REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Tahri Mohammed Béchar

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Sciences

Analyse I

Rappels de cours

et

Exercices corrigés

Meghnafi Mustapha et Ferhat Mohamed

Table des matières

Le manuscrit présenté donne une partie de cours et TD de mathématiques destiné aux étudiants de la première année LMD des domaines (MI, SM, ST). Il est constitué d'un résumé de cours sur les nombres réels, suites réells, continuité et dérivabilité plus des exercices corrigés. Le premier chapitre on donne des définitions de quelques propriétés de la borne supérieure et d'Archimède puis on termine par les séries d'éxercices . Dans le deuxième chapitre on détaille bien les suites numériques. Le troisième chapitre est consacré à des notions fondamentaux des fonctions réelles. On rappelle dans le quatrième chapitre la définition de la dérivation d'une fonction réelle, et ses propriétés. L'essentiel des fonctions trigonométriques réciproques se trouve dans le chapitre cinq. Enfi on enrichit cette théorie par des séries d'exercices avec des corrigés à la fin de ce polycopié. Les efforts que vous devrez fournir sont importants, tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaitre par coeur les définitions, les théorèmes, les propositions.. etc, sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques, il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions. Pour vous aider. Il est cité une série de livres, l'enseignant ou l'étudiant voulant approfondir des notions y trouvera ce qu'il cherchent.

Il est certain que la première version de cet ouvrage est perfectible, et qu'elle contient certaines erreurs, c'est pourquoi j'invite tous les lecteurs, étudiants ou enseignants à me faire parvenir leurs remarques et commentaires à mon adresse **mail :**

Meghnafi Mustapha
E-mail : megnafi3000@yahoo.fr
Ferhat Mohamed
E-mail : ferhat22@hotmail.fr

1 Corps des nombres réels

1.1 Construction axiomatique de $\mathbb{R}$

Commençons par rappeler les divers ensembles des nombres

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

$D = \{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres décimaux.

Proposition 1

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Preuve

Par l'absurde supposons que $\sqrt{2}$ st un nombre rationnel. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus on suppose que p et q sont premiers entre eux . En élevant au carré, l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ devient $p^2 = 2q^2$. Cette égalité est une égalité d'entiers.

L'entier p^2 est pair, ce qui implique que p est pair, alors $p = 2k$, ce qui donne $q^2 = 2k^2$ et q est pair aussi. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q, cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont prmiers entre eux.

Notre hypothèse est donc fausse . Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

On note par $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Il a été introduit pour compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Définition 1

On dit que x est nombre réel si l'une des conditions suivantes est

i) $x \in \mathbb{Q}$ et dans ce cas x est dit rationnel

ii)$x \notin \mathbb{Q}$ et dans ce cas x est dit irrationnel

Nous déduisons que l'ensemble des réel $\mathbb{R}$ contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Exemple **1.** *Parmi les réels qui sont irrationnels on peut citer* $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ln e$.

Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ *vérifient les inclusions suivantes*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Propriétés algébriques

On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de compositions internes l'addition $+$ et la multiplication ., celle-ci possèdent les propriétés suivantes. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

Propriétés	Addition	Multiplication
Commutativité	$x + y = y + x$	$x.y = y.x$
Associative	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x.y).z = x.(y.z)$
Element neutre	$0 + x = x + 0 = x$	$x.1 = 1.x = x$
Element symétrique	$x + (-x) = -x + x = 0$	$x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1, x \neq 0$
La distributive	$x.(y + z) = x.y + x.z$	$(y + z)x = yx + z.x$

les propriétés précédentes étant vérifiées, on dit donc que l'ensemble des réels muni de l'addition et la multiplication $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.

Propriétés de l'ordre

On muni l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une relation $\leq$ vérifiant les propriétés suivantes

1. Réflexivité :$\forall x \in \mathbb{R}, xRx$
2. Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \quad et \quad y \leq z)$ alors $x = y$
3. Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \quad et \quad y \leq z)$ alors $x \leq z$
4. Deux réels sont comparables $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \quad ou \quad y \leq z)$
5. Compatibilité avec l'addition $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ alors $x + z \leq y + z$
6. Compatibilité avec la multiplication :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } xz \leq yz$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_- \text{ alors } xz \leq yz$$

1.3 Majorants, minorants

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, m et M deux réels. On dit que

1. M est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A, x \leq M$
2. m est un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A, x \geq m$
3. A est majorée si et seulement si admet un majorant
4. A est minorée si et seulement si admet un minorant
5. A est bornée si et seulement si elle à la fois majorée et minorée

Remarque 1.

Si une partie A admet un majorant M, alors tous les réels supérieur à M sont aussi des majorants de A
Si une partie A admet un minorant m, alors tous les réels inférieur à m sont aussi des minorants de A

Exemple 2.

Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$
Les éléments $1, 4, 7$ *sont des majorants de* A
Les éléments $-3, -1, -1$ *et* 0 *sont des minorants de* A
L'intervalle $]-4, 2[$ *est borné dans* $\mathbb{R}$*, majoré par* 2 *et minoré par* -4
L'ensemble $\mathbb{N}$ *des entiers naturels est minorée par* 0 *et non majoré*
L'ensemble A *défini par* $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 3\}$ *est minoré par* 3

1.4 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$
On dit que A admet un plus grand élément(maximum) s'il existe un réel $b \in A$
tel que $\forall x \in A, \quad x \leq b$
On dit que A admet un plus petit élément(minimum) s'il existe un réel $a \in A$
tel que $\forall x \in A, \quad x \geq a$

Remarque 2.

Les réels a et b s'ils existent sont uniques et on note $a = \min A$ *et* $b = \max A$

Exemple **3.**

Soit $A = \{-1, \frac{1}{4}, 9\}$

Le plus grand élément de A *est* $\max A = 7$

Le plus petit élément de A *est* $\min A = -1$

1.5 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

On dit que M est une borne supérieure de A, on la note $\sup A$ si et seulement si, M est le plus petit des majorants de A.

Si la borne supérieure de A existe , alors elle est unique

On dit que m est une borne inférieure de A, on la note $\inf A$ si et seulement si, m est le plus grand des minorants de A.

Si la borne inférieure de A existe , alors elle est unique

Remarque **3.** *Si une partie* A *admet un plus grand élément* M*, alors* $M = \sup A$

Si une partie A *admet un plus petit élément* m*, alors* $m = \inf A$

La réciproque en général est fausse

Si A *n'est pas majorée, on écrit* $\sup A = +\infty$

Si A *n'est pas minorée, on écrit* $\inf A = -\infty$

Exemples **1.**

$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup A = 1$ *et* $\inf A = 0$

$A =]-2, \frac{1}{7}]$, $\sup A = \frac{1}{7} = \max A$ *et* $\inf A = -2$

$A = [-4, +\infty[$, $\sup A = +\infty$ *et* $\inf A = \min A = -4$

$A =]-\infty, -2[$, $\sup A = -2$ *et* $\inf A = -\infty$

1.6 Caractérisation de bornes $\sup$ et $\inf$

Théorème 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un réel.

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{M est un majorant de A} \\ \qquad\text{et} \\ \text{tout réel strictement petit que M n'est pas un majorant de A .} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \qquad\text{et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A \text{ tel que } M - \epsilon < x_0 \end{cases}$$

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée de $\mathbb{R}$. Soit m un réel.

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{m est un minorant de A} \\ \qquad\text{et} \\ \text{tout réel strictement grand que m n'est pas un minorant de A.} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geq m \\ \qquad\text{et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A \text{tel que } x_0 < m + \epsilon \end{cases}$$

1.7 Propriété de la borne supérieure

Théorème 1

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

1.8 Propriété de la borne inférieure

Théorème 1

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

1.9 Valeur absolue

Définition 1

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, le nombre réel positif ou nul , noté $|x|$, définie par

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

On dit que le corps $\mathbb{R}$ est valué

Propriétés 1. *la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tout réels x et y, on a*

1. $|x| \geq 0, -|x| \leq x \leq |x|, |-x| = |x|$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x^n| = |x|^n, n \in \mathbb{Z}$ *et* $x \neq 0$
5. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
6. *si* $y \geq 0, |x| \leq y \Longleftrightarrow -y \leq x \leq y$
7. *si* $y \geq 0, |x| \geq y \Longleftrightarrow x \leq -y$ *ou* $x \geq y$
8. *si* $y \geq 0, |x| = y \Longleftrightarrow x = \pm y$
9. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *Inégalité triangulaire*
10. $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *Inégalité triangulaire inversée*

1.10 Propriété d'Archimède

Théorème 1

$\mathbb{R}$ est un corps archimédien, cest-à dire vérifiant la propriété d'Archimède

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y < nx$$

1.11 Partie entière

de la propriété d'Archimède découlera un résultat important sur l'existence de la partie entière d'un réel qui fera l'objet du théorème qui suit

Théorème 1

Pou tout réel x, il existe un unique entier relatif appelé la partie entière de x et notée $E(x)$ ou $[x]$, vérifiant

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple 4. $E(0.1) = 0, E(-0.1) = -1, E(2) = 2, E(\pi) = 3, E(-\pi) = -4, \quad E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

1.12 Distance entre deux réels

Définition 1

La distance de deux nombres réel x et y est le nombre positive $d(x, y) = |x - y|$

Propriétés 2. *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a*

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

1.13 Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, (a \leq x \leq b) \Longrightarrow x \in I$$

Remarque 4.

- *Par définition $I = \emptyset$ est un intervalle*
- *$I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle*

De manière générale, les différentes types d'intervalles sont

Notation	Définition	Description
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	fermé borné
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	borné,semi ouvert à droite
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	borné semi ouvert à gauche
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	ouvert,borné
$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	fermé non majoré
$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R}, x > a\}$	ouvert non majoré
$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R}, x \geq b\}$	fermé non minoré
$]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R}, x < b\}$	ouvert non miniré
$]-\infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$	droite réel

Exemples 2.

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0], \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$

1.14 Longueur et centre d'intervalle

Définition 1

Soit I un intervalle d'extrémités a et b tels que $a < b$

Le nombre $b - a$ s'appelle la longueur de I

Le nombre $\frac{b-a}{2}$ s'appelle le centre de I

1.15 Voisinage d'un point

Définition 1

Soit a un réel. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Exemple 5.

$V =]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}[$ est un voisinage de 2, car $]2 - \frac{1}{2}, 2 + 1[\subset V$

Par contre $V =]\frac{1}{2}, 2[$ n'est pas un voisinage de 2 car pour tout $\epsilon > 0,]2 - \epsilon, 2 + \epsilon[\nsubseteq V$

1.16 Adhérence d'une partie

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que a est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert contenant a rencontre A, C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0,]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$$

Dans ce cas on dit que a appartient à l'adhérence de A et on écrit $x \in \bar{A}$
L'ensemble $\bar{A}$ de tous les points adhérent à A est appelé l'adhérence de A

Exemple 6. • $]0,1], \bar{A} = [0,1]$

- $A = \{2\}\cup]3,6], \bar{A} = \{2\} \cup [3,6]$
- $A = [1,9], \bar{A} = [1,9]$

1.17 Point d'accumulation d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est un point d'accumulation de$A$ si pour tout voisinage V de a on a

$$V \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

Exemple 7.

$A =]1,3[\cup\{4\}$ *et* $a = 1$
1 *est un point d'accumulation de* A *car*

$$\forall \epsilon > 0, (]1-\epsilon, 1+\epsilon[) \cap (A - \{1\} \neq \emptyset$$

$A =]-3,5], -5$ *est un point d'accumulation*
$A = \{3\}\cup]4,5[, 2$ *n'est pas un point d'accumulation*

1.18 *Point isolé*

Définition 1

Un point $x \in A$ qui n'est pas un point d'accumulation de A est dit point isolé de A

Exemple 8.

$A = \{3\} \cup]4, 5[$ *le point* 3 *est un point isolé de* A.

2.1 *Suite Numérique*

Définition 1

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

$u_n$est appelé terme général de la suite $(u_n)_n$ ou tout simplement (u_n).

Exemples 3. *1.* $u_n = \sqrt{n^2+4}$ *forme explicite*

2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 7 \end{cases}$ *forme récurrente*

3. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$ *forme de Fibonacci*

Propriétés 3. • *On définit l'addition de suites comme suit*

$$(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$$

• *On définit la multiplication de suites comme suit*

$$(u_n)_n \cdot (v_n)_n = (u_n \cdot v_n)_n$$

• *On définit la multiplication d'une suite par un réel λ comme suit*

$$\lambda (u_n)_n = (\lambda u_n)_n$$

2.2 *Suites bornées*

• On dit que la suite $(u_n)_n$ est majorée s'ilexiste

$$M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

- On dit que la suite $(u_n)_n$ est minorée s'il existe

$$m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

- On dit que la suite $(u_n)_n$ est bornée si elle est, à la fois minorée et majorée, ce qui revient à dire

$$\exists k > 0 \text{ tel que } |u_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemples 4. • *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ *est majorée par 1 et minorée par 0*

- *La suite de terme général* $u_n = (-1)^n$ *est bornée par 1*
- *La suite de terme général* $u_n = (-1)^n e^n$ *n'est ni majorée ni minorée*

2.3 Suites monotones

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que

- (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Elle sera dite strictement croissante si l'inégalité est stricte.
- (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .Elle sera dite strictement décroissante si l'inégalité est stricte.
- (u_n) est constante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$.
- (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemples 5. • *Soit la suite* (u_n) *telle que* $u_n = \sqrt{n+2}$

Ona $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} > 0$, *alors* (u_n) *est strictement croissante.*

- *Soit la suite* (u_n) *telle que* $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n} \end{cases}$

On a $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{4}{u_n} - u_n = -\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$ $(car u > 1, \forall n \geq 0)$ *par suite* (u_n) *est strictement décroissante.*

- *La suite* (u_n) *telle que* $u_n = (-1)^n n$ *n'est pas monotone.*

2.4 Suites convergentes

On dit que la suite (u_n) admet le réel l pour limite ou que (u_n) converge vers l si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \forall n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

On écrira alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Proposition 1

La limite d'une suite convergente est unique

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta_A \in \mathbb{N};\ \forall n \geq \eta_A \Rightarrow u_n > A$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \forall A < 0, \exists \eta_A \in \mathbb{N};\ \forall n \geq \eta_A \Rightarrow u_n < A$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 9. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$,

Soit $\varepsilon > 0$, *il faut alors trouver* $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *qui lui correspond ; il faut donc montrer que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}\,;\, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n+2} \right| < \varepsilon \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \right| &< \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

donc il suffit de prendre

$$\eta_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 1$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,\ \forall n \geq \eta_\varepsilon$

on a $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$

Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Remarque 5. *La réciproque est fausse.*

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ *est une suite bornée, mais elle n'est pas convergente.*

Propriété 1. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l_1 et $(v_n)_n$ converge vers l_2, alors*

- *λ, $\mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u_n + \mu v_n$ converge vers $\lambda l_1 + \mu l_2$.*
- *La suite $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.*
- *Si $l_2 \neq 0$, la suite $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{l_1}{l_2}$*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l_1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |l_1|$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0.$

2.5 Sous-suite (suite extraite)

Etant données une suite $(u_n)_n$ et une application strictement croissante

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

Alors la suite v_n définit par $v_n = u_{\varphi(n)}$, est appelée sous suite de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 10. *Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des sous-suites de la suite (u_n).*

2.6 Convergence des suites monotones

Théorème 1

- Toute suite croissante majorée est convergente
- Toute suite écroissante minorée est convergente.

Exemple 11. *Soit la suite $(u_n)_n$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

On peut facilement montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et que (u_n) est strictement décroissante.

D'après le théoreme précédent (u_n) est convergente vers l vérifie l'équation suivante $l = 2 - \frac{1}{l}$, alors $l = 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2.7 Suites adjacentes

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si l'une croissante, l'autre décroissante et que la limite de la difference est égale à 0.

Proposition 1

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Exemple 12. *Soit $u_n = \frac{4}{n}$ et $v_n = \frac{-1}{n+1}$, alors il est clair que $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$. d'où sont deux suites adjacentes.*

2.8 Théorème de Bolzance-Weierstrass

Théorème 1

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemple 13. *Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$*

Cette suite est bornée, alors on peut extraire une sous-suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n} = 1$

2.9 Théorème d'encadrement

Théorème 1

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = l$$

et soit $(w_n)_n$ une suite vérifiant

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = l$$

Proposition 1

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } (v_n)_n \text{ est bornée}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$$

Exemple 14. *Soit* $(u_n)_n$ *telle que* $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

On a $|\sin n| \leq 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.10 Suite de Cauchy

Soit $(u_n)_n$ une suite donnée, on dit que $(u_n)_n$ une suite de Cauchy, si on a la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}\,;\, \forall p, q \in \mathbb{N}\ \ (p \geq \eta_\varepsilon \text{ et } q \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

Exemple 15. *Soit* (u_n) *définit par* $u_n = \cos \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |\cos \tfrac{1}{p} - \cos \tfrac{1}{q}| \\ &= |-2\sin \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \sin \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}\right)| \\ &\leq 2|\sin \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}\right)| \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{q} \end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$, *on a* $|u_p - u_q| \leq \dfrac{2}{q} < \varepsilon$, *alors* $q > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = [\dfrac{2}{\varepsilon}] + 1$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}\,;\, \forall p, q \in \mathbb{N}\ \ (p \geq \eta_\varepsilon$ *et* $q \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$

donc (u_n) *est une suite de Cauchy.*

Proposition 1

$$(u_n)_n \text{ est une suite de Cauchy} \Leftrightarrow (u_n)_n \text{ est une suite convergente.}$$

Exemple 16. *Soit* $(u_n)_n$ *telle que* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$

Pour $p = 2n$, $q = n$ *et* $\eta = \frac{1}{2}$, *on a*

$\mid u_p - u_q \mid = \mid u_{2n} - u_n \mid = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

donc (u_n) *n'est pas de Cauchy, d'où elle diverge.*

2.11 Exercices Sur Les Suites Numériques.

Exercice 1

En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que

$a)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n}{2n-1} = \dfrac{5}{2}$

$b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n+5}{2n^2+n+2} = \dfrac{1}{2}$

$c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}} = +\infty.$

Solution

Rappelons la définition de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall n\geq\eta_\varepsilon \Longrightarrow \mid u_n - l \mid < \varepsilon$$

$a)$ Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\eta_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq\eta_\varepsilon$ on $\left|u_n-\dfrac{5}{2}\right|<\varepsilon$

On a
$$\begin{aligned}\left|u_n-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon &\Longrightarrow \left|\frac{5n}{2n-1}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon\\ &\Longrightarrow \frac{5}{4n-2}<\varepsilon\\ &\Longrightarrow n>\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc si on choisit $\eta_\varepsilon = \left[\dfrac{5}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}\right]+1$ on aura alors

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta_\varepsilon = \left[\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right]+1, \forall n\geq\eta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{5n}{2n-1}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n}{2n-1} = \dfrac{5}{2}$

Exercice 2

Déterminer (quand elle existe) la limite, quand $n\to+\infty$, des suites numériqurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1)\ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, & (2)\ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,\\ (3)\ u_n = \dfrac{\log(n)}{2\sqrt{n}}, & (4)\ u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2+1},\\ (5)\ u_n = \dfrac{2n+1-\cos n\pi}{n}, & (6)\ u_n = (-1)^n+\dfrac{1}{n}\\ (7)\ u_n = \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right). & \end{array}$$

Solution

1. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e,$ car $\lim_{X\to0}\frac{\log(1+X)}{X}=1.$

3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n)}{2\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\log(\sqrt{n})}{2\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=0.$

4. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n^2+1}=0,\ \text{car}\ \begin{cases}|\sin(n)|\leq 1\\ \quad\text{et}\\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+1}=0\end{cases}$$

5. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}=0,\ \text{car}\ \begin{cases}|\cos(n\pi)|\leq 1\\ \quad\text{et}\\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.\end{cases}$$
Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1-\cos n\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}\right)=2.$

6. $$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n=\begin{cases}1 & \text{si n pair}\\ -1 & \text{si n impair}\end{cases}$$
d'où (u_n) n'a pas de limite.

7. On a $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \log\left(1 + u_n\right), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

$a)$ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

$b)$ Montrons que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

$c)$ Montrons que (u_n) est décroissante.

Solution

$a)$ Pour $n = 0$, on a $u_0 \geq 0$ vraie

Supposons maitenant que l'inégalité est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$.

On a

$$\begin{aligned} u_n \geq 0 &\Longrightarrow 1 + u_n \geq 1 \\ &\Longrightarrow \log(1 + u_n) \geq 0 \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Alors $u_n \geq 0$, $\forall \in \mathbb{N}$

$b)$ $u_{n+1} - u_n = \log(1 + u_n) - u_n$.

On pose $f(x) = \log(1 + x) - x$, $\forall x \geq 0$

Ona $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x} \leq 0$, alors f est décroissante.

Ainsi (u_n) est décroissante.

$c)$ La suite (u_n) étant décroissante, minorée par 0, alors elle converge vers l qui doit vérifier l'équation $l = \log(1 + l)$

d'où $l = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n + 2} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

a). Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$.

b). Vérifier que l'équation $x = \dfrac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive α.

c). Montrer que $\forall n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

d). En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

a). Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$, vraie.

Supposons que l'inégalité est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a

$$u_n > 0 \Rightarrow u_n + 2 > 2$$
$$u_n > 0 \Rightarrow 3u_n + 2 > 2$$

Ainsi $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n + 2} > 0$

Alors $\quad u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

b). L'équation $x = \dfrac{x+2}{3x+2}$ équivalent à $3x^2 + x - 2 = 0$, cette dèrnière équation admet une seule racine positive $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

C). Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \alpha| = \left|1 - \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2^0}$ vraie.

Supposons que l'inégalité est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie àl'ordre $n+1$.

On a $|u_n - a| \leq \dfrac{1}{2^n}$,

$$|u_{n+1} - a| = \left|\frac{u_n + 2}{3u_n + 2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{\left|u_n - \frac{2}{3}\right|}{3u_n + 2} \leq \frac{\left|u_n - \frac{2}{3}\right|}{2} \leq \frac{\frac{1}{2^n}}{2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

Donc $\forall n \geq 0$ on a $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.

d). d'après la question précédente on a

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \mid u_n - \alpha \mid \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

$a)$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 2$.

$b)$ Montrer que (u_n) est croissante.

$c)$ En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

S o l u t i o n

$a)$ Pour $n = 0$, on a $0 < u_0 = 1 < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que l'inegalité est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$.

On a $\begin{aligned} 0 < u_n < 2 &\Longrightarrow 1 < \sqrt{u_n + 1} < \sqrt{3} < 2 \\ &\Longrightarrow 0 < u_{n+1} < 2 \end{aligned}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 2$.

$b)$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 1} - \sqrt{u_{n-1} + 1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + 1} + \sqrt{u_{n-1} + 1}}$$

$$= \frac{u_1 - u_0}{(\sqrt{u_n + 1} + \sqrt{u_{n-1} + 1})(\sqrt{u_{n-1} + 1} + \sqrt{u_{n-2} + 1}) \ldots (\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_0 + 1})}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{u_n + 1} + \sqrt{u_{n-1} + 1})(\sqrt{u_{n-1} + 1} + \sqrt{u_{n-2} + 1}) \ldots \left(\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_0 + 1}\right)} > 0$$

Ainsi (u_n) est croissante.

$c)$ La suite (u_n) est croissante, majorée donc elle converge vers l qui doit vérifier l'équation $l = \sqrt{l + 1}$,

d'où $l = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Exercice 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} 0 \leq u_n < 1 \\ \\ 0 \leq v_n < 1 \\ \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 1. \end{cases}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

S o l u t i o n

Comme $0 \leq u_n < 1$ et $0 \leq v_n < 1$ alors on a
$0 \leq u_n v_n < u_n < 1$ et $0 \leq u_n v_n < v_n < 1$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 1$, alors d'après le théorème d'encadrement on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 7

$a)$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
$b)$ On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $[\alpha]$, vérifiant

$$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$$

Etablir que $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$.
$c)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{[\pi] + [2\pi] + ... + [n\pi]}{n^2}.$$

Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1) - 2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

$d)$ Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

S o l u t i o n

$a)$ **Montrons par récurrence que** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n=1$, on a $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ vraie.

Supposons que $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

donc l'égalité est vraie au pour $n+1$,

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$b)$ **Établir que** $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$**.**

On a $[\alpha] \leq \alpha[\alpha]+1 \Longrightarrow [\alpha]-1 \leq \alpha - 1 < [\alpha]$, ce qui donne

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha. \tag{2.1}$$

$c)$ **Montrer que l'on a l'encadrement** $\dfrac{\pi(n+1)-2}{2n} < u_n \leq \dfrac{\pi(n+1)}{2n}$.

En vertu de l'encadrement (2.1) on obtient

$$\frac{(\pi-1)+(2\pi-1)+...+(n\pi-1)}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi+2\pi+...+n\pi}{n^2}.$$

alors

$$\frac{\pi(1+2+...+n)-n}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi(1+2+...+n)}{n^2}.$$

En utilisant la question $a)$, on trouve

$$\frac{\pi(\frac{n(n+1)}{2})-n}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)}{n^2}.$$

d'où

$$\frac{\pi(n+1)-2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

$d)$ **Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

La suite (u_n) est encadrée par deux suites convergentes vers une même limite, donc d'après le théorème d'encadrement la suite (u_n) est convergente vers $\frac{\pi}{2}$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\,\geq\,2}$ et $(v_n)_{n\,\geq\,1}$ deux suites telles que :

$$u_n = \frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } v_n = \frac{n+2}{n}$$

$a)$ Montrer que $(v_n)_{n\,\geq\,1}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\,\geq\,2}$

.

$b)$ Soit $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

S o l u t i o n

$a)$ **Montrons que $(v_n)_{n\,\geq\,1}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\,\geq\,2}$:**

$$\text{Si} \quad v_n = u_{\varphi(n)} \iff \frac{n+2}{n} = \frac{\varphi(n)+7}{\varphi(n)-1}$$
$$\iff (n+2)[\varphi(n)-1] = n[\varphi(n)+7]$$
$$\iff \varphi(n) = 4n+1$$

de plus φ est croissante, alors $(v_n)_{n\,\geq\,1}$ sous-suite de $(u_n)_{n\,\geq\,2}$

$b)$ **Déterminons $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ telle que (b_n) sous suite de (a_n)**

Si on considère l'application $\begin{array}{rcl} \varphi \ : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) = 5^n \end{array}$

φ est croissante donc la suite (a_n) définie par le terme $\quad a_n = \frac{5-n}{3n+1}$.

Exercice 9

Soient $k \in]0,1[$, et la suite (u_n) qui vérifie

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k\,|u_{n+1} - u_n|\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$a)$ Montrer que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$b)$ Montre que si p et q deux entiers tels que $p > q \geq 0$, alors

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}\,|u_1 - u_0|\,.$$

$c)$ En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.

Solution

$a)$ **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|\,.$

Pour $n = 0$, on a $|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|$ vraie .
Supposons que l'inégalité est vraiejusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$.
On a

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &\leq k\,|u_{n+1} - u_n| \\ &\leq kk^n\,|u_1 - u_0| \\ &\leq k^{n+1}\,|u_1 - u_0| \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \text{ on a }\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|\,.$

$b)$ **Montre que si** p **et** q **deux entiers tels que** $p > q \geq 0$, **alors** $|u_p - u_q| \leq \dfrac{k^q}{1-k}\,|u_1 - u_0|\,.$
Soit $k \in]0,1[$ et $p > q \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - u_{p-1} + u_{p-1} - u_{p-2} + u_{p-2} - \ldots + u_{q+1} - u_q| \\ &\leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \ldots + |u_{q+1} - u_q| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_p - u_q| &\leq k^{p-1}|u_1 - u_0| + k^{p-2}|u_1 - u_0| \ldots + k^q |u_1 - u_0| \\
&\leq \left(k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k^q\right)|u_1 - u_0| \\
&\leq k^q\left(1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-q-1}\right)|u_1 - u_0| \\
&\leq k^q \frac{1 - k^{p-q}}{1-k}|u_1 - u_0| \\
&\leq \frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0|.
\end{aligned}$$

$c)$ **Déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.**

- Si $u_1 = u_0$, la suite (u_n) est constante, $u_n = u_0$ et par conséquent la suite est convergente vers u_0 donc (u_n) est de Cauchy.
- Supposons que $u_1 \neq u_0$ et soit $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, et pour $q > m$, on a $k^q < \dfrac{\varepsilon(1-k)}{|u_1 - u_0|}$
  par suite on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q \geq m$, on a $|u_1 - u_0| < \varepsilon$
  Ceci montre que (u_n) est de Cauchy.

3 Limites et continuité des fonctions réelles

Dans ce chapitre nous allons introduire les notions de limites et continuité qui jouent un rôle important dans l'étude des fonctions réelles.

3.1 Définition d'une fonction :

On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application f d'une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note alors

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble D s'appelle un ensemble de définition de la fonction f.

$\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$.

Exemple 17. $\bullet \begin{array}{rcl} Id : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$ $\qquad \bullet \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x}. \end{array}$

3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 1

Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$.
On définit l'addition de f et g comme suit

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x), \qquad \forall x \in D.$$

On définit la multiplication de f et g comme suit

$$f(x).g(x) = (f.g)(x), \qquad \forall x \in D.$$

On définit la multiplication de f par réel λ comme suit

$$\lambda.f(x) = (\lambda.f)(x), \qquad \forall x \in D.$$

3.3 *Fonctions bornées*

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$.

On dit que f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$.

On dit que f est bornée si à la fois majorée et minorée ou de manière équivalente

$$\exists K > 0, \forall x \in D, |f(x)| \leq K.$$

3.4 *Fonctions monotones*

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

• On dira que f est croissante (resp. décroissante) si pour tout couple $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$ nous avons $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(y) \leq f(x)$).

• On dira que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout couple $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$ nous avons $f(x) < f(y)$ (resp. $f(y) < f(x)$).

• Une fonction qui est croissante ou décroissante sur D sera dite monotone sur D.

• Une fonction qui est strictement croissante ou strictement décroissante sur D sera dite strictement monotone sur D.

Exemple 18.

$$\begin{array}{rcl} \bullet f : [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \textit{ est strictement croissante} \\ \bullet f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x| \textit{ n'est ni croissante, ni décroissante} \\ \bullet f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x| \textit{ est strictement croissante} \end{array}$$

3.5 *Parité d'une fonction*

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.
Nous dirons que f est paire (resp. impaire) pour tout réel $x \in D, -x \in D$, nous avons $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Exemple 19. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$ est paire, $n \in \mathbb{N}$.*
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n+1}$ est impaire, $n \in \mathbb{N}$.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$ est paire.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

Interprétation graphique

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Périodicié d'une fonction

Définition 2

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et λ un réel strictement positif.
Nous dirons que f est périodique de période λ (ou encore λ-périodique) si pour tout $x \in D, x + \lambda \in D$. Nous avons

$$f(x + \lambda) = f(x).$$

Interprétation graphique

f est périodique de période λ si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $\lambda \overrightarrow{i}$, où $\overrightarrow{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 20. *La fonction $\cos \lambda x$ est paire et $\frac{2\pi}{\lambda}$ périodique.*
La fonction $\sin \lambda x$ est impaire et $\frac{2\pi}{\lambda}$ périodique.
La fonction $\tan \lambda x$ est impaire et $\frac{\pi}{\lambda}$ périodique.

3.6 Limite d'une fonction

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, l \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit aussi que f tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple 21. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, *où* $f(x) = 3x + 2$.
Soit $\varepsilon > 0$, *cherchons* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *vérifiant* $|x - 1| < \alpha$, *on a* $|f(x) - 5| < \varepsilon$.
Pour $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |3x + 2 - 5| \\ &= 3|x - 1| < \varepsilon \quad si \ |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{3}$.
On a montre que $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 2) = 5$.

Proposition 1

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

3.7 Types de limites

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- On dit que f admet une limite à droite de x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, 0 < x - x_0 < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l$.

- On dit que f admet une limite à gauche de x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, -\alpha < x - x_0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$.

Exemple 22. *Soit* $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1 \quad et \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1.$$

Comme $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$, *alors* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas.*

Proposition 1

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l.$$

Limites infinies

Définition 2

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_0 \in D$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > B.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < -B.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in D, x < A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x > A \Longrightarrow f(x) > B.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x > A \Longrightarrow f(x) < -B.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall B > 0, \exists A < 0, \forall x \in D, x < A \Longrightarrow f(x) > B.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall B > 0, \exists A < 0, \forall x \in D, x < A \Longrightarrow f(x) < -B.$$

Opérations sur les limites

Théorème 1

Soient f et g deux foncions, $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = l.l'$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

Limites des foncions composées

Proposition 2

Soient $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications, $x_0 \in I, l \in \mathbb{R}$.

Nous supposons que

i) $f(I) \subseteq J$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l'$.

Théorème 2 (Théorème des gendarmes)

Soient f, g, h des fonctions définies sur $D, x_0 \in D$.

Nous supposons que

i) $\forall x \in D, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Exemple 23. *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x^2}$.

On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$x - 1 \leq E(x) \leq x,$$

d'où

$$\frac{x-1}{x^2} \leq \frac{E(x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2}.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x^2} = 0.$$

Proposition 3

Soient f et g deux fonctions définies sur $D, x_0 \in D$.

Nous supposons que

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

ii) g est bornée.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0$.

Exemple 24. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ *car* $|\sin x| \leq 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & si\ n\ pair\,; \\ -\infty, & si\ n\ impair. \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x^\alpha \ln x = 0,\ \alpha > 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

3.8 Continuité d'une fonction

Définition 1

Soient $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On peut formuler ceci de la façon suivante

$$\text{f est continue en } x_0 \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur D si f continue en tout point de D.

Exemple 25.

$$\bullet\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & si\ x \neq 0\,; \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$

Donc f est continue en 0.

- *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction* $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Continuité à droite et à gauche

Définition 2

On dit qu'une fonction f est continue à droite (Resp. à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ (Resp. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$).

Proposition 1

$$f \textit{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow f \textit{ est continue droite et gauche en } x_0.$$

Exemple 26. • *Soit f telle que* $f(x) = \begin{cases} e^x, & si\ x \leq 0\,; \\ x+1, & si\ x > 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0) = 1$, *alors f continue à droite en* 0.

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0) = 1$, *alors f continue à gauche en* 0.

f continue à droite et à gauche en 0, par suite f continue en 0.

• *Soit f telle que* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & si\ x \neq 0\,; \\ x+1, & si\ x = 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{-\sin x}{x} = -1 \neq f(0)$.

f n'est pas continue à gauche en 0, par suite f n'est pas continue en 0.

3.9 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 1

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in D$.

Alors nous avons les assertions suivantes

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.
- La fonction $f.g$ est continue en x_0.
- La fonction $|f|$ est continue en x_0.
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Exemple 27.

- *Toute fonctions polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.
- *Les fonctions circulaires :* $\sin, \cos, \tan$ *sont continues sur leurs domaines de définition.*
- *Chacune des fonctions suivantes est continues sur son domaine de définition*

$$f(x) = e^{x^2+2x}, f(x) = \sin(3x-2), f(x) = \ln(4x^2-2x-1).$$

3.10 Continuité de la fonction composée

Théorème 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3.11 Continuité uniforme

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dite uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que} \forall x, x' \in D, |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Exemple 28. *La fonction f définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est continue uniforme sur tout intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*

Théorème 1 (Théorème de Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exemple 29. *La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[1, 3]$, alors elle est uniformément continue sur $[1, 3]$.*

3.12 *Fonction Lipschitziennes*

Définition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est $k-$*lipschitziennes* sur D, si pour tout couple $(x, x') \in D^2$, nous avons l'inégalité

$$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

On dit que f est contractante s'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que f est lipschitzienne de rapport k sur D.

Proposition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ application $k-$*lipschitziennes* sur D. Alors la fonction f est uniformément continue sur D.

3.13 *Propriétés des fonctions continues*

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors

1. f est bornée dans $[a, b]$.
2. f atteint son minimum $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ est son maximum $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, c'est-à-dire, il existe x_1 et x_2 de $[a, b]$ tels que $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$.
3. f atteint au moins une fois toute valeur comprise entre son minimum et son maximum, c'est-à-dire $\forall y \in]m, M[, \exists \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$.

3.14 *Théorèmes des valeurs intermédiaires*

Théorème 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

3.15 Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 1. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.*
Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
De plus si f est monotone, alors c est unique.
Ces corollaire est la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 30. *Montrer que l'équation $e^x + x - 3 = 0$.*
Posons $f(x) = e^x + x - 3 = 0$.
$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - 2 > 0$.
On a $f(0).f(1) < 1$ et f continue sur $[0, 1]$, alors d'après le corollaire précédent, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$, et comme f est strictement croissante, alors c est unique.

3.16 Prolongement par continuité

Définition 1

Soit f une fonction définie sur $D \backslash \{x_0\}$ et $x_0 \in D$.
Si f admet une limite l en x_0, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & si\ x \in D \backslash \{x_0\}\,; \\ l, & si\ x = x_0. \end{cases}$$

est continue en x_0.
La fonction $\tilde{f}$ est appelée prologement par continuité de f en x_0 noté souvent $P_{\tilde{f}}$.

Exemple 31.

1. *La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ et de plus $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.*
   Par suite la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{f} = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & si\ x \neq 2\,; \\ 4, & si\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

   est un prologement par continuité de f au point 2.

2. *Soit f telle que $f(x) = \frac{|x|}{x}$.*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1 \qquad et \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1,$$

donc $\lim_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas, par suite* f *n'admet pas un prologement par continuité en point* 0.

3.17 Inversion des fonctions monotones et continues

Théorème 1

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone, alors

1) $f(D)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) f est bijective de D vers $f(D)$.

3) L'application réciproque $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ est continue, strictement monotone et de même nature que f.

Remarque 6. *Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, les représentations graphiques de* f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation* $y = x$.

Exemple 32. *La fonction* f *définie par* $f(x) = x^3$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *alors* f *admet une fonction réciproque* f^{-1} *continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *définie par* $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

3.18 Théorème du point fixe

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue. Alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
α est appelé point fixe de f.

Exemple 33. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : [-\frac{1}{2}, 1] & \longrightarrow & [-\frac{1}{2}, 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \ln(1 + x). \end{array}$$

La fonction f *est continue sur l'intervalle* $[-\frac{1}{2}, 1]$, *alors* f *admet un point fixe* $\alpha = 0$ *car* $f(0) = 0$.

3.19 Suites réccurentes et fonctions continues

Proposition 1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de D. Alors on a l'équivalence entre

1. La fonction f est continue en x_0.
2. Pour toute suite (u_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Remarque 7. *S'il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$, alors f est discontinue en x_0.*

Exemple 34. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & f(x) = E(x) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Montrons que f n'est pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$
Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$, et considérons la suite (u_n) définie par $u_n = x_0 - \frac{1}{n}$.
On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \qquad et \qquad f(u_n) = x_0 - 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = x_0 - 1 \neq f(x_0) = x_0 = E(x_0).$$

Donc f est discontinue en $x_0 \in \mathbb{Z}$.

4.1 Dérivée en un point

Définition 1

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0.
Cette limite est appelée dérivée de f au point x_0 ou nombre dérivée de f en x_0 noté $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

D'autre part si on pose $x - x_0 = h$, alors on a

$$f'(x_0) = \lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

On dit que f admet une dérivée infinie en x_0, si le rapport précédent tend vers ∞ quand x tend vers x_0

Exemples 6.

1. *La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ est on a*

$$f'(x_0) = \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2x_0$$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

2. *La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable au point $x_0 = 3$ est on a*

$$f'(3) = \lim_{x \longmapsto 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \longmapsto 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

3. *La fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$, car le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0.

4. *La fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$, car le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

5. *La fonction f définie par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$, car le rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

n' admet pas de limite quand x ted vers 0.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 2

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable à gauche (Resp. à droite) en x_0 si le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à gauche (resp. à droite) en x_0. On note alors $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$)

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to^> x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_d(x_0) = \lim_{x \to^< x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition 1

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On a alors l'équivalence entre

1. La fonction f est dérivable en x_0
2. La fonction f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0 = f'_d(x_0$

Exemple 35.

La fonction f définie par $f(x) = |x - 2|$ est dérivabe à gauche et à droite en $x_0 = 2$.

En effet

$$= \lim_{x \longmapsto 2^<} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \longmapsto 2^<} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$$

et

$$f'_d(2) = \lim_{x \longmapsto 2^>} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \longmapsto 2^>} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

Comme $f'_g(2) \neq f'_d(2)$, alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 2$.

4.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 1

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur D si elle est dérivable en tout point de D

Exemple 36. *La fonction polynome est dérivable sur* $\mathbb{R}$

Remarque 8. *Une fonction peut être dérivable sur* $[a, b]$ *et* $[b, c]$ *sans que* f *soit dérivable sur* $[a, c]$

Exemple 37. *La fonction* f *définie par* $f(x) = |x|$ *est dérivable sur les intervalles* $[-1, \frac{-1}{2}]$ *et* $[\frac{1}{2}, 1]$, *mais elle n'est pas dérivable sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *car elle n'est pas dérivable en point* $x_0 = 0$

4.3 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On suppose que f est dérivable en x_0, alors C_f admet une tangente (T) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ donnée par l'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ou $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T).

- Si $f'(x_0) = 0$, alors (T) est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si f est dérivable à droite en x_0, alors C_f admet une demi -tangente à droite d'équation
  $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si f est dérivable à gauche en x_0, alors C_f admet une demi -tangente à gauche d'équation
  $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point point anguleux.

Exemple 38. *Soit la fonction* f *définie par* $f(x) = x^2$.
Alors C_f *admet une tangente (T) au point* $M_0(2, 4)$ *donnée par l'équation* $y = 4x - 4$.

4.4 Propriétés sur les fonctions dérivables

Proposition 1

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur D. Alors pour tout $x \in D$, on a

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$ si $f(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad$ si $g(x) \neq 0$

Dérivée usuelles

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

4.5 Dérivée des fonctions composées

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Nous supposons que $f(I) \subset J$.
Si f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ et g est dérivable en $f(x) \in J$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x et nous avans

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Exemple 39.

$$\begin{aligned}
(\sin(f(x)))' &= f'(x)\cos(f(x)) \\
(\sqrt{1+x^2})' &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
(\ln(x^2+x+1))' &= \frac{2x+1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

Corollaire 2. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D. Alors la fonction $|f|$ est dérivable en tout point de D ou f ne s'annule pas*

Exemple 40. *La fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 1|$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ mais elle n'est pas dérivable en -1 et 1.*

4.6 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 1

Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow J$ une application continue, strictement monotone sur I. Si f est dérivable en $x \in I$ et si $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1})(y)}$$

Exemple 41. *On note la fonction réciproque de $f(x) = \sin(x)$ par $f^{-1}(x) = \arcsin x$ et on a*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Donc

$$f^{-1}(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[.$$

4.7 Continuité des fonctions dérivables

Proposition 1

f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

Remarque 9. *On utilise la proposition précédente dans le sens suivant*
f n'est pas continues en $x_0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en x_0

4.8 Extremum local d'une fonction dérivable

Définition 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, alors

• f admet un maximum local en x_0 (Resp. un minimum local en x_0 s'il existe un ouvert J contenant x_0 tel que $\quad f(x) \leq f(x_0) \quad ($ Resp.$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x I \cap J.$

• f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0 .

Exemple 42. *La fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x \in [-1,1] \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

admet un extremum local en $x_0 = 0$, c'est un minimum local car $\forall x \in [-1,1], f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$.

Proposition 1

Si f admet un extremum local en x_0 et elle est dérivable en ce point, alors $f'(x_0) = 0$

Remarque 10. *La réciproque est en général fausse car la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^5$ s'annule au point $x_0 = 0$, mais f n'admet pas un extremum local.*

4.9 Dérivée successives

Définition 1

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D et $x_0 \in D$ on pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$

- On dit que f admet une dérivée seconde en x_0, si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable en x_0. On note alors dans ce cas $f^{(2)}(x)$.
  Nous définissons par récurrence les dérivées successives de f en x_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet une dérivée $n^{\text{ème}}$ en x_0 si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0. On note alors $f^{(n)}(x_0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est n fois dérivable sur D, si $f^{(n)}$ est définie sur D.
- On dit que f est infiniment dérivable sur D, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ est définie sur D

Proposition 1

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur D.
Alors si $p + q \leq n$, on a $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Exemple 43.

$$\begin{aligned}
\sin^{(n)} x &= \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\
\cos^{(n)} x &= \cos(x + n\frac{\pi}{2} \\
(e^x)^{(n)} &= e^x
\end{aligned}$$

4.10 Class d'une fonction

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^0 sur I, si elle est continue sur I. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f est de classe C^p sur I ou qu'elle est p fois continûment dérivable sur I, si
$i)$ la fonction f est p fois dérivable sur I,
$ii)$ la dérivée $P^{\text{ème}}$ de f est continue sur I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I, si f est infiniment dérivable sur I.

4.11 Opération sur les dérivées et formule de Leibniz

Proposition 1

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Nous supposons que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors on a :
1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et on a :
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$
2) La fonction $f.g$ est n fois dérivable sur I et on a la formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple **44.** *Calculer $h^{(n)}(x)$, ou $h(x) = (x^2+3)e^x$.*
D'après la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2+3)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= e^x[C_n^0(x^2+3) + C_n^1(2x) + 2C_n^2] \\ &= e^x(x^2 + 2nx + n(n-1) + 3) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, h^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1) + 3)$

4.12 Dérivée $n^{ème}$ d'une fonction composée

Proposition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Nous supposons que $f(I) \subset J$.

1. Si f est n fois dérivable sur i et g est n fois dérivable sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est n fois dérivable sur I
2. Si f est de classe C^n sur I et f est de classe C^n sur J, alors la fonction composée $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

4.13 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Exemple 45. *Soit la fonction f définie par $f(x) = x^5 - x^4 + 3$.*
La fonction f continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$, don c d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$

Remarque 11. *Le théorème de Rolle valable si on remplace a par $-\infty$ ou b par $+\infty$.*

4.14 Théorème des accroissements finis

Théorème 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)

Exemple 46. *Montrons l'inégalité suivante* $\forall x > 0, \quad \ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$.

Posons $f(t) = \ln(1+t)$*, on applique le théorème des accroissements finis sur* f *à l'intervalle* $[0, x]$*. Alors il existe un* $c \in]0, x[$ *tel que* $f(x) - f(0) = xf'(c) = \dfrac{x}{1+c}$ *or* $\dfrac{1}{1+c} > \dfrac{1}{1+x}$ *car* $c < x$*.*
D'ou $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}, \quad \forall x > 0.$

4.15 Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème 1

Sooient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ tel que g s'annule pas sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

4.16 Règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital nous donne une technique simple pour lever les formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Corollaire 3. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $x_0 \in I$ *ou une extrémité de* I *,* f *et* g *deux fonctions continues et dérivables saouf peut être en* x_0*, telles que*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad$ *(ou* $\pm\infty$*)*
2. $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I - \{x_0\}$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad$ *(fini ou égal à* $\pm\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l.$

Exemples 7.

1) *Calculons* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
On pose $f(x) = e^x - 1$ *et* $g(x) = x$*. Les fonctions* f *et* g *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, vérifiant* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0, g'(x) = 1 \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1.$
Donc par la règle de l'Hôpital on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

2) *Calculons* $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}.$

On applique la règle de l'Hôpital avec les fonctions $f(x) = \ln x$ *et* $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *qui sont dérivables sur* $]0, +\infty[$, *et vérifiant les conditions de la règle de l'Hôpital . On a* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0^-$. *Donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$.

4.17 Exercice sur :Limites, Continuité et Dérivabilité

Exercice 1

Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction que

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 1} (2x+2) = 4$

Solution

1)Pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, il suffit de montrer que
$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\epsilon \Longrightarrow |a^x - 0| < \epsilon$. On se fixe $\epsilon > 0$ et on cherche A_ϵ on ait $|a^x| < \epsilon$. Supposons que l'on connaisse A_ϵ et on cherche alors à majorer $|a^x|$ par une quantité qui dépend de A_ϵ. Pour tout $x > A_\epsilon$, on a

$$|a^x| = e^{x\ln a} < e^{A_\epsilon \ln a}$$

Si l'on choisit A_ϵ tel que $\epsilon = e^{A_\epsilon \ln a}$, on aura

$$x > A_\epsilon \Longrightarrow |a^x| < \epsilon$$

Or

$$\epsilon = e^{A_\epsilon \ln a} \Longleftrightarrow A_\epsilon = \frac{\ln \epsilon}{\ln a}$$

Nous avons montré que $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon = \frac{\ln\epsilon}{\ln a}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x > A_\epsilon \Longrightarrow |a^x| < \epsilon$. Ceci montre que $\lim_{x\longmapsto+\infty} a^x = 0$.

2)Pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0$, il suffit de montre que $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq A_\epsilon \Longrightarrow |(\sqrt{x^2-1} - x) - x| < \epsilon$. On se fixe $\epsilon > 0$ et on cherche A_ϵ tel que $x > A_\epsilon$, on ait $|(\sqrt{x^2-1} - x) - x| < \epsilon$. Supposons que l'on connaisse A_ϵ et on cherche alors à majorer $|(\sqrt{x^2-1} - x) - x|$ par une quantité qui dépend de A_ϵ. pour tout $x > A_\epsilon > 1$, on a

$$|(\sqrt{x^2-1} - x) - x| = x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} < \frac{1}{A_\epsilon + \sqrt{A_\epsilon - 1}}$$

Si l'on choisit A_ϵ tel que $\epsilon = \dfrac{1}{A_\epsilon + \sqrt{A_\epsilon - 1}}$, on aura

$$x > A_\epsilon \Longrightarrow |(\sqrt{x^2-1} - x) - x| < \epsilon$$

Or

$$\epsilon = \frac{1}{A_\epsilon + \sqrt{A_\epsilon - 1}} \Longleftrightarrow A_\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{\epsilon})$$

Nous avons montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}) > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x > A_\epsilon \Longrightarrow |(\sqrt{x^2-1} - x) - x| < \epsilon$.
Ceci montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0$.
3) Pour montrer que $\lim\limits_{x \to 1}(2x+2) = 4$, il suffit de montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \epsilon$.
Soit $\epsilon > 0$, exist-il $alpha_\epsilon > 0$ tel que $|x-1| < alpha_\epsilon$, ont ait $|2x+2-4| < \epsilon$.
Soit $\epsilon > 0$, on a

$$|2x+2-4| < \epsilon \Longrightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc il suffit de prendre $\alpha_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{2}$. Nous avons montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$ tel que
$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha_\epsilon \Longrightarrow |2x+2-4| < \epsilon$.
Ceci montre que $\lim\limits_{x \longmapsto 1}(2x+2) = 4$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes

$a)$ $\lim\limits_{x \longmapsto 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ $\qquad$ $b)$ $\lim\limits_{x \longmapsto 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$

$c)$ $\lim\limits_{x \longmapsto 0^+} \dfrac{x^x - 1}{x}$ $\qquad$ $d)$ $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} [\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln x]$

$e)$ $\lim\limits_{x \longmapsto 0} [\ln(x^2+1)\sin(\dfrac{1}{x^2+1})]$ $\qquad$ $f)$ $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \dfrac{E(\ln x)}{x}$

Solution

$$a) \quad \lim_{x \longmapsto 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$b) \quad \lim_{x \longmapsto 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{2\dfrac{\sin 2x}{2x}}{3\dfrac{\tan 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$$c) \quad \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \ln x = -\infty$$

car $\lim_{x\longmapsto 0^+} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim_{y\longmapsto 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$

$d)$ $$\lim_{x\longmapsto +\infty}[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln x] = \lim_{x\longmapsto +\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\longmapsto +\infty} \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}\right) = 0$$

e) On utilise le théorème d'encadrement. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{1+x^2}) \leq 1$$

d'ou

$$-\ln(1+x^2) \leq \ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2}) \leq \ln(1+x^2)$$

Comme $\lim_{x\longmapsto 0} \ln(1+x^2) = 0$, alors d'après le théorème encadrement, on a

$$\lim_{x\longmapsto 0}[\ln(1+x^2)\sin(\frac{1}{1+x^2}] = 0$$

f)Par définition de la partie entière, $E(\ln x)$ est l'unique entier tel que

$$E(\ln x) \leq \ln x < E(\ln x) + 1$$

Pour x assez grand ($x > e$, ce qui équivaut à $\ln x > 1$ et donc $E(\ln x) > 0$, on a

$$0 < E(\ln x) \leq \ln x$$

En divisant cette inégalité par $x > 0$, on obtient

$$0 < \frac{E(\ln x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x}$$

Comme $\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\ln x}{x} = 0$

On a $\lim_{x\longmapsto +\infty} \frac{E(\ln x)}{x} = 0.$

Exercice 3

1)Montrer que la limite suivante n'existe pas

$$\lim_{x\longmapsto 0} \cos(\frac{1}{x})$$

2)Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\longmapsto 0} x^5 \cos(\frac{1}{x})$$

S o l u t i o n

1) Pour montrer que $\lim\limits_{x\longmapsto 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ n'existe pas, il suffit de trouver deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ qui tendrent vers 0 et que la $\lim\limits_{x\longmapsto +\infty} \cos(\dfrac{1}{x_n}) \neq \lim\limits_{x\longmapsto +\infty} \cos(\dfrac{1}{y_n})$.
Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ les suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$.
On a $\lim\limits_{x\longmapsto +\infty} x_n = \lim\limits_{x\longmapsto +\infty} y_n = 0$
Par ailleurs $\lim\limits_{n\longmapsto +\infty} \cos(\dfrac{1}{x_n}) = 1$ et $\lim\limits_{n\longmapsto +\infty} \cos(\dfrac{1}{y_n}) = -1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\longmapsto 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ n'existe pas.
2) Comme $\lim\limits_{x\longmapsto 0} x^3 = 0$ et $|\cos(\frac{1}{x})| \leq 1$, alors $\lim\limits_{x\longmapsto 0} x^3 \cos(\dfrac{1}{x}) = 0$ (produit de fonction bornée et fonction tend vers 0).

Exercice 4

Détermine le domaine de définition des fonctions suivntes

$$1)f(x) = \sqrt{3x - x^2} \qquad 2)f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$3)f(x) = \sqrt{\frac{5+x}{2x-1}} \qquad 4)f(x) = \ln(x^2 - 9x + 20)$$

$$5)f(x) = \ln(1 - |x|)$$

S o l u t i o n

1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3x - x^2} \\ D_f &= \{x \in \mathbb{R}/3x - x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x(3 - x) \geq 0\} \\ &= [0, 3] \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \\ D_f &= \{x\in\mathbb{R}/-x\geq 0, 4-x^2>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/x\leq 0, (2-x)(2+x)>0\} \\ &=]-2,0] \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{5+x}{2x-1}} \\ D_f &= \{x\in\mathbb{R}/\frac{5+x}{2x-1}\geq 0, 2x-1\neq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/(2x-1)(x+5)\geq 0, x\neq\frac{1}{2}\} \\ &=]-\infty,-5]\cup]\frac{1}{2},+\infty[\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2-9x+20) \\ D_f &= \{x\in\mathbb{R}/x^2-9x+20>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/(x-4)(x-5)>0\} \\ &=]-\infty,4[\cup]5,+\infty[\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)=\ln(1-|x|) \\ D_f &= \{x\in\mathbb{R}/1-|x|>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/|x|<1\} \\ &=]-1,1[\end{aligned}$$

Exercice 5

Étudier la partie des fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$
4. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

Solution

Avant de discuter la parité d'une fonction, il faut tout d'abord vérifier que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3} = \sqrt{x^2 + 3} = f(x)$$

Donc f est paire

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3}$
f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^3} = \frac{-\cos x}{x^3} = -f(x)$$

Ce qui prouver que la fonction f est impaire.

3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$
f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{-x}{1 + |-x|} = -\frac{x}{1 + |x|} = -f(x)$$

Ce qui prouve que la fonction f est impaire.

4) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = (-1)^n x^n$$

Donc si n est paire, alors f est paire et si n impaire, alors f est impaire.

Exercice 6

Soient $f(x) = \sqrt{x^2+1}, g(x) = \ln(x+f(x)), h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

1. Montrer que $f(x) + x > 0$, pour tout réel x. En déduire le domaine de définition de la fonction h
2. Calculer $g(x) + g(-x)$, pour tout réel$x$
3. En déduire que g est impaire et que h est paire

S o l u t i o n

1) Pour tout $x \geq 0$, on a

$$f(x) + x = \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

Pour tout $x < 0$, on a

$$f(x) + x = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} > 0$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) + x > 0$$

Comme $f(x) + x > 0$, alors $D_h = \mathbb{R}^*$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \ln(x + f(x)) + \ln(-x + f(-x)) \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) + g(-x) = 0,$$

alors g est impaire et $h$est paire.

Exercice 7

Etudier la continuité des fonctions suivantes a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & si \quad x \geq 1 \\ \cos(x-1) & si \quad x < 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

S o l u t i o n

1) les fonctions $x \longmapsto 3x^2 - 1$ et $x \longmapsto \cos(x-1)$ étant continues pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est continue pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Etudions la continuité de f au point 1.

On a

$$\lim_{x \longmapsto 1^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1^+} 3x^2 - 1 = 2$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 1^-} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1^-} \cos(x-1) = 1$$

Comme

$$\lim_{x \longmapsto 1^+} f(x) \neq \lim_{x \longmapsto 1^-} f(x)$$

alors f n'est pas continue n 1.

2) Les fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ étant continues pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors f est continues sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de f en 0.

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0) \quad si \quad n \neq 0$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0} \sin \frac{1}{x} \quad n'existe \quad pas \quad si \quad n = 0$$

Alors

Si $n \neq 0$, f est continues sur $\mathbb{R}$

Si $n = 0$, f est continues sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des pointes ou f soit continue.

Solution

la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$, il reste à étudier la continuité en 0.

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} (x+1) = 1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^-} (x-1) = -1$$

Par conséquent

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) \neq \lim_{x \longmapsto 0^-} f(x)$$

ce qui montre que f n'est pas continu en 0, alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 9

Soit

$$\begin{array}{rccl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - [x] \end{array}$$

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$

Solution

Théorème

Supposons que $\lim\limits_{x \longmapsto x_0} f(x) = \alpha$ existe et unique. Alors pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n \longmapsto +\infty} x_n = x_0$, on a

$$\lim_{n \longmapsto +\infty} f(x_n) = \alpha$$

Soit $x_0 \in \mathbb{Z}$, alors $f(x_0) = x_0 - [x_0] = 0$. Supposons que $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$, alors $[x_n] = x_0 - 1$.
On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \longmapsto +\infty} f(x_n) &= \lim_{n \longmapsto +\infty} (x_n - [x_n]) \\ &= \lim_{n \longmapsto +\infty} (x_0 - \frac{1}{n} - x_0 + 1) \\ &= 1 \neq f(x_0) \end{aligned}$$

Donc f est discontinue en x_0, et comme x_0 quelconque, alors f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - xE(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| < x$
2. Etudier la continuité de f en 0
3. etudier la continuité de f en $x_0 > 0$

Solution

1) Pour tout réel X, on a

$$E(X) \leq X < E(X) + 1$$

Donc

$$0 \leq X - E(X) < 1$$

En particulier, pour $x \in \mathbb{R}^*$ et on effectuant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, il vient que

$$0 \leq \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x}) < 1$$

En multipliant par $|x|$, il vient ensuite que

$$0 \leq |x|(\frac{1}{x} - E(\frac{1}{X})) < |x|$$

Comme

$$\frac{1}{x} - E(\frac{1}{X}) > 0$$

On obtient

$$0 \leq |1 - xE(\frac{1}{x})| < |x|$$

, d'ou

$$0 \leq |f(x)| < |x|$$

2)D'après la question précédente on a

$$0 \leq |f(x)| < |x|$$

Par passage à la limite, on obtient que

$$\lim_{x \longmapsto 0} |f(x)| = 0$$

Comme $\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = f(0) = 0$, alors $f$est continue en 0

3)Soit $x \in]1, +\infty[$, alors $0 < \frac{1}{x} < 1$, d'ou $E(\frac{1}{x}) = 0$. Finalement $f(x) = 1 - xE(\frac{1}{x}) = 1$.

La fonction f est donc constante , donc elle est continue sur $]1, +\infty[$.

De ce résultat ,on déduit par ailleurs que

$$\lim_{x \longmapsto 1^+} f(x) = 1$$

Or

$$f(1) = 1 - 1E(1) = 0$$

comme

$$\lim_{x \longmapsto 1^+} f(x) \neq f(1)$$

alors la fonction f n'est pas continue en 1.

Soit $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ou $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$. d'ou $E(\frac{1}{x}) = n\_$ Finalement

$$f(x) = 1 - xE(\frac{1}{x}) = 1 - nx$$

La fonction f est donc elle est continue sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et que $\lim_{x \longmapsto \frac{1}{n}^-} f(x) = 0$

Pour $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[, n \geq 2$, alors $n - 1 \leq \frac{1}{x} < n$ D'ou $E(\frac{1}{x}) = n - 1$ et $f(x) = 1 - x(n-1)$

Comme

$$\lim_{x \longmapsto \frac{1}{n}^+} f(x) = \frac{1}{n} \neq f(\frac{1}{n})$$

alors la fonction f n'est pas continue en $\frac{1}{n}$.

Conclusion

f est continue sur $]0, +\infty[-D$ ou $D = \{x_0 = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 11

a) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$$

est continue en 0

b) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point 1

Solution

a) Ecrivons f sans valeurs absolue

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & si \quad x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\\ \\ \dfrac{x - x^2}{x - 1} & si \quad x \in]0, 1[\end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \longmapsto 0^+} x = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{x - x^2}{x - 1} = \lim_{x \longmapsto 0^+} x = 0$$

Alors f est continue en 0

b) f admet un prolongement par continuité au point 1 si $\lim_{x \longmapsto 1} f(x)$ existe et finie

On a

$$\lim_{x \longmapsto 1^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \longmapsto 1^+} x = 1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 1^-} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \longmapsto 1^-} -x = -1$$

Comme $\lim f(x)$ n'existe pas, alors f n'admet pas prolongement par continuité au point 1

Exercice 12

1) Etudier le prolongement par continuité de la fonction$f$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$$

2) Déterminer un prolongement par continuité de la fonction f au point x_0 dans chacun des cas suivantes

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+10}-4}{x-6}, x_0 = 6$
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}, x_0 = 1$
- $f(x) = x\cos(\frac{1}{x}), x_0 = 1$

Solution

1) Ecrivons f sans valeurs absolue

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - x} & si \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{x}{x^2 + x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{x}{x^2 - x} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$$

Comme $\lim_{x \longmapsto 0} f(x)$ n'existe pas, alors f n'admet pas un prolongement par continuité au point 0.

2)

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+10}-4}{x-6}, \quad x_0 = 6$

$$\lim_{x \longmapsto 6} f(x) = \lim_{x \longmapsto 6} \frac{\sqrt{x+10}-4}{x-6} = \lim_{x \longmapsto 6} \frac{1}{\sqrt{x+10}+4} = \frac{1}{8}$$

Alors f admet un prolongement par continuité et que ce prolongement $\tilde{f}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+10}-4}{x-6} & si \quad x \neq 6 \\ \\ \frac{1}{8} & si \quad x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}, \quad x_0 = 1$

$$\lim_{x \longmapsto 1} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

alors f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & si \quad x \neq 1 \\ \frac{2}{3} & si \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$$

- $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0} x \cos \frac{1}{x} = 0, (\lim_{x \longmapsto 0} x = 0, |\cos \frac{1}{x}| \leq 1$$

alors f admet un prolongement par continuité défini par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 13

1) Soit

$$\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x \end{array}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

2) Soit

$$\begin{array}{rcl} f : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \longmapsto & \longmapsto & f(x) = e^x \sin x - \cos x \end{array}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

3)Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = x^5 - 5x + 1$$

s'annule 3 fois sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $f : [0,1] \longrightarrow]0,1[$ une fonction continue

Montrer que f admet un point fixe dans $]0,1[$

Solution

1) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

De plus f est continue sur $]0,+\infty[$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f(c) = 0$.

2) $f(x) = e^x \sin x + \cos x$

On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$. De pus f est continue sur $[0,\pi]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]0,\pi[$ tel que $f(c) = 0$.

3) $f(x) = x^5 - 5x + 1$

La fonction f est un polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

D'après le tableau de variations de f, on en déduit que f s'annule une fois sur $]-\infty,-1[$, une fois sur $]-1,1[$ et une fois sur $]1,+\infty[$.

4) Considérons la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - x$$

La fonction g est continue sur $[0,1]$. de plus $g(0) = f(0) > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$
Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$. c'est a dire $f(c) = c$. Donc f admet un point fixe dans $]0,1[$

Exercice 14

Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n, n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f(x_n) = 0$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$
3. Montrer que la suite (x_n) est monotone
4. En déduire que la suite (x_n) est convergente

S o l u t i o n

1) pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, on a

$$f_n'(x) = -\frac{1}{2} - nx^{n-1} < 0, f_n(0) = 1, f_n(1) = -\frac{1}{2}$$

Donc f_n est une bijection décroissante de $[0,1]$ sur $[\frac{-1}{2}, 1]$. Comme $0 \in]\frac{-1}{2}, 1[$, il existe alors un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$
2) On a

$$f_n(x_n)) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^n$$

alors

$$x_n^n = 1 - \frac{x_n}{2}$$

$$f_{n+1}(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^{n+1} = x_n^n - x_n^{n+1} = x_n^n(1 - x_n) > 0, 0 < x_n < 1$$

3) f_{n+1} est une bijection décroissante donc f_{n+1} est aussi une bijection décroissante.
On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) > 0 &\implies f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\implies f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_n)) < f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(x_{n+1})) \\ &\implies x_n < x_{n+1} \end{aligned}$$

D'ou la suite (x_n) est croissante .
4) La suite (x_n) croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.

Exercice 15

Soient a et b des nombres réels et f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$.
On suppose que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$
2. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$. On suppose maintenant ue pour tout $x, y \in [a,b], x \neq y$, on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
3. Montrer qu'il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$. on désigne par f l'application de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \ln(x^2 + 2)$$
et on pose $M = \max_{x\in[0,2]} |f'(x)|$
4. Montrer que $M < 1$
5. En déduire, qui'il existe un unique $c \in]0,2[$ tel que $f(c) = c$
6. Montrer que l'application f est injective

S o l u t i o n

1) Soit $x_0 \in [a,b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], |x - x_0| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Cela montre f est continue en x_0 et comme x_0 quelconque de $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$
2) On pose $g(x) = f(x) - x$

g est une application continue, de plus $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = c$. ce qui équivaut à $f(c) = c$.

3) Comme

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

alors on peut appliquer le résultat de 1). Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$. Il reste à montrer l'unicité de c

Supposons qu'il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ avec $c_1 \neq c_2$ tels que

$$f(c_1) = c_1, f(c_2) = c_2$$

Alors

$$|f(c_1) - f(c_2) < |c_1 - c_2|$$

ce qui entraîne que

$$|c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|$$

Donc cette dernière inégalité est fausse, par conséquent il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$._

4) L'étude de la fonction f' sur l'intervalle $[0, 2]$ montre que f' est croissante sur $[0, \sqrt{2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{2}, 2]$ et que $f'(0) = 0, f'(2) = \frac{2}{3}$ et $f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $M = \max_{x \in [0,2]} |f'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

5) On pose

$$g(x) = f(x) - x$$

La fonction g est continue, de plus $g(0) = f(0) = \ln 2 > 0$ et $g(2) = f(2) - 2 = \ln 6 - 2 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]0, 2[$ tel que $g(c) = 0$,

Ce qui équivaut à $f(c) = c$. Comme

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-(x-1)^2 - 1}{x^2 + 2} < 0$$

L'application g est strictement décroissante, alors c'est unique.

6) L'application f est croissante sur $[0, 2]$, donc elle est injective.

Exercice 16

En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée des fonctions suivantes

$$1) f(x) = 5x^2 - 2x + 7 \qquad 2) f(x) = \sin x$$
$$3) f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad 4) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

S o l u t i o n

Par définition

$$f'(x_0) = \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

en un point x_0, on a 1)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \longmapsto 0} \frac{5h^2 + 10x_0 h - 2h}{h} \\ &= 10x_0 - 2 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 10x - 2$

2)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \longmapsto 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \longmapsto 0} \cos(\frac{2x_0 + h}{2}) \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant que

$$f'(x_0) = \cos x_0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x$

3)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x_0-1)^2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longmapsto x_0} \frac{-x - x_0 + 2}{(x-1)^2(x_0-1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x_0-1)^3} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$

4)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\longmapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\longmapsto x_0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\longmapsto x_0} \frac{x+x_0}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 17

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & 2) f(x) = \ln(\sqrt{x+1}) \\ 3) f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} & 4) f(x) = \dfrac{1+\tan x}{1+x^2} \\ 5) f(x) = e^{\sin^2(x^3)} & 6) f(x) = \cos(x^2+2x+5) \end{array}$$

Solution

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

2) $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$

$\forall x \in]-1,+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2x+2}$$

3) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$

$\forall x \in [0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

4) $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{1+x^2}$

Pour tout $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, on a

$$f'(x) = \frac{(1+\tan^2 x)(1+x^2) - 2x((1+\tan x)}{(1+x^2)^4}$$

5) $f(x) = e^{\sin^2(x^3)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 6x^2 \cos x^3 \sin x^3 e^{\sin^2(x^3)}$$

6) $f(x) = \cos(x^2 + 3x + 5)\_$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -(2x+3)\sin(x^2+3x+5)$$

Exercice 18

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si \quad \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0
3. Montrer que f' n'est pas continue en 0

Solution

1)Pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$0 \leq x^2 |\sin \frac{1}{x}| \leq x^2$$

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit

$$\lim_{x \longmapsto 0} |f(x)| = 0$$

Comme

$$\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = f(0) = 0$$

alors f est continue en 0

2)Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$$

Or

$$\lim_{x \longmapsto 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

3)Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Nous avons que $\lim_{x \longmapsto 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$. Mais l quantité $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0

Donc f' n'a pas de limite en 0, Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & si \quad \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$
3. La fonction f est elle de classe C^1 ? de classe C^2 ?

Solution

1)Pour tout $x \neq 0$, les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto \ln |x|$ étant continues donc f est continue pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0} x^2 \ln |x| = 0 = f(0)$$

Ainsi f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2)Pour tout $x \neq 0$, les fonctions $x, x^2, \ln |x|$ étant dérivables donc f est dérivable pour tout x de $\mathbb{R}^*$

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0} x \ln |x| = 0$$

Ainsi f est dérivable en point 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x & si \quad x > 0 \\ 2x \ln(-x) - x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \ln |x| + |x| & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3)Pour $x \neq 0$, f' est continue(produit et somme de fonctions continues)

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0} f'(x) = \lim_{x \longmapsto 0} (2x \ln|x| + |x|) = 0 = f'(0)$$

Ainsi f' est continue en 0

Donc f' est continue sur $\mathbb{R}$, par suite f de classe C^1 dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, on a

$$f''(0) = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0} (2\ln|x| + \frac{|x|}{x}) = -\infty$$

Ce qui implique que f' n'est pas dérivable en 0. Donc f n'est pas de classe C^2 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20

Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f dans chacun des cas suivants

1)$f(x) = x\|x\|$	2)$f(x) = \|x\| \sin x$
3)$f(x) = \|x\| \cos x$	4)$f(x) = x^{\frac{3}{5}}$
5)$f(x) = \ln(1 + \|x\|)$	6)$f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ *si* $x \neq 0, f(0) = 0$

S o l u t i o n

1)$f(x) = x|x|$_ On a

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \longmapsto 0} |x| = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

2)$f(x) = |x| \sin x$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{|x| \sin x}{x} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

3))$f(x) = |x| \cos x$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{x \cos x}{x} = \lim_{x \longmapsto 0} \cos x = 1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{-x \cos x}{x} = - \lim_{x \longmapsto 0} \cos x = -1$$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, alors f n'est pas dérivable en 0.

4)$f(x) = x^{\frac{3}{5}}$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim_{x \longmapsto 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0

5)$f(x) = \ln(1+|x|)$

On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+|x|)}{x}$$

pour $x < 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1 = f'_g(0)$$

pour $x > 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f'_d(0)$$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, alors f n'est pas dérivable en 0.

6)$f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$

Le taux d'accroissement en 0 est

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\lim_{x \longmapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et que $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite quand x tend vers 0 . Donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x + \frac{x \ln x}{1-x} & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$

S o l u t i o n

1)Pour tout $x \in]0,1[$, la fonction$f$ est continue comme somme, produit et quotient de fonctions continues

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} (x + \frac{x \ln x}{1-x} = 0 = f(0)$$

Alors f est continue à droite en 0

En $x = 1$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 1^-} f(x) = \lim_{x \longmapsto 1^-} (x + \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \longmapsto 1^-} (x - 1 - \ln x = 0$$

Alors f est continue à gauche en 1

Finalement f est continue sur $[0, 1]$

2)f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ de plus $f(0) = f(1)$, alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 22

Soient a, b deux réels. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ e^{bx} - x & si \quad x > .0 \end{cases}$$

1. A l'aide de la règle de l'Hospital déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

2. Déterminer a et b pour f soit continue sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer a et b pour f soit dérivable sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que f est de classe $C^1(\mathbb{R})$

S o l u t i o n

1)Les conditions de l'application de la règle de l'Hospital étant vérifiées, alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \longmapsto 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} &= \lim_{x \longmapsto 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^2)'} \\ &= -\lim_{x \longmapsto 0} \frac{\sin x}{2} = 0 \end{aligned}$$

2)La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ il reste a etudier la continuité et la dérivabilité en 0

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} (e^{bx} - x) = 1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{\sin ax}{x} = a$$

f est continue en 0 si et seulement si

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \longmapsto 0^-} f(x) = f(0)$$

C est-à-dire $a = 1$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$ et $b \in \mathbb{R}$

3)f est dérivable en 0, alors f est continue en 0, donc $a = 1$

On a

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{e^{bx} - x - 1}{x} = b - 1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = b - 1 = 0$$

f est dérivable en 0 si et seulement si $f'_g(0) = f'_d(0)$ C'est-à-dire $b = 1$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 1$

4)D'après précédent, on a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ e^x - x & si \quad x > .0 \end{cases}$$

Alors

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ e^x - 1 & si \quad x > . = 0 \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$, f' est continue

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} f'(x) = \lim_{x \longmapsto 0^+} f'(x) = f'(0)$$

i.e f' est continue. Donc $f \in C^1(\mathbb{R})$

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

1. Montrer que la fonction f est 2π périodique
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'(\frac{\pi}{2})$

Solution

1) On a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

Pour $y = x + 2\pi$, on obtient

$$|f(x) - f(x+2\pi)| \leq |\sin x - \sin(x+2\pi)| = 0$$

Ce qui équivaut à ce que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+2\pi)$, alors f est 2π périodique

2)Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

Comme la fonction sin est continue, alors on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| < \epsilon$$

Cela entraîne que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin x - \sin x_0| < \epsilon$$

Cela montre que la fonction f est continue en x_0, ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

2^{eme} **Méthode**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin x - \sin x_0|$$

Comme la fonction sin est continue, on a

$$0 \leq \lim_{x \longmapsto x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x \longmapsto x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{x \longmapsto x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{x \longmapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f est continue en x_0 et comme x_0 quelconque, alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3)D'après l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

On en déduit que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(\frac{\pi}{2})| \leq |\sin x - \sin \frac{\pi}{2}|$$

En divisons par $|x - \frac{\pi}{2}|$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\}, |\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}| \leq |\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}|$$

Donc

$$0 \leq \lim_{x \longmapsto \frac{\pi}{2}} |\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}| \leq \lim_{x \longmapsto \frac{\pi}{2}} |\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}|$$

On en déduit que

$$\lim_{x \longmapsto \frac{\pi}{2}} |\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}| = 0$$

Ceci montre que $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Exercice 24

1. Montrer que pour tout x, y réels on a

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Solution

1)La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \longmapsto \sin t$ sur l'intervalle $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cos c$$

On prend la valeur absolue

$$|\sin x - \sin y| = |(x - y)||\cos c|$$

Comme

$$|\cos c| \leq 1$$

On a

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

2)D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur l'intervalle $[0, x]$, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

Come $0 < c < x$, alors $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$. On en déduit que

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Exercice 25

En utilisant le théorème des accroissement finis, Calcule la limite suivante

$$\lim_{x\longmapsto+\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}})$$

Solution

Considérons la fonction f telle que $f(t)=te^{\frac{1}{t}}$. La fonction f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, car obtenue par composition et produit de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$. Soit $x>0$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur l'intervalle $[x,x+1]$, il existe $c(x)\in]x,x+1[$ tel que

$$f(x+1)-f(x)=f'(c(x))$$

C'est-à-dire

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}=(1-\frac{1}{c(x)})e^{\frac{1}{c(x)}}$$

On cherche maintenant à calculer $\lim_{x\longmapsto+\infty}(1-\frac{1}{c(x)})e^{\frac{1}{c(x)}}$

Pour $x>0$, on a

$$x<c(x)<x+1$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient que

$$\lim_{x\longmapsto+\infty}c(x)=+\infty$$

D'ou

$$\lim_{x\longmapsto+\infty}(1-\frac{1}{c(x)})e^{\frac{1}{c(x)}}=1$$

On en déduit que

$$\lim_{x\longmapsto+\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}})=1$$

Exercice 26

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0,2]$ à la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - \sqrt{(x-1)^2}$$

2. Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[-1,1]$ à la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Si la réponse est positive, déterminer alors la constante $c \in]-1,1[$ qui vérifier

$$g(1) - g(-1) = 2g'(c)$$

S o l u t i o n

1)La fonction f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[-\{1\}$, il reste à étudier la dérivabilité en 1. On a

$$\lim_{x \longmapsto 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x-1} = \lim_{x \longmapsto 1} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \infty$$

Comme f n'est pas dérivable en 1, alors f n'est pas dérivable sur $]0,2[$

Comme la condition de la dérivabilité sur $]0,2[$ n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle sur $]0,2[$ à la fonction f

2)Pour tout $x \neq 0$, les fonctions $x \longmapsto x^2 - x + 1$ et $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ étant continue pour tout $x \in [-1,1] - \{0\}$

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} g(x) = \lim_{x \longmapsto 0^-} (x^2 + x + 1) = 1 = g(0)$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

Ainsi g est continue en 0, donc elle est continue sur $[-1,1]$

Pour tout $x \neq 0$, les fonctions $x \longmapsto x^2 - x + 1$ et $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ étant dérivables, donc g est dérivable pour tout $x \in [-1,1] - \{0\}$

En $x = 0$, on a

$$\lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^-} (x-1) = -1$$

et

$$\lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$$

Ainsi g est dérivable en 0, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$g'(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq 0 \\ -1 & si \quad x = 0 \\ \frac{-1}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, alors on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[-1,1]$, donc il existe $c \in]-1,1[$ tel que

$$g(1) - g(-1) = 2g'(c)$$

Maintenant on détermine les valeurs possibles de la constante c

On a

$$g(1) = \frac{1}{2}, g(-1) = 3$$

par conséquent

$$g(1) - g(-1) = 2g'(c) \Longleftrightarrow g'(c) = \frac{-5}{4}$$

Supposons que $0 \leq c < 1$, alors

$$g'(c) = \frac{-5}{4} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1+c)^2} = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow c = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \notin [0,1[$$

Exercice 27

Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f dans chacun des cas suivants

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin x & 2) f(x) = \cos x \\ 3) f(x) = x^2 \sin 5x & 4) f(x) = x^2 e^x \\ 5) f(x) = e^x \cos x & 6) f(x) = \frac{1}{1-x} \\ 7) f(x) = \frac{1}{1+x} & 8) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \\ 9) f(x) = \frac{x}{1-x^2} & 10) f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \end{array}$$

S o l u t i o n

$1) f(x) = \sin x$

on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f''(x) &= -\sin x = \sin(x + \pi) \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite, en raisonnant par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{N}$$

2)$f(x) = \cos x$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ f''(x) &= -\cos x = \cos(x + \pi) \\ f'''(x) &= -\sin x = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite, en raisonnant par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{N}$$

3)$f(x) = x^2 \sin 5x$

En utilisant la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (x^2)^{(k)} (\sin 5x)^{(n-k)} \\ &= C_n^0 x^2 (\sin 5x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (\sin 5x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (\sin 5x)^{(n-2)} + 0 \\ &= 5^n x^2 \sin(5x + \frac{n\pi}{2} + 2n5^{n-1} x \sin(5x + \frac{(n-1)\pi}{2}) \\ &+ n(n-1)5^{n-2} x \sin(5x + \frac{(n-2)\pi}{2}) \end{aligned}$$

4)$f(x) = x^2 e^x$

On a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} \\ &= e^x [C_n^0 x^2 + C_n^1 (x^2)' + C_n^2 (x^2)'' + C_n^3 (x^2)''' + ... + C_n^n (x^2)^{(n)}] \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x \end{aligned}$$

5)$f(x) = e^x \cos x$

On a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)} (\sin x)^{(k)} \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin x)^{(k)} \\ &= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x + k\frac{\pi}{2}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

6)$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)^{-2} = 1!(1-x)^{-2} \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} = 2!(1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= 6(1-x)^{-4} = 3!(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

On vérifie par récurrence que

$$f^{(n)} = n!(1-x)^{-n-1} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

7)$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2} = (-1)1!(1-x)^{-2} \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} = (-1)^2 2!(1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= -6(1-x)^{-4} = (-1)^3 3!(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

on vérifie par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

8)$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

On a

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$$

Donc

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9)$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

On a

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x})$$

Donc

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})$$

10)$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
\vdots &\quad \vdots \\
f^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)...(n-k+1)x^{n-k}
\end{aligned}$$

Pour $n = k$, on a

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \times ... \times 2 \times 1 = n!$$

5 Fonctions Elémentaires

5.1 Fonction Exponentielle

Définition 1

La fonction exponentielle est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout réel, $f'(x) = f(x)$.
On la note

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ f(x) = \exp(x) = e^x \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'image de 1 par cette fonction est notée e, vaut approximativement $2,718$ et s'appelle la base de la fonction exponentielle.

Propriétés 4.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x.e^y$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{nx} = (e^x)^n$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^x)' = e^x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\ \ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0\ \ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} xe^x = 0\ \ et\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+1}{x} = 0$

Théorème 1

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur D. La fonction $\exp u$ est alors dérivable sur D et on a $(\exp u)' = u' \exp u$

5.2 *Fonction Logarithme Népérien*

Définition 1

Comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elle est une bijection et admet une fonction réciproque appelée logarithme népérien, notée

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \ln x \end{array} \quad (5.2)$$

Propriétés 5. *Soient x, y deux réels strictements positifs et p un réel, alors*

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$
- $\ln x^p = p \ln x$
- $\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[, \; e^{\ln x} = x$
- $\ln x = \ln y \Longleftrightarrow x = y$
- $\ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$
- $\ln x < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln x > 0 \Longleftrightarrow x > 1$

Théorème 1

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur D. La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur D et on a $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Représentation graphique

Les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

5.3 Fonction Logarithme de base a

Définition 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle logarithme de base a et on note $\log_a$, l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Propriétés 6. *Soient x, y deux réels strictements positifs et $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, alors*

- $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a x = \log_b a + \log_a x$
- $\log a^x = x$, *pour tout nombre réel* x
- $a^{\log_a x} = x$, *pour tout nombre réel* x, *strictement positif*
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- *Si* $a = e$, *alors* $\log_e = \ln$ *(Logarithme népérien)*
- *Si* $a = 10$, *on obtient* $\log_{10}$ *(Logarithme décimal).*

5.4 Fonction Exponentielle de base a

Définition 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle exponentielle de base a, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ réciproque de l'application $\log_a$.

On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad (y = a^x \Leftrightarrow \log_a y)$

Propriétés 7. *Soient x, $y \in \mathbb{R}$ et $a, \quad b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.*

- $a^x = e^{x \ln a} > 0$
- $a^{x+y} = a^x . a^y$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

- $a^{xy} = (a^x)^y$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = a^x \ln a.$

Représentation graphique de la fonction $\log_a$ et a^x

5.5 *Fonctions Trigonométriques*

Cercle trigonométrique

Définition 1

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$.

Définition de sinus, cosinus

Soient C un cercle trigonométrique et $M \in (C)$ l'image d'un réel θ. Alors

$i)$ L'abscisse de M est appelée cosinus de θ et elle est notée $\cos\theta$

$ii)$ L'ordonnée de M est appelée sinus de θ et elle est notée $\sin\theta$

Propriétés 8. *Pour tout réel x, on a*

- $|\cos x| \leq 1$ *et* $|\sin x| \leq 1$
- $\cos(-x) = cosx$ *et* $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2\pi) = cosx$ *et* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $(\cos x)' = -\sin x$ *et* $(\sin x)' = \cos x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

La fonction Cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, bornée, paire et $2\pi-$ périodique, de dérivée $(\cos x)' = -\sin x$.
La fonction Sinus est définie sur $\mathbb{R}$, bornée, impaire et $2\pi-$ périodique, de dérivée $(\sin x)' = \cos x$.

Valeurs remarquable

Définition de Tangente, Cotangente

Définition 2

Soient A et B deux ensembles définis par $A = \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$i)$ La fonction tangente, notée tan est définie par $\forall \in \mathbb{R} - A$, $\tan x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$ii)$ La fonction cotangente, notée cot est définie par $\forall \in \mathbb{R} - B$, $\cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Propriétés 9. *$\forall x \in \mathbb{R} - A$, on a*

- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(x+\pi) = \tan x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

  $\forall x \in \mathbb{R} - B$, on a

- $\cot(-x) = -\cot x$
- $\cot(x+\pi) = \cot x$
- $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = 1 - \cot^2 x < 0$

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - A$, bornée, impaire et $\pi-$ périodique, de dérivée $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

La fonction Sinus est définie sur $\mathbb{R} - B$, bornée, impaire et $\pi-$ périodique, de dérivée $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = 1 - \cot^2 x < 0$.

Représentations graphiques

5.6 Formules Trigonométriques

Pour tous réels x, y on a les formules suivantes

Formules de Symétrie

$$
\begin{array}{lll}
\cos(-x) = cosx & \sin(-x) = -\sin x & \tan(-x) = -\tan x \\
\cos(\pi + x) = -cosx & \sin(\pi + x) = -\sin x & \tan(x+\pi) = \tan x \\
\cos(\pi - x) = -cosx & \sin(\pi - x) = \sin x & \tan(x-\pi) = -\tan x \\
\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x & \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x & \tan(\frac{\pi}{2} + x) = \dfrac{-1}{\tan x} \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan x}
\end{array}
$$

Formules d'addition

$$
\begin{array}{ll}
\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y & \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y & \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}
\end{array}
$$

Formules de duplication

En prenant $x = y$ dans les formules d'addition, on obtient

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

La premiére formule et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donnent : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Formules de linéarisation

Les formules d'addition donnent

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y\right]$

Transformation de sommes en produits

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x-y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$

Equations trigonométriques

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + k\pi)\right)^2$, on a

$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + k\pi, \quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5.7 Fonctions Trigonométriques réciproques

Théorème 1

Soit une fonction f dérivable et strictement monotone et continue sur un intervalle, elle réalise une application bijective de cet intervalle sur un autre intervalle.

5.7.1 La fonction Arc sinus

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

est continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} telle que

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arcsin x \end{array}$$

Donc on ala caractérisation suivante $\begin{pmatrix} y = \arcsin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

Proposition 1

- $\sin(\arcsin x) = x$
- $\arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in]-1, 1[$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.7.2 *La fonction Arc cosinus*

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} telle que

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arccos x \end{array}$$

Donc on ala caractérisation suivante $\begin{pmatrix} y = \arccos x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{pmatrix}$

Proposition 2

- $\cos(\arccos x) = x$, pour tout $x \in [-1, 1]$
- $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0, \pi]$
- $\forall x \in]-1, 1[$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.7.3 *La fonction Arc tangente*

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \tan x \end{array}$$

est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} telle que

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arctan x \end{array}$$

Donc on a la caractérisation suivante $\begin{pmatrix} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

Proposition 3

- $\tan(\arctan x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(\tan x) = x$, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.7.4 La fonction Arc cotangente

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = cotanx \end{array}$$

est continue et strictement décroissante de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} telle que

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = arccotanx \end{array}$$

Donc on ala caractérisation suivante $\begin{pmatrix} y = arccotanx \\ -1 \leq x \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cot y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{pmatrix}$

Proposition 4

- $\cot(arccotanx) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $arccotan(\cos x) = x$ pour tout $x \in]0,\pi[$
- $\forall x \in]-1,1[$, $(arccotanx)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5.8 Fonctions Hyperboliques

Définition des fonctions hyperboliques

On définit pour tout réel x les fonctions

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sinus hyperbolique

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ cosinus hyperbolique

$thx = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ tangente hyperbolique et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $\coth x \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ cotangente hyperbolique

Propriétés 10. *Pour tout réel x, on a*

- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
- $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$
- $1 - th^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- $\cosh(-x) = \cosh x$
- $\sinh(-x) = -\sinh x$
- $th(-x) = -thx$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh$
- $(thx)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - th^2 x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(\coth x)' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x < 0$

Formules d'addition

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ $\quad$ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ $\quad$ $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

$th(x+y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thxthy}$ $\quad$ $th(x-y) = \dfrac{thx - thy}{1 - thxthy}$

Formules de duplication

En prenant $x = y$ dans les formules d'addition, on obtient

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$ $\quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, $\quad th2x = \dfrac{2thx}{1+th^2x}$

Formules de produit en somme

Les formules d'addition donnent

$\sinh x \sinh y = \dfrac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$

$\sinh x \cosh y = \dfrac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$

$\cosh x \cosh y = \dfrac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y]$

Transformation de sommes en produits

$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \dfrac{x+y}{2} \cosh \dfrac{x-y}{2}$

$$\sinh x - \sinh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$$
$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$
$$\cosh x - \cosh y = -2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

5.9 Fonctions Hyperbolique réciproques

5.9.1 La fonction Argument sinus hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sinh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} appelée Argument sinus hyperbolique telle que

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arg\sinh x \end{array}$$

Donc on a $\begin{pmatrix} y = \arg\sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sinh y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a

- $\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $(\arg\sinh x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5.9.2 La fonction Arg cosinus Hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \cosh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} appelée Argument cosinus hyperbolique notée

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arg\cosh x \end{array}$$

On a $\begin{pmatrix} y = \arg\cosh x \\ x \geq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cosh y = x \\ y \geq 0 \end{pmatrix}$

$\forall x \geq 1$, on a

- $\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $(\arg\sinh x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

5.9.3 La fonction Arg tangente Hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & f(x) = thx \end{array}$$

est continue et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} appelée Argument cosinus hyperbolique notée

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arg thx \end{array}$$

On a $\begin{pmatrix} y = \arg thx \\ x \in]-1,1[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} thy = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\forall x \in]-1,1[$, on a

- $\arg thx = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$
- $(\arg thx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5.9.4 La fonction Arg cotangente Hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \coth x \end{array}$$

est continue et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} appelée Argument cosinus hyperbolique notée

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-\infty,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arg\coth x \end{array}$$

On a $\begin{pmatrix} y = \arg\coth x \\ x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \coth y = x \\ y \in \mathbb{R}^* \end{pmatrix}$

$\forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, on a

- $\arg\coth x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$
- $(\arg\coth x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

5.10 *Exercices sur les Fonctions Elémentaires*

Exercice 1

Résoudre les équation suivantes

$$\begin{array}{l} a)\cos(2x-\frac{5\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}-x)\\ b)\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{3\pi}{4})\\ c)\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=-1 \end{array}$$

S o l u t i o n

a) Par la constriction de la fonction cosinus, on a

$$\cos\alpha=\cos\beta \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha & \beta+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \alpha & -\beta+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

En utilisant ca avec
$\alpha=2x-\frac{5\pi}{4}$ et $\beta=\frac{\pi}{4}-x$,
on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x-\frac{5\pi}{4} & \frac{\pi}{4}-x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ 2x-\frac{5\pi}{4} & x-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$S=\{(4k+3)\frac{\pi}{6},(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

b) En utilisant que $\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, l'équation initiale devient

$$\cos(2x+\frac{\pi}{3}=\cos(\frac{-\pi}{4}-x)$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+\frac{\pi}{3} & \frac{-\pi}{4}-x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ 2x+\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4}+x+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$S=\{(24k-7)\frac{\pi}{36},(24k+1)\frac{\pi}{12}, k\in\mathbb{Z}\}$$

c) L'équation donnée est équivalente a l'équation

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

Comme $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
alors notre équation devient

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

Ceci revient à dire que

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{3} & \frac{-2\pi}{3} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$S = \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, (6k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 2

Montrer que avec le changement $t = \tan\frac{x}{2}$, on a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

S o l u t i o n

On observe que $t = \tan\frac{x}{2}$ implique que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a
$x = 2\arctan t$, donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(2\arctan t) = 2\cos^2(\arctan t) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\arctan t)} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(2\arctan t) = 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t) = 2\tan(\arctan t)\cos^2(\arctan t) \\ &= \frac{2t}{1+\tan^2(\arctan t)} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

Démontrer les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} a)\arcsin y &< \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad si \quad 0<y<1 \\ b)\arctan y &> \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad si \quad y>0 \end{aligned}$$

Solution

a)D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \longmapsto f(t) = \arcsin t$ sur $[0, y]$, il existe $c \in]0, y[$ tel que

$$\arcsin y = \frac{y}{\sqrt{1-c^2}}$$

Or $c \in]0, c[$, alors $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
Donc

$$\arcsin y < \frac{y}{\sqrt{1-c^2}} \quad si \quad 0<y<1$$

b)Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(y) = \arctan y - \frac{y}{1+y^2}$$

On a $f'(y) = \frac{2y^2}{(1+y^2)^2} > 0$, pour tout $y > 0$. c'est-à-dire

$$\arctan y > \frac{y}{1+y^2}, \forall y > 0$$

Exercice 4

a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$$

Solution

a)Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

On a $f'(x) = 0$, pour tout $x \in]-1, 1[$(car elle est continue aux extrémités)
Pour $x = 0$, on a $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$
b)Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

On a $g'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors g est constante.
Donc $g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. Comme $g(-1) = c_1 = \frac{-\pi}{2}$, alors $f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

Exercice 5

Ecrire sous forme d'expression algébrique les formules suivantes

$a)$ $\cos(\arcsin x)$

$b)$ $\sin(\arccos x)$

$c)$ $\tan(\arccos x)$

$d)$ $\tan(\arcsin x)$

S o l u t i o n

a) on a commence par remarque que

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$$

donc $\cos \arcsin x$ et toujours une quantité positive. Alors

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

b)De manière similaire ,on a

$$0 \leq \arccos x \leq \pi, x \in [-1, 1]$$

donc $\sin \arccos$ est toujours une quantité positive. Alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

c)On a

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin\arccos x}{\cos\arccos x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$$

d)On a

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin\arcsin x}{\cos\arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[$$

Exercice 6

Calculer

$a)$ $\arcsin(\sin\frac{14\pi}{3})$

$b)$ $\arccos(\sin\frac{18\pi}{5})$

$c)$ $\cos(\arcsin frac12)$

Solution

a) On observe que

$$\sin\frac{14\pi}{3} = \sin(\frac{2\pi}{3} + 4\pi) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$$

Comme $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, alors

$$\arcsin(\sin\frac{14\pi}{3}) = \arcsin(\sin\frac{\pi}{3})$$

b) Comme $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\arccos(\sin\frac{18\pi}{5}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin\frac{-2\pi}{5}) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$$

c) On sait que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1, 1]$$

donc

$$\cos\arcsin\frac{1}{5} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Exercice 7

Vérifier qu'on a

$$x = \begin{cases} \arctan(\tan x) & si \quad x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \arctan(\tan x) & si \quad x \in [-\pi, \frac{-\pi}{2}[\\ \arctan(\tan x) + \pi & si \quad x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Solution

Soit $x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors sur cet interval la fonction tangente est inversible, son fonction réciproque étant donnée par arctan, donc on a

$$\arctan \tan x = x$$

Si $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, alors il existe $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ tel que $x = y - \pi$ et donc

$$\arctan \tan x = \arctan \tan(y - \pi) = \arctan \tan y = y$$

d'ou on obtient

$$x + \pi = \arctan \tan x$$

Le cas $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ se démontre de manière similaire

Exercice 8

Calculer

$a)$ $\cos(\arctan x)$

$b)$ $\sin(\arctan x)$

S o l u t i o n

a) pour tout réel x, on a

$$\frac{-\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

donc $\cos \arctan x$ est toujours positif. Alors

$$\cos(\arctan x) = \sqrt{\cos^2(\arctan x)} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

b)On a

$$\sin \arctan x \geq 0 \quad si \quad x \geq 0$$

et

$$\sin \arctan x < 0 \quad si \quad x < 0$$

Donc on aura

$$\sin(\arctan x) = \sqrt{\sin^2(\arctan x)} = \sqrt{1 - \cos^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad si \quad x \geq 0$$

et

$$-\sin(\arctan x) = \sqrt{\sin^2(\arctan x)} = \sqrt{1-\cos^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad si \quad x<0$$

Finalement,

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 9

Vérifier qu'on a

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arctan x + \arctan y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, xy \leq 1$$

Solution

Supposons que $xy \leq 0$, alors $x \geq 0$ et $y \leq 0$ ou vice versa, on a $0 \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2} \leq \arctan y \leq 0$ ou Vice versa, donc on obtient

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arctan x + \arctan y \leq \frac{\pi}{2}$$

Supposons maintenant que $0 \leq xy < 1$ et $y \geq 0$, alors en utilisant que la fonction $y \longmapsto \arctan x + \arctan y$ est croissante, on obtient

$$0 \leq \arctan x + \arctan y \leq \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Par contre si $0 \leq xy \leq 1$ et $y \leq 0$, alors on $x \leq 0$ aussi et $y \geq \frac{1}{x}$.
En utilisant à nouveau la croissance de l'arctangente, on a donc

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \leq \arctan x + \arctan y \leq 0$$

Donc

$$\frac{-\pi}{2} \leq \arctan x + \arctan y \leq \frac{\pi}{2}, x, y \in \mathbb{R}, xy \leq 1$$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes

$a)$ $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$

$b)$ $\arccos x = 2\arccos \frac{3}{4}$

$c)$ $\arctan x = 2\arctan \frac{1}{2}$

Solution

a) On a

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$$

Alors

$$\begin{aligned} x &= \sin(\arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}) \\ &= \frac{2}{5}\cos(\arcsin \frac{3}{5}) + \frac{3}{5}\cos(\arcsin \frac{3}{5}) \end{aligned}$$

En utilisant la formule $\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$x = \frac{2}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$$

b)On a

$$\arccos x = 2\arccos \frac{3}{4}$$

alors

$$x = \cos(2\arccos(\frac{3}{4}))$$

en utilisant la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, on obtient

$$x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

3)On a

$$\arctan x = 2\arctan \frac{1}{2}$$

alors

$$x \tan(2\arctan \frac{1}{2})$$

En utilisant la formule $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, on obtient

$$x = \frac{2\arctan \frac{1}{2}}{1-\tan^2(\arctan \frac{1}{2})} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Exercice 11

Démontrer les formules suivantes

$a)$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$b)$ $\sinh(x+y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$

$c)$ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$d)$ $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x, \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$e)$ $\forall x \geq 0, \sinh(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}, \cosh(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$

S o l u t i o n

b) On a

$$\sinh x \cosh y = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})(\frac{e^y + e^{-y}}{2}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y})$$

$$\cosh x \sinh y = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})(\frac{e^y - e^{-y}}{2}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y})$$

Donc

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y)$$

c)On a

$$\cosh x \cosh y = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})(\frac{e^y + e^{-y}}{2}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y})$$

$$\sinh x \sinh y = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})(\frac{e^y - e^{-y}}{2}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y})$$

Donc

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \cosh(x+y)$$

d) En posant $x = y$ dans les formules précédentes, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2\sinh x + \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \end{aligned}$$

e)D'après la première formule, on a

$$\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$$

d'ou $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$ et $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$

Comme $\cosh x \geq 1$, pour tout réel x et $\sinh x > 0$, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\sinh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, x \geq 0$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}, x \geq \mathbb{R}$$

a) On a

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1\end{aligned}$$

Exercice 12

Vérifie que les inverse des fonctions hyperboliques sont données par

$$\begin{aligned}\arg\sinh x &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \forall x \in \mathbb{R} \\ \arg\cosh x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \forall x \geq 1\end{aligned}$$

Solution

Pour vérifier qu'une fonction g est l'inverse d'une fonction f, le plus simple est vérifier que $f(g(y)) = y$ et $g(f(x)) = x$. Pour tous les x et y qui permettent de calculer les valeurs de $f(g(y))$ et $g(f(x))$ on a $e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} = x + \sqrt{x^2 + 1})$ et $e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1})}$

On a

$$\sinh(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1})})$$

et

$$\ln(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x}) = \ln(\sinh x + \cosh x) = \ln e^x = x$$

C'est à dire que la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est donc bien l'inverse de la fonction f définie par $f(x) = \sinh x$. De la même manière on a

$$\cosh(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1})})$$

et

$$\ln(\cosh x + \sqrt{\sinh^2 x - 1}) = \ln(|\sinh x| + \cosh x) = \ln e^x = x$$

La fonction g définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est bien l'inverse de la fonction f définie par $f(x) = \cosh x$.

Exercice 13

a) Calculer la dérive de la fonction sinus hyperbolique et la dérivée de la fonction cosinus hyperbolique

b) Calculer la dérivée des fonctions hyperboliques inverse de deux manières

i) En utilisant la technique du calcul des dérivées des fonctions inverses.

ii) En utilisant les formules explicites des inverses

S o l u t i o n

a) Comme $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, alors

$$\sinh' x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

et

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

b)i)Si $y = \arg\sinh x$ alors $x = \sinh y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

De même, si $y = \arg\cosh x$ alors $x = \cosh y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\cosh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ii)On a aussi

$$\begin{aligned}
(\arg\sinh x)' &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})' \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{(x+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\arg\cosh x)' &= \ln(x + \sqrt{x^2-1})' \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x \geq 1
\end{aligned}$$

Exercice 14

Soient x et y deux réels tels que

$$x = \ln(\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

Calculer $\cosh x, \sinh x$ et $\tanh x$ en fonction de y

S o l u t i o n

On a

$x = \ln(\tan(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4}))$, alors $e^x = \tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\tan(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4})}}{2} \\
&= \frac{1}{2\sin(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{1}{\sin(y + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - \frac{1}{e^{-x}}}{2} = \frac{\tan(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\tan(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4})}}{2} \\
&= \frac{-\cos(y + \frac{\pi}{2})}{\sin(y + \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\tan^2(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\frac{y}{2}) + \frac{\pi}{4}) + 1} \\
&= \sin y
\end{aligned}$$

Exercice 15

a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\sinh(\arg\cosh x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Solution

a) on commence par remarque que

$$\arg\cosh x \geq 0, \forall x \geq 1$$

et

$$\sinh y \geq 0, \forall y \geq 0$$

On a donc

$$\sinh(\arg\cosh x) = \sqrt{\sinh^2(\arg\cosh x)} = \sqrt{cosh^2(\arg\cosh x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

b) On sait que la cosinus hyperbolique est toujours positif, donc

$$\cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{\cosh^2(\arg\sinh x)} = \sqrt{cosh^2(\arg\sinh x) + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Exercice 16

Montrer que pour tout $-1 < x < 1$, on a

$a)$ $\cosh(\arg\tanh x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$b)$ $\sinh(\arg\tanh x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solution

a)En utilisant la formule $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ et le fait que le cosinus hyperbolique est toujours positif, on a

$$\cosh(\arg\tanh x) = \sqrt{\cosh^2(\arg\tanh x)} = \sqrt{\frac{1}{1 - \tanh^2(\arg\tanh x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) On sait que $\arg\tan x \geq 0$ si $y \geq 0$, $\sinh y < 0$ si $y < 0$,

et

$\arg\tanh x \geq 0, x \in [0,1[$, $\arg\tanh x < 0, x \in]-1,0[$
donc on a

$$\sinh(\arg\tanh x) = \begin{cases} \sqrt{\sinh^2(\arg\tanh x)} & x \in [0,1[\\ -\sqrt{\sinh^2(\arg\tanh x)} & x \in]-1,0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\cosh^2(\arg\tanh x) - 1} & x \in [0,1[\\ -\sqrt{\cosh^2(\arg\tanh x) - 1} & x \in]-1,0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{1-\tanh^2(\arg\tanh x)} - 1} & x \in [0,1[\\ -\sqrt{\frac{1}{1-\tanh^2(\arg\tanh x)} - 1} & x \in]-1,0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \in [0,1[\\ \frac{x}{1-x^2} & x \in]-1,0[\end{cases}$$

Finalement on a

$$\sinh(\arg\tanh x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 17

a)Montrer qu'il n'existe pas une fonction $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\cosh x) = e^x$$

b)Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \cosh x$$

Solution

a) supposons que f existe, alors
$f(\cosh 1) = e$ et $f(\cosh(-1)) = f(\cosh(1)) = \frac{1}{e}$
Donc f ne peut pas prendre deux valeurs différentes au même point $t = \cosh 1$. donc f n'existe pas
b)Notons $y = e^x$, notre équation devient

$$f(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{y})$$

Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, alors l'unique façon le définie f sur $]0,+\infty[$ est par la forme

$$f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

[1] Azoulay. Elie, *Problèmes corrigés de mathématiques* - 2 éd.. - Paris : Dunod, (2002).

[2] Allab. Kada, *Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle* - O.P.U., (2002).

[3] Baba-Hamed. C et Benhabib. K, *Analyse. Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1985).

[4] Chambadal. L, *Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiquesspéciales.* Bordas, (1973).

[5] Hitta. Amara, *Cours d'algèbre et exercices corrigés.* O.P.U. (1994).

[6] Monier.J.M, *Analyse MPSI.* Dunod (1991).

[7] Piskounov.N, *Calcul différentiel et intégrales Tome1.*Editions Mir.