)

- الطاقة الحركية هي نوع من الطاقة التي يملكها الجسم بسبب حركته.
- لتكن النقطة المادية M كتلتها m تتحرك بين النقطتين A و B تحت تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ حسب المبدأ الأساسي للتحريك لدينا:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{P} = \vec{F}.\vec{v}} \quad \text{..........}(23.V)$$

خلال الإنتقال العنصري ل $\vec{F}$ **الشكل (7.V)**، تكتب الأعمال العنصرية كما يلي:



الشكل (7.V)

$$\boxed{dW_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{l} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}dt} \quad \text{.........}(24.V)$$

لان:

$$\boxed{\vec{V}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{V}(t).dt} \quad \text{.........}(25.V)$$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{V}(t).dt} \quad \text{...........}(26.V)$$

ينتج عنه:

$$\boxed{dW_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{l} = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)} \quad \text{..........}(27.V)$$

(28.V)

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{l} = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) \quad \text{...........}(6.27)$$

يكون العمل المنجز خلال الإنتقال بين النقطتين A و B :

$$\boxed{\begin{gathered} W_{\vec{F}} = W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = \int_A^B dE_c = E_c\left(B\right) - E_c\left(A\right) \\ W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \Delta E_c \end{gathered}} \text{..........(29.V)}$$

- الطاقة الحركية هي نتيجة حركة جسم ما أثناء خضوعه لقوة $\vec{F}$.
- وحدة الطاقة الحركية هي الجول.

2- **بعض خصائص الطاقة الحركية:**

- كل جسم في حالة حركة فإنه يملك طاقة حركية.
- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع كتلة الجسم m . .
- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع مربع سرعة الجسم V .
- الطاقة الحركية تتعلق بالمعلم الذي نَدرس من خلاله الحركة .

ملاحظة : إن عبارة الطاقة الحركية المعطاة هنا صالحة فقط في حالة الحركة الانسحابية للجسم.

3- **نظرية الطاقة الحركية:**

النص : في معلم غاليلي التغيير في الطاقة الحركية لنقطة مادية بين موضعين A و B يساوي عمل محصلة القوى المؤثرة على هذه النقطة خلال إنتقالها بين A و B .

$$\boxed{\Delta E_c = E_c\left(B\right) - E_c\left(A\right) = W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)} \text{..........(6.29)} \quad (30.V)$$

عمل جميع القوى المحافظة و الغير محافظة.

أ- **القوى المحافظة و الغير محافظة:**

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها محافظة أو مشتقة من كمون إذا كان عملها مستقلا عن المسلك المتبع ويتعلق فقط بنقطتي البداية والنهاية. في هذه الحالة نقول أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة (مشتقة من كمون) وتسمى $\vec{F}$ قوة محافظة يرمز لها بــ $\vec{F}_c$.

مثال : - قوة الـثقل - ,قوة ارجاع النابض - ,قوة الجاذبية ,أي قوة ثابتة بصفة عامة.

نبرهن في هذه الحالة أنّه يوجد تابع سلّمي $U\left(x,y,z\right)$ بحيث:

$$\text{قوة محافظة}\ \boxed{\vec{F} \Leftrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}U} \text{..........(6.30)} \quad (31.V)$$

ندعو المقدار السلّمي $U\left(x,y,z\right)$ الطاقة الكامنة الموافقة للقوّة $\vec{F}$

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها غير محافظة اذا كان عملها يتعلق بالمسار المتبع يرمز لها بــ $\vec{F}_{NC}$. غالبا، القوى غير المحافظة هي قوى الإحتكاك، .

7- الطاقة الكامنة Energie potentielle:

7- أ- تعريف:

إن عمل القوى المحافظة لا يتعلق بالمسار المتبع، يتعلق فقط بنقطة البداية ونقطة النهاية. يمكن التعبير عن عمل هذه القوى من خلال دالـــــة تسمى الطاقة الكامنة E_P .

$$\boxed{E_P(B)-E_P(A)=-W_{AB}\left(\vec{F}_c\right)} \quad \text{(32.V)} \ldots\ldots\ldots\ldots(6.31)$$

قوة محافظة.

في حالة التغيرات الصغيرة: $\Delta E_P = dE_P$

نستعمل عبارة العمل العنصري: $dE_P = -\vec{F}_c . d\vec{l}$

و نعلم انه في الإحداثيات الديكارتية:

$$\boxed{E_P = E_P(x,y,z) \Rightarrow dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz} \quad \text{(33.V)} \ldots\ldots\ldots\ldots(6.32)$$

من جهة أخرى:

$$\boxed{dE_P = -\vec{F}_C . d\vec{l} = -\left(\vec{F}_x . d\vec{x} + \vec{F}_y . d\vec{y} + \vec{F}_Z . d\vec{z}\right)} \quad \text{(34.V)} \ldots\ldots\ldots\ldots(6.33)$$

بمطابقة مركبات $\vec{F}$ نكتب:

$$\boxed{\vec{F}_x = \frac{\partial E_P}{\partial x} \quad , \vec{F}_y = \frac{\partial E_P}{\partial y} \quad , \vec{F}_z = \frac{\partial E_P}{\partial z}} \ldots\ldots\ldots(35.V)$$

شعاعيا لدينا:

$$\boxed{dE_P = \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right) . \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)} \quad \text{(36.V)} \ldots\ldots\ldots\ldots(6.35)$$

في النهاية نستنتج أن:

$$\boxed{\vec{F}_c = -\overrightarrow{grad}E_P \Leftrightarrow E_P = -\int \vec{F}_c . d\vec{l} + c} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(37.V)} \, (6.36)$$

c :ثابت تقريبي.

7- ب- **أمثلة عن الطاقة الكامنة لقوى محافظة:**

أ- **الطاقة الكامنة الثقالية:**

عندما نقوم برفع جسم ما من سطح الأرض إلى ارتفاع معين ، فإنه يستدعي منا أن نبذل عملا ضد الجاذبية الأرضية و الجسم يبدأ في تخزين هذا العمل المبذول على هيئة طاقة كامنة (أو طاقة الوضع). كما تتعلق هذه الطاقة بالارتفاع عن سطح الأرض.

- في حالة صعود جسم نحو الأعلى لدينا :

(38.V)

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{F}=\vec{P}=-mg\vec{k} \\ &E_P(z)=-\int \vec{F}.d\vec{r}+c=-\int -mgdz+c \end{aligned}}\text{..........}(6.37)$$

نختار عند $c=0 \Leftrightarrow E_P=0, z=0$

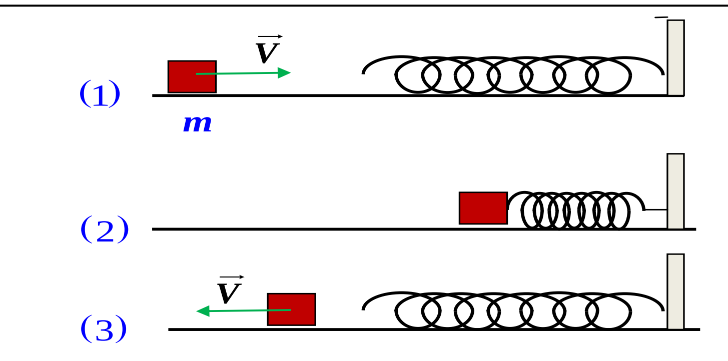
$$\boxed{E_P(z)=mgz}\text{..........}(39.V)$$

ملاحظة:

في الحالة العامة إذا ارتفع الجسم عن موضعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تزداد وإذا انخفض الجسم عن ارتفاعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تنقص.

ب- **الطاقة الكامنة المرونية:**

ليكن نابض في حالة راحة ، وقد ثبتت بدايته وتركت نهايته حرة ، لنفرض أن كتلته مهملة ، وأنه يمكن أن يتحرك على مستوى أفقي دون احتكاك. فإذا اندفع جسم صلب كتلته M و سرعته $\vec{V}$ حاملها يوازي محور النابض واصطدم بنهاية النابض تتناقص سرعة الجسم الصلب، وبالتالي طاقته الحركية وتتضاغط حلقات النابض بسبب المرونة التي تنشأ فيه .



الشكل (8.V)

فيبذل النابض قوة معاكسة شدّتها تتغير بتغير المطال ، ويبدأ في تخزين طاقة لا تلبث أن تظهر بدفع النابض للجسم الصلب مرة أخرى .هذه الطاقة نسميها الطاقة الكامنة المرونية للنابض الحلزوني ورمزها E_p .

لدينا قوة توتر النابض: (40.V)

$$\boxed{\vec{F} = \vec{T} = -kx\vec{i}}$$

(41.V)

$$\boxed{E_P = -\int \vec{F}.d\vec{r} + c = -\int -k.xdx + c \quad E_P = \frac{1}{2}kx^2 + c} \;...........(6.40)$$

عند توازن النابض: $x = 0$ ، $E_P = 0$

(42.V)

$$\boxed{0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow E_P = \frac{1}{2}kx^2} \;...........(6.41)$$

ملاحظة:

- وحدة الطاقة الكامنة المرونية هي الجول (J) .
- وحدة ثابت المرونة k للنابض الحلزوني هي النيوتن على المتر $\left(N/m\right)$.
- مقدار الاستطالة أو الانضغاط للنابض يقدر بالمتر (m).

ج- الطاقة الكامنة للقوة الكهربائية:

(43.V)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{u}} \;...........(6.42)$$

بإتباع زمن المبدأ السابق نجد: (44.V)

$$\boxed{E_P = -kQq\frac{1}{r} + c} \;...........(6.43)$$

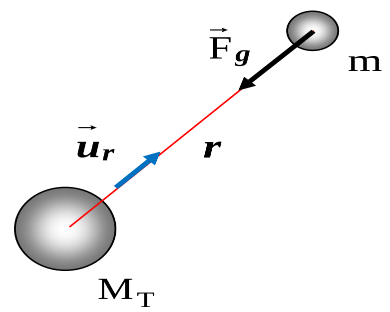
من أجل r كبير جدا : (45.V)

$$\boxed{r \to \infty \,,\, E_P \to 0 \Rightarrow c = 0}$$

$E_P = 0$: الكمون معدوم في الملا نهاية

د- الطاقة الكامنة للقوة الجاذبية :

ليكن لدينا جسم كتلته m يتحرك تحت تأثير القوة الجاذبية $\vec{F}_g$ التي تطبقها الأرض عليها وهي قوة محافظة. **الشكل (9.V)**



الشكل (9.V)

$$\boxed{\vec{F}_g(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}} \text{...........}(6.45) \quad (46.V)$$

حيث :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_g(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \\ \Rightarrow \vec{F}_g(r) = -\frac{GM_T m}{r^3}\vec{r} \end{array}} \text{...........}(6.46) \quad (47.V)$$

$$\boxed{\frac{dE_p}{dr} = G\frac{M_T m}{r^2} \Rightarrow E_p(r) = \int G\frac{M_T m}{r^2}dr \Rightarrow E_p(r) = -G\frac{M_T m}{r} + c} \text{...........}(6.47) \quad (48.V)$$

من أجل r كبير جدا:

$$\boxed{r \to \infty \ , \ E_P \to 0 \Rightarrow c = 0} \text{...........} \quad (49.V)$$

الكمون معدوم في الملا نهاية : $E_P = 0$

$$\boxed{\Rightarrow E_p(r) = -G\frac{M_T m}{r}} \text{...........}(6.49) \quad (50.V)$$

- **خواص القوى المشتقة من كمون :**

- من اجل القوى المحافظة $\vec{F}_c$ يكون العمل معدوما داخل مجال مغلق :

$$\boxed{\oint dW = 0} \text{...........}(6.50) \quad (51.V)$$

- دوران القوى المحافظة معدوم

(52.V)

$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{rot}\vec{F}_c = \vec{0} \\ \overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \left(\ \vec{\nabla} \vec{F} \ \right) = \vec{0}\end{array}} \text{..........}(6.51)$$

- في حالة القوى المشتقة من الطاقة الكامنة فإن عملها يساوي ويعاكس التغيير في الطاقة الكامنة على نفس المسار .

(53.V)

$$\boxed{W_{A\to B}\left(\vec{F}_c\right) = -\Delta E_p} \text{..........}(6.52)$$

8- الطاقة الميكانيكية Energie mécanique:

أ- تعريف : الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقة الكامنة والطاقة الحركية . لتكن جملة متحركة بين نقطتين A و B تحت تأثير قوى محافظة وغير محافظة. وفقا لنظرية الطاقة الحركية فإن:

(54.V)

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) \\ \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}ext\right)\end{array}} \text{..........}(6.53)$$

$\vec{F}_C$: قوة محافظة

$\vec{F}_{Nc}$: قوة غير محافظة

اذن : (55.V)

$$\boxed{E_c(B) - E_c(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}Nc\right)} \text{..........}(6.54)$$

لأن : (56.V)

$$\boxed{\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}c\right) = E_p(A) - E_p(B) = \Delta E_p} \text{..........}(6.55)$$

ينتج : (57.V)

$$\boxed{\left(E_c(B) + E_p(B)\right) - \left(E_c(A) + E_p(A)\right) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}Nc\right)} \text{..........}(6.56)$$

هكذا ندخل كمية فيزيائية جديدة التي نطلق عليها الطاقة الكلية حيث:

E_M : الطاقة الميكانيكية (الكلية) $E_M = E_c + E_P$

E_c :الطاقة الحركية

E_P : الطاقــة الكامنــة

إذن بين النقطتين A و B :

$$\boxed{E_M(B) - E_M(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)} \text{..........}(6.57) \quad (58.V)$$

مثال 3.V:

- حالة السقوط الحر: $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$
- حالة النابض: $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

ب- **مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية:**

أ) **في حالة القوى المحافظة:**

إذا كان الجسم في حالة سقوط حر أي خاضعا لثقله فقط و ترك يسقط من ارتفاع معين ، فإن طاقته الكامنة الثقالية تتناقص بينما طاقته الحركية تزداد . لكن مجموع هاتين الطاقتين يبقى ثابتا طوال الحركة ، فهو مقدار محفوظ (الطاقة الميكانيكية محفوظة خلال الزمن)، و يُعبر عنه بالعلاقة:

$$\boxed{E_M = E_c + E_P = cte \Leftrightarrow \Delta E_M = 0} \text{..........} \quad (59.V)$$

- هذا يعني أن التغير في الطاقة الحركية يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية.

$$\boxed{\Delta E_c = -\Delta E_P} \text{..........} \quad (60.V)$$

- هذا يعني أنه إذا كانت الجملة معزولة ميكانيكيا فإن الطاقة الميكانيكية محفوظة .

مثال 4.V:

لدينا نابض مرن ثابت مرونته k و نطبق عليه قوة شد نحو الأسفل، فيتشوه و يزداد طوله بالمسافة (a)،ثم نتركه يهتز تحت تأثير قوة الارجاع، عند مسافة كيفية (x)

- طاقته الحركية هي: $E_c(x) = \frac{1}{2}mv^2$
- طاقته الكامنة هي: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- الطاقة الكلية للنابض هي: $E_T(x) = E_c(x) + E_P(x) = E_0$

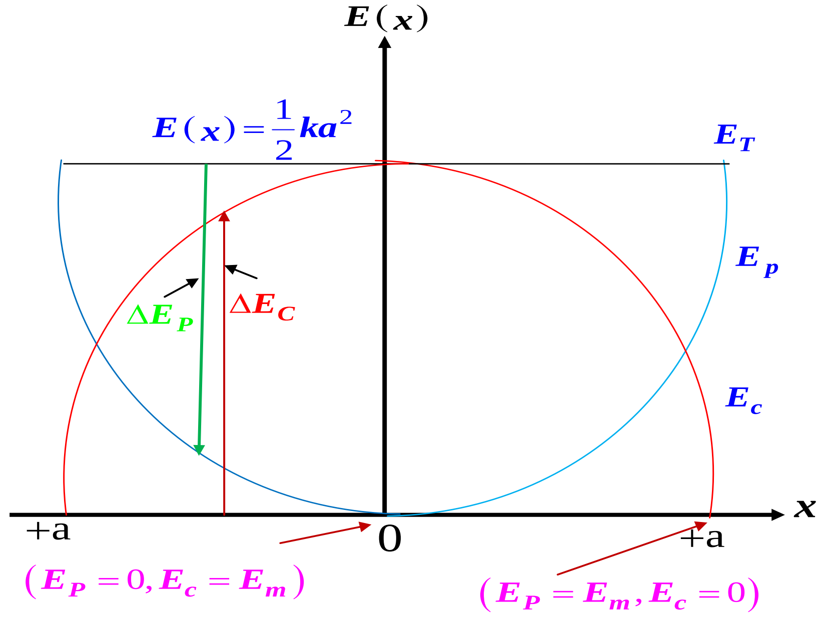
لتحديد قيمة هذه الطاقة نستعمل وضعية خاصة هي بداية الحركة حيث تتحرك الكتلة بدون سرعة ابتدائية، لنجد:

$$E_a = 0 + \frac{1}{2}ka^2 = E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}ka^2$$

في الحقيقة الطاقة المخزنة داخل النابض، قدمناها له بإنجازنا العمل الميكانيكي عندما سحبنا الكتلة للمسافة $(x=a)$ ، بعدها يستمر النابض في الاهتزاز بين الوضعيتين $(+a,-a)$. ،في حالة وجود احتكاك يقاوم حركة الكتلة، فإن هذا الاهتزاز يتخامد بالتدريج لتتوقف الحركة بعد زمن معين .

نتيجة:

وضح الرسم البياني للطاقة $E(x)$ في **الشكل (10.V)** حقيقة وجود أي انخفاض في الطاقة الكامنة يرافقه زيادة في نفس الكمية من الطاقة الحركية. أي ان هناك تبادلا مستمرا بين الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة حيث كل ما تفقده إحداهما تكتسبه الأخرى.



الشكل (10.V) : الطاقة الميكانيكية محفوظة

ج- في حالة القوى غيرالمحافظة:

لتغير في الطاقة الميكانيكية الكلية للجملة المتحركة ما بين النقطتين A و B يساوي مجموع الأعمال الخارجية الغير محافظة المطبقة على الجملة.

نلاحظ من هنا أن الطاقة الكلية غير ثابتة و التغير فيها غير معدوم بل يساوي عمل القوى غير المحافظة و الذي يمثل فقدان الطاقة.

$$E_M(B)-E_M(A)=\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) \qquad (61.V)$$

$$\Delta E_M=\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) \quad ....(6.60)$$

تمارين : من (1.V) إلى (3.V)

تمرين 1.V :

1- أثرت قوة $\vec{F} = y\vec{i} + 2xy\vec{j}$ على جسم إحداثيات موضعه في المستوي Oxy هي (x,y)

حدثت إزاحة للجسم من المبدأ O إلى النقطة $P(1,2)$ على المسارات التالية:

أ- لمسار OP مستقيم.

ب- المسار المنكسر OAP حيث $A(1,0)$ نقطة على المحور ox .

ت- المسار قطع المكافئ $y = 2x^2$.

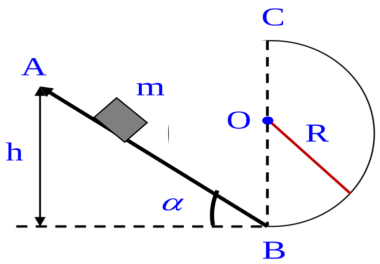
أحسب العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في كل حالة، علق على النتائج المتحصل عليها .

2- تخضع جسيمة كتلتها m لحقل قوى $\vec{F} = (-4x+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} - y\vec{k}$

بين أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة E_P .

تمرين 2.V :

باستعمال انحفاظ الطاقة جد الشرط اللازم حتى تتمكن كتلته m من الوصول إلى C على الأقل بعد إنطلاقها من A بدون سرعة (نمهل الإحتكاك) .



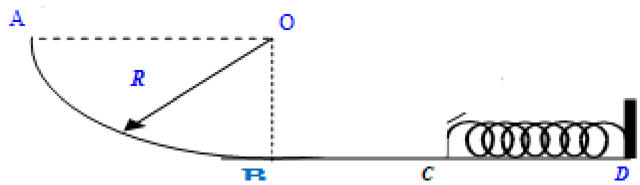
الشكل (11.V)

تمرين 3.V :

يتحرك جسم كتلته m على مسار $ABCD$ فينطلق من A بدون سرعة (نهمل الإحتكاك)

- أوجد سرعة m ورد الفعل عند B ثم التقلص الأعظمي للنابض المثبت في D ثابت مرونته k

باستعمال: 1- نظرية الطاقة الحركية. 2- الطاقة الكلية.



الشكل (12.V)

حلول التمارين : من (1.V) إلى (3.V)

حل تمرين 1.V :

1- إيجاد العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في حالة:

أ- المسار OP مستقيم.

$$\vec{F} = y\vec{i} + 2xy\vec{j}$$

$$dl = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

وفق المستقيم الذي معادلته $y = ax$

$$O(0,0) \Rightarrow p(1,2) \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$$

$$w = \int \vec{F}.d\vec{l} = \int F_x.dx + \int F_y.dy$$

$$w_{OP} = \int y.dx + \int 2xydy = \int 2x.dx + \int 2x.2x2dx$$

$$w_{OP} = \int_0^1 \left(2x + 8x^2\right)dx \Rightarrow w_{OP} = x^2\Big|_0^1 + \frac{8}{3}x^3\Big|_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad w_{OP} = \frac{11}{3}\vec{j}$$

ب- المسار المنكسر OAP حيث $A(1,0)$ نقطة على المحور ox

$$w_{OP} = w_{OA} + w_{AP}$$: حيث $$OA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, OP\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$: A(1,0) \Leftarrow 0(0,0)$ $\quad$ $y = \text{cst}$ $\quad \Leftarrow \quad$ $dy = 0$

$: P(1,2) \Leftarrow A(1,0)$ $\quad$ $x = \text{cst}$ $\quad \Leftarrow \quad$ $dx = 0$

$$w_{AP} = \int F_y dy = \int_0^2 2xydy = \int_0^2 2ydy = 2\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 = 4J$$

$$w_{OA} = \int F_x dx = \int_0^1 ydx = 0\,j \quad \boxed{w_{OP} = w_{OA} + w_{AP} = 4J} \quad \Leftrightarrow$$

ت- المسار قطع المكافئ $y = 2x^2$

$$w_{OP} = \int ydx + \int 2xydy = \int 2x^2dx + \int 2x.\left(2x^2\right)(4x)dx$$

$$w_{OP}=\int^{1}\left(2x^2+16x^4\right)dx=\frac{2}{3}x^3\Big|^1+\frac{16}{5}x^5\Big|^1 \Leftrightarrow \boxed{w_{OP}=3.57J}$$

نلاحظ أن الأعمال الثلاثة مختلفة نتيجة المسالك المختلفة و بالتالي فالقوة المطبقة هي قوة غير محافظة (غير مشتقة من كمون) .

2- $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة $E_P \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}$

حساب : $\overrightarrow{rot}\vec{F}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}$$

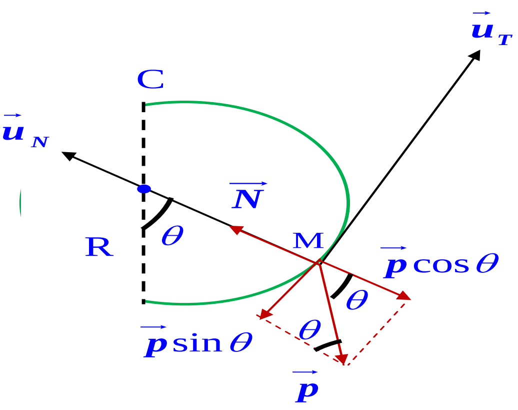
$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial(-y)}{\partial y}-\frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(-4x+y)}{\partial z}-\frac{\partial(y)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x-z)}{\partial x}-\frac{\partial(-4x+y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}=(-1+1)\vec{i}+(0)\vec{j}+(1-1)\vec{k}=\vec{0}$$

حل التمرين 2.V :

لكي تصل الكتلة m إلى C يجب أن تبقى على طول المسار AC ،أي يجب أن لا ينعدم رد الفعل $\vec{N}$ عند C أي : $N_C(\theta=\pi)\geq 0$



الشكل (13.V)

1- نبحث عن عبارة رد الفعل في الجزء النصف دائري من المسار. بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور $\vec{U}_N, \vec{U}_T$ نجد:

$$\vec{U}_T : -P\sin\theta = m\frac{dV}{dt}.................(1)$$

V^2

من (2) نجد:

$$N = P\cos\theta + m\frac{V^2}{R}...........(3)$$

- **حل التمرين باستعمال الطاقة**

بما أن القوة الوحيدة التي تعمل هي قوة الثقل (عدم وجود احتكاك) وهي قوة محافظة (قوة مشتقة من كمون) هذا يعني أن الطاقة الميكانيكية محفوظة.

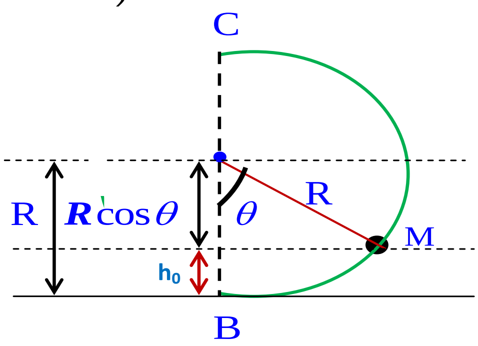
$E_M = E_C + E_P = Cte$ أي أن : $\Delta E_M = 0$

ندرس الحركة من A إلى M حيث M نقطة من المسار النصف دائري.

$$E_M(A) = E_M(\mathrm{M}) \Leftrightarrow E_C(A) + E_P(A) = E_C(\mathrm{M}) + E_P(\mathrm{M})$$

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{M}}^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mV_{\mathrm{A}}^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{M}}^2 = mg(h - h_0)$$



الشكل (14.V)

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{M}}^2 = mg\left(h - R(1-\cos\theta)\right) \Leftarrow h_0 = R(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow V_{\mathrm{M}}^{2}=2g\left(h-R\left(1-\cos\theta\right)\right)$$

$$N=P\cos\theta+\frac{mV_{\mathrm{M}}^{2}}{R}\Rightarrow N=P\cos\theta+\frac{2gm}{R}\left(h-R\left(1-\cos\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow N=mg\left[3\cos\theta+\frac{2}{R}\left(h-R\right)\right]$$

عند C أي : $N_C\left(\theta=\pi\right)\geq 0$

$$\Rightarrow N=mg\left[-3+\frac{2}{R}\left(h-R\right)\right]$$

$$N_C\geq 0\Rightarrow mg\left[-3+\frac{2}{R}\left(h-R\right)\right]\geq 0$$

$$\frac{2}{R}\left(h-R\right)\geq 3\Rightarrow\left(h-R\right)\geq\frac{3R}{2}\Rightarrow\boxed{h\geq\frac{5}{2}R}$$

ملاحظة: يمكن حل هذا التمرين باستعمال التحريك.

حل التمرين 3.V :

- يجاد سرعة ع m ند B باستعمال نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_C=W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

$$E_C\left(B\right)-E_C\left(A\right)=W_{A\to B}\left(\vec{P}+\vec{N}\right)=\int\left(\vec{P}+\vec{N}\right)d\vec{r}$$

$$\vec{N}\perp d\vec{r}\Rightarrow\vec{N}.d\vec{r}=0$$

$$E_C\left(B\right)-E_C\left(A\right)=\int mgdr\cos\theta+c$$

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{B}}^{2}-\frac{1}{2}mV_{\mathrm{A}}^{2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}mgRd\theta\cos\theta\ ,\ \left(V_{\mathrm{A}}^{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}mV_{\mathrm{B}}^{2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}mgRd\theta\cos\theta=mgR\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta,$$

$$V_{\mathrm{B}}^{2}=2gR\sin\theta 2gR\sin\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow V_{\mathrm{B}}^{2}=2gR\Rightarrow\boxed{V_B=\sqrt{2gR}}$$

- إيجاد سرعة mعند B باستعمال الطاقة الكلية

لا يوجد احتكاك ⇐ انحفاظ في الطاقة الكلية

$$E_T = E_M = E_c + E_P = Cte \Rightarrow \Delta E_M = 0$$

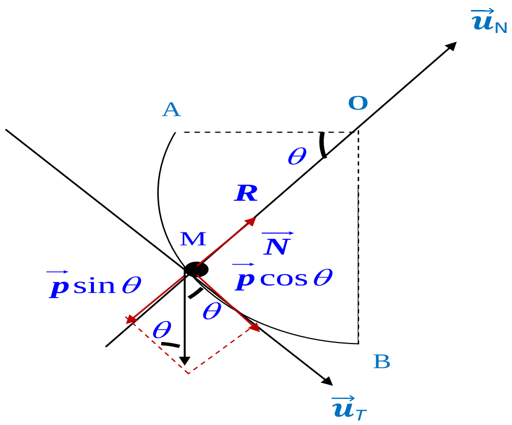
$$E_M(A) = E_M(\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mV_{\mathrm{A}}^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mV_{\mathrm{B}}^2 + mgh_B \quad E_C(A) + E_P(A) = E_C(\mathrm{B}) + E_P(\mathrm{B})$$

$$mgR = \frac{1}{2}mV_{\mathrm{B}}^2 \quad \left(h_A = R, V_{\mathrm{A}}^2 = 0, h_B = 0\right) \Leftrightarrow V_{\mathrm{B}}^2 = 2gR \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gR}}$$

- إيجاد رد الفعل عند B

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:



الشكل (15.V)

$$\Leftrightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma} \quad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور التابعة للقاعدة الذاتية $\vec{U}_N, \vec{U}_T$ نجد:

وفق $\vec{U}_T$:

$$P\cos\theta = m\frac{dV}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وفق $\vec{U}_N$:

$$N - P\sin\theta = m\frac{V^2}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (2) نجد:

$$N = P\sin\theta + m\frac{V^2}{R}$$

- عند B :

$$N_B\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N_B = mg + \frac{m}{R}V_B^2 = mg + \frac{m}{R}(2gR) \quad \Rightarrow N_B = 3mg$$

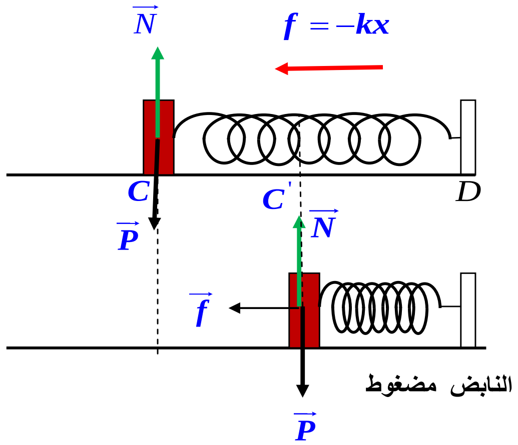
- إيجاد التقلص الأعظمي للنابض باستعمال نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_C = W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right) \Leftrightarrow E_C\left(C'\right) - E_C(B) = W_{B\to C}\left(\vec{f}\right) = \int \vec{f}.d\vec{x}$$

$$E_C\left(C'\right) - E_C(B) = \int_0^{x_{max}} -kxdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_{C'}^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_{max}}$$

عند التقلص الأعظمي للنابض $V_{C'} = 0$

$$-\frac{1}{2}mV_B^2 = -\frac{k}{2}x_{max}^2 \Rightarrow x_{max}^2 = \frac{2mgR}{k} \Leftrightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{2mgR}{k}}$$



الشكل (16.V)

إيجاد التقلص الأعظمي للنابض باستعمال نظرية الطاقة الكلية

$$E_T = E_M = E_c + E_P = Cte \Rightarrow \Delta E_M = 0 \Leftrightarrow E_M(B) = E_M\left(C'\right)$$

$$E_C(B) + E_P(B) = E_C\left(C'\right) + E_P\left(C'\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mV_{C'}^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mV_{C'}^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad x_{max}^2 = m\frac{V_B^2}{k} = \frac{m}{R}(2Rg) \quad \Leftrightarrow \left(h_B = 0, V_{C'}^2 = 0\right)$$

المراجع

[1]- ميكانيك النقطة المادية دروس الأستاذ فيزازي أحمد - ديوان المطبوعات الجامعية (O.P.U)جامعة بشار

[2]- محاضرات في الفيزياء ميكانيك النقطة المادية الأستاذة : د. بومعزة ليلى جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1 كلية العلوم الدقيقة -قسم الفيزياء 2017/ 2018.

[3]- مدخل إلى الميكانيك وأعمال تطبيقية: ميكانيك - نصر الدين مولاي و ع. بودهان المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي القبة.

[4]- الفصل الأول: تذكير رياضي التحليل البعدي والحساب الشعاعي الأستاذة: ناصر أمال 2021/2020.

[5]- ميكانيك النقطة المادية الأستاد لمين حمدلو استاد محاضر قسم أ جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1

[6]- التحليل المتجهي د.وسام طلب كلية العلوم – جامعة دمشق 2015/2014.

[7]- ميكانيك النقطة المادية الفصل الثالث: الحساب الشعاعي الأستاذ: جمال دباش قسم الفيزياء – كلية علوم المادة – جامعة باتنة 1 .

محاضرات في الفيزياء ميكانيك النقطة المادية د. شهرة ثورية جامعة قاصدي مرباح_ ورقلة .

[8]- كلية العلوم والتكنولوجيا وعلوم المادة قسم علوم المادة 2011/2010

[9] - **Cours de physique – Mécanique du point,** Alain Gibaud, Michel Henry, Dunod

[10]- TRAN Minh Tâm , physique générale, polycopié , http://lphe.epfl.ch/~mtran/.

[11]- P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992)

[12]- Michel Henri et Nicolas Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).

[13]- Sylvie Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).

[14]- Horst Stocker, Francis Jundt et Georges Guillaume, Toute la physique, édition Dunod (1999).

[15]- Polycopié d'exercices et examens résolus:Mécanique du point matériel M. Bourich édition 2014 universite Cadi ayyad Marrkech

[16]- http://perso.wanadoo.fr/physique.belledonne Contient ce polycopié et différentes extensions, par Gilbert Vincent, Professeur UJF

[17]- http://cours-examens.org/index.php/etudes- superieures/tronc-commun-technologie.