مدخل إلى الإحتمالات

- الإحصاء 2 -

دروس و تمارين محلولة

إعداد الدكتور : لكرومب الطيب

المحتويات

مقدمة : بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ، و الصلاة و السلام على أشرف المرسلين محمد و على آله و صحبه أجمعين.

بعون الله تعالى نقدم هذا العمل المتواضع إلى طلبتنا الأعزاء المتضمن مدخل إلى الإحتمالات التي من خلالها يستطيع القارئ التوسع في هذا الميدان. إن الرموز الرياضية المستعملة فيه قدمت باللاتنية، الهدف منها هو مسايرة المصطلحات العالمية، تسهيلا للقارئ مواصلة البحث في المراجع المكتوبة باللغات الأخرى.

تتكون هذه المطبوعة من ثلاثة فصول، كل فصل مدعم بمجموعة من الأمثلة و التمارين المحلولة.

يتناول الفصل الأول التحليل التوفيقي، الذي تناولنا فيه تعريف بعض الرموز العددية و أنواع السحب.

أما الفصل الثاني عالجنا فيه نظرية الإحتمالات، الذي شرحنا فيه جبر الحوادث و قانون الإحتمال و الإحتمال الشرطي.

أما الفصل الأخير تناولنا فيه التوزيعات الإحتمالية أو ما يسمى بالمتغيرات العشوائية، الذي عرضنا فيه المتغير العشوائي المتقطع و المتغير العشوائي المستمر. حيث عرفنا المتغير العشوائي المتقطع و توزيع ثنائي الحد و توزيع بواسون و ذكرنا العلاقة التي تربط بين هذين التوزيعين. و بعد تعريف المتغير العشوائي المستمر عرضنا أهم المتغيرات العشوائية المستمرة (التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي القياسي، توزيع كاي مربع، توزيع ستييودنت، توزيع فيشر)، ثم ذكرنا العلاقة التي تربط بين توزيع ثنائي الحد و التوزيع الطبيعي.

أخيرا نتمنى أن يكون هذا العمل البسيط مفيدا و أن يحقق النتائج المرجوة منه. و نرجو من الله أن تكون هذه المطبوعة صدقة جارية على والدي و والدي والدي و على من ساهم في تعليمي من قريب او من بعيد و على كل من جاهد من أجل وطننا الغالي.

الفصل الأول : التحليل التوفيقي

لتكن E مجموعة غير خالية حجمها n و m عدد طبيعي يحقق $m \leq n$.

1. مفاهيم عددية.

تعريف 1.1. : عاملي n هو عدد طبيعي يرمز له بـ $n!$ المعرف بالمساواة الآتية

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \dots \times 2 \times 1 \text{ لما } n \neq 0،$$

$$0! = 1.$$

مثال 2.1. : أحسب ما يلي : $1!$، $2!$، $4!$، $6!$.

الإجابة :

$1! = 1$، $2! = 2 \times 1 = 2$، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$، $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$،
$6! = 6 \times 5! = 6 \times 5 \times 4!$.

نتيجة 3.1. : $n! = n \times (n-1)!$، $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$،.....الخ.

تعريف 4.1. : العدد الطبيعي A_n^m هو العدد المعرف بالمساواة الآتية

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

مثال 5.1. : أحسب ما يلي : A_4^2، A_4^4، A_7^3.

الإجابة :

$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$، $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 210$،
$A_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4! = 24$.

نتيجة 6.1. : $A_n^n = n!$.

تعريف 7.1. : العدد الطبيعي C_n^m هو العدد المعرف بالمساواة الآتية

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

نتيجة 8.1. : $C_n^0 = 1$، $C_n^n = 1$، $C_n^1 = n$.

مثال 9.1. : أحسب ما يلي : C_6^1، C_5^2، C_7^3، C_7^5.

الإجابة :

$C_6^1 = 6$، $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!3!} = 10$، $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!} = 35$،

$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\times6\times5!}{5!2!} = 21$.

2. القائمة – الترتيبة – التوفيقة.

تعريف (القائمة) 10.2. : القائمة المكونة من m عنصر من E هي عبارة من الشكل $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_m)$ حيث x_1، x_2، x_3،......، x_m تنتمي إلى E، ما تتميز به أنه يمكن تكرار العنصر عدة مرات و ترتيب عناصرها يؤخذ بعين الإعتبار. و عددها هو n^m.

مثال 11.2. : لتكن المجموعة E حيث $E = \{1,2,4,6\}$.

1. أوجد القوائم المكونة من عنصرين من E.

2. أوجد عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام المشكلة من المجموعة E.

3. أوجد عدد الإعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام المشكلة من المجموعة E.

الإجابة :

1. القوائم المكونة من عنصرين من E هي المجموعة الآتية

$\{(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,1), (2,4), (2,6), (4,4), (4,1), (4,2), (4,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,4)\}$.

2. إيجاد عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام المشكلة من المجموعة E. العدد يكون على الشكل و ع م (الحرف " و " يشير لرقم الوحدات، الحرف " ع " يشير لرقم العشرات، الحرف " م " يشير لرقم المئات)، بمعنى هو القائمة (و , ع ,م) حيث و، ع، م مأخوذة من E ($n = 4$، $m = 3$)، و بالتالي عدد الأعداد هو $4^3 = 64$.

3. إيجاد عدد الإعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام المشكلة من المجموعة E. العدد الفردي هو العدد الذي يكون رقم آحاده 1، بمعنى يكون على الشكل 1ع م، بمعنى هو القائمة (1, ع ,م)، يمكن أن نكتب (1, ع ,م) = ((1) ,(ع ,م)) حيث (1) قائمة مأخوذة من المجموعة $\{1\}$ ($n = m = 1$) و(ع ,م) قائمة مأخوذة من المجموعة E ($n = 4, m = 2$)، و منه عدد الأعداد الفردية هو $4^2 \times 1^1 = 16$.

تعريف (الترتيبة) 12.2. : الترتيبة ذات m عنصر من E هي قائمة عناصرها مختلفة مثنى مثنى. و عددها هو A_n^m.

ملاحظة 13.2. : إذا كان $m = n$ في هذه الحالة الترتيبة تسمى تبديلة، و بالتالي عدد التبديلات هو $n!$.

مثال 14.2. : لتكن المجموعة E حيث $E = \{1,2,4,6\}$.

1. أوجد الترتيبات المكونة من عنصرين من E.

2. أوجد عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى المشكلة من المجموعة E.

3. أوجد عدد الإعداد الزوجية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى المشكلة من المجموعة E.

الإجابة :

1. الترتيبات المكونة من عنصرين من E هي

$\{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,4), (2,6), (4,1), (4,2), (4,6), (6,1), (6,2), (6,4)\}$.

2. إيجاد عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى المشكلة من المجموعة E. العدد يكون على الشكل و ع م، بمعنى هو الترتيبة (و , ع ,م) حيث و، ع، م مأخوذة من E ($m = 3$، $n = 4$)، و بالتالي عدد الأعداد هو $A_4^3 = 24$.

3. إيجاد عدد الإعداد الزوجية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى المشكلة من المجموعة E. العدد الزوجي هو العدد الذي رقم آحاده 2 أو 4 أو 6، أي يكون على الشكل 2 ع م أو 4 ع م أو 6 ع م، أي الترتيبات (2 ,ع ,م) أو (4, ع , م) أو (6 ,ع ,م)، اللواتي يمكن كتابتهن على الشكل ((2) ,(ع ,م))، ((4) ,(ع ,م))، ((6) ,(ع ,م)) حيث (2)،(ع ,م) ترتيبتان

مأخوذتان من المجموعتان $\{2\}$ و $\{1,4,6\}$ على الترتيب و (4)،(ع,م) ترتيبتان مأخوذتان من المجموعتان $\{4\}$ و $\{1,2,6\}$ على الترتيب و (6)،(ع,م) ترتيبتان مأخوذتان من المجموعتان $\{6\}$ و $\{1,2,4\}$ على الترتيب، كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n = 3, m = 2}$ $\qquad$ $\boxed{n = m = 1}$

((م,ع),(6)) أو ((م,ع),(4)) أو ((م,ع),(2))

$$A_3^2.A_1^1 \quad + \quad A_3^2.A_1^1 \quad + \quad A_3^2.A_1^1 \quad = 18$$

عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى المشكلة من المجموعة E هو 18 عدد.

تعريف (التوفيقة) 15.2. : التوفيقة ذات m عنصر من E هي المجموعة الجزئية $\{x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_m\}$ حيث x_1،x_2، x_3،......،x_m تنتمي إلى E، ما تتميز به أن تكرار العناصر و ترتيبها لا يؤخذان بعين الإعتبار. و عدد التوفيقات ذات m عنصر من E هو C_n^m.

مثال 16.2. : لتكن المجموعة E حيث $E = \{1,2,4,6\}$. أوجد التوفيقات المكونة من ثلاثة عناصر من E.

الإجابة :

التوفيقات المكونة من ثلاثة عنصر من E هي $\{\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,4,6\},\{2,4,6\}\}$.

ملاحظة 17.2. : إذا كان $m > n$ فإن $A_n^m = C_n^m = 0$.

3. أنواع السحب.

لمعرفة عدد الحالات الممكنة لسحب m عنصر من E نميز ثلاث حالات من السحب المبينة أدناه

تعريف (السحب على التوالي مع الإرجاع) 18.3. : في هذا السحب نتعامل مع القائمة، و بالتالي عدد الحالات الممكنة لسحب m عنصر على التوالي مع الإرجاع من E هو n^m.

تعريف (السحب على التوالي دون الإرجاع) 19.3. : في هذا السحب نتعامل مع الترتيبة، و بالتالي عدد الحالات الممكنة لسحب m عنصر على التوالي دون الإرجاع من E هو A_n^m.

تعريف (السحب في آن واحد عشوائيا (السحب دفعة واحدة)) 20.3. : في هذا السحب نتعامل مع التوفيقة، و بالتالي عدد الحالات الممكنة لسحب m عنصر في آن واحد عشوائيا من E هو C_n^m.

مثال 21.3. : كيس يحتوي على خمس كرات متجانسة مرقمة من 2 إلى 6.

1. أوجد عدد الحالات الممكنة لسحب

ا. ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع.

ب. ثلاث كرات في آن واحد عشوائيا.

2. نسحب كرتين في آن واحد عشوائيا. أوجد عدد الحالات الممكنة للحصول على

أ. كرتين مجموع رقميهما زوجي.

ب. كرتين مجموع رقميهما فردي.

الإجابة :

1. أ. عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع هو عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر مأخوذة من مجموعة حجمها خمسة عناصر ($m = 3, n = 5$) و يساوي A_5^3 أي 60 حالة.

1. ب. عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاث كرات في آن واحد عشوائيا هو عدد التوفيقات ذات ثلاثة عناصر مأخوذة من مجموعة حجمها خمسة عناصر ($m = 3, n = 5$) و يساوي C_5^3 أي 10 حالات.

2. سحب كرتين في آن واحد عشوائيا معناه توفيقة ذات عنصران

أ. كرتان مجموع رقميهما زوجي معناه كرتان تحملان رقمان زوجيان أو كرتان تحملان رقمان فرديان بمعنى {ز ,ز} أو {ف ,ف} (الحرف " ز " يشير للرقم الزوجي، الحرف " ف " يشير للرقم الفردي) حيث {ز ,ز} عنصراها مأخوذان من المجموعة {6,4,2} و {ف ,ف} عنصراها مأخوذان من المجموعة {3,5}، كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n = m = 2}$ $\boxed{n = 3, m = 2}$

{ز ,ز} أو {ف ,ف}

$$C_2^2 + C_3^2 = 4$$

عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين مجموع رقميهما زوجي هو 4.

ب. كرتان مجموع رقميهما فردي معناه كرة تحمل رقم زوجي و الأخرى تحمل رقم فردي بمعنى التوفيقة {ز ,ف} حيث {ز} عنصرها مأخوذ من المجموعة {6,4,2} و {ف} عنصرها مأخوذ من المجموعة {5,3}، كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n = 2, m = 1}$ $\boxed{n = 3 , m = 1}$

{ز ,ف}

$$C_2^1 . C_3^1 = 6$$

عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين مجموع رقميهما فردي هو 6.

تمارين محلولة

التمرين الأول :

1. بكم طريقة مختلفة يمكن وضع خمسة كتب في خمسة رفوف ؟

2. بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس ستة أشخاص على كرسي يحتوي خمسة أماكن ؟

3. بكم طريقة مختلفة يمكن إختيار خمسة أشخاص من مجموعة مكونة من ستة أشخاص ؟

4. بكم طريقة يمكن تقسيم مجموعة مكونة من ستة أشخاص إلى مجموعتين الأولى مكونة من ثلاثة أشخاص و الثانية مكونة من شخصين ؟

الإجابة :

1. عدد الطرق الممكنة لوضع خمس كتب في خمسة رفوف هو عدد الترتيبات ذات خمسة عناصر عناصرها مأخوذة من مجموعة ذات خمسة عناصر ($n = m = 5$)، و يساوي A_5^5 أي 120 طريقة.

2. عدد الطرق الممكنة لكي يجلس ستة أشخاص على كرسي يحتوي خمسة أماكن هو عدد الترتيبات ذات خمسة عناصر عناصرها مأخوذة من مجموعة ذات ستة عناصر ($n = 6, m = 5$)، و يساوي A_6^5 أي 720 طريقة.

3. عدد الطرق الممكنة لإختيار خمسة أشخاص من مجموعة مكونة من ستة أشخاص هو عدد التوفيقات المكونة من خمسة عناصر مأخوذة من مجموعة ذات ستة عناصر ($n = 6, m = 5$)، و يساوي C_6^5 أي 6 طرق.

4. إيجاد عدد الطرق الممكنة لتقسيم مجموعة مكونة من ستة أشخاص إلى مجموعتين الأولى مكونة من ثلاثة أشخاص و الثانية مكونة من شخصين. مجموعة مكونة من ستة أشخاص مقسمة إلى مجموعتين الأولى مكونة من ثلاثة أشخاص و الثانية مكونة من شخصين هي عبارة عن توفيقتين الأولى مكونة من ثلاثة عناصر و الثانية مكونة من عنصرين كما هو موضح في الأسفل (الحرف " ش " يشير للشخص، الحرف " ف " يشير للفرد)

$\boxed{n = 6, m = 3}$ $\boxed{n = 6 - 3 = 3, m = 2}$

{ش1, ش2, ش3} و {ف1, ف2}

$$C_6^3 \ . \ C_3^2 = 60$$

إذن عدد الطرق الممكنة لتقسيم مجموعة مكونة من ستة أشخاص إلى مجموعتين الأولى مشكلة من ثلاثة أشخاص و الثانية مشكلة من شخصين هو 60 طريقة.

التمرين الثاني : صندوق يضم كرات متماثلة موزعة كالآتي 4 سوداء و 6 بيضاء.

I. نسحب 3 كرات في آن واحد عشوائيا، أوجد عدد الحالات الممكنة للحصول على

1. كرة بيضاء.

2. كرتين بيضاوين على الأقل.

II. نضيف إلى الصندوق N سوداء و N كرة بيضاء، نضع X_N عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من نفس اللون.

1. عبر عن X_N بدلالة N.

2. كم نضيف من كرة حتى يكون $X_N = 10713$ ؟

الإجابة :

نشير للكرة السوداء بالحرف " س "، و للكرة البيضاء بالحرف " ب "

I. سحب 3 كرات في آن واحد عشوائيا هو توفيقة ذات ثلاثة عناصر أي من الشكل $\{O, O, O\}$.

1. الحصول على كرة بيضاء معناه كرة بيضاء و كرتين سوداوين، كما هو موضح في الأسفل

$n = 4, m = 2$ $n = 6, m = 1$

{ب , س ,س}

$$C_4^2 \;.\; C_6^1 = 36$$

عدد الحالات الممكنة للحصول على كرة بيضاء هو 36 حالة.

2. كرتان بيضاوان على الأقل معناه كرتين بيضاوين و كرة سوداء أو ثلاث كرات بيضاء، كما هو موضح في الأسفل

$n = 6, m = 2$ $n = 4, m = 1$ $n = 6, m = 3$

{ب ,ب , س} أو {ب ,ب ,ب}

$$C_6^2 \;.\; C_4^1 + C_6^3 = 80$$

عدد الحالات الممكنة للحصول على كرتين بيضاوين على الأقل هو 80 حالة.

II. سحب كرتين في آن واحد عشوائيا من نفس اللون هو توفيقة عنصريها إما كرتين بيضاوين أو كرتين سوداوين، كما هو موضح في الأسفل

$n = N + 6, m = 2$ $n = N + 4, m = 2$

{ب ,ب} أو {س ,س}

$$C_{N+6}^2 + C_{N+4}^2 = N^2 + 9N + 21$$

1. عبارة عن X_N بدلالة N هي $X_N = N^2 + 9N + 21$.

2. عدد الكرات التي نضيفها حتى يكون $X_N = 10713$، المعادلة السابقة تكافئ $N^2 + 9N - 10692 = 0$ تكافئ $N = -108$ أو $N = 99$، و بالتالي نضيف 99 كرة بيضاء و 99 كرة سوداء.

التمرين الثالث : قسم يتكون من 12 طالبا و 8 طالبات.

1. أوجد عدد الطرق الممكنة لإختيار شخصين.

2. أوجد عدد اللجان الممكنة لإختيار المسؤول و النائب الأول و النائب الثاني.

3. أوجد عدد اللجان الممكنة لإختيار المسؤول و النائب الأول و النائب الثاني بحيث يكون

أ. المسؤول طالب.

ب. المسؤول طالب و النائب الأول طالبة.

ج. الطالب X موجود في اللجنة.

الإجابة :

1. عدد الطرق الممكنة لإختيار شخصين هو عدد التوفيقات ذات عنصران عنصراها مأخوذان من مجموعة ذات عشرين عنصر ($n = 20, m = 2$)، و يساوي C_{20}^{2} أي 190 طريقة لإختيار شخصين.

2. عدد اللجان الممكنة لإختيار المسؤول و النائب الأول و النائب الثاني هو عدد الترتيبات ذات ثلاثة عناصر عناصرها مأخوذة من مجموعة ذات عشرين عنصر ($n = 20, m = 3$)، و يساوي A_{20}^{3} أي 6840 لجنة مكونة من المسؤول و النائب الأول و النائب الثاني.

3. أ. اللجنة يكون فيها المسؤول طالب هي ترتيبية كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n = 20 - 1 = 19, m = 2}$ $\boxed{n = 12, m = 1}$

(المسؤول طالب , النائب1 ,النائب2)

$$A_{19}^{2} \ . \ A_{12}^{1} = 4104$$

عدد اللجان التي يكون فيها المسؤول طالب هو 4104 لجنة.

3. ب. اللجنة يكون فيها المسؤول طالب و النائب الأول طالبة هي ترتيبية كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n=(12-1)+(8-1)=18,m=1}$ $\boxed{n = 8, m = 1}$ $\boxed{n = 12, m = 1}$

(المسؤول طالب , النائب1طالبة , النائب2)

$$A_{18}^{1} \ . \ A_{8}^{1} \ . \ A_{12}^{1} = 1728$$

عدد اللجان التي يكون فيها المسؤول طالب و النائب الأول طالبة هو 1728 لجنة.

3. ج. الطالب X موجود في اللجنة هي ترتيبية قد يكون فيها الطالب X مسؤولا أو نائب أول أو نائب ثاني كما هو موضح في الأسفل

$\boxed{n = 20 - 1 = 19, m = 2}$ $\boxed{n = 1, m = 1}$

(X مسؤول , النائب1 ,النائب2) أو (المسؤول , X نائب1 , النائب2) أو (المسؤول ,النائب1 , X نائب2)

$$A_{1}^{1}.\,A_{19}^{2} + A_{1}^{1}.\,A_{19}^{2} + A_{19}^{2}.\,A_{1}^{1} = 1026$$

عدد اللجان التي يكون فيها الطالب X موجود في اللجنة هو 1026 لجنة.

التمرين الرابع : كيس يحتوي على أربع كرات متجانسة مرقمة بالأرقام 0، 1، 2، 3، 5.

I. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع من هذا الكيس. المطلوب أوجد عدد :

1. الأعداد الممكن تشكيلها.

2. الأعداد المضاعفة لـ 5.

II. أجب الأسئلة السابقة في حالة السحب على التوالي مع إرجاع.

الإجابة :

I. بما أن السحب هو على التوالي دون إرجاع فإننا نستعمل الترتيبية.

1. الأعداد الممكن تشكيلها هي الترتيبات (و ,ع ,م) (و، ع، م تنتمي إلى {5,3,2,1,0}) ما عدا الترتيبات (و ,ع ,0) (و، ع تنتمي إلى {5,3,2,1})، كما هو موضح في الأسفل

$$(\overbrace{\text{م,ع,و}}^{n=5,\,m=3})\ \text{sauf}\ (\overbrace{0}^{n=m=1},\overbrace{\text{ع,و}}^{n=4,\,m=2})$$

$$A_5^3 \quad - \quad A_1^1.A_4^2 = 48$$

عدد الأعداد الممكن تشكيلها هو 48 عدد.

2. العدد مضاعفة لـ 5 معناه رقم آحاده إما 0 أو 5، أي إما الترتيبات (0 ,ع ,م) (ع، م تنتمي إلى {5,3,2,1}) أو الترتيبات (5 ,ع ,م) (ع، م تنتمي إلى {3,2,1,0}) ما عدا الترتيبات (5 ,ع ,0) (ع تنتمي إلى {3,2,1})، كما هو موضح في الأسفل

$$((\overbrace{\text{م,ع}}^{n=4,\,m=2},\overbrace{0}^{n=m=1})\ \text{ou}\ (\overbrace{\text{م,ع}}^{n=4,\,m=2},\overbrace{5}^{n=m=1}))\ \text{sauf}\ (\overbrace{0}^{n=m=1},\overbrace{\text{ع}}^{n=3,\,m=1},\overbrace{5}^{n=m=1})$$

$$A_4^2.A_1^1 \; + \; A_4^2.A_1^1 \quad - \quad A_1^1.A_3^1.A_1^1 = 21$$

عدد الأعداد المضاعفة لـ 5 هو 21 عدد.

II. عند السحب على التوالي مع إرجاع نستعمل القائمة.

1. الأعداد الممكن تشكيلها هي القوائم (و ,ع ,م) (و، ع، م تنتمي إلى {5,3,2,1,0}) ما عدا القوائم (و ,ع ,0) (و، ع تنتمي إلى {5,3,2,1}) و القوائم (و ,0,0) (و تنتمي إلى {5,3,2,1,0})، كما هو موضح في الأسفل

$$(\overbrace{\text{م,ع,و}}^{n=5,\,m=3})\ \text{sauf}\ ((\overbrace{0}^{n=m=1},\overbrace{\text{ع,و}}^{n=4,\,m=2})\ \text{ou}\ (\overbrace{0,0}^{n=1,\,m=2},\overbrace{\text{و}}^{n=5,\,m=1}))$$

$$5^3 \quad - \quad (1^1.4^2 \; + \; 1^2.5^1) = 104$$

عدد الأعداد الممكن تشكيلها هو 104 عدد.

2. العدد مضاعفة لـ 5 معناه رقم آحاده إما 0 أو 5، أي إما القوائم (0 ,ع ,م) (ع، م تنتمي إلى {5,3,2,1,0}) أو القوائم (5 ,ع ,م) (ع، م تنتمي إلى {5,3,2,1,0}) ما عدا القوائم (0 ,ع ,0) (ع تنتمي إلى {5,3,2,1,0}) و القوائم (5 ,ع ,0) (ع تنتمي إلى {5,3,2,1,0})، كما هو موضح في الأسفل

$$((\overbrace{\text{م,ع}}^{n=5,\,m=2},\overbrace{0}^{n=m=1})\ \text{ou}\ (\overbrace{\text{م,ع}}^{n=5,\,m=2},\overbrace{5}^{n=m=1}))\ \text{sauf}\ ((\overbrace{0}^{n=m=1},\overbrace{\text{ع}}^{n=5,\,m=1},\overbrace{0}^{n=m=1})\ \text{ou}\ (\overbrace{0}^{n=m=1},\overbrace{\text{ع}}^{n=5,\,m=1},\overbrace{5}^{n=m=1}))$$

$$5^2.1^1 + \; 5^2.1^1 \quad - (1^1.5^1.1^1 \; + \; 1^1.5^1.1^1) = 40$$

عدد الأعداد المضاعفة لـ 5 هو 40 عدد.

الفصل الثاني : نظرية الاحتمالات

1. التجربة العشوائية و جبر الحوادث.

تعريف1.1. (التجربة العشوائية) : هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقا (قبل اجراء التجربة)، فمثلا عند رمي مرة واحدة فإنه لا يمكن معرفة الوجه الذي يظهر قبل عملية الرمي.F و P قطعة نقود لها وجهان

تعريف 2.1. (مجموعة الامكانيات أو المجموعة الشاملة) : مجموعة الامكانيات لتجربة عشوائية ما هي مجموعة كل العناصر التي يمكن رؤيتها بعد إجراء التجربة، و نرمز لها بالرمز Ω. كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.

مثال 3.1. :

1. نرمي زهرة نرد مرة واحدة عشوائيا. أوجد مجموعة الامكانيات لهذه التجربة.

الإجابة : المجموعة الشاملة هي $\{1،2،3،4،5،6\}$.

2. نرمي قطعة نقود لها وجهان P و F ثلاث مرات. أوجد مجموعة الامكانيات لهذه التجربة.

الإجابة : المجموعة الشاملة هي

$\{(P،P،P)،(F،P،P)،(P،F،P)،(P،P،F)،(F،F،P)،(F،P،F)،(P،F،F)،(F،F،F)\}$.

تعريف (الحادث) 4.1. : لتكن Ω مجموعة الامكانيات لتجربة عشوائية ما. الحادث هو مجموعة جزئية من Ω، ونرمز له بالرمز A أو B......الخ.

ملاحظة 5.1. : الحادث المكون من عنصر واحد يسمى حادث بسيط (أولي).

مثال 6.1. :

1. في المثال 1.3.1. أوجد الحادث A " نحصل على رقم زوجي ".

الإجابة : $A = \{2،4،6\}$.

2. في المثال 2.3.1. أوجد الحادث B " نحصل على الوجه P مرتين على الأقل ".

الإجابة : $B = \{(P،P،P)،(F،P،P)،(P،F،P)،(P،P،F)\}$.

تعريف (تحقق حادث) 7.1. : ليكن A حادث لتجربة عشوائية ما. نقول عن الحادث A أنه تحقق (أو ظهر) إذا ظهر أحد عناصره أثناء التجربة العشوائية.

مثال 8.1. :

1. في المثال 1.6.1. ظهر لنا في أحد الرميات العدد 5 هل الحادث A تحقق ؟

الإجابة : لدينا $5 \notin A$، و منه A لم يتحقق.

2. في المثال 2.6.1. ظهر لنا في أحد الرميات الثلاثة $(P،F،P)$. هل الحادث B تحقق ؟

الإجابة : لدينا $(P،F،P) \in B$، و منه B تحقق.

نعتبر في كل ما يأتي Ω مجموعة شاملة لتجربة عشوائية ما و A، B حادثان من Ω.

تعريف 9.1. (جبر الحوادث) :

1. الحادث الأكيد هو الحادث الذي يتحقق دائما (عناصره تظهر دائما أثناء التجربة العشوائية)، وهو الحادث Ω.

2. الحادث المستحيل هو الحادث الذي لا يتحقق، و هو المجموعة الخالية $\emptyset$.

3. الحادث المعاكس للحادث A هو الحادث $\overline{A}$ المعرف كما يلي $\overline{A} = \{x \in \Omega;\ x \notin A\} = \Omega - A$. و لدينا $\Omega = A \cup \overline{A}$.

4. الحادث " A و B " هو الحادث $A \cap B$. و يتحقق هذا الحادث إذا تحقق الحادثان A و B معا.

5. الحادث " A أو B " هو الحادث $A \cup B$. و يتحقق هذا الحادث إذا تحقق أحد الحادثان.

6. نقول عن الحادثان A، B أنهما منفصلان (غير متلائمان) إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

مثال 10.1. : كيس يحتوي على كرتين حمراوين و كرتين زرقاوين و كرة سوداء. نسحب كرتين عشوائيا في آن واحد.

1. أوجد المجموعة الشاملة Ω.

2. أوجد الحادثان A و B المعرفان كما يلي

A " ظهور كرة حمراء "، B " ظهور كرة زرقاء ".

3. إستنتج الحوادث الآتية : $\overline{A}$، A و B ، A أو B.

الإجابة : نشير بـ R_1، R_2 للكرتين الحمراوين، B_1، B_2 للكرتين الزرقاوين، N للكرة السوداء.

1. بما أننا نسحب كرتين عشوائيا في آن واحد فإننا نتعامل مع توفيقة ذات عنصران، وبالتالي المجموعة الشاملة هي

$\Omega = \{\{R_1, R_2\}, \{R_1, B_1\}, \{R_1, B_2\}, \{R_1, N\}, \{R_2, B_1\}, \{R_2, B_2\}, \{R_2, N\}, \{B_1, B_2\}, \{B_1, N\}, \{B_2, N\}\}$.

2. الحادث A " ظهور كرة حمراء " هو $A = \{\{R_1, B_1\}, \{R_1, B_2\}, \{R_1, N\}, \{R_2, B_1\}, \{R_2, B_2\}, \{R_2, N\}\}$.

الحادث B " ظهور كرة زرقاء " هو $B = \{\{R_1, B_1\}, \{R_1, B_2\}, \{R_2, B_1\}, \{R_2, B_2\}, \{B_1, N\}, \{B_2, N\}\}$.

3. إستنتاج الحوادث : $\overline{A} = \Omega - A = \{\{R_1, R_2\}, \{B_1, B_2\}, \{B_1, N\}, \{B_2, N\}\}$.

الحادث A وB هو الحادث $A \cap B$، و منه $A \cap B = \{\{R_1, B_1\}, \{R_1, B_2\}, \{R_2, B_1\}, \{R_2, B_2\}\}$.

الحادث A أو B هو الحادث $A \cup B$، و منه

$A \cup B = \{\{R_1, B_1\}, \{R_1, B_2\}, \{R_1, N\}, \{R_2, B_1\}, \{R_2, B_2\}, \{R_2, N\}, \{B_1, N\}, \{B_2, N\}\}$.

2. قانون الاحتمال.

لتكن Ω مجموعة شاملة لتجربة عشوائية ما و A، B حادثان من Ω.

تعريف 11.2. : قانون الاحتمال هو الدالة المعرفة كما يلي P

$$P : \Omega \to [0,1]$$

$\{x_i\} \mapsto P(\{x_i\}) =$ إحتمال $\{x_i\}$،

و تحقق الشرط الآتي $\sum_{x_i \in \Omega} P(\{x_i\}) = 1$.

تعريف 12.2. (إحتمال الحادث A) : إحتمال الحادث A هو العدد $P(A)$ المعرف كما يلي $P(A) = \sum_{x_i \in A} P(\{x_i\})$.

نتيجة 13.2. : من خلال التعريف السابق لدينا $P(\Omega) = 1$.

نتيجة 14.2. :

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. $P(\emptyset)=0$.

3. إذا كان A، B منفصلان فإن $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

4. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

مثال 15.2 :

1. قطعة نقود مزيفة وجهاها P و F حيث إحتمال ظهور الوجه P ضعف إحتمال ظهور الوجه F. أحسب إحتمال كل من الوجهين P و F.

الإجابة : لدينا $P(\{P\})=2P(\{F\})$ و $\Omega=\{P,F\}$، إذن $P(\Omega)=P(\{P,F\})$ تكافئ $1=P(\{P\})+P(\{F\})$ تكافئ $1=3P(\{F\})$ تكافئ $P(\{F\})=\frac{1}{3}$، و بالتالي $P(\{P\})=\frac{2}{3}$.

2. زهرة نرد مزيفة ذات أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4. نرمز بالرمز p_i لإحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i مع $i\in\{1,2,3,4\}$، مع العلم أن $p_1=\frac{1}{8}$ و الأعداد p_1، p_2، p_3، p_4 تشكل حدود متتالية لمتتالية حسابية. المطلوب أحسب

1.2. p_2، p_3، p_4.

2.2. إحتمال ظهور عدد زوجي.

الإجابة :

1.2. لدينا $\Omega=\{1,2,3,4\}$، إذن $P(\Omega)=P(\{1,2,3,4\})$ تكافئ $1=p_1+p_2+p_3+p_4$ تكافئ $1=p_1+(p_1+r)+(p_1+2r)+(p_1+3r)$ (r الوسط الحسابي للمتتالية الحسابية) تكافئ $1=6r+4p_1$ تكافئ $r=\frac{1}{12}$. و منه $p_2=p_1+r=\frac{5}{24}$، $p_3=p_1+2r=\frac{7}{24}$، $p_4=p_1+3r=\frac{9}{24}$.

2.2. إحتمال ظهور عدد زوجي هو $P(\{2,4\})=p_2+p_4=\frac{14}{24}$.

تعريف 16.2. (تجربة متساوية الاحتمال) : نقول عن تجربة ما أنها متساوية الاحتمال إذا كانت الحوادث الاولية لـ Ω لها نفس الاحتمال. و يشار إلى تجربة عشوائية متساوية الإحتمال كأن يقال مثلا نرد غير مزيف، قطعة نقود متوازنة (غير مغشوشة)، كريات لا نفرق بينها في اللمس (متجانسة).

نتيجة 17.2 : إذا كانت Ω عدودة، في تجربة متساوية الاحتمال لدينا

1. $P(\text{حادث أولي})=\frac{1}{\text{عدد عناصر }\Omega}=\frac{1}{card(\Omega)}$.

2. $P(A)=\frac{\text{عدد عناصر }A}{\text{عدد عناصر }\Omega}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

مثال 18.2 :

1. نرمي قطعة نقود غير مغشوشة وجهاها P و F ثلاث مرات. أحسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الحصول على الوجه P مرة واحدة فقط ".

B " الحصول على الوجه P مرتين على الاقل".

الإجابة :

المجموعة الشاملة لهذه التجربة هي $\{(P,P,P),(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F),(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F),(F,F,F)\}$.

بما أن قطعة النقود غير مغشوشة، نطبق النتيجة السابقة.

الحادث A " الحصول على الوجه P مرة واحدة فقط " هو $A=\{(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P)\}$، و بالتالي $P(A)=\frac{3}{8}$.

الحادث B " الحصول على الوجه P مرتين على الاقل" هو $B = \{(P،P،F)،(P،F،P)،(F،P،P)،(P،P،P)\}$، و بالتالي $P(B) = \frac{4}{8}$.

2. كيس يحتوي على كرات متجانسة موزعة كما يلي كرتين حمراوين و كرتين زرقاوين و كرة سوداء. نسحب كرتين عشوائيا في آن واحد. احسب احتمال الحوادث الآتية :

1. A " كرة زرقاء ".

2. B " كرتين من نفس اللون ".

3. C " كرتين من لونين مختلفين ".

الإجابة :

نشير بـ R للكرة الحمراء، B للكرة الزرقاء، N للكرة السوداء. بما أننا نسحب كرتين عشوائيا في آن واحد إذن لدينا توفيقة ذات عنصران من الشكل $\{O, O\}$. بما أن الكرات متجانسة، نطبق النتيجة السابقة.

لدينا عدد عناصر Ω = عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من بين خمس كرات ($m = 2, n = 5$) $= C_5^2 = 10$.

1. الحادث A " كرة زرقاء " هو التوفيقة $\{B, O\}$ حيث الكرة O تكون إما حمراء أو سوداء، و بالتالي

عدد عناصر $A = C_2^1 . C_3^1 = 6$، و بالتالي $P(A) = \frac{6}{10}$.

2. الحادث B " كرتين من نفس اللون " هو إما التوفيقة $\{R, R\}$ أو التوفيقة $\{B, B\}$، و بالتالي

عدد عناصر $B = C_2^2 + C_2^2 = 2$، و بالتالي $P(B) = \frac{2}{10}$.

3. الحادث C " كرتين من لونين مختلفين " هو إما التوفيقة $\{R, B\}$ أو التوفيقة $\{R, N\}$ أو التوفيقة $\{B, N\}$، و بالتالي

عدد عناصر $C = C_2^1 . C_2^1 + C_2^1 . C_1^1 + C_2^1 . C_1^1 = 8$، و بالتالي $P(C) = \frac{8}{10}$.

3. الإحتمال الشرطي - الحوادث المستقلة - دستور الإحتمالات الكلية.

لتكن Ω مجموعة شاملة لتجربة عشوائية ما و A، B حادثان من Ω و P قانون إحتمال. سنعطي مثال من خلاله نعرف الإحتمال الشرطي.

مثال 19.3. : في نهاية السنة تم توزيع طلبة السنة الأولى الجدول الآتي

الجنس / التقييم	ذكور	إناث
ناجح	70	160
راسب	30	40

1. تم إختيار طالب عشوائيا، المطلوب أحسب إحتمال الحادثان A، B حيث

A " الطالب ذكر "، B " الطالب ذكر و ناجح ".

2. علما أن الطالب الذي إخترناه ذكرا، أحسب إحتمال الحادث C" الطالب ناجح ".

3. أحسب $\frac{P(B)}{P(A)}$. ماذا تستنتج ؟

الإجابة :

1. حساب $P(A)$. لدينا عدد الطلبة = عدد عناصر $\Omega = 300$، عدد الطلبة الذكور = عدد عناصر $A = 100$، و بالتالي

$P(A) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.

حساب $P(B)$. نشير بـ D " ناجح "، لدينا عدد عناصر B = عدد عناصر $(A \cap D) = 70$، و بالتالي $P(B) = P(A \cap D) = \frac{70}{300} = \frac{7}{30}$.

2. علما الطالب المختار ذكر، حساب إحتمال C " الطالب ناجح ". لدينا Ω = الطلبة الذكور، إذن عدد عناصر $\Omega = 100$ و عدد عناصر $C = 70$، و بالتالي $P(C) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$.

3. حساب $\frac{P(B)}{P(A)}$. من ما سبق لدينا $\frac{7}{10} = \frac{7/30}{1/3} = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$. نستنتج أن $P(C) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$، يسمى $P(C)$ إحتمال الحصول على طالب ناجح علما أنه ذكر، و نرمز له بـ $P_A(D)$، و لدينا $P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$.

نتيجة 20.3. (الإحتمال الشرطي) : يسمى العدد $P_A(B)$ الإحتمال الشرطي، و يقرأ إحتمال B علما أن A قد وقع، و لدينا $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

تعريف 21.3. (الحادثان المستقلان) : نقول عن الحادثين A، B أنهما مستقلان إذا و فقط إذا كان $P_A(B) = P(B)$. بمعنى $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

نتيجة 22.3. : إذا كانت A_i مع $1 \leq i \leq k$ حوادث مستقلة مثنى مثنى فإن $P(\cap_{i=1}^{k} A_i) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$.

مثال 23.3. : نرمي زهرة نرد متوازنة مرتين. أحسب إحتمال الحادثين A " الحصول على عددين مجموعهما فردي "، B " الحصول على عددين مجموعهما زوجي ".

الإجابة :

لدينا شجرة الإحتمالات الآتية

الرمية الأولى الحادث A	$P(A)$	الرمية الثانية الحادث B	A و B مستقلان $P_A(B) = P(B)$	الحادث B et A	$P(A \cap B) = P(A).P_A(B)$
ز	$P(ز) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	ز	$P_ز(ز) = \frac{1}{2}$	ز et ز	$P(ز \text{ et } ز) = P(ز)P_ز(ز) = \frac{1}{4}$
		ف	$P_ز(ف) = \frac{1}{2}$	ز et ف	$P(ز \text{ et } ف) = P(ز)P_ز(ف) = \frac{1}{4}$
ف	$P(ف) = P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	ز	$P_ف(ز) = \frac{1}{2}$	ف et ز	$P(ف \text{ et } ز) = P(ف)P_ف(ز) = \frac{1}{4}$
		ف	$P_ف(ف) = \frac{1}{2}$	ف et ف	$P(ف \text{ et } ف) = P(ف)P_ف(ف) = \frac{1}{4}$

A " الحصول على عددين مجموعهما فردي " هو $A = (ز \text{ et } ف)\text{ou}(ف \text{ et } ز)$، من شجرة الإحتمالات نجد $P(A) = P((ز \text{ et } ف)\text{ou}(ف \text{ et } ز)) = P(ز \text{ et } ف) + P(ف \text{ et } ز) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

B " الحصول على عددين مجموعهما زوجي " هو $B = (ز \text{ et } ز)\text{ou}(ف \text{ et } ف)$، من شجرة الإحتمالات نجد $P(B) = P((ز \text{ et } ز)\text{ou}(ف \text{ et } ف)) = P(ز \text{ et } ز) + P(ف \text{ et } ف) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

مثال 24.3. :

1. ليكن A، B حادثان مستقلان. برهن أن الحادثان A، $\overline{B}$ مستقلان، و إستنتج أن الحادثان $\overline{A}$، $\overline{B}$ مستقلان.

2. يرمي قاذفان S و T في نفس الوقت هدفا معينا. الحادثان A " S يصيب الهدف "، B " T يصيب الهدف " مستقلان

و إحتمالهما $p_S = \frac{4}{5}$ و $p_T = \frac{7}{8}$ على الترتيب.
أحسب إحتمال الحوادث الآتية C " S و T يصيبان الهدف "، D " S يصيب الهدف فقط "، E " الهدف لم يصب "، F " الهدف يصاب "، G " قاذف واحد يصيب الهدف ".

الإجابة :

1. نبرهن أن الحادثان A، $\overline{B}$ مستقلان، أي نبرهن أن $P(A\cap\overline{B}) = P(A).P(\overline{B})$. لدينا $A = A\cap(B\cup\overline{B})$ تكافئ $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$، و $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B}) = A\cap B\cap\overline{B} = \emptyset$، بمعنى الحادثان $A\cap B$ و $A\cap\overline{B}$ منفصلان، من خلال النتيجة 14.2. (3) لدينا $P(A) = P\big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$ تكافئ $P(A) = P(A).P(B) + P(A\cap\overline{B})$ تكافئ $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1-P(B))$ تكافئ $P(A\cap\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.
إستنتاج أن الحادثان $\overline{A}$، $\overline{B}$ مستقلان. لدينا الحادثان $\overline{B}$، A مستقلان حسب السؤال السابق الحادثان $\overline{B}$، $\overline{A}$ مستقلان.

2. الحادث C " S و T يصيبان الهدف " هو الحادث $C = S\cap T$، بما أن S، T مستقلان، إذن
$P(C) = P(S).P(T) = \frac{28}{40}$.
الحادث D " S يصيب الهدف فقط " هو الحادث $D = S\cap\overline{T}$، بما أن S، T مستقلان فإن S، $\overline{T}$ مستقلان، ومنه
$P(D) = P(S).P(\overline{T}) = P(S).\big(1-P(T)\big) = \frac{4}{40}$.
الحادث E " الهدف لم يصب " هو الحادث E " S لا يصيب الهدف و T لا يصيب الهدف " بمعنى $E = \overline{S}\cap\overline{T}$، بما أن S، T مستقلان فإن $\overline{S}$ و $\overline{T}$ مستقلان، ومنه $P(E) = P(\overline{S}).P(\overline{T}) = (1-P(S)).\big(1-P(T)\big) = \frac{1}{40}$.
الحادث F " الهدف يصاب " هو الحادث F " أحدهما يصيب الهدف " بمعنى $F = S\cup T$، و بالتالي
$P(F) = P(S\cup T) = P(S) + P(T) - P(S\cap T) = \frac{39}{40}$.
الحادث G " قاذف واحد يصيب الهدف " هو الحادث G " (S يصيب الهدف و T لا يصيب الهدف) أو (S لا يصيب الهدف و T يصيب الهدف) بمعنى $G = (S\cap\overline{T})\cup(\overline{S}\cap T)$، بما أن S و T مستقلان فإن S و $\overline{T}$ مستقلان و $\overline{S}$ و T مستقلان و $(S\cap\overline{T})\cap(\overline{S}\cap T) = S\cap\overline{S}\cap T\cap\overline{T} = \emptyset$ بمعنى الحادثان $S\cap\overline{T}$ و $\overline{S}\cap T$ منفصلان، و بالتالي
$P(G) = P((S\cap\overline{T})\cup(\overline{S}\cap T)) = P(S\cap\overline{T}) + P(\overline{S}\cap T) = P(S).P(\overline{T}) + P(\overline{S})P(T) = \frac{11}{40}$.

نظرية 25.3. (دستور الإحتمالات الكلية أو قاعدة بايز) :
لتكن Ω مجموعة شاملة لتجربة عشوائية ما و A حادث من Ω، A_i مع $1\le i\le k$ حوادث من Ω تحقق ما يلي :
أ. $A_i \neq \emptyset$ من أجل كل $1\le i\le k$.
ب. $A_i\cap A_j = \emptyset$ من أجل كل $1\le i,j\le k$ و $i\neq j$ (A_i، A_j منفصلان من أجل كل $1\le i,j\le k$ و $i\neq j$).
ج. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$. فإن
1. $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).P_{A_i}(A)$.
2. $P_A(A_i) = \frac{P(A_i).P_{A_i}(A)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i).P_{A_i}(A)}$.

البرهان :
1. لدينا $A = A\cap\Omega = A\cap\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k}(A\cap A_i)$، و بما أن $A_i\cap A_j = \emptyset$ من أجل كل $1\le i,j\le k$ و $i\neq j$ فإن $(A\cap A_i)\cap(A\cap A_j) = \emptyset$ من أجل كل $1\le i,j\le k$ و $i\neq j$، بمعنى أن الحادثان $A\cap A_i$ و $A\cap A_j$ منفصلان من أجل كل $1\le i,j\le k$ و $i\neq j$، و منه $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{k}(A\cap A_i)) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i\cap A)$

تكافئ $P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i).P_{A_i}(A)$.

2. نستنتج من النتيجة 20.3. و من ما سبق أن $P_A(A_i)=\frac{P(A_i\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A_i).P_{A_i}(A)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i).P_{A_i}(A)}$.

مثال 26.3. : مؤسسة إنتاجية توجد فيها ثلاث آلات للإنتاج بنسب إنتاج على التوالي 60%، 30%، 10% من إجمالي إنتاج المؤسسة و نسبة الإنتاج الفاسد لهذه الآلات هي على التوالي 2%، 3%، 4%. سحبنا عشوائيا وحدة من هذه المؤسسة، أحسب إحتمال :

1. أن تكون هذه الوحدة فاسدة.

2. أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الآلة الثانية علما أنها صالحة.

الإجابة :

نشير بـ : M_1 للآلة الأولى، M_2 للآلة الثانية، M_3 للآلة الثالثة، C للإنتاج الفاسد، B للإنتاج الصالح . المعطيات السابقة تفسر كالآتي $P(M_1)=60\%$، $P(M_2)=30\%$. $P(M_3)=10\%$، $P_{M_1}(C)=2\%$، $P_{M_2}(C)=3\%$، $P_{M_3}(C)=4\%$.

1. إحتمال أن تكون هذه الوحدة فاسدة هو $P(C)$، من خلال دستور الإحتمالات الكلية (الخاصية 1.) لدينا $P(C)=P(M_1).P_{M_1}(C)+P(M_2).P_{M_2}(C)+P(M_3)P_{M_3}(C)=0{,}6.0{,}02+0{,}3.0{,}03+0{,}1.0{,}04$ تكافئ $P(C)=0{,}025$.

2. إحتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الآلة الثانية علما أنها صالحة هو $P_B(M_2)$. من خلال النتيجة 20.3. لدينا

$P_B(M_2)=\frac{P(M_2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(M_2)P_{M_2}(B)}{P(\bar{C})}=\frac{P(M_2)P_{M_2}(\bar{C})}{1-P(C)}=\frac{P(M_2)(1-P_{M_2}(C))}{1-P(C)}=\frac{0{,}3(1-0{,}03)}{1-0{,}025}$ تكافئ $P_B(M_2)=0{,}298$.

تمارين محلولة

التمرين الأول : صندوق يحتوي على كرات متجانسة موزعة كالآتي 6 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 3، 3 و 5 كرات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2 و 4 كرات حمراء, نسحب ثلاث كرات في آن واحد عشوائيا. علما أن الكرات أحسب إحتمال مايلي :

1. A " الكرات تحمل نفس اللون "

2. B " الكرات الثلاث ألوانها مختلفة مثنى مثنى ".

3. C " الكرات الثلاث تحمل على الأكثر كرة بيضاء ".

4. D " الكرات مجموع أرقامها 6 ".

الإجابة :

بما أن الكرات متجانسة فإن التجربة متساوية الإحتمال.

عدد عناصر Ω = عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاث كرات من بين خمسة عشرة كرة $= C_{15}^3 = 455$.

نشير بـ : ب للكرة البيضاء، خ للكرة الخضراء، ح للكرة الحمراء.

1. A " الكرات تحمل نفس اللون " معناه A " إما ثلاثة بيضاء أو ثلاثة خضراء أو ثالثة حمراء "، و بالتالي

$$P(A) = \frac{C_6^3+C_5^3+C_4^3}{455} = \frac{34}{455}.$$

2. B " الكرات الثلاث ألوانها مختلفة مثنى مثنى " معناه B " كرة بيضاء و كرة خضراء و كرة حمراء "، و بالتالي

$$P(B) = \frac{C_6^1.C_5^1.C_4^1}{455} = \frac{120}{455}.$$

3. C " الكرات الثلاث تحمل على الأكثر كرة بيضاء " معناه C " إما (كرة بيضاء و كرتين من اللونين الأحمر و الأخضر) أو (ثلاث كرات من اللونين الأحمر و الأخضر) "، و بالتالي $P(C) = \frac{C_6^1.C_9^2+C_9^3}{455} = \frac{300}{455}$.

4. D " الكرات مجموع أرقامها 6 " معناه D " إما (ثلاث كرات تحمل الرقم 2) أو (كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 و كرة تحمل الرقم 3 "، و بالتالي $P(D) = \frac{C_4^3+C_5^1.C_4^1.C_2^1}{455} = \frac{44}{455}$.

التمرين الثاني : عمر و يوسف صديقان حميمان. تعاهدا على أن لا يفترقا أبدا. لكن يوسف يعاني من مرض خطير قال الأطباء بشأنه أن إحتمال أن يعيش عشر سنوات قادمة هو 0,4. " لكل أجل كتاب " إذا كان إحتمال أن يعيش عمر هذه المدة هو 0,7 فأحسب إحتمال الحوادث الآتية :

1. C " أن يعيشا معا هذه المدة ".

2. D " أن يعيش عمر وحده هذه المدة ".

3. E " أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة ".

4. F " أن لا يعيشا معا هذه المدة ".

5. G " أن لا يعيشا هذه المدة ".

الإجابة :

نضع A " أن يعيش يوسف هذه المدة "، B " أن يعيش عمر هذه المدة ". لدينا $P(A) = 0{,}4$، $P(B) = 0{,}7$ والحادثان A و B مستقلان.

1. الحادث C " أن يعيشا معا هذه المدة " هو C " يعيش يوسف و يعيش عمر هذه المدة " بمعنى $C = A \cap B$، و بالتالي $P(C) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}28$.

2. الحادث D " أن يعيش عمر وحده هذه المدة " هو الحادث D " أن يعيش عمر هذه المدة و لا يعيش يوسف هذه المدة " بمعنى $D = B \cap \overline{A}$، و بالتالي $P(D) = P(B \cap \overline{A}) = P(B).P(\overline{A}) = P(B).(1 - P(A)) = 0{,}42$.

3. الحادث E " أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة " هو الحادث E " يعيش يوسف هذه المدة و لا يعيش عمر هذه المدة أو لا يعيش يوسف هذه المدة و يعيش عمر هذه المدة " بمعنى $E = ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))$ ، و بالتالي $P(E) = P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B) = 0{,}54$.

4. الحادث F " أن لا يعيشا معا هذه المدة " هو $F = \overline{C}$، و بالتالي $P(F) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0{,}72$.

5. الحادث G " أن لا يعيشا هذه المدة ". الحادث $\overline{G}$ " أن يعيشا هذه المدة " هو $\overline{G}$ " يعيش يوسف أو يعيش عمر هذه المدة " بمعنى $\overline{G} = A \cup B$، و بالتالي $P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$ تكافئ $P(G) = 0{,}18$.

التمرين الثالث : نسبة الرسوب حسب محاضر الامتحانات لكلية الاقتصاد هي 15% في مقياس الإحصاء و 25% في مقياس الرياضيات و في المقياسين معا هي 10%. أخذنا طالبا عشوائيا من المحاضر، المطلوب احسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الطالب راسب في الإحصاء أو الرياضيات ".

B " الطالب راسب في الإحصاء علما أنه راسب في الرياضيات ".

C " الطالب راسب في الرياضيات علما أنه راسب في الإحصاء ".

الإجابة :

نشير بـ : S لمقياس الإحصاء، M لمقياس الرياضيات. لدينا $P(S) = 15\% = 0{,}15$، $P(M) = 25\% = 0{,}25$، $P(M \cap S) = 10\% = 0{,}1$.

الحادث A " الطالب راسب في الإحصاء أو الرياضيات " هو $A = S \cup M$، و بالتالي $P(A) = P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(M \cap S) = 0{,}3$.

إحتمال الحادث B " الطالب راسب في الإحصاء علما أنه راسب في الرياضيات " هو

$$P_M(S) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4.$$

إحتمال الحادث C " الطالب راسب في الرياضيات علما أنه راسب في الإحصاء " هو

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = 0{,}66.$$

التمرين الرابع : كيسان A، B يحتويان على كرات متجانسة حيث A يضم كرتين صفراوين وثلاث كرات سوداء، أما B يضم ثلاث كرات صفراء و كرة سوداء. نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم نسحب كرة من الكيس B.

المطلوب أحسب إحتمال الحصول على :

1. كرة صفراء في السحبة الثانية بشرط أن تكون الأولى سوداء.

2. كرتين من نفس اللون.

3. الأكثر على كرة سوداء.

الإجابة :

التجربة متساوية الإحتمال لأن الكرات متجانسة. نشير بـ : ص للكرة الصفراء، س للكرة السوداء. نشكل شجرة الإحتمالات

الحادث C	$P(C)$		الحادث D	$P_C(D)$	$P(C\ et\ D)=P(C\cap D)=P(c).P_C(D)$
ص	$P(ص)=\frac{2}{5}$	الكيس B	ص	$P_{ص}(ص)=\frac{4}{5}$	$P(ص\ et\ ص)=P(ص).P_{ص}(ص)=\frac{8}{25}$
			س	$P_{ص}(س)=\frac{1}{5}$	$P(ص\ et\ س)=P(ص).P_{ص}(س)=\frac{2}{25}$
س	$P(س)=\frac{3}{5}$	الكيس B	ص	$P_{س}(ص)=\frac{3}{5}$	$P(س\ et\ ص)=P(س).P_{س}(ص)=\frac{9}{25}$
			س	$P_{س}(س)=\frac{2}{5}$	$P(س\ et\ س)=P(س).P_{س}(س)=\frac{6}{25}$

(الكيس A)

1. من الشجرة إحتمال الحصول على كرة صفراء في السحبة الثانية بشرط أن تكون الأولى سوداء هو $P_{س}(ص)=\frac{3}{5}$.

2. إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو

$P((ص\ et\ ص)ou(س\ et\ س))=P(ص\ et\ ص)+P(س\ et\ س)=\frac{8}{25}+\frac{6}{25}=\frac{14}{25}$.

3. إحتمال الحصول على الأكثر على كرة سوداء هو

$P((ص\ et\ س)ou(س\ et\ ص)ou(ص\ et\ ص))=P(ص\ et\ س)+P(س\ et\ ص)+P(ص\ et\ ص)=\frac{19}{25}$.

التمرين الخامس : يضم كيس قطعتي نقود من الصنف 50 دينار و ثلاث قطع نقدية من الصنف 100 دينار. نسحب عشوائيا قطعة نقود من الكيس، إذا كانت من الصنف 100 دينار نعيدها إلى الكيس و نضيف قطعة نقدية أخرى من الصنف 100 دينار، و إذا كانت من الصنف 50 دينار نعيدها إلى الكيس و نضيف قطعة نقدية أخرى من الصنف 50 دينار. ثم نعيد السحب مرة ثانية. علما أن القطع النقدية غير مغشوشة، أحسب إحتمال الحادثان A، B المعرفان كما يلي

A " يوجد ثلاث قطع نقدية من الصنف 50 دينار قبل السحبة الثالثة ".

B " يوجد خمس قطع نقدية من الصنف 100 دينار قبل السحبة الثالثة ".

الإجابة :

بما أن الكرات متجانسة فإن التجربة متساوية الإحتمال. نشكل شجرة الإحتمالات

السحب الأول الحادث C	$P(C)$	السحب الثاني الحادث D	$P_C(D)$	المجموعة الشاملة
100	$P(\{100,100,100\})=\frac{3}{5}$	100	$P(\{100,100,100,100\})=\frac{4}{6}$	$\Omega_1=\{100,100,100,100,100,50,50\}$
		50	$P(\{50,50\})=\frac{2}{6}$	$\Omega_2=\{100,100,100,100,50,50,50\}$
50	$P(\{50,50\})=\frac{2}{5}$	100	$P(\{100,100,100\})=\frac{3}{6}$	$\Omega_3=\{100,100,100,100,50,50,50\}$
		50	$P(\{50,50,50\})=\frac{3}{6}$	$\Omega_4=\{100,100,100,50,50,50,50\}$

إحتمال الحادث A" يوجد ثلاث قطع نقدية من الصنف 50 دينار قبل السحبة الثالثة " هو

$P(A)=\frac{3}{5}.\frac{2}{6}.\frac{3}{card\Omega_2}+\frac{2}{5}.\frac{3}{6}.\frac{3}{card\Omega_3}=\frac{3}{5}.\frac{2}{6}.\frac{3}{7}+\frac{2}{5}.\frac{3}{6}.\frac{3}{7}=\frac{36}{210}$.

إحتمال الحادث B " يوجد خمس قطع نقدية من الصنف 100 دينار قبل السحبة الثالثة "هو
$P(A)=\frac{3}{5}.\frac{4}{6}.\frac{5}{card\Omega_1}=\frac{3}{5}.\frac{4}{6}.\frac{5}{7}=\frac{12}{42}$.

التمرين السادس : يتكون قسم من 25% من الإناث و 75% من الذكور. نفترض أن 60% من الإناث و 30% من الذكور تلاميذ جيدون. نأخذ تلميذا عشوائيا من القسم. أحسب إحتمال أن يكون :

1. التلميذ جيدا.

2. التلميذ أنثى علما أنها جيدة.

الإجابة :

نشير بـ : F للأنثى، M للذكر، B للجيد. لدينا $P(F)=25\%=0,25$، $P(M)=75\%=0,75$، $P_F(B)=60\%=0,6$، $P_M(B)=30\%=0,3$. في هذا التمرين نستعمل قاعدة بايز. نشكل شجرة الإحتمالات

الحادث A_i	$P(A_i)$	الحادث A	$P_{A_i}(A)$	الحادث $A_i\cap A$	$P(A_i\cap A)=P(A_i).P_{A_i}(A)$
F	$P(F)=0,25$	B	$P_F(B)=0,6$	$F\cap B$	$P(F\cap B)=P(F).P_F(B)=0,15$
		$\overline{B}$	$P_F(\overline{B})=0,4$	$F\cap \overline{B}$	$P(F\cap \overline{B})=P(F).P_F(\overline{B})=0,1$
M	$P(M)=0,75$	B	$P_M(B)=0,3$	$M\cap B$	$P(M\cap B)=P(M).P_M(B)=0,225$
		$\overline{B}$	$P_M(\overline{B})=0,7$	$M\cap \overline{B}$	$P(M\cap \overline{B})=P(M).P_M(\overline{B})=0,525$

1. إحتمال أن يكون التلميذ جيدا هو
$P(B)=P(F\cap B)+P(M\cap B)=P(F).P_F(B)+P(M).P_M(B)=0,375$.

2. إحتمال أن يكون التلميذ أنثى علما أنها جيدة هو $P_B(F)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,375}=0,4$.

التمرين السابع : ينتج مصنع 2000 آلة حاسبة عادية و1000 آلة حاسبة علمية، من بين الآلات الحاسبة العادية يوجد 100 آلة فيها خلل ومن بين الآلات الحاسبة العلمية يوجد 30 آلة فيها خلل. إختار المراقب آلة واحدة عشوائيا، أحسب احتمال :

1. أن تكون الآلة الحاسبة ليس فيها خلل.

2. أن تكون الآلة الحاسبة عادية علما أن فيها خلل.

الإجابة :

نشير بـ : N للآلة الحاسبة العادية، S للآلة الحاسبة العلمية، D للآلة الحاسبة التي فيها خلل. لدينا
$P(N)=\frac{2000}{3000}=\frac{2}{3}$، $P(S)=\frac{1000}{3000}=\frac{1}{3}$، $P_N(D)=\frac{100}{2000}=\frac{1}{20}$، $P_S(D)=\frac{30}{1000}=\frac{3}{100}$. في هذا التمرين نستعمل قاعدة بايز. نشكل شجرة الإحتمالات

الحادث A_i	$P(A_i)$	الحادث A	$P_{A_i}(A)$	الحادث $A_i\cap A$	P
N	$P(N)=2/3$	D	$P_N(D)=1/20$	$N\cap D$	$P(N\cap D)=P(N).P_N(D)=1/30$
		$\overline{D}$	$P_N(\overline{D})=19/20$	$N\cap \overline{D}$	$P(N\cap \overline{D})=P(N).P_N(\overline{D})=19/30$
S	$P(S)=1/3$	D	$P_S(D)=3/100$	$S\cap D$	$P(S\cap D)=P(S).P_S(D)=1/100$
		$\overline{D}$	$P_S(\overline{D})=97/100$	$S\cap \overline{D}$	$P(S\cap \overline{D})=P(S).P_S(\overline{D})=97/300$

1. إحتمال أن تكون الآلة الحاسبة ليس فيها خلل هو

$$.P(\overline{D}) = P(N \cap \overline{D}) + P(S \cap \overline{D}) = P(N).P_N(\overline{D}) + P(S).P_S(\overline{D}) = \frac{19}{30} + \frac{97}{300} = \frac{287}{300}$$

2. إحتمال أن تكون الآلة الحاسبة عادية علما أن فيها خلل هو

$$.P_D(N) = \frac{P(N\cap D)}{P(D)} = \frac{P(N\cap D)}{P(N\cap D)+P(S\cap D)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30}+\frac{1}{100}} = \frac{10}{13}$$

التمرين الثامن : يضم صندوق ثلاث قطع نقدية، القطعة الأولى عادية تحمل وجه و ظهر و القطعة الثانية تحمل ظهران أما الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو ثلث. نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة.

1. أحسب إحتمال الحصول على الظهر.

2. علما أننا حصلنا على ظهر، أحسب إحتمال حصوله من القطعة الثالثة.

الإجابة :

نشير بـ : P_1 لقطعة النقود العادية، P_2 لقطعة النقود التي لها ظهران، P_3 لقطعة النقود المغشوشة، F للوجه، P للظهر. في هذا التمرين نستعمل قاعدة بابيز. نشكل شجرة الإحتمالات

الحادث A_i	$P(A_i)$	الحادث A	$P_{A_i}(A)$	الحادث $A_i \cap A$	P
P_1	$P(P_1) = 1/3$	F	$P_{P_1}(F) = 1/2$	$P_1 \cap F$	$P(P_1 \cap F) = P(P_1).P_{P_1}(F) = 1/6$
		P	$P_{P_1}(P) = 1/2$	$P_1 \cap P$	$P(P_1 \cap P) = P(P_1).P_{P_1}(P) = 1/6$
P_2	$P(P_2) = 1/3$	F	$P_{P_2}(F) = 0$	$P_2 \cap F$	$P(P_2 \cap F) = P(P_2).P_{P_2}(F) = 0$
		P	$P_{P_2}(P) = 1$	$P_2 \cap P$	$P(P_2 \cap P) = P(P_2).P_{P_2}(P) = 1/3$
P_3	$P(P_3) = 1/3$	F	$P_{P_3}(F) = 1/3$	$P_3 \cap F$	$P(P_3 \cap F) = P(P_3).P_{P_3}(F) = 1/9$
		P	$P_{P_3}(P) = 2/3$	$P_3 \cap P$	$P(P_3 \cap P) = P(P_3).P_{P_3}(P) = 2/9$

1. إحتمال الحصول على الظهر هو

$$P(P) = P(P_1 \cap P) + P(P_2 \cap P) + P(P_3 \cap P) = P(P_1).P_{P_1}(P) + P(P_2).P_{P_2}(P) + P(P_3).P_{P_3}(P)$$

تكافئ $.P(P) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{11}{18}$

2. علما أننا حصلنا على ظهر، إحتمال حصوله من القطعة الثالثة هو $.P_P(P_3) = \frac{P(P_3\cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{11}{18}} = \frac{10}{13}$

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية (المتغيرات العشوائية)

لتكن Ω مجموعة شاملة لتجربة عشوائية ما و A حادث من Ω.

تعريف 1. : المتغير العشوائي هو دالة معرفة من Ω نحو $\mathbb{R}$، و نرمز له بالرمز X، Y، Z،......الخ، بمعنى

$$A \mapsto X(A) = x.$$

و نميز نوعان من المتغيرات العشوائية، هما المتقطع (المنفصل) و المستمر (المتصل).

1. المتغير العشوائي المتقطع.

تعريف 2.1. : المتغير العشوائي المتقطع هو المتغير الذي يأخذ عدد منته من القيم.

مثال 3.1. : نرمي قطعة نقود متجانسة وجهاها P، F ثلاث مرات، وليكن X متغير عشوائي الذي يهتم بعدد مرات ظهور الوجه P. أوجد قيم المتغير العشوائي X.

الإجابة :

المجموعة الشاملة لهذه التجربة هي $\{(P،P،P)،(F،P،P)،(P،F،P)،(P،P،F)،(F،F،P)،(F،P،F)،(P،F،F)،(F،F،F)\}$.

لدينا $X(\{(F،F،F)\}) = 0$، $X(\{(P،F،F)،(F،P،F)،(F،F،P)\}) = 1$، $X(\{(P،P،F)،(P،F،P)،(F،P،P)\}) = 2$، $X(\{(P،P،P)\}) = 3$، قيم المتغير العشوائي X هي المجموعة $\{0,1,2,3\}$.

نعتبر في كل ما يأتي X متغير عشوائي متقطع قيمه المجموعة $\{x_i : 1 \leq i \leq k\}$.

تعريف 4.1. (قانون الإحتمال – دالة التوزيع) : قانون الإحتمال (دالة الكثافة الإحتمالية) للمتغير العشوائي X هو الدالة P (أو f) المعرفة كما يلي

$$P : \{x_i ; 1 \leq i \leq k\} \to [0,1]$$

$$x_i \mapsto P(X = x_i) = f(x_i)،$$

حيث $P(X = x_i)$ هو إحتمال الحادث A الذي صورته x_i بالمتغير العشوائي X. و الدالة f تحقق $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$.

أما دالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي الدالة F المعرفة كما يلي

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

مثال 5.1. : في المثال 3.1 :

1. أوجد قانون إحتمال المتغير العشوائي X.

2. أحسب $F(x = 1)$.

الإجابة :

1. إيجاد قانون إحتمال المتغير العشوائي X، لدينا

$$P : \{0,1,2,3\} \to [0,1]$$

$$x_i \mapsto P(X = x_i)،$$

إذن $0 \mapsto P(X=0) = P(\{(F،F،F)\}) = \frac{1}{8}$، $1 \mapsto P(X=1) = P(\{(P،F،F)،(F،P،F)،(F،F،P)\}) = \frac{3}{8}$، $2 \mapsto P(X=2) = P(\{(P،P،F)،(P،F،P)،(F،P،P)\}) = \frac{3}{8}$، $3 \mapsto P(X=3) = P(\{(P،P،P)\}) = \frac{1}{8}$.

نلخص ما سبق في جدول

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. حساب $F(x=1)$، لدينا

$F(x=1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le 1} P(X = x_i) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

1.1. الأمل الرياضي – التباين - الإنحراف المعياري.

تعريف 6.1. : الأمل الرياضي (التوقع الرياضي أو الوسط الحسابي) للمتغير العشوائي X هو العدد $E(X)$ ($\overline{X}$ أو μ_X) المعرف بالعبارة الآتية

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i . P(X = x_i).$$

أما التباين و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X هما العددان $V(X)$ و σ_X المعرفان كما يلي

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i).(x_i - E(X))^2 ، \sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

مثال 7.1. : أحسب الأمل الرياضي و التباين و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X للمثال 5.1.

الإجابة :

الأمل الرياضي هو $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$،

أما التباين هو

$V(X) = \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i)(x_i - E(X))^2 = \frac{1}{8}(0 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{8}(3 - \frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}$،

الإنحراف المعياري هو $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ملاحظة 8.1. : $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$.

2.1. توزيع ثنائي الحد – توزيع بواسون.

توزيع ثنائي الحد (قانون برنولي).

تعريف 9.1. (تجربة برنولي) : هي التجربة التي نهتم فيها بتحقق الحادث A خلال n إختبار مستقلة عن بعضها البعض.

تعريف 10.1. (قانون برنولي) : هو المتغير العشوائي X الذي قيمه k عدد مرات تحقق الحادث A خلال n إختبار. و بالتالي قيمه هي المجموعة $\{0,1,2,\ldots,n\}$.

تعريف 11.1. (قانون ثنائي الحد) : قانون ثنائي الحد هو قانون إحتمال تجربة برنولي وسيطاه n و p حيث $P(A)=p$ = إحتمال تحقق A خلال تجربة واحدة ، و نرمز له بالرمز $B(n,p)$، و لدينا

1. $P(X=k)=C_n^k p^k.(1-p)^{n-k}$ = إحتمال تحقق الحادث A k مرة خلال n تجربة.

2. $E(X)=np$، $V(X)=np(1-p)$.

مثال 12.1. : نرمي زهرة نرد متوازنة مرتان.

1. أحسب إحتمال الحوادث الآتية :

B " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرة واحدة ".

C " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرتان".

D " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرة على الأكثر ".

2. أحسب الأمل الرياضي و التباين.

الإجابة :

من خلال التجربة الحادث A الذي نهتم به في التجربة هو A " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 " و التجربة تكرر مرتان، إذن التجربة هي تجربة برنولي، لدينا $n=2$، $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $A=\{3,6\}$ إذن $p=P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$،

و بالتالي قانون إحتمال هذه التجربة هو $P(X=k)=C_2^k\left(\frac{1}{3}\right)^k.\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2-k}=C_2^k\frac{2^{2-k}}{9}$ مع $k\in\{0,1,2\}$.

1. B " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرة واحدة " معناه $k=1$، و بالتالي $P(B)=P(X=1)=C_2^1\frac{2^{2-1}}{9}=\frac{4}{9}$.

C " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرتان" معناه $k=2$، و بالتالي $P(C)=P(X=2)=C_2^2\frac{2^{2-2}}{9}=\frac{1}{9}$.

D " الحصول على عدد مضاعف لـ 3 مرة على الأكثر " معناه $k=1$ أو $k=0$، و بالتالي

$P(D)=P(X=0\text{ ou }X=1)=P(X=0)+P(X=1)=C_2^0\frac{2^{2-0}}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$.

2. حساب الأمل الرياضي و التباين. من خلال التعريف السابق لدينا $E(X)=np=\frac{2}{3}$، $V(X)=np(1-p)=\frac{4}{9}$.

توزيع بواسون.

إن التجارب التي تعطينا عدد مرات تحقق تجربة ما في فترة زمنية معينة قد تكون دقيقة أو يوم أو شهر .....الخ (مثلا عدد الأيام في السنة التي تغلق فيها بعض المدارس بسبب الصقيع في بلد ما)، أو في منطقة محددة قد تكون خط أو سطح أو جسم .....الخ (مثلا عدد البكتيريا في لتر من الماء) تسمى تجارب بواسون.

تعريف 13.1. : توزيع بواسون هو توزيع له إستعمالات في الظواهر المتعلقة بالزمن أو في منطقة محددة الذي نرمز له بـ $P(k,\mu)$، قانون إحتماله معطى بالعلاقة الآتية

$$P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!.e^{\mu}}$$ = إحتمال تحقق X k مرة،

حيث μ متوسط عدد مرات تحقق X في فترة زمنية معينة أو في منطقة محددة، e أساس اللوغارتم النيبري.

و لدينا $E(X)=V(X)=\mu$.

مثال 14.1. : تتعطل ماكنة لتصنيع الحلوى في المتوسط خمس مرات في الأسبوع. أحسب نسبة أن تتعطل :

1. ثلاث مرات خلال أسبوع.

2. مرة على الأكثر خلال أسبوع.

الإجابة :

إن التجربة في هذا المثال تخضع لتوزيع بواسون $P(k,\mu)$ حيث $\mu = 5$، الذي قانون إحتماله معرف بالمساواة الآتية

$$P(X=k)=\frac{5^k}{k!.e^5}.$$

1. نسبة تعطل الماكنة ثلاث مرات خلال أسبوع هي $P(X=3)=\frac{5^3}{3!.e^5}100\%=14{,}03\%$.

2. نسبة تعطل الماكنة مرة على الأكثر خلال أسبوع هي

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\left(\frac{5^0}{0!.e^5}+\frac{5^1}{1!.e^5}\right)100\%=4{,}04\%.$$

تقريب توزيع ثنائي الحد من توزيع بواسون.

في الكثير من الحالات تكون n كبيرة جدا و p صغير جدا في دستور ثنائي الحد فيصبح من الصعب إجراء الحسابات (مثلا حساب C_n^k مع $0\le k\le n$)، فتوصل الإحصائيون إلى نتائج تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون، منها $n\ge 25$ و $p\le 0{,}1$، $n\ge 30$ و $np<5$، وذالك بأخذ $\mu=np$.

مثال 15.1. : تم حقن مريض بمضاد حيوي، فإذا كان إحتمال أن يسبب هذا المضاد الحساسية 0,01، فأوجد إحتمال أنه من بين 1000 مريض تم حقنهم بهذا المضاد أن يكون :

1. ثلاثة مرضى مصابون بالحساسة.

2. عشرة مرضى مصابون بالحساسية.

3. أكثر من مريضين مصابين بالحساسية.

الإجابة :

من خلال المعطيات التجربة تخضع لتوزيع ثنائي الحد وسيطاه $n=1000$ و $p=0{,}01$، لكن $1000\ge 25$ و $0{,}01\le 0{,}1$ إذن توزيع ثنائي الحد هذا يقرب إلى قانون بواسون بأخذ $\mu=np=10$، الذي قانون إحتماله معرف بالمساواة الآتية $P(X=k)=\frac{10^k}{k!.e^{10}}$.

1. إحتمال أنه من بين 1000 مريض ثلاثة مرضى مصابون بالحساسة هو $P(X=3)=\frac{10^3}{3!.e^{10}}=0{,}00756$.

2. إحتمال أنه من بين 1000 مريض عشرة مرضى مصابون بالحساسة هو $P(X=10)=\frac{10^{10}}{10!.e^{10}}=0{,}12511$.

3. إحتمال أنه من بين 1000 مريض أكثر من مريضين مصابين بالحساسية هو $P(X>2)$، إذن

$P(X>2)=1-P(\overline{X>2})=1-P(X\le 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))$ تكافئ

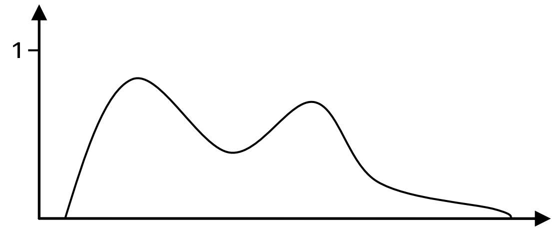
$$P(X>2)=1-\frac{1+10+50}{e^{10}}=0{,}002769.$$

2. المتغير العشوائي المستمر.

تعريف 16.2. : المتغير العشوائي المستمر هو المتغير الذي يأخذ عددا لا متناهيا من القيم.

مثال 17.2. : أطوال طلبة جامعة هواري بومدين هو متغير عشوائي مستمر.

مثال 18.2. : في المثال السابق نقوم بتوزيع الأطوال على شكل فئات و كل فئة نحسب تكرارها النسبي (الإحتمال) ثم نقوم بتمثيلها بيانيا بإستعمال المنحنى البياني كما هو موضح في الشكل.



المنحنى البياني الناتج هو تمثيل لدالة f. تسمى f بدالة الكثافة للتكرار النسبي (الإحتمالية).

تعريف 19.2. (دالة الكثافة الإحتمالية) : دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X هي الدالة f التي تحقق الشرطين الآتيين

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

ملاحظة 20.2. : ليكن a، b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$ و X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته f.

1. إحتمال أن يكون X محصور بين a و b هو

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

3. المجموعة الشاملة للمتغير العشوائي المستمر هي $\mathbb{R}$، و لدينا $P(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

مثال 21.2. : نعتبر الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\end{cases}.$$

1. تحقق أن f هي دالة كثافة لمتغير عشوائي X.

2. أحسب إحتمال أن يكون X ينتمي إلى المجال $[1,4]$.

الإجابة :

1. لدينا $x \in [0,2]$ تكافئ $0 \leq x \leq 2$ تكافئ $0 \leq \frac{1}{2}x \leq 1$ تكافئ $0 \leq f(x) \leq 1$، و منه من أجل كل x ينتمي إلى $[0,2]$ فإن $f(x) \geq 0$، و من جهة أخرى من أجل كل x ينتمي إلى $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ لدينا $f(x) = 0$، و منه من أجل كل x ينتمي إلى $\mathbb{R}$ فإن $f(x) \geq 0$. و من جهة أخرى لدينا

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 \frac{1}{2}xdx + \int_2^{+\infty} 0dx$ تكافئ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2 = 1$. من ما سبق نستنتج أن f دالة كثافة.

2. إحتمال أن يكون X ينتمي إلى المجال $[1,4]$ هو

$$P(1 \leq X \leq 4) = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}xdx + \int_2^4 0dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

نعتبر في كل ما يأتي X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته f.

تعريف 22.2. (دالة التوزيع) : دالة التوزيع للمتغير العشوائي X هي الدالة F المعرفة بـ
$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$.

ملاحظة 23.2. : ليكن a، b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$. بإستعمال دالة التوزيع لدينا
$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

مثال 24.2. : في المثال 21.2. أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X. ثم أحسب $P(1 \leq X \leq 4)$.
الإجابة :

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si \quad x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & si \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & si \quad x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt & si \quad x > 2 \end{cases}$$

تكافئ $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}tdt & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}tdt + \int_{2}^{x} 0dt & si \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$.

حساب $P(1 \leq X \leq 4)$، من خلال دالة التوزيع و الملاحظة 22.2. لدينا
$P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

نتيجة 25.2. (قاعدة لايبنتز Leibnitz) : تستخدم هذه القاعدة في إيجاد دالة الكثافة من خلال دالة التوزيع، التي تعطي بالمساواة الآتية

$f(x) = \frac{dF}{dx}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

مثال 26.2. : أوجد دالة الكثافة للمتغير العشوائي X الذي دالة توزيعه معرفة بـ

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & si \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

الإجابة :

$f(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{d(1-e^{-2x})}{dx} & si \quad x \in [0, +\infty[\\ \frac{d(0)}{dx} & si \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases} = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & si \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

الأمل الرياضي – التباين.
تعريف 27.2. : X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته f، الأمل الرياضي و التباين للمتغير العشوائي X معرفان بـ

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ ، $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2.f(x)dx$.

مثال 28.2. : أحسب الأمل الرياضي و التباين للمتغير العشوائي X للمثال 21.2..

الإجابة :

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{4}{3}$.

أما التباين هو $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2.f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2(x-\frac{4}{3})^2x\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{9}x\,dx=\frac{2}{9}$.

3. خواص الأمل الرياضي و التباين.

ليكن a، b عددان حقيقيان و X، Y متغيران عشوائيان قيمهما على الترتيب $(x_i)_{i\in I}$ و $(y_j)_{j\in J}$ حيث I و J قد تكونان منتهيتان أوغير منتهيتان.

تعريف 29.3. : نقول عن X و Y أنهما مستقلان إذا و فقط إذا كان من أجل كل i ينتمي إلى I و من أجل كل j ينتمي إلى J فإن الحادثان A_i، B_j اللذان صورتهما على الترتيب x_i، y_j بالمتغيران العشوائيان X، Y مستقلان.

نتيجة 30.3. :

1. $E(a.X+b)=a.E(X)+b$.

2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

3. إذا كان X و Y مستقلان فإن $E(X.Y)=E(X).E(Y)$.

نتيجة 31.3. (توقع دالة) : يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية .....الخ. ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته f و Y متغير عشوائي تابع له دالة كثافته g. فإنه

1. في حالة التوزيع المتقطع لدينا $E(Y)=E\big(g(x_i)\big)=\sum_{i\in I}g(x_i).f(x_i)=\sum_{i\in I}g(x_i).P(X=x_i)$.

2. في حالة التوزيع المستمر لدينا $E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x).f(x)dx$.

مثال 32.3. :

1. نلقي قطعة نقود متجانسة وجهيها P و F ثلاث مرات، وليكن X متغير عشوائي الذي يهتم بعدد مرات الحصول على الوجه P، و ليكن المتغير العشوائي Y المعرف بـ $Y=X^2$. أحسب $E(Y)$.

2. X متغير عشوائي دالة كثافته معرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & si \quad x\in[0,2]\\ 0 & si \quad x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[\end{cases}$$،

و Y متغير عشوائي تابع له دالة كثافته g معرفة بـ $g(x)=\frac{1}{4}(3x^2-2x)$. أحسب $E(Y)$.

الإجابة :

1. لدينا

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$Y=g(x_i)=x_i^2$	0	1	4	9
$g(x_i).P(x_i)$	0	3/8	12/8	9/8

و منه $E(Y)=E\big(g(x_i)\big)=\sum_{i=1}^4g(x_i).f(x_i)=\sum_{i=1}^4g(x_i).P(X=x_i)=3$.

2. لدينا $E(Y)=E\big(g(x)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x).f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{8}(3x^3-2x^2)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=\frac{5}{6}$.

نتيجة 33.3. :
1. $V(X) = E((X-\mu_X)^2)$.
2. $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
3. $V(a.X+b) = a^2.V(X)$.
4. إذا كان X و Y مستقلان فإن $V(X+Y) = V(X-Y) = V(X) + V(Y)$.

مثال 34.3. : نلقي قطعة نقود متجانسة وجهيها P و F ثلاث مرات، وليكن X نتغير عشوائي الذي يهتم بعدد مرات الحصول على الوجه P.
1. أحسب $V(X)$ بإستخدام $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
2. ليكن المتغير العشوائي Y المعرف بـ $Y = 3X$، أحسب $V(Y)$.
3. نلقي حجر نرد متجانس مرة واحدة و نسمي Z النتيجة المحصل عليها، أحسب $V(W)$ حيث $W = Z - 2Y$.
الإجابة :
1. لدينا

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$x_i.P(x_i)$	0	3/8	6/8	3/8
$x_i^2.P(x_i)$	0	3/8	12/8	9/8

و بالتالي $E^2(X) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ و $E(X^2) = 3$، و منه $V(X) = \frac{3}{4}$.
2. $V(Y) = V(3X) = 3^2.V(X) = \frac{27}{4}$.
3. لدينا $V(W) = V(Z-2Y) = V(Z) + V(2Y) = V(Z) + 2^2V(Y) = V(Z) + 27$، لكن $V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$ تكافئ

$V(Z) = \frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{4^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{6^2}{6} - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\right)^2 = \frac{35}{12}$، و منه $V(W) = \frac{359}{12}$.

نتيجة 35.3. (المتغيرة المعيارية) : ليكن X^* متغير عشوائي معرف بالعبارة الآتية

$$X^* = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}.$$

تسمى المساواة السابقة بالمتغيرة المعيارية التي تحول المتغير العشوائي X إلى المتغير العشوائي X^*، و هذا الأخير يحقق $E(X^*) = 0$ و $V(X^*) = 1$.
البرهان : بإستعمال النتيجة 30.3. (1) ينتج

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X}E(X) - \frac{\mu_X}{\sigma_X} = 0.$$

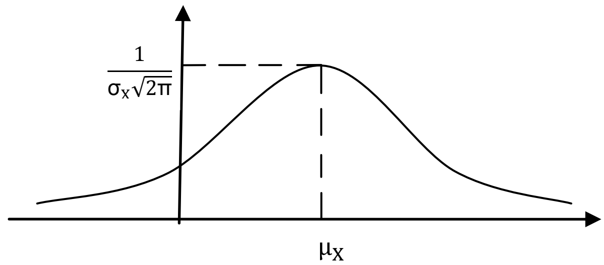
بإستخدام النتيجة 33.3 (3) ينتج $V(X^*) = V\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) = V\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{\mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2}V(X) = 1$.

4. المتغيرات العشوائية المستمرة المألوفة. سنتناول في هذا الجزء التوزيع الطبيعي و التوزيع الطبيعي القياسي، توزيع كاي مربع، توزيع ستييودنت و توزيع فيشر.

1.4. التوزيع الطبيعي (توزيع لابلاس قوس) : يرمز له بالرمز $N(\mu_X.\sigma_X)$ دالة كثافته f معطاة بالعبارة الآتية عبارتها معرفة كما يلي

$$.f(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

بيان دالة كثافته يأخذ شكل الجرس حول النقطة مركزية (ذروة) $n(\mu_X,\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}})$، كما هو موضح في الشكل



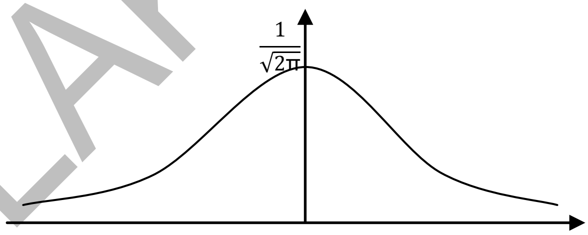
2.4. التوزيع الطبيعي القياسي (التوزيع الطبيعي المعياري) : هو التوزيع الناتج عن تحويل التوزيع الطبيعي $N(\mu_X.\sigma_X)$ باستعمال المتغيرة المعيارية

$$،Z=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}.........(1)$$

حيث Z يشير إلى التوزيع الطبيعي القياسي، و بالتالي رمزه هو $N(0,1)$. دالة كثافته معرفة بـ

$$.g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

بيان دالة كثافته موضح في الرسم أدناه



ملاحظة 36.4. : من التعريف 19.2. و البيان السابق فإن مساحة السطحان المتناظران بالنسبة لمحور التراتيب تساوي 0,5. و لحساب الإحتمال (المساحة) المتعلق بهذا التوزيع نستعمل جدول خاص نقرأ منه مباشرة الإحتمال دون اللجوء لحساب تكامل الدالة g (أنظر الجدول الصفحة 47).

مثال 37.4. : بإستعمال جدول التوزيع الطبيعي القياسي أحسب $p(0<z<2,3)$، $p(0<z<1,36)$، $p(z<2,34)$، $p(z>2,5)$، $p(-2,1<z<2)$، $p(1,1<z<2,21)$.

الإجابة :

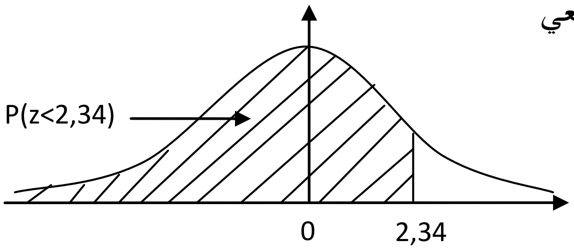
1. من الجدول المقابل (المأخوذ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي) لدينا

$$.p(0<z<2,3)=0,4893$$

Z	0.00
⋮	
2,3	0,4893

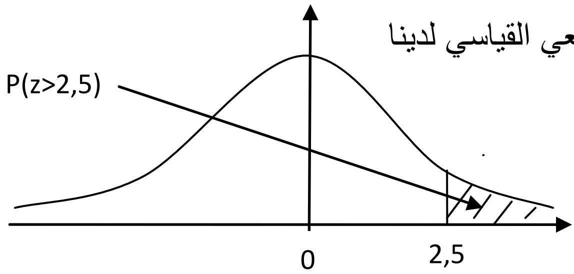
Z	 0,06
⋮	
1,3	...

2. من الجدول المقابل (المأخوذ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي) لدينا $p(0 < z < 1,36) = 0,4131$.



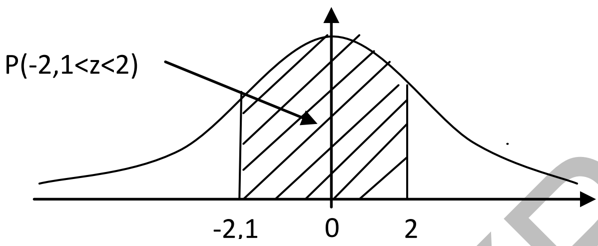
3. من الشكل المقابل و الملاحظة 36.4. و جدول التوزيع الطبيعي القياسي لدينا

$$p(z < 2,34) = 0,5 + p(0 < z < 2,34)$$
$$= 0,5 + 0,4904 = 0,9904.$$



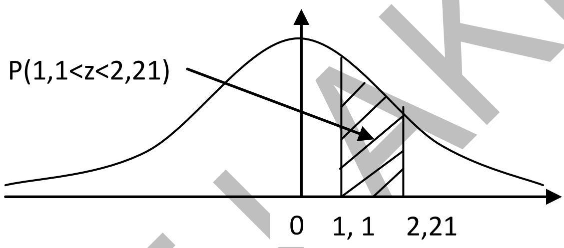
4. من الشكل المقابل و الملاحظة 36.4. و جدول التوزيع الطبيعي القياسي لدينا

$$p(z > 2,5) = 0,5 - p(0 < z < 2,5)$$
$$= 0,5 - 0,4938 = 0,0062.$$



5. من الشكل المقابل و جدول التوزيع الطبيعي القياسي لدينا

$$p(-2,1 < z < 2) = p(-2,1 < z < 0)$$
$$+ p(0 < z < 2) = 0,4821 + 0,4772$$
$$= 0,9593.$$



6. من الشكل المقابل و جدول التوزيع الطبيعي القياسي لدينا

$$p(1,1 < z < 2,21) = p(0 < z < 2,21)$$
$$-p(0 < z < 1,1) = 0,4864 - 0,3634$$
$$= 0,123.$$

نتيجة 38.4. (تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي) : ليكن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ثنائي الحد، بمعنى $X \approx B(\mu_X, \sigma_X)$ حيث $\mu_X = n.p$ و $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$. إذا كان n كبير جدا فإنه يمكن أن تقريب X من التوزيع الطبيعي، بمعنى $X \approx N(\mu_X, \sigma_X)$. بإستعمال المتغيرة المعيارية فإن دالة الإختبار هي

$$Z = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}.$$

من بين النتائج التي توصل إليها الإحصائيون من أجل تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي هي $n.p > 5$ و $n(1-p) > 5$، $np(1-p) \geq 9$، $n \geq 20$ و $n.p \geq 10$ و $n(1-p) \geq 10$. لكي ننتقل من توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي نميز حالتان

1. إذا كان k عدد طبيعي محصور بين 0 و n فإن

$$P(X=k)=P\left(k-\frac{1}{2}\leq X\leq k+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{k-\frac{1}{2}-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}\leq Z\leq\frac{k+\frac{1}{2}-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}\right).$$

2. إذا كان a و b عددان طبيعيان محصوران بين 0 و n فإن

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(a-\frac{1}{2}\leq X\leq b+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{a-\frac{1}{2}-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}\leq Z\leq\frac{b+\frac{1}{2}-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}\right).$$

مثال 39.4 : نرمي قطعة نقود متجانسة وجهيها P و F ستة عشرة مرة. أحسب إحتمال

1. الحصول على الوجه P ثماني مرات.

2. الحصول على الوجه P على الأكثر تسع مرات.

الإجابة : نلاحظ أن هذه التجربة تركز على تحقق الحادث A " ظهور الوجه P "، و بالتالي تخضع لتوزيع ثنائي الحد وسيطاه $n=16$ و $p=\frac{1}{2}$. لكن نلاحظ أن $np=8>5$ و $n(1-p)=8>5$، حسب النتيجة **38.4**. نقرب هذا التوزيع إلى التوزريع الطبيعي، و دالة الإختبار هي

$$Z=\frac{X-8}{2}.$$

1. إحتمال الحصول على الوجه P ثمانيي مرات هو

$$P(X=8)=P\left(8-\frac{1}{2}\leq X\leq 8+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{\frac{15}{2}-8}{2}\leq\frac{X-8}{2}\leq\frac{\frac{17}{2}-8}{2}\right)=P(-0{,}25\leq Z\leq 0{,}25)$$

تكافئ $P(X=8)=2P(0\leq Z\leq 0{,}25)=0{,}1974$.

2. إحتمال الحصول على الوجه P على الأكثر تسع مرات هو

$$P(X\leq 9)=P\left(X\leq 9+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{X-8}{2}\leq\frac{\frac{19}{2}-8}{2}\right)=P(Z\leq 0{,}75)=0{,}5+P(0\leq Z\leq 0{,}75)$$

تكافئ $P(X\leq 9)=0{,}5+0{,}2734=0{,}7734$.

قبل أن نعرض لبقية التوزيعات نذكر ببعض المفاهيم.

تعريف 40.4 : العينة هي مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي ولها نفس فرصة الإنتقاء (نفس إحتمال الإختيار). أما حجمها هو عدد الأفراد المكونة منها، و نشر له بالحرف n.

تعريف 41.4 : درجة الحرية هي العدد v المعرف بالعبارة $v=n-1$.

3.4. توزيع كاي مربع : نرمز له بالرمز χ^2، دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية

$$f(\chi^2)=c(\chi^2)^{\frac{v-2}{2}}e^{-\frac{\chi^2}{2}}.$$

حيث c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت منحنى دالة الكثافة تساوي 1. و لإيجاد إحتمالات χ^2 فإننا نستخدم جدول خاص بهذا التوزيع، حيث نجد أفقيا المساحات المقابلة (الإحتمال) وعموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم

χ^2 (أنظر الجدول صفحة 48)، و نكتب $\chi^2(p.v)$ أو $P(\chi_v^2 \le c)$.

مثال 42.4 : بإستعمال جدول χ^2 أحسب $\chi^2(0{,}9.10)$، $P(\chi_{25}^2 \le 37{,}65)$، $P(\chi_{30}^2 > 50{,}89)$.

الإجابة :

1. من الجدول المقابل (المأخوذ من جدول توزيع χ^2) لدينا

v \ p	0,9
⋮	⋮
10	 15,99

$$\chi^2(0{,}9.10) = 15{,}99$$

2. من الجدول المقابل (المأخوذ من جدول توزيع χ^2) لدينا

v \ p	0,95
⋮	⋮
25	 37,65

$$P(\chi_{25}^2 \le 37{,}65) = 0{,}95.$$

3. بإستعمال $P(A) = 1 - P(\bar{A})$، لدينا

$$P(\chi_{30}^2 > 50{,}89) = 1 - P\left(\overline{\chi_{30}^2 > 50{,}89}\right) = 1 - P(\chi_{30}^2 \le 50{,}89) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01.$$

4.4. توزيع ستيبودنت : نرمز له بالرمز t، يشبه هذا التوزيع كثيرا التوزيع الطبيعي وهو بديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا. دالة كثافته الإحتمالية تعطى بالعلاقة التالية

$$f(t) = c\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+2}{2}}.$$

و نكتب $t(p.v)$ أو $P(t_v^2 \le c)$. تحسب إحتمالات توزيع ستيبودنت من خلال جدول خاص بهذا التوزيع، حيث تسجل درجات الحرية في العمود الأيسر وفي الأعلى يقرأ الإحتمال وفي الداخل تقرأ قيم t (أنظر الجدول صفحة 49).

مثال 43.4 : بإستعمال جدول ستيبودنت أحسب $t(0{,}8.40)$، $P(t_{25} \le 2{,}0595)$، $P(t_{50} > 2{,}4033)$.

الإجابة : بنفس الكيفية التي رأيناها في المثال السابق نجد

$$t(0{,}8.40) = 0{,}8507,\ P(t_{25} \le 2{,}0595) = 0{,}975,\ P(t_{50} > 2{,}4033) = 0{,}01.$$

5.4. توزيع فيشر : هو التوزيع الذي دالة كثافته الإحتمالية معرفة كما يلي

$$f(F) = \frac{cF^{\frac{v_1-2}{2}}}{(v_2+v_1F)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}.$$

مع $F > 0$. نرمز له بالرمز $F(p.v_1.v_2)$، حيث v_2، v_1 هما درجتا الحرية الناتجتان من أخذ عينتين من مجتمعين X و Y. و لحساب قيمة F المقابلة لـ p و v_2 و v_1 فإننا نستعمل جدول خاص بهذا التوزيع (أنظر الجدولان في الصفحتين 50 و 51).

ملاحظة 44.4 : هناك بعض قيم فيشر المقابلة للمساحات الصغيرة لا توجد في جدول فيشر، ولإيجادها نستعمل القاعدة الآتية

مثال 45.4. : باستعمال جدول فيشر أحسب $F(0{,}95.7.10)$، $F(0{,}025.10.9)$.

الإجابة :

1. من خلال الجدول المقابل (المأخوذ من جدول فيشير من أجل $p = 0{,}95$) لدينا

$$F(0{,}95.7.10) = 3{,}135$$

$v_2 \backslash v_1$	7
⋮	⋮
10	 3,135

2. من الملاحظة 44.4. و جدول فيشر الخاص بـ $p = 0{,}975$ لدينا

$$F(0{,}025.10.9) = \frac{1}{F(1-0{,}025.9.10)} = \frac{1}{F(0{,}975.9.10)} = \frac{1}{3{,}779} = 0{,}2646 .$$

.

تمارين محلولة

التمرين الأول : يحتوي كيس على متجانسة موزعة كما يلي 5 كرات تحمل الرقم 10 و ثلاث كرات تحمل الرقم 15، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين، المطلوب

1. حدد قيم المتغير العشوائي X.

2. أحسب $E(X)$ و $V(X)$.

3. أجب على الأسئلة السابقة باستعمال المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات التي تحمل الرقم 10.

الإجابة :

1. تحديد قيم المتغير العشوائي X. الحوادث الناجمة عن هذه التجربة هي $A_1 = \{10,10\}$، $A_2 = \{15,10\}$، $A_3 = \{15,15\}$، صورهم بالمتغير العشوائي X على الترتيب هي $X(A_1) = 20$، $X(A_2) = 25$، $X(A_3) = 30$، و بالتالي قيم المتغير العشوائي هي المجموعة $\{20,25,30\}$.

2. أحسب $E(X)$ و $V(X)$. لحسابهما علينا تحديد قانون إحتمال X، لدينا $P(X = 20) = P(A_1) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28}$،

$P(X = 25) = P(A_2) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$، $P(X = 30) = P(A_3) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$. و منه

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P(X = x_i) = 20.\frac{10}{28} + 25.\frac{15}{28} + 30.\frac{3}{28} = \frac{665}{28}$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} P(X = x_i).(x_i - E(X))^2 = \frac{10}{28}\left(20 - \frac{665}{28}\right)^2 + \frac{15}{28}\left(25 - \frac{665}{28}\right)^2 + \frac{3}{28}\left(30 - \frac{665}{28}\right)^2$$

تكافئ $V(X) = \frac{220500}{21952}$.

التمرين الثاني : A، B، C ثلاثة صناديق تحتوي كرات متجانسة، الصندوق A فيه 5 كرات بيضاء، الصندوق B فيه 3 كرا ت بيضاء و كرتان سوداوان، الصندوق C فيه كرة بيضاء و 4 كرت سوداء. يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة وحسب الرقم المحصل عليه يسحب كرتين في آن واحد عشوائيا من أحد الصناديق الثلاثة بالطريقة التالية : إذا كان الرقم هو 1 نسحب من الصندوق A. إذا كان الرقم هو 2 أو 3 نسحب من الصندوق B، إذا كان الرقم هو 4 أو 5 أو 6 نسحب من الصندوق C.

1. أحسب إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

2. ليكن X متغير عشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء.

ا. أوجد قانون إحتمال X.

ب. أحسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

الإجابة : إن هذه التجربة تخضع لدستور الإحتمالات الكلية، لدينا $P(A) = \frac{1}{6}$، $P(B) = \frac{2}{6}$، $P(C) = \frac{3}{6}$. نضع D " الحصول على كرتين من نفس اللون " و E " الحصول على كرتين بيضاوين " و F " الحصول على كرتين سوداوين "، إن E و F مستقلان، إذن $P(D) = P(E \cup F) = P(E) + P(F)$، بتطبيق دستور الإحتمالات الكلية على E و F نجد

$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) = \frac{1}{6}\frac{C_5^2}{C_5^2} + \frac{2}{6}\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{16}{60}$،

$P(F) = P(B \cap F) + P(C \cap F) = P(B)P_B(F) + P(C)P_C(F) = \frac{2}{6}\frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{3}{6}\frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{20}{60}$، و منه $P(D) = \frac{36}{60}$.

2. X متغير عشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء.

ا. إيجاد قانون إحتمال X. الحوادث الناجمة عن هذا السحب هي A_0 " كرتان سوداوان "، A_1 " كرة بيضاء وكرة سوداء "، A_2 " كرتان بيضاوان "، صورة هذه الحوادث بـ X هي $X(A_0) = 0$، $X(A_1) = 1$، $X(A_2) = 2$، قانون الإحتمال هو $P(X = 0) = P(A_0) = P(F) = \frac{20}{60}$، $P(X = 2) = P(A_2) = P(E) = \frac{16}{60}$، و بتطبيق دستور الإحتمالات الكلية على A_1 نجد $P(X = 1) = P(A_1) = P(B \cap A_1) + P(C \cap A_1) = P(B)P_B(A_1) + P(C)P_C(A_1)$ تكافي $P(X = 1) = \frac{2}{6}\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \frac{3}{6}\frac{C_1^1 C_4^1}{C_5^2} = \frac{24}{60}$.

ب. حساب الانحراف المعياري لـ X. لدينا $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P(X = x_i) = 0\frac{20}{60} + 1\frac{24}{60} + 2\frac{16}{60} = \frac{56}{60}$، $V(X) = \sum_{i=1}^{3} P(X = x_i).(x_i - E(X))^2 = \frac{20}{60}\left(0 - \frac{56}{60}\right)^2 + \frac{24}{60}\left(1 - \frac{56}{60}\right)^2 + \frac{16}{60}\left(2 - \frac{56}{60}\right)^2$ تكافئ $V(X) = \frac{128640}{216000} = \frac{134}{225}$، إذن $\sigma_X = \sqrt{\frac{134}{225}} = \frac{\sqrt{134}}{15}$.

التمرين الثالث : في إمتحان شهادة البكالوريا كانت نسبة النجاح 40%. ما إحتمال ضمن 6 أصدقاء مرشحين

1. أن لا يكون أي ناجح.

2. أن ينجح الأصدقاء الستة.

3. أن ينجح إثنان فقط.

4. أن ينجح إثنان على الأقل.

الإجابة : نلاحظ أن هذه التجربة تخضع لدستور ثنائي الحد حيث الحادث A" النجاح في البكالوريا " و وسيطاه $n = 6$، $p = 40\% = 0{,}4$، و بالتالي قانون إحتماله هو $P(X = k) = C_6^k 0{,}4^k . 0{,}6^{6-k}$ مع $0 \leq k \leq 6$.

1. أن لا يكون أي ناجح معناه $k = 0$، و منه إحتمال أن لا يكون أي ناجح هو $P(X = 0) = C_6^0 0{,}4^0 . 0{,}6^6 = 0{,}046656$.

2. أن ينجح الأصدقاء الستة معناه $k = 6$، و منه إحتمال أن ينجح الأصدقاء الستة هو $P(X = 6) = C_6^6 0{,}4^6 . 0{,}6^0$ تكافئ $P(X = 6) = 0{,}004096$.

3. أن ينجح إثنان فقط معناه $k = 2$، و منه إحتمال أن ينجح إثنان فقط هو $P(X = 2) = C_6^2 0{,}4^2 . 0{,}6^4 = 0{,}31104$.

4. أن ينجح إثنان على الأقل معناه $k \geq 2$، و منه إحتمال أن ينجح إثنان على الأقل هو $P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{X \geq 2})$ أي $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - (0{,}046656 + C_6^1 0{,}4^1 . 0{,}6^5)$ تكافئ $P(X \geq 2) = 0{,}76672$.

التمرين الرابع : يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته لقطع الغيار التي تشمل ثلاثة أنواع A، B، C. تمثل السلعة A ربع المدخرات بينما تمثل B ثلثها و تمثل C باقي المدخرات. 40% من السلعة A و 75% من السلعة B و 24% من السلعة C كلها مخفضة الإئتمان. نضع الحادث S " القطعة مخفضة الإئتمان ".

I. أخذ زبون ما قطعة عشوائيا.

1. أحسب إحتمال أن تكون القطعة مخفضة الائتمان.

2. إستنتج إحتمال أن تكون القطعة من السلعة B علما أنها مخفضة الإئتمان.

II. نأخذ خمسة قطع عشوائيا بطرق مستقلة. المطلوب أحسب إحتمال ما يلي :

ا. الحصول على ثلاث قطع مخفضة الإئتمان.
ب. لا نحصل على قطعة مخفضة الإئتمان.
ج. نحصل على الأكثر على قطعة مخفضة الإئتمان.
الإجابة :

I. بالنسبة لهذا الجزء نطبق دستور الإحتمالات الكلية، لدينا $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(B) = \frac{1}{3}$، $P(C) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$، $P_A(S) = 40\%$، $P_B(S) = 75\%$، $P_C(S) = 24\%$. إذن

1. إحتمال أن تكون القطعة مخفضة الائتمان هو

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = P(A)P_A(S) + P(B)P_B(S) + P(C)P_C(S) = 0,45$$

2. إحتمال أن تكون القطعة من السلعة B علما أنها مخفضة الإئتمان هو $P_S(B) = \frac{P(B\cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)P_B(S)}{P(S)} = \frac{0,25}{0,45}$ تكافئ $P_S(B) = 0,5555$.

II. نلاحظ أن هذه التجربة تخضع لدستور ثنائي الحد حيث الحادث S" القطعة مخفضة الإئتمان " و وسيطاه $n = 5$، $p = 0,45$، و بالتالي قانون إحتماله هو $P(X = k) = C_5^k 0,45^k . 0,55^{5-k}$ مع $0 \leq k \leq 5$.

ا. الحصول على ثلاث قطع مخفضة الإئتمان معناه $k = 3$، و منه إحتمال الحصول على ثلاث قطع مخفضة الإئتمان هو $P(X = 3) = C_5^3 0,45^3 . 0,55^2 = 0,2756$.

ب. لا نحصل على قطعة مخفضة الإئتمان. نضع D " نحصل على قطعة مخفضة الإئتمان " و $\overline{D}$ " لا نحصل على قطعة مخفضة الإئتمان "، إذن $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - P(X = 1) = C_5^1 0,45^1 . 0,55^4 = 0,7941$.

ج. نحصل على الأكثر على قطعة مخفضة الإئتمان معناه $k \leq 1$، و بالتالي إحتمال الحصول على الأكثر على قطعة مخفضة الإئتمان هو $P(X \leq 1) = P(X = 1 \text{ ou } X = 0) = P(X = 1) + P(X = 0)$ تكافئ $P(X \leq 1) = C_5^1 0,45^1 . 0,55^4 + C_5^0 0,45^0 . 0,55^5 = 0,2562$.

التمرين الخامس : إذا كان متوسط عدد الحوادث الشهرية في إحدى الطرق هو 0,2. أختير شهرا عشوائيا، أحسب نسبة
1. وقوع حادثين.
2. وقوع حادثين على الأقل.
الإجابة :

إن هذه التجربة تخضع لتوزيع بواسون حيث $\mu = 0,2$ قانون إحتماله $P(X = k) = \frac{0,2^k}{k! . e^{0,2}}$.

1. وقوع حادثين معناه $k = 2$، إذن نسبة وقوع حادثين هي $P(X = 2) = \frac{0,2^2}{2! . e^{0,2}} = 0,01637$.

2. وقوع حادثين على الأقل معناه $k \geq 2$، إذن نسبة وقوع حادثين على الأقل هي $P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{X \geq 2})$ تكافئ

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 0)\big) = 1 - \left(\frac{0,2^1}{1! . e^{0,2}} + \frac{0,2^0}{0! . e^{0,2}}\right) = 1 - \frac{1,2}{e^{0,2}}$$

تكافئ $P(X \geq 2) = 1 - 0,98248 = 0,01752$.

التمرين السادس : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} k.x & \text{si} \quad x \in [0,4] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

1. أوجد k حتى تكون f دالة كثافة.

2. X متغير عشوائي دالة كثافته f، أحسب توقعه و تباينه.

الإجابة :

1. إيجاد k حتى تكون f دالة كثافة. حتى تكون تكون f دالة كثافة يجب أن يتحقق

ا. $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$. من أجل كل $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ لدينا $f(x) = 0$، إذن $f(x) \geq 0$.
من أجل كل $x \in [0,4]$ لدينا $f(x) = k.x$، إذن $f(x) \geq 0$ تكافئ $k.x \geq 0$ تكافئ $k \geq 0$ تكافئ $k \in \mathbb{R}_+$.

ب. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ تكافئ $\int_0^4 k.xdx = 1$ تكافئ $\left[\frac{k}{2}x^2\right]_0^4 = 1$ تكافئ $8k = 1$ تكافئ $k = \frac{1}{8}$.

2. حساب توقع و تباين X. توقع X هو $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^2dx = \frac{8}{3}$، أما التباين هو
$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E(X))^2.f(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}(x - \frac{8}{3})^2xdx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{64}{9}xdx = \frac{64}{9}$.

التمرين السابع : تقدر شركة لإنتاج الشاحنات أن مدة صلاحية الشاحنة (مقدرة بالسنوات) تخضع للدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 0,0625.e^{-0,0625.x} & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & si \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}.$$

1. برهن أن f دالة كثافة لمتغير عشوائي X.

2. أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية الشاحنة أكبر من 20 سنة.

3. ما هو معدل مدة صلاحية الشاحنة.

الإجابة :

1. نبرهن أن f دالة كثافة لمتغير عشوائي X.

ا. نبرهن أن $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$. من أجل كل $x \in]-\infty, 0[$ لدينا $f(x) = 0$، إذن $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in]-\infty, 0[$. و من جهة أخرى $x \in [0, +\infty[$ تكافئ $x \geq 0$ تكافئ $-0,0625.x \leq 0$ تكافئ $e^{-0,0625.x} \leq 1$ تكافئ $0 < e^{-0,0625.x} \leq 1$ تكافئ $0 < 0,0625e^{-0,0625.x} \leq 0,0625$ تستلزم $0 \leq f(x)$ من أجل كل $x \in [0, +\infty[$.

ب. نبرهن أن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. لدينا $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} 0,0625.e^{-0,0625.x}dx = \left[-e^{-0,0625.x}\right]_0^{+\infty}$ تكافئ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\lim_{x\to+\infty} e^{-0,0625.x} + e^0 = 1$.

2. إحتمال أن تكون مدة صلاحية الشاحنة أكبر من 20 سنة هو $P(X > 20) = \int_{20}^{+\infty} f(x)dx$ تكافئ
$P(X > 20) = \int_{20}^{+\infty} 0,0625.e^{-0,0625.x}dx = \left[-e^{-0,0625.x}\right]_{20}^{+\infty} = e^{-0,0625.20} = 0,2865$.

3. معدل مدة صلاحية الشاحنة هو الأمل الرياضي، لدينا $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 0,0625x.e^{-0,0625.x}dx$
بالتجزئة نجد $E(X) = \left[-x.e^{-0,0625.x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-0,0625.x}dx$ تكافئ
$E(X) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{0,0625}\frac{0,0625x}{e^{0,0625x}} + 0 - \frac{1}{0,0625}\left[e^{-0,0625.x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{0,0625}$.

التمرين الثامن : لاحظ مدير ثانوية ارتفاع عدد الغيابات مع تكررها عند بعض التلاميذ و بحث في الأمر فوجد أن أسباب الغياب تتمثل في المرض أو مشاكل النقل. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يحدد المدة الزمنية (بالأيام) التي يدرس فيها أحمد دون غياب دالة كثافته f معرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}0{,}01.\,e^{-0{,}01.x} & \text{si} \quad x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{si} \quad x\in]-\infty,0[\end{cases}.$$

I. أحسب إحتمال أن تكون الفترة الدراسية لأحمد دون غياب

1. محصورة بين 30 و 60 يوم.

2. أكثر من 90 يوم.

II. إذا علمت أن أحمد يتابع دروسه منذ 100 يوم دون غياب أي درس، ما إحتمال أن يكمل الثلاثي الذي مدته 110 يوم دون غياب ؟

III. ما هي الفترة المتوسطة التي يزاول فيها أحمد دراسته دون أي غياب ؟

IV. تضم الثانوية 1000 تلميذا، الفترات الدراسية التي يقضيها كل تلميذ دون غياب هي متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى دالة كثافتها f السابقة. نضع Y المتغير العشوائي الذي يمثل عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة 100 بوم .

1. ما هي طبيعة المتغير العشوائي الذي يخضع له Y.

2. ما هو العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة 100 يوم ؟

الإجابة :

1.I إحتمال أن تكون الفترة الدراسية لأحمد دون غياب محصورة بين 30 و 60 يوم هو $P(30\le X\le 60)$، إذن

$P(30\le X\le 60)=\int_{30}^{60}f(x)dx=\int_{30}^{60}0{,}01.\,e^{-0{,}01.x}dx=\left[-e^{-0{,}01.x}\right]_{30}^{60}$ تكافئ

$P(30\le X\le 60)=e^{-0{,}01.30}-e^{-0{,}01.60}=e^{-0{,}3}-e^{-0{,}6}=0{,}192$.

2.I إحتمال أن تكون الفترة الدراسية لأحمد دون غياب محصورة أكثر من 90 يوم هو $P(X>90)$، إذن

$P(X>90)=\int_{90}^{+\infty}f(x)dx=\int_{90}^{+\infty}0{,}01.\,e^{-0{,}01.x}dx=\left[-e^{-0{,}01.x}\right]_{90}^{+\infty}=e^{-0{,}9}=0{,}4065$.

II. نسمي A " أحمد يتابع دروسه منذ 100 يوم دون غياب " و B " أحمد يتابع دروسه 110 يوم دون غياب ". إحتمال أن يكمل الثلاثي الذي مدته 110 يوم دون غياب هو $P_A(B)$، إذن $P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(X\geq 110\ \cap X\geq 100)}{P(X\geq 100)}$ تكافئ

$P_A(B)=\frac{P(X\geq 110\ )}{P(X\geq 100)}=\frac{\int_{110}^{+\infty}0{,}01e^{-0{,}01}}{\int_{100}^{+\infty}0{,}01e^{-0{,}01}}=0{,}9048$.

III. الفترة المتوسطة التي يزاول فيها أحمد دراسته دون أي غياب هي الأمل الرياضي $E(X)$، إذن

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.\,f(x).\,dx=\int_{0}^{+\infty}0{,}01xe^{-0{,}01.x}dx=\left[-xe^{-0{,}01.x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-0{,}01.x}dx$ تكافئ

$E(X)=\left[\frac{-1}{0{,}01}e^{-0{,}01.x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{0{,}01}=100$، الفترة المتوسطة التي يزاول فيها أحمد دراسته دون أي غياب هي 100 يوم.

1.VI طبيعة المتغير العشوائي الذي يخضع له Y هو توزيع ثنائي الحد وسيطاه $n=1000$ و

$p=P(X\geq 100)=\int_{100}^{+\infty}0{,}01e^{-0{,}01.x}dx=0{,}367$.

2.VI العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة 100 يوم هو $E(Y)$، لدينا $E(Y)=n.\,p=367$، و بالتالي العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة 100 يوم هو 367 يوم.

التمرين التاسع : أعمار بطاريات يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ساعة وتباينه 100 ساعة مربع، أخذت بطارية عشوائيا، أحسب إحتمال :

1. أن يقل عمرها عن 65 ساعة.

2. أن يزيد عمرها عن 105 ساعة.
3. أن يكون عمرها بين 60 و 120 ساعة.
الإجابة :
نضع X : أعمار بطاريات، $\mu_X = 80$، $V(X) = 100$. بما أن X يخضع لتوزيع طبيعي نحوله إلى التوزيع الطبيعي القياسي بإستعمال العبارة (1)، بمعنى $Z = \frac{X-80}{10}$. و منه

1. إحتمال أن يقل عمرها عن 65 ساعة هو $p(X < 65)$، إذن $p(X < 65) = p\left(\frac{X-80}{10} < \frac{65-80}{10}\right)$ تكافئ
$p(X < 65) = p(Z < -1,5) = 0,5 - p(-1,5 \leq Z \leq 0) = 0,5 - p(0 \leq Z \leq 1,5) = 0,0668$.

2. إحتمال أن يزيد عمرها عن 105 ساعة هو $p(X > 105)$، إذن $p(X > 105) = p\left(\frac{X-80}{10} > \frac{105-80}{10}\right)$ تكافئ
$p(X > 105) = p(Z > 2,5) = 0,5 - p(0 \leq Z \leq 2,5) = 0,0062$.

3. إحتمال أن يكون عمرها بين 60 و 120 ساعة هو $p(60 < X < 120)$، إذن
$p(60 < X < 120) = p\left(\frac{60-80}{10} < \frac{X-80}{10} < \frac{120-80}{10}\right) = p(-2 < Z < 4)$ تكافئ
$p(60 < X < 120) = p(-2 < Z < 0) + p(0 < Z < 4) = 0,4772 + 0,4999 = 0,9771$.

التمرين العاشر : إذا كانت كمية المطر الذي يسقط في منطقة معينة متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي بإنحراف معياري 2 ملم. إذا علمت أن نسبة سقوط أكثر من 30 ملم في هذا العام هي 5,48 %. المطلوب أحسب المتوسط السنوي لسقوط المطر في هذا العام.
الإجابة :
نضع X : كمية المطر المتساقطة، $\sigma_X = 2$. نسبة سقوط المطر أكثر من 30 ملم هي 5,48 % معناه $P(X > 30) = 0,0548$.
حساب المتوسط السنوي لسقوط المطر. لدينا X يخضع للتوزيع الطبيعي، نحوله إلى التوزيع الطبيعي القياسي بالعبارة الآتية $Z = \frac{X-\mu_X}{2}$. لدينا $P(X > 30) = 0,0548$ تكافئ $P\left(\frac{X-\mu_X}{2} > \frac{30-\mu_X}{2}\right) = 0,0548$ تكافئ $P\left(Z > \frac{30-\mu_X}{2}\right) = 0,0548$. نميز حالتان

ا. إذا كان $0 \leq \frac{30-\mu_X}{2}$، إذن $P\left(Z > \frac{30-\mu_X}{2}\right) = 0,0548$ تكافئ $P\left(\frac{30-\mu_X}{2} < Z < 0\right) + 0,5 = 0,0548$ تكافئ $P\left(\frac{30-\mu_X}{2} < Z < 0\right) = -0,4452$، وهذا تناقض.

ب. إذا كان $0 > \frac{30-\mu_X}{2}$، إذن $P\left(Z > \frac{30-\mu_X}{2}\right) = 0,0548$ تكافئ $0,5 - P\left(\frac{30-\mu_X}{2} < Z < 0\right) = 0,0548$ تكافئ $P\left(\frac{30-\mu_X}{2} < Z < 0\right) = 0,4452$ تكافئ $\frac{30-\mu_X}{2} = 1,6$ تكافئ $\mu_X = 26,8$، المتوسط السنوي لسقوط المطر هو 26,8 ملم.

التمرين الحادي عشر : أجريت دراسة الإصابة بمرض الألوان لطلبة كلية الاقتصاد فوجد أن 6% مصابون بهذا المرض .فإذا تم إختيار عينة مكونة من 200 طالب لمعرفة إصابتهم بهذا المرض من عدمه. المطلوب أوجد إحتمال أن يكون عدد المصابين بهذا المرض :

1. على الأقل 20 طالب.

2. على الأكثر 15 طالب.

3. بالضبط 15 طالب.

4. ما بين 15 طالب و 20 طالب.

الإجابة : نضع A " الإصابة بمرض الألوان "، $n = 200$، $p = P(A) = 0,06$. إن هذه التجربة تخضع لدستور ثنائي الحد وسيطاه 200 و 0,06 الذي نشير له بـ X، لكن $n = 200 \geq 20$ و $n.p = 12 \geq 10$ و $n(1-p) = 188 \geq 10$، إذن ننتقل من دستور بنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي القياسي بإستعمال العبارة الآتية $Z = \frac{X-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}$، بمعنى $Z = \frac{X-12}{3,36}$.إذن إحتمال

1. أن يكون عدد المصابين بهذا المرض على الأقل 20 طالب هو $P(X \geq 20)$، إذن $P(X \geq 20) = P\left(X \geq 20 - \frac{1}{2}\right)$ تكافئ $P(X \geq 20) = P\left(\frac{X-12}{3,36} \geq \frac{19,5-12}{3,36}\right) = P(Z \geq 2,23) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,23) = 0,0129$.

2. أن يكون عدد المصابين بهذا المرض على الأكثر 15 طالب هو $P(X \leq 15)$، إذن $P(X \leq 15) = P\left(X \leq 15 + \frac{1}{2}\right)$ تكافئ $P(X \leq 15) = P\left(\frac{X-12}{3,36} \leq \frac{15,5-12}{3,36}\right) = P(Z \leq 1,04)$ تكافئ $P(X \leq 15) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,04) = 0,8508$.

3. أن يكون عدد المصابين بهذا المرض بالضبط 15 طالب هو $P(X = 15)$، إذن

$$P(X = 15) = P\left(15 - \frac{1}{2} \leq X \leq 15 + \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{14,5-12}{3,36} \leq Z \leq \frac{15,5-12}{3,36}\right) = P(0,74 \leq Z \leq 1,04)$$

تكافئ $P(X = 15) = P(0 \leq Z \leq 1,04) - P(0 \leq Z \leq 0,74) = 0,0804$.

4. أن يكون عدد المصابين بهذا المرض مابين 15 طالب و 20 طالب هو $P(15 \leq X \leq 20)$، إذن

$$P(15 \leq X \leq 20) = P\left(15 - \frac{1}{2} \leq X \leq 20 + \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{14,5-12}{3,36} \leq Z \leq \frac{20,5-12}{3,36}\right)$$ تكافئ

$P(15 \leq X \leq 20) = P(0,74 \leq Z \leq 2,53) = P(0 \leq Z \leq 2,53) - P(0 \leq Z \leq 0,74) = 0,2239$.

التمرين الثاني عشر : لدينا 300 سؤال، لكل سؤال 4 أجوبة واحدة منها فقط صحيحة. المطلوب أحسب إحتمال حصول الطالب :

1. على 78 إجابة صحيحة.

2. ما بين 72 و 90 إجابة صحيحة.

الإجابة :

نضع A " الحصول على الجواب الصحيح "، $n = 300$، $p = P(A) = \frac{1}{4}$. إن هذه التجربة تخضع لدستور ثنائي الحد وسيطاه 300 و $\frac{1}{4}$ الذي نشير له بـ X، لكن $n = 300 \geq 20$ و $n.p = 75 \geq 10$ و $n(1-p) = 225 \geq 10$، إذن ننتقل من دستور بنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي القياسي بإستعمال العبارة الآتية $Z = \frac{X-n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}$، بمعنى

$Z = \frac{X-75}{7,5}$.إذن إحتمال :

1. الحصول على 78 إجابة صحيحة هو $P(X = 78)$، إذن

$P(X=78)=P\left(78-\frac{1}{2}\leq X\leq 78+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{77,5-75}{7,5}\leq Z\leq\frac{78,5-75}{7,5}\right)=P(0,33\leq Z\leq 0,46)$

تكافئ $P(X=78)=P(0\leq Z\leq 0,46)-P(0\leq Z\leq 0,33)=0,0479$.

2. الحصول ما بين 72 و 90 إجابة صحيحة هو $P(72\leq X\leq 90)$، إذن

تكافئ $P(72\leq X\leq 90)=P\left(72-\frac{1}{2}\leq X\leq 90+\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{71,5-75}{7,5}\leq Z\leq\frac{90,5-75}{7,5}\right)$

$P(72\leq X\leq 90)=P(-0,46\leq Z\leq 2,06)=P(0\leq Z\leq 0,46)+P(0\leq Z\leq 2,06)=0,6575$.

توزيع بواسون

TABLE 3-1 LOI DE POISSON

Probabilités individuelles $Pr(k) = \exp(-\lambda)\,\lambda^k / k!$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0	0,36788	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674
1	0,36788	0,33470	0,27067	0,20521	0,14936	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369
2	0,18394	0,25102	0,27067	0,25652	0,22404	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422
3	0,06131	0,12551	0,18045	0,21376	0,22404	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037
4	0,01533	0,04707	0,09022	0,13360	0,16803	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547
5	0,00307	0,01412	0,03609	0,06680	0,10082	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547
6	0,00051	0,00353	0,01203	0,02783	0,05041	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622
7	0,00007	0,00076	0,00344	0,00994	0,02160	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444
8	0,00001	0,00014	0,00086	0,00311	0,00810	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528
9	0,00000	0,00002	0,00019	0,00086	0,00270	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627
10		0,00000	0,00004	0,00022	0,00081	0,00230	0,00529	0,01042	0,01813
11			0,00001	0,00005	0,00022	0,00073	0,00192	0,00426	0,00824
12			0,00000	0,00001	0,00006	0,00021	0,00064	0,00160	0,00343
13				0,00000	0,00001	0,00006	0,00020	0,00055	0,00132
14					0,00000	0,00001	0,00006	0,00018	0,00047
15						0,00000	0,00002	0,00005	0,00016
16							0,00000	0,00002	0,00005
17								0,00000	0,00001
18									0,00000

k \ λ	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
0	0,00409	0,00248	0,00150	0,00091	0,00055	0,00034	0,00020	0,00012	0,00007
1	0,02248	0,01487	0,00977	0,00638	0,00415	0,00268	0,00173	0,00111	0,00071
2	0,06181	0,04462	0,03176	0,02234	0,01556	0,01073	0,00735	0,00500	0,00338
3	0,11332	0,08924	0,06881	0,05213	0,03889	0,02863	0,02083	0,01499	0,01070
4	0,15582	0,13385	0,11182	0,09123	0,07292	0,05725	0,04425	0,03374	0,02540
5	0,17140	0,16062	0,14537	0,12772	0,10937	0,09160	0,07523	0,06073	0,04827
6	0,15712	0,16062	0,15748	0,14900	0,13672	0,12214	0,10658	0,09109	0,07642
7	0,12345	0,13768	0,14623	0,14900	0,14648	0,13959	0,12942	0,11712	0,10371
8	0,08487	0,10326	0,11882	0,13038	0,13733	0,13959	0,13751	0,13176	0,12316
9	0,05187	0,06884	0,08581	0,10140	0,11444	0,12408	0,12987	0,13176	0,13000
10	0,02853	0,04130	0,05578	0,07098	0,08583	0,09926	0,11039	0,11858	0,12350
11	0,01426	0,02253	0,03296	0,04517	0,05852	0,07219	0,08530	0,09702	0,10666
12	0,00654	0,01126	0,01785	0,02635	0,03658	0,04813	0,06042	0,07277	0,08444
13	0,00277	0,00520	0,00893	0,01419	0,02110	0,02962	0,03951	0,05038	0,06171
14	0,00109	0,00223	0,00414	0,00709	0,01130	0,01692	0,02399	0,03238	0,04187
15	0,00040	0,00089	0,00180	0,00331	0,00565	0,00903	0,01359	0,01943	0,02652
16	0,00014	0,00033	0,00073	0,00145	0,00265	0,00451	0,00722	0,01093	0,01575
17	0,00004	0,00012	0,00028	0,00060	0,00117	0,00212	0,00361	0,00579	0,00880
18	0,00001	0,00004	0,00010	0,00023	0,00049	0,00094	0,00170	0,00289	0,00464
19	0,00000	0,00001	0,00003	0,00009	0,00019	0,00040	0,00076	0,00137	0,00232
20		0,00000	0,00001	0,00003	0,00007	0,00016	0,00032	0,00062	0,00110
21			0,00000	0,00001	0,00003	0,00006	0,00013	0,00026	0,00050
22				0,00000	0,00001	0,00002	0,00005	0,00011	0,00022
23					0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00009
24						0,00000	0,00001	0,00002	0,00004
25							0,00000	0,00001	0,00001
26								0,00000	0,00000

TABLE 4-1 LOI DE POISSON

Probabilités cumulées $Pr(k) = \Sigma_{[i\in 1,k]} \exp(-\lambda)\,\lambda^i / i!$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,87810	0,84420	0,80879	0,77248
2	0,99985	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688	0,96586	0,95258	0,93714
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664	0,99425	0,99092	0,98654
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99983	0,99961	0,99921	0,99859	0,99766
5			1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99991	0,99982	0,99966
6					1,00000	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996
7							1,00000	1,00000	1,00000

k \ λ	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0	0,36788	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674
1	0,73576	0,55783	0,40601	0,28730	0,19915	0,13589	0,09158	0,06110	0,04043
2	0,91970	0,80885	0,67668	0,54381	0,42319	0,32085	0,23810	0,17358	0,12465
3	0,98101	0,93436	0,85712	0,75758	0,64723	0,53663	0,43347	0,34230	0,26503
4	0,99634	0,98142	0,94735	0,89118	0,81526	0,72544	0,62884	0,53210	0,44049
5	0,99941	0,99554	0,98344	0,95798	0,91608	0,85761	0,78513	0,70293	0,61596
6	0,99992	0,99907	0,99547	0,98581	0,96649	0,93471	0,88933	0,83105	0,76218
7	0,99999	0,99983	0,99890	0,99575	0,98810	0,97326	0,94887	0,91341	0,86663
8	1,00000	0,99997	0,99976	0,99886	0,99620	0,99013	0,97864	0,95974	0,93191
9		1,00000	0,99995	0,99972	0,99890	0,99669	0,99187	0,98291	0,96817
10			0,99999	0,99994	0,99971	0,99898	0,99716	0,99333	0,98630
11			1,00000	0,99999	0,99993	0,99971	0,99908	0,99760	0,99455
12				1,00000	0,99998	0,99992	0,99973	0,99919	0,99798
13					1,00000	0,99998	0,99992	0,99975	0,99930
14						1,00000	0,99998	0,99993	0,99977
15							1,00000	0,99998	0,99993
16								0,99999	0,99998
17								1,00000	0,99999
18									1,00000

k \ λ	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
0	0,00409	0,00248	0,00150	0,00091	0,00055	0,00034	0,00020	0,00012	0,00007
1	0,02656	0,01735	0,01128	0,00730	0,00470	0,00302	0,00193	0,00123	0,00079
2	0,08838	0,06197	0,04304	0,02964	0,02026	0,01375	0,00928	0,00623	0,00416
3	0,20170	0,15120	0,11185	0,08177	0,05915	0,04238	0,03011	0,02123	0,01486
4	0,35752	0,28506	0,22367	0,17299	0,13206	0,09963	0,07436	0,05496	0,04026
5	0,52892	0,44568	0,36904	0,30071	0,24144	0,19124	0,14960	0,11569	0,08853
6	0,68604	0,60630	0,52652	0,44971	0,37815	0,31337	0,25618	0,20678	0,16495
7	0,80949	0,74398	0,67276	0,59871	0,52464	0,45296	0,38560	0,32390	0,26866
8	0,89436	0,84724	0,79157	0,72909	0,66197	0,59255	0,52311	0,45565	0,39182
9	0,94622	0,91608	0,87738	0,83050	0,77641	0,71662	0,65297	0,58741	0,52183
10	0,97475	0,95738	0,93316	0,90148	0,86224	0,81589	0,76336	0,70599	0,64533
11	0,98901	0,97991	0,96612	0,94665	0,92076	0,88808	0,84866	0,80301	0,75199
12	0,99555	0,99117	0,98397	0,97300	0,95733	0,93620	0,90908	0,87577	0,83643
13	0,99831	0,99637	0,99290	0,98719	0,97844	0,96582	0,94859	0,92615	0,89814
14	0,99940	0,99860	0,99704	0,99428	0,98974	0,98274	0,97257	0,95853	0,94001
15	0,99980	0,99949	0,99884	0,99759	0,99539	0,99177	0,98617	0,97796	0,96653
16	0,99994	0,99983	0,99957	0,99904	0,99804	0,99628	0,99339	0,98889	0,98227
17	0,99998	0,99994	0,99985	0,99964	0,99921	0,99841	0,99700	0,99468	0,99107
18	0,99999	0,99998	0,99995	0,99987	0,99970	0,99935	0,99870	0,99757	0,99572
19	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996	0,99989	0,99975	0,99947	0,99894	0,99804
20		1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99991	0,99979	0,99956	0,99914
21				1,00000	0,99999	0,99997	0,99992	0,99983	0,99964
22					1,00000	0,99999	0,99997	0,99993	0,99985
23						1,00000	0,99999	0,99998	0,99994
24							1,00000	0,99999	0,99998
25								1,00000	0,99999
26									1,00000

توزيع بواسون

TABLE 3-2	LOI DE POISSON								
Probabilités individuelles $Pr(k) = \exp(-\lambda)\,\lambda^k / k!$									
k	λ 10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0,00005	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000				
1	0,00045	0,00018	0,00007	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	
2	0,00227	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
3	0,00757	0,00370	0,00177	0,00083	0,00038	0,00017	0,00008	0,00003	0,00001
4	0,01892	0,01019	0,00531	0,00269	0,00133	0,00065	0,00031	0,00014	0,00007
5	0,03783	0,02242	0,01274	0,00699	0,00373	0,00194	0,00098	0,00049	0,00024
6	0,06306	0,04109	0,02548	0,01515	0,00870	0,00484	0,00262	0,00139	0,00072
7	0,09008	0,06458	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037	0,00599	0,00337	0,00185
8	0,11260	0,08879	0,06552	0,04573	0,03044	0,01944	0,01199	0,00716	0,00416
9	0,12511	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03241	0,02131	0,01353	0,00833
10	0,12511	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861	0,03410	0,02300	0,01499
11	0,11374	0,11938	0,11437	0,10148	0,08436	0,06629	0,04960	0,03554	0,02452
12	0,09478	0,10943	0,11437	0,10994	0,09842	0,08286	0,06613	0,05036	0,03678
13	0,07291	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09561	0,08139	0,06585	0,05093
14	0,05208	0,07275	0,09049	0,10209	0,10599	0,10244	0,09302	0,07996	0,06548
15	0,03472	0,05335	0,07239	0,08848	0,09892	0,10244	0,09922	0,09062	0,07858
16	0,02170	0,03668	0,05429	0,07189	0,08656	0,09603	0,09922	0,09628	0,08840
17	0,01276	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08474	0,09338	0,09628	0,09360
18	0,00709	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061	0,08301	0,09094	0,09360
19	0,00373	0,00840	0,01614	0,02716	0,04085	0,05575	0,06990	0,08136	0,08867
20	0,00187	0,00462	0,00968	0,01766	0,02860	0,04181	0,05592	0,06916	0,07980
21	0,00089	0,00242	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986	0,04261	0,05599	0,06840
22	0,00040	0,00121	0,00302	0,00646	0,01213	0,02036	0,03099	0,04326	0,05597
23	0,00018	0,00058	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328	0,02156	0,03198	0,04380
24	0,00007	0,00027	0,00079	0,00198	0,00431	0,00830	0,01437	0,02265	0,03285
25	0,00003	0,00012	0,00038	0,00103	0,00241	0,00498	0,00920	0,01540	0,02365
26	0,00001	0,00005	0,00017	0,00051	0,00130	0,00287	0,00566	0,01007	0,01637
27	0,00000	0,00002	0,00008	0,00025	0,00067	0,00160	0,00335	0,00634	0,01092
28		0,00001	0,00003	0,00011	0,00034	0,00086	0,00192	0,00385	0,00702
29		0,00000	0,00001	0,00005	0,00016	0,00044	0,00106	0,00226	0,00436
30			0,00001	0,00002	0,00008	0,00022	0,00056	0,00128	0,00261
31			0,00000	0,00001	0,00003	0,00011	0,00029	0,00070	0,00152
32				0,00000	0,00001	0,00005	0,00015	0,00037	0,00085
33					0,00001	0,00002	0,00007	0,00019	0,00047
34					0,00000	0,00001	0,00003	0,00010	0,00025
35						0,00000	0,00002	0,00005	0,00013
36							0,00001	0,00002	0,00006
37							0,00000	0,00001	0,00003
38								0,00000	0,00001
39									0,00001
40									0,00000

TABLE 4-2	LOI DE POISSON								
Probabilités cumulées $Pr(k) = \Sigma[i \in 1,k]\, \exp(-\lambda)\, \lambda^i / i!$									
k	λ 10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0,00005	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000				
1	0,00050	0,00020	0,00008	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	
2	0,00277	0,00121	0,00052	0,00022	0,00009	0,00004	0,00002	0,00001	0,00000
3	0,01034	0,00492	0,00229	0,00105	0,00047	0,00021	0,00009	0,00004	0,00002
4	0,02925	0,01510	0,00760	0,00374	0,00181	0,00086	0,00040	0,00018	0,00008
5	0,06709	0,03752	0,02034	0,01073	0,00553	0,00279	0,00138	0,00067	0,00032
6	0,13014	0,07861	0,04582	0,02589	0,01423	0,00763	0,00401	0,00206	0,00104
7	0,22022	0,14319	0,08950	0,05403	0,03162	0,01800	0,01000	0,00543	0,00289
8	0,33282	0,23199	0,15503	0,09976	0,06206	0,03745	0,02199	0,01260	0,00706
9	0,45793	0,34051	0,24239	0,16581	0,10940	0,06985	0,04330	0,02612	0,01538
10	0,58304	0,45989	0,34723	0,25168	0,17568	0,11846	0,07740	0,04912	0,03037
11	0,69678	0,57927	0,46160	0,35316	0,26004	0,18475	0,12699	0,08467	0,05489
12	0,79156	0,68870	0,57597	0,46310	0,35846	0,26761	0,19312	0,13502	0,09167
13	0,86446	0,78129	0,68154	0,57304	0,46445	0,36322	0,27451	0,20087	0,14260
14	0,91654	0,85404	0,77202	0,67513	0,57044	0,46565	0,36753	0,28083	0,20808
15	0,95126	0,90740	0,84442	0,76361	0,66936	0,56809	0,46674	0,37145	0,28665
16	0,97296	0,94408	0,89871	0,83549	0,75592	0,66412	0,56596	0,46774	0,37505
17	0,98572	0,96781	0,93703	0,89046	0,82720	0,74886	0,65934	0,56402	0,46865
18	0,99281	0,98231	0,96258	0,93017	0,88264	0,81947	0,74235	0,65496	0,56224
19	0,99655	0,99071	0,97872	0,95733	0,92350	0,87522	0,81225	0,73632	0,65092
20	0,99841	0,99533	0,98840	0,97499	0,95209	0,91703	0,86817	0,80548	0,73072
21	0,99930	0,99775	0,99393	0,98592	0,97116	0,94689	0,91077	0,86147	0,79912
22	0,99970	0,99896	0,99695	0,99238	0,98329	0,96726	0,94176	0,90473	0,85509
23	0,99988	0,99954	0,99853	0,99603	0,99067	0,98054	0,96331	0,93670	0,89889
24	0,99995	0,99980	0,99931	0,99801	0,99498	0,98884	0,97768	0,95935	0,93174
25	0,99998	0,99992	0,99969	0,99903	0,99739	0,99382	0,98688	0,97476	0,95539
26	0,99999	0,99997	0,99987	0,99955	0,99869	0,99669	0,99254	0,98483	0,97177
27	1,00000	0,99999	0,99994	0,99980	0,99936	0,99828	0,99589	0,99117	0,98268
28		1,00000	0,99998	0,99991	0,99970	0,99914	0,99781	0,99502	0,98970
29			0,99999	0,99996	0,99986	0,99958	0,99887	0,99727	0,99406
30			1,00000	0,99998	0,99994	0,99980	0,99943	0,99855	0,99667
31				0,99999	0,99997	0,99991	0,99972	0,99925	0,99819
32				1,00000	0,99999	0,99996	0,99987	0,99963	0,99904
33					1,00000	0,99998	0,99994	0,99982	0,99951
34						0,99999	0,99997	0,99991	0,99975
35						1,00000	0,99999	0,99996	0,99988
36							1,00000	0,99998	0,99994
37								0,99999	0,99997
38								1,00000	0,99999
39									0,99999
40									1,00000

جداول التوزيعات المستمرة الشهيرة

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2342	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3168	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4014
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4279	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4758	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4754	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4811	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4952	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.5	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
4.0	0.4999									

0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α مستوى المعنوي
0.50	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	مستوى الثقة $1-\alpha$
0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	$1-\alpha/2$
0.674	1.282	1.645	1.96	2.326	2.575	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

توزيع كاي مربع

TABLE 6	FRACTILES de la LOI $\chi^2(\nu)$												
α / ν	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
31	12,20	14,46	15,66	17,54	19,28	21,43	30,34	41,42	44,99	48,23	52,19	55,00	61,10
32	12,81	15,13	16,36	18,29	20,07	22,27	31,34	42,58	46,19	49,48	53,49	56,33	62,49
33	13,43	15,82	17,07	19,05	20,87	23,11	32,34	43,75	47,40	50,73	54,78	57,65	63,87
34	14,06	16,50	17,79	19,81	21,66	23,95	33,34	44,90	48,60	51,97	56,06	58,96	65,25
35	14,69	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	34,34	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27	66,62
36	15,32	17,89	19,23	21,34	23,27	25,64	35,34	47,21	51,00	54,44	58,62	61,58	67,98
37	15,97	18,59	19,96	22,11	24,07	26,49	36,34	48,36	52,19	55,67	59,89	62,88	69,35
38	16,61	19,29	20,69	22,88	24,88	27,34	37,34	49,51	53,38	56,90	61,16	64,18	70,70
39	17,26	20,00	21,43	23,65	25,70	28,20	38,34	50,66	54,57	58,12	62,43	65,48	72,06
40	17,92	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	24,67	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	49,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	31,74	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	59,33	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	39,04	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	69,33	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21	112,32
80	46,52	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	79,33	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32	124,84
90	54,16	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	89,33	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30	137,21
100	61,92	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	99,33	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17	149,45

توزيع ستيودنت

TABLE 8 — **FRACTILES de la LOI de STUDENT**

α / ν	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559	318,2888	636,5776
2	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,3285	31,5998
3	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,2143	12,9244
4	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
31	0,2555	0,5298	0,8534	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	3,3749	3,6335
32	0,2555	0,5297	0,8530	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,3653	3,6218
33	0,2554	0,5295	0,8526	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	3,3563	3,6109
34	0,2553	0,5294	0,8523	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,3480	3,6007
35	0,2553	0,5292	0,8520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,3400	3,5911
36	0,2552	0,5291	0,8517	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	3,3326	3,5821
37	0,2552	0,5289	0,8514	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154	3,3256	3,5737
38	0,2551	0,5288	0,8512	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	3,3190	3,5657
39	0,2551	0,5287	0,8509	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079	3,3127	3,5581
40	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
500	0,2535	0,5247	0,8423	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	3,1066	3,3101
∞	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3264	2,5758	3,0902	3,2905

توزيع فيشر

TABLE 7-1a — FRACTILES de la LOI de FISHER F(ν1,ν2) — α= 0,95

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,98	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,36
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,353	19,371	19,385	19,396	19,412	19,424
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,745	8,715
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,912	5,873
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,678	4,636
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,000	3,956
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,575	3,529
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,284	3,237
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,073	3,025
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,913	2,865
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,788	2,739
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,687	2,637
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,604	2,554
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,534	2,484
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,475	2,424
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,425	2,373
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,381	2,329
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,342	2,290
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,308	2,256
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,278	2,225
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321	2,250	2,197
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,226	2,173
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275	2,204	2,150
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,183	2,130
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236	2,165	2,111
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,148	2,094
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204	2,132	2,078
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,118	2,064
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,104	2,050
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,092	2,037
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,323	2,255	2,199	2,153	2,080	2,026
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,313	2,244	2,189	2,142	2,070	2,015
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,303	2,235	2,179	2,133	2,060	2,004
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,294	2,225	2,170	2,123	2,050	1,995
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,285	2,217	2,161	2,114	2,041	1,986
36	4,113	3,259	2,866	2,634	2,477	2,364	2,277	2,209	2,153	2,106	2,033	1,977
37	4,105	3,252	2,859	2,626	2,470	2,356	2,270	2,201	2,145	2,098	2,025	1,969
38	4,098	3,245	2,852	2,619	2,463	2,349	2,262	2,194	2,138	2,091	2,017	1,962
39	4,091	3,238	2,845	2,612	2,456	2,342	2,255	2,187	2,131	2,084	2,010	1,954
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,003	1,948
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,073	2,026	1,952	1,895
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993	1,917	1,860
70	3,978	3,128	2,736	2,503	2,346	2,231	2,143	2,074	2,017	1,969	1,893	1,836
80	3,960	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,126	2,056	1,999	1,951	1,875	1,817
90	3,947	3,098	2,706	2,473	2,316	2,201	2,113	2,043	1,986	1,938	1,861	1,803
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,103	2,032	1,975	1,927	1,850	1,792
200	3,888	3,041	2,650	2,417	2,259	2,144	2,056	1,985	1,927	1,878	1,801	1,742
500	3,860	3,014	2,623	2,390	2,232	2,117	2,028	1,957	1,899	1,850	1,772	1,712
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880	1,831	1,752	1,692

E 7-1b — FRACTILES de la LOI de FISHER F(ν1,ν2) — α= 0,95

ν_2 \ ν_1	16	18	20	22	24	26	28	30	40	60	80	1000
1	246,46	247,32	248,02	248,58	249,05	249,45	249,80	250,10	251,14	252,20	252,72	254,19
2	19,433	19,440	19,446	19,450	19,454	19,457	19,460	19,462	19,471	19,479	19,483	19,495
3	8,692	8,675	8,660	8,648	8,639	8,630	8,623	8,617	8,594	8,572	8,561	8,529
4	5,844	5,821	5,803	5,787	5,774	5,763	5,754	5,746	5,717	5,688	5,673	5,632
5	4,604	4,579	4,558	4,541	4,527	4,515	4,505	4,496	4,464	4,431	4,415	4,369
6	3,922	3,896	3,874	3,856	3,841	3,829	3,818	3,808	3,774	3,740	3,722	3,673
7	3,494	3,467	3,445	3,426	3,410	3,397	3,386	3,376	3,340	3,304	3,286	3,234
8	3,202	3,173	3,150	3,131	3,115	3,102	3,090	3,079	3,043	3,005	2,986	2,932
9	2,989	2,960	2,936	2,917	2,900	2,886	2,874	2,864	2,826	2,787	2,768	2,712
10	2,828	2,798	2,774	2,754	2,737	2,723	2,710	2,700	2,661	2,621	2,601	2,543
11	2,701	2,671	2,646	2,626	2,609	2,594	2,582	2,570	2,531	2,490	2,469	2,410
12	2,599	2,568	2,544	2,523	2,505	2,491	2,478	2,466	2,426	2,384	2,363	2,302
13	2,515	2,484	2,459	2,438	2,420	2,405	2,392	2,380	2,339	2,297	2,275	2,212
14	2,445	2,413	2,388	2,367	2,349	2,333	2,320	2,308	2,266	2,223	2,201	2,136
15	2,385	2,353	2,328	2,306	2,288	2,272	2,259	2,247	2,204	2,160	2,137	2,072
16	2,333	2,302	2,276	2,254	2,235	2,220	2,206	2,194	2,151	2,106	2,083	2,016
17	2,289	2,257	2,230	2,208	2,190	2,174	2,160	2,148	2,104	2,058	2,035	1,967
18	2,250	2,217	2,191	2,168	2,150	2,134	2,119	2,107	2,063	2,017	1,993	1,923
19	2,215	2,182	2,155	2,133	2,114	2,098	2,084	2,071	2,026	1,980	1,955	1,884
20	2,184	2,151	2,124	2,102	2,082	2,066	2,052	2,039	1,994	1,946	1,922	1,850
21	2,156	2,123	2,096	2,073	2,054	2,037	2,023	2,010	1,965	1,916	1,891	1,818
22	2,131	2,098	2,071	2,048	2,028	2,012	1,997	1,984	1,938	1,889	1,864	1,790
23	2,109	2,075	2,048	2,025	2,005	1,988	1,973	1,961	1,914	1,865	1,839	1,764
24	2,088	2,054	2,027	2,003	1,984	1,967	1,952	1,939	1,892	1,842	1,816	1,740
25	2,069	2,035	2,007	1,984	1,964	1,947	1,932	1,919	1,872	1,822	1,796	1,718
26	2,052	2,018	1,990	1,966	1,946	1,929	1,914	1,901	1,853	1,803	1,776	1,698
27	2,036	2,002	1,974	1,950	1,930	1,913	1,898	1,884	1,836	1,785	1,758	1,679
28	2,021	1,987	1,959	1,935	1,915	1,897	1,882	1,869	1,820	1,769	1,742	1,662
29	2,007	1,973	1,945	1,921	1,901	1,883	1,868	1,854	1,806	1,754	1,726	1,645
30	1,995	1,960	1,932	1,908	1,887	1,870	1,854	1,841	1,792	1,740	1,712	1,630
31	1,983	1,948	1,920	1,896	1,875	1,857	1,842	1,828	1,779	1,726	1,699	1,616
32	1,972	1,937	1,908	1,884	1,864	1,846	1,830	1,817	1,767	1,714	1,686	1,602
33	1,961	1,926	1,898	1,873	1,853	1,835	1,819	1,806	1,756	1,702	1,674	1,589
34	1,952	1,917	1,888	1,863	1,843	1,825	1,809	1,795	1,745	1,691	1,663	1,577
35	1,942	1,907	1,878	1,854	1,833	1,815	1,799	1,786	1,735	1,681	1,652	1,566
36	1,934	1,899	1,870	1,845	1,824	1,806	1,790	1,776	1,726	1,671	1,643	1,555
37	1,926	1,890	1,861	1,837	1,816	1,798	1,782	1,768	1,717	1,662	1,633	1,545
38	1,918	1,883	1,853	1,829	1,808	1,790	1,774	1,760	1,708	1,653	1,624	1,536
39	1,911	1,875	1,846	1,821	1,800	1,782	1,766	1,752	1,700	1,645	1,616	1,526
40	1,904	1,868	1,839	1,814	1,793	1,775	1,759	1,744	1,693	1,637	1,608	1,517
50	1,850	1,814	1,784	1,759	1,737	1,718	1,702	1,687	1,634	1,576	1,544	1,448
60	1,815	1,778	1,748	1,722	1,700	1,681	1,664	1,649	1,594	1,534	1,502	1,399
70	1,790	1,753	1,722	1,696	1,674	1,654	1,637	1,622	1,566	1,505	1,471	1,364
80	1,772	1,734	1,703	1,677	1,654	1,634	1,617	1,602	1,545	1,482	1,448	1,336
90	1,757	1,720	1,688	1,662	1,639	1,619	1,601	1,586	1,528	1,465	1,429	1,314
100	1,746	1,708	1,676	1,650	1,627	1,607	1,589	1,573	1,515	1,450	1,415	1,296
200	1,694	1,656	1,623	1,596	1,572	1,551	1,533	1,516	1,455	1,386	1,346	1,205
500	1,664	1,625	1,592	1,563	1,539	1,518	1,499	1,482	1,419	1,345	1,303	1,138
∞	1,644	1,604	1,571	1,542	1,517	1,496	1,476	1,459	1,394	1,318	1,274	1,075

توزيع فيشر

TABLE 7-2a — **FRACTILES de la LOI de FISHER F(ν1,ν2)** — $\alpha = 0,975$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14
1	647,79	799,50	864,17	899,60	921,83	937,13	948,23	956,64	963,29	968,62	976,71	982,51
2	38,507	39,000	39,166	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,386	39,398	39,415	39,426
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473	14,419	14,336	14,277
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,751	8,684
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,525	6,456
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,366	5,297
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,666	4,596
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,200	4,130
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,868	3,798
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,621	3,550
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,430	3,359
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,277	3,206
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250	3,153	3,082
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147	3,050	2,979
15	6,199	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060	2,963	2,891
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986	2,889	2,817
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922	2,825	2,753
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929	2,866	2,769	2,696
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880	2,817	2,720	2,647
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,676	2,603
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798	2,735	2,637	2,564
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700	2,602	2,528
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668	2,570	2,497
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640	2,541	2,468
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613	2,515	2,441
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590	2,491	2,417
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631	2,568	2,469	2,395
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547	2,448	2,374
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592	2,529	2,430	2,355
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,412	2,338
31	5,549	4,165	3,573	3,234	3,010	2,851	2,730	2,635	2,558	2,495	2,396	2,321
32	5,531	4,149	3,557	3,218	2,995	2,836	2,715	2,620	2,543	2,480	2,381	2,306
33	5,515	4,134	3,543	3,204	2,981	2,822	2,701	2,606	2,529	2,466	2,366	2,292
34	5,499	4,120	3,529	3,191	2,968	2,808	2,688	2,593	2,516	2,453	2,353	2,278
35	5,485	4,106	3,517	3,178	2,956	2,796	2,676	2,581	2,504	2,440	2,341	2,266
36	5,471	4,094	3,505	3,167	2,944	2,785	2,664	2,569	2,492	2,429	2,329	2,254
37	5,458	4,082	3,493	3,156	2,933	2,774	2,653	2,558	2,481	2,418	2,318	2,243
38	5,446	4,071	3,483	3,145	2,923	2,763	2,643	2,548	2,471	2,407	2,307	2,232
39	5,435	4,061	3,473	3,135	2,913	2,754	2,633	2,538	2,461	2,397	2,298	2,222
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,288	2,213
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,553	2,458	2,381	2,317	2,216	2,140
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270	2,169	2,093
70	5,247	3,890	3,309	2,975	2,754	2,595	2,474	2,379	2,302	2,237	2,136	2,059
80	5,218	3,864	3,284	2,950	2,730	2,571	2,450	2,355	2,277	2,213	2,111	2,035
90	5,196	3,844	3,265	2,932	2,711	2,552	2,432	2,336	2,259	2,194	2,092	2,015
100	5,179	3,828	3,250	2,917	2,696	2,537	2,417	2,321	2,244	2,179	2,077	2,000
200	5,100	3,758	3,182	2,850	2,630	2,472	2,351	2,256	2,178	2,113	2,010	1,932
500	5,054	3,716	3,142	2,811	2,592	2,434	2,313	2,217	2,139	2,074	1,971	1,892
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114	2,048	1,945	1,866

7-2b — **FRACTILES de la LOI de FISHER F(ν1,ν2)** — $\alpha = 0,975$

16	18	20	22	24	26	28	30	40	60	80	1000
986,93	990,35	993,10	995,38	997,25	998,86	1000,2	1001,4	1005,6	1009,8	1011,9	1017,8
39,435	39,442	39,448	39,453	39,456	39,460	39,462	39,464	39,473	39,481	39,486	39,497
14,232	14,196	14,167	14,144	14,124	14,107	14,093	14,080	14,037	13,992	13,970	13,908
8,633	8,592	8,560	8,533	8,511	8,492	8,475	8,461	8,411	8,360	8,335	8,264
6,403	6,362	6,329	6,301	6,278	6,258	6,242	6,227	6,175	6,123	6,096	6,022
5,244	5,202	5,168	5,141	5,117	5,097	5,080	5,065	5,012	4,959	4,932	4,856
4,543	4,501	4,467	4,439	4,415	4,395	4,378	4,362	4,309	4,254	4,227	4,149
4,076	4,034	3,999	3,971	3,947	3,927	3,909	3,894	3,840	3,784	3,756	3,677
3,744	3,701	3,667	3,638	3,614	3,594	3,576	3,560	3,505	3,449	3,421	3,340
3,496	3,453	3,419	3,390	3,365	3,345	3,327	3,311	3,255	3,198	3,169	3,087
3,304	3,261	3,226	3,197	3,173	3,152	3,133	3,118	3,061	3,004	2,974	2,890
3,152	3,108	3,073	3,043	3,019	2,998	2,979	2,963	2,906	2,848	2,818	2,733
3,027	2,983	2,948	2,918	2,893	2,872	2,853	2,837	2,780	2,720	2,690	2,603
2,923	2,879	2,844	2,814	2,789	2,767	2,749	2,732	2,674	2,614	2,583	2,495
2,836	2,792	2,756	2,726	2,701	2,679	2,660	2,644	2,585	2,524	2,493	2,403
2,761	2,717	2,681	2,651	2,625	2,603	2,584	2,568	2,509	2,447	2,415	2,324
2,697	2,652	2,616	2,585	2,560	2,538	2,519	2,502	2,442	2,380	2,348	2,256
2,640	2,596	2,559	2,529	2,503	2,481	2,461	2,445	2,384	2,321	2,289	2,195
2,591	2,546	2,509	2,478	2,452	2,430	2,411	2,394	2,333	2,270	2,237	2,142
2,547	2,501	2,464	2,434	2,408	2,385	2,366	2,349	2,287	2,223	2,190	2,094
2,507	2,462	2,425	2,394	2,368	2,345	2,325	2,308	2,246	2,182	2,148	2,051
2,472	2,426	2,389	2,358	2,331	2,309	2,289	2,272	2,210	2,145	2,111	2,012
2,440	2,394	2,357	2,325	2,299	2,276	2,256	2,239	2,176	2,111	2,077	1,977
2,411	2,365	2,327	2,296	2,269	2,246	2,226	2,209	2,146	2,080	2,045	1,945
2,384	2,338	2,300	2,269	2,242	2,219	2,199	2,182	2,118	2,052	2,017	1,915
2,360	2,314	2,276	2,244	2,217	2,194	2,174	2,157	2,093	2,026	1,991	1,888
2,337	2,291	2,253	2,222	2,195	2,171	2,151	2,133	2,069	2,002	1,966	1,862
2,317	2,270	2,232	2,201	2,174	2,150	2,130	2,112	2,048	1,980	1,944	1,839
2,298	2,251	2,213	2,181	2,154	2,131	2,110	2,092	2,028	1,959	1,923	1,817
2,280	2,233	2,195	2,163	2,136	2,112	2,092	2,074	2,009	1,940	1,904	1,797
2,263	2,217	2,178	2,146	2,119	2,095	2,075	2,057	1,991	1,922	1,886	1,778
2,248	2,201	2,163	2,131	2,103	2,080	2,059	2,041	1,975	1,905	1,869	1,760
2,234	2,187	2,148	2,116	2,088	2,065	2,044	2,026	1,960	1,890	1,853	1,743
2,220	2,173	2,135	2,102	2,075	2,051	2,030	2,012	1,946	1,875	1,838	1,727
2,207	2,160	2,122	2,089	2,062	2,038	2,017	1,999	1,932	1,861	1,824	1,712
2,196	2,148	2,110	2,077	2,049	2,025	2,005	1,986	1,919	1,848	1,811	1,698
2,184	2,137	2,098	2,066	2,038	2,014	1,993	1,974	1,907	1,836	1,798	1,684
2,174	2,126	2,088	2,055	2,027	2,003	1,982	1,963	1,896	1,824	1,786	1,672
2,164	2,116	2,077	2,045	2,017	1,993	1,971	1,953	1,885	1,813	1,775	1,660
2,154	2,107	2,068	2,035	2,007	1,983	1,962	1,943	1,875	1,803	1,764	1,648
2,081	2,033	1,993	1,960	1,931	1,907	1,885	1,866	1,796	1,721	1,681	1,557
2,033	1,985	1,944	1,911	1,882	1,857	1,835	1,815	1,744	1,667	1,625	1,495
1,999	1,950	1,910	1,876	1,847	1,821	1,799	1,779	1,707	1,628	1,585	1,449
1,974	1,925	1,884	1,850	1,820	1,795	1,772	1,752	1,679	1,599	1,555	1,414
1,955	1,905	1,864	1,830	1,800	1,774	1,752	1,731	1,657	1,576	1,531	1,386
1,939	1,890	1,849	1,814	1,784	1,758	1,735	1,715	1,640	1,558	1,512	1,363
1,870	1,820	1,778	1,742	1,712	1,685	1,661	1,640	1,562	1,474	1,425	1,250
1,830	1,779	1,736	1,700	1,669	1,641	1,617	1,596	1,515	1,423	1,370	1,166
1,803	1,751	1,708	1,672	1,640	1,612	1,588	1,566	1,484	1,388	1,333	1,090

المراجع

[1] أحمد عبادة سرحان، مقدمة في طرق التحليل الإحصائي، معهد الدراسات و البحوث الإحصائية، جامعة القاهرة، 1968.

[2] محمد معتوق، الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون - الجزائر،2007.

[3] أنيس إسماعيل كنجو، الإحصاء و الإحتمال، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان، الرياض، 2000.

[4] بوعبد الله صالح، محاضرات الإحصاء الرياضي، مطبوعة، جامعة المسيلة - الجزائر، 2006.

[5] جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الإحتمالات، دار المسيرة للنشر و التوزيع، الأردن، 2011.

[6] ثروت محمد عبد المنعم، مدخل حديث للإحصاء و الإحتمالات، الطبعة الثانية، مكتبة العبيكان، الرياض - المملكة العربية السعودية، 2007.

[7] حلال الصياد، نظرية الإحتمالات، دار الشروق، جدة - المملكة العربية السعودية، 1988.

[8] سمير كامل عاشور، سامية سالم أبو الفتوح، مقدمة في الإحصاء التحليلي، معهد الدراسات و البحوث الإحصائية، القاهرة، 1990.