الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة طاهري محمد- بشار

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية

وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوع بيداغوجي

محاضرات في الرياضيات المالية

موجه لطلبة السنة الثالثة ليسانس علوم اقتصادية تخصص اقتصاد نقدي ومالي

من إعداد: د. طبوش أحمد

السنة الجامعية 2025/2024

المحتـــــــــوى

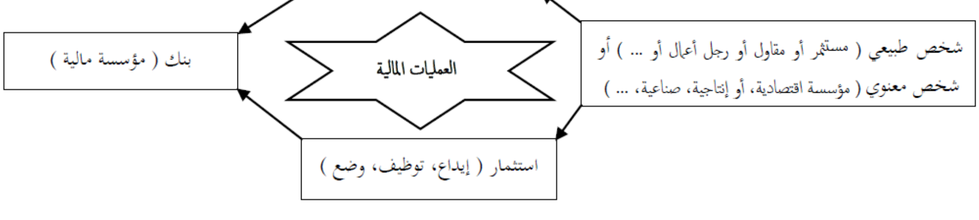
تمهيد

إن علم الرياضيات المالية يجمع بين علمي المالية بفروعه المتعلقة بالتمويل والإستثمار من ناحية وعلم الرياضيات من ناحية أخرى. إذ يعد علم الرياضيات من العلوم التي تحتل مكانة واسعة في الحياة اليومية العملية بشكل عام والمالية والتجارية والإقتصادية بشكل خاص. لذلك فإن تعلم الأسس والمفاهيم المتعلقة بهذا العلم – الرياضيات المالية– يكسب المتعلم خبرة عملية ومهنية في اتخاذ القرار المناسب بجدوى الإقتراض والإستثمار في المشاريع المختلفة من ناحية والقدرة على مواجهة متطلبات التمويل وسداد الديون من ناحية أخرى. ويعد هذا العلم من المستلزمات الأساسية لطبيعة العمل في البنوك المختلفة وبخاصة العمليات المصرفية اليومية.

تهتم الرياضيات المالية بعنصر رأس المال وعائده على اعتبار أن كل المشروعات الإقتصادية والخدمية تعمل على توفير رأس المال، سواء عن طريق الإقراض أو الإقتراض من جهات متخصصة كالبنوك أو أي مؤسسة مالية أخرى. فإذا كان لدى شخص نقود زائدة عن حاجته فإنه قد يحتفظ بها بأي وسيلة يراها مناسبة. فمثلا قد يحتفظ بها في منزله أو في حساب جاري له بإحدى مؤسسات البريد والمواصلات وهذا يحقق له إمكانية السحب منها في أي وقت، ولكن تلك النقود لن تنمو إذا تم الإحتفاظ بها بهذا الأسلوب. ولهذا فإنه من المفيد استثمارها وذلك بوضعها في أحد البنوك أو إقراضها أو المساهمة بها في مشاريع مربحة.

نجد أن التطبيق الميداني للرياضيات المالية في المؤسسات الإقتصادية في تسيير ديون الموردين والزبائن والأوراق التجارية وقروض المؤسسة وغير ذلك، كما تستخدم بشكل كبير في المؤسسات المالية منها البنوك وذلك في تسيير الحسابات وعمليات القروض، واتخاذ قرارات التمويل والإستثمار. فالدارس لهذا المقياس يجب أن يدرك جيدا أطراف التعامل ونوعية العمليات المالية المقصودة هنا، والنموذج الموالي يوضح ذلك:

الشكل رقم (01) : نموذج يوضح عناصر المقياس (أطراف التعامل ونوعية العملية المالية)



عموميات حول الفائدة البسيطة وما يرتبط بها

تمهيد

إن الحديث عن الفائدة البسيطة يتطلب الإشارة إلى أن الحاجة للإستفادة من مبدأ الفائدة بشكل عام ناجم من أهميتها الكبيرة في المجالات الإقتصادية والمالية والمحاسبية كافة. ونعكف على دراسته باعتباره النظام القائم والرئيسي لعمل كافة المؤسسات المالية بدون استثناء خاصة البنوك منها، مع وجود اختلاف في التسمية وطريقة الحساب في بعض الأحيان.

وترتبط الفائدة البسيطة عادة بالعمليات المالية القصيرة الأجل، وتكون مدتها عادة لا تزيد عن سنة، وتتميز بطريقة إستعمالها السهلة، إلا أنها تطرح عند التطرق إليها إلى توضيح بعض العناصر سواء تعلق الأمر بكيفية الحساب أو عامل الزمن، أو ما تطرحه في تطبيقاتها المختلفة.

1. تعريف الفائدة:

هنالك عدة تعاريف للفائدة، وسنذكر فقط على سبيل الحصر وما يخدم المقياس والعنصر، والتي منها:

تعرف الفائدة بأنها العائد أو التعويض المادي الناتج عن استثمار الأموال أو اقتراض أموال الغير. وعلى هذا فالفائدة تمثل المقابل المادي لرأس المال باعتباره أحد عوامل الإنتاج، كما أنها تمثل الحافز المادي لاستخدام رأس المال وتشغيله في خدمة الفرد والمجتمع بدلا من اكتنازه.

ويمكن تعريفها من وجهة نظر المقترض والمقرض؛ فالفائدة لدى المتعامل المقترض للأموال: هي المبلغ الذي يقدمه لصاحب المال نتيجة لإستعماله لأمواله، خلال مدة معينة وتحت شروط محددة مسبقا بين الطرفين. أما الفائدة لدى المقرض للأموال: هي أجرة المبلغ المالي الذي يتركه تحت تصرف المقترض لفترة معينة.

فالفائدة إذا ليست إلا أجرة للنقود أو الأموال سواء المقرضة أو المقترضة باختصار.

2. تعريف الفائدة البسيطة وعناصرها:

فالفائدة البسيطة هي تعريف الفائدة مضافا إليها أن مدة الإستثمار أو التمويل قصيرة الأجل. وهي عبارة عن مبلغ مالي وليس نسبة مئوية، ووحدتها " ون: وحدة نقدية " بحيث يرمز لها بالرمز : **I** ويتحدد مبلغ الفائدة البسيطة باشتراك ثلاثة عناصر، والتي هي:

✓ **الأصل**: وهو المبلغ المالي أو رأس المال الموظف، ويأخذ مسميات أخرى كالمبلغ موضوع المعاملة، رأس المال المستثمر، رأس المال المودع المبلغ المستمر، المبلغ المودع المبلغ الموظف؛ بحيث وحدته " ون: وحدة نقدية" يرمز له بالرمز: **C**.

✓ **المدة الزمنية:** هي طول الفترة الزمنية للمعاملة المالية سواء من تاريخ الإيداع إلى تاريخ السحب أو من تاريخ الإقتراض إلى تاريخ السداد، ويعبر عنها بالسنوات أو بالأشهر أو بالأيام، يرمز لها بالرمز: **n**.

✓ **معدل الفائدة:** وهي النسبة المئوية السنوية لعائد رأس المال في فترة زمنية معينة، ويحدد من طرف الجهة المعنية مثل البنك المركزي في داخل الدولة، أو بنك خارجي أو سوق مالية جهوية أو دولية متعامل معها، ويكتب المعدل متبوعا بعلامة النسبة المئوية %، ويرمز لها بالرمز: **i**

والملاحظ أن كلا من الأصل والمدة الزمنية يتحددان بحرية ضمن عقد المعاملة المالية بين طرفي التعامل حسب حاجتهما، وأن العلاقة بين مبلغ الفائدة البسيطة وعناصرها الثلاثة السابقة هي علاقة طردية.

في حالة الفائدة البسيطة فإن مبلغ الفائدة تحسب دائما على أصل المبلغ ولا تستثمر معه، ومعنى ذلك أن قيمة الفائدة البسيطة لمبلغ معين تظل ثابتة لكل وحدة زمنية طالما لم يتغير المبلغ الأصلي أو معدل الفائدة.

3. جدول قانون الفائدة البسيطة ومشتقاته:

الجدول الموالي يوضح لنا القانون العام لمبلغ الفائدة البسيطة، وطريقة استخراج عناصره وشرط التطبيق، كالآتي:

الجدول رقم : (01) القانون العام لمبلغ الفائدة البسيطة ومشتقاته

الرقم		القانون العام لمبلغ الفائدة البسيطة، واستخراج عناصره، وشرط التطبيق
01		قانون مبلغ الفائدة البسيطة = ضرب عناصرها الثلاثة في بعضها (الأصل × المعدل × المدة)
		$I = C \times i \times n$
02		**استخراج عناصر القانون بدلالة مبلغ الفائدة البسيطة؛**
نستخدم القانون العام، وعلى اعتبار أن المدة الزمنية بالسنة، وأن معدل الفائدة يحسب مقسوما على 100 .	الأصل	$C = \frac{I}{i \times n}$
	معدل الفائدة	$i = \frac{I}{C \times n}$
	المدة الزمنية	$n = \frac{I}{C \times i}$
03		شرط تطبيق قانون الفائدة البسيطة :
أن يكون كلا من معدل الفائدة والمدة الزمنية	إذا كانت n بالسنة	$I = C \times i \times n$
	إذا كانت n بالشهر	$I = \frac{C \times i \times n}{12}$

متجانسين : يعني أن المعدل والمدة من نفس الوحدات الزمنية	إذا كانت n بالأيام	$$I = \frac{C \times i \times n}{360 \text{أو} 366 \text{أو} 365}$$
04	**ملاحظات:** ✓ تتحدد المدة الزمنية بالقانون التالي: **n في حالة استثمار**: من تاريخ التوظيف (الإيداع / الإستثمار) إلى تاريخ السحب ؛ أما **n في حالة تمويل:** من تاريخ الإقتراض إلى تاريخ السداد (الإستحقاق.) ✓ لو أننا أردنا أن نستخرج عناصر مبلغ الفائدة البسيطة من قانونها، وكانت: n بالأشهر :فإننا نقوم بضرب العنصر المستخرج في 12 شهرا؛ n بالأيام :فإننا نقوم بضرب العنصر المستخرج في 366 يوما أو 365 يوما أو 360 يوما.	

4. **القيمة المحصلة لرأس المال أو الجملة:**

نسمي القيمة المحصلة ما تم تحصيله عندما استثمرنا أو وظفنا رأس المال في أحد البنوك مثلا، فهي تجيب عن الأسئلة التالية: كم هو المبلغ الذي سأسحبه في نهاية مدة التوظيف؟ وهل بقي كما هو ؟ بكم زاد المبلغ الذي تم إيداعه في البنك؟

إذا فالقيمة التي تم اكتسابها (القيمة المكتسبة) عن توظيف رأس المال، أو الجملة الناتجة عن الاستثمار في مؤسسة مالية؛ هي : مجموع رأس المال المودع زائد مبلغ الفائدة البسيطة الناتجة عنه خلال المدة n، وحدتها " ون: وحدة نقدية " وترمز لها بالرمز: C'

الجدول رقم (02) : القانون العام للجملة بالفائدة البسيطة

الرقم	الصياغة	القوانين
01	القانون العام للجملة	الجملة = رأس المال المستثمر (المودع / الموظف) + مبلغ الفائدة البسيطة **$C' = C + I$**
02	إستخراج رأس المال الموظف بدلالة الجملة	**$C = C' - I$**
03	إستخراج مبلغ الفائدة البسيطة بدلالة الجملة	**$I = C' - C$**
04	كتابة قانون الجملة بتعويض مبلغ الفائدة البسيطة بقانونها، مع العلم أن المدة n بالسنة	**$C' = C + (C \times i \times n)$** **$C' = C \ (1 + i \times n)$**
05	**ملاحظة :** إذا كانت المدة الزمنية بالأشهر أو بالأيام، يبقى قانون الجملة كما هو، نقوم فقط بقسمة المدة على 12 شهرا، أو نقسمها على 366 يوما أو 365 يوما أو 360 يوما على حسب المعطيات.	

والشكل الذي يرد الان، يلم بما تم التطرق إليه فيما سبق، وتوضيح كل ما يدور حول الفائدة البسيطة والجملة برسم تبسيطي كما في أسفله:

الشكل رقم (02) : رسم توضيحي للفائدة البسيطة والجملة

العمليات المالية: استثمار أو تمويل		
مــن ←	المدة الزمنية (n)	→ إلــى
تاريخ الإيداع (التوظيف / الإستثمار) أو تاريخ التمويل (الإقتراض / الدَّين)	مدة الإيداع أو مدة الإقتراض	تاريخ سحب الأموال أو تاريخ استحقاق الدين
الأصل (C): رأسمال الموظف / المبلغ المودع / مبلغ موضوع المعاملة / رأسمال	تتشكل مبلغ الفائدة البسيطة (I) عند حيازة الأموال سواء بالتوظيف أو الاقتراض	الجملة (C'): القيمة المحصلة: ما تم تحصيله

5. الفائدة البسيطة الصحيحة والفائدة البسيطة التجارية والعلاقة الحسابية بينهما:

إذا كانت المدة الزمنية بالأيام، بينما معدل الفائدة سنوي، فإنه يكون من الضروري تحويل المدة الزمنية بالأيام إلى كسر من السنة، ويتم التعويض بها في قانون مبلغ الفائدة البسيطة، وعلى هذا الأساس يمكن اعتبار عامل الزمن بالأيام معيار لتقسيم الفائدة البسيطة إلى نوعين من الفوائد الصحيحة والتجارية، والتي سيتم شرحها فيما يلي:

أ- الفائدة البسيطة الصحيحة (IR):

إن حساب مبلغ الفائدة البسيطة بقسمة المدة على 366 يوما أو 365 يوما؛ يطلق على هذه بالطريقة الصحيحة أو

الطريقة النظرية أو الطريقة الانجليزية، وتسمى بالفائدة الصحيحة أو الحقيقة على اعتبار أنه تم احتساب عدد أيام السنة الفعلية أو المدنية، وحدتها هي " وحدة نقدية: ون " ورمزها: IR.

إن عدد الأيام 366 و 365 يوما - راجع إلى عدد أيام شهر فيفري، فقد يضم 29 يوما مما يعني بأن هذه سنة كبيسة، وهي قابلة للقسمة على 04 مثلا 2008 ، 2012، 2016، ... إلخ؛ وقد يحتوي فيفري على28 يوما مما يعني بأن هذه سنة عادية، وهي لا تقبل القسمة على 04 مثلا: 2009، 2013، 2017، ... إلخ. قانونها هو كما يأتي:

$$\mathrm{I}R = \frac{C \times i \times n}{365\text{أو}366}$$

ب الفائدة البسيطة التجارية (IC):

ونظرا لان استخدام العدد الصحيح لعدد أيام السنة يزيد من صعوبة العمليات الحسابية، لذلك جرى العرف في الأوساط المالية والتجارية اعتبار أن عدد أيام السنة هي 360 يوما فقط؛ وتسمى السنة نسبة لها إما بالسنة المالية أو التجارية، ذلك بفرض أن كل شهر فيه 30 يوما، ويطلق عليها بالطريقة التجارية أو الطريقة العملية أو الفرنسية، وهذه الفائدة البسيطة تدعى بالفائدة التجارية وحدتها هي " وحدة نقدية : ون " ورمزها: IC قانونها كما هو مبين في الأسفل:

$$\mathrm{I}C = \frac{C \times i \times n}{360}$$

يتضح مما سبق، ويلاحظ رياضيا أن الفائدة التجارية تكون دائما أكبر من الفائدة الصحيحة.

6- الطريقة المختصرة لحساب الفائدة البسيطة لعدة مبالغ مستثمرة (النمر والقواسم) :

هناك طريقة مختصرة لحساب مبلغ الفائدة البسيطة عندما يستثمر شخص طبيعي أو معنوي عدة مبالغ بقيم مختلفة في بنك واحد وبمعدل فائدة واحد، ولكن بمدد زمنية مختلفة في هذه الحالة يمكننا استعمال أسلوب النمر والقاسم، إذ يمكن توضيحها كما يلي:

أ- النمر: هي ترجمة لكلمة مجموعة من الأرقام في الفرنسية أو الإنجليزية إلى اللغة العربية وهي عبارة عن حاصل ضرب المبلغ الموظف في المدة الزمنية، ليس لها وحدة ورمزها: N

ب- القاسم: هو حاصل قسمة المدة الزمنية على معدل الفائدة، ليس له وحدة ورمزه هو: D

و تحسب الفائدة بالمعادلة الأتية:

$$\mathrm{I} = \frac{N}{D}$$

حيث:

$$\mathrm{N} = \sum \mathrm{CiXni}$$

و

$$D = \frac{n}{i}$$

بالسنوات $D = \frac{1}{i}$

بالأشهر $D = \frac{12}{i}$

بالأيام $D = \frac{360}{i}$

الخصم البسيط وخصم الأوراق التجارية من طرف البنوك

1- تعريف الخصم وعناصره والعلاقات الرياضية المرتبطة به(الحسم أو القطع، الحطيطة أو التخفيض):

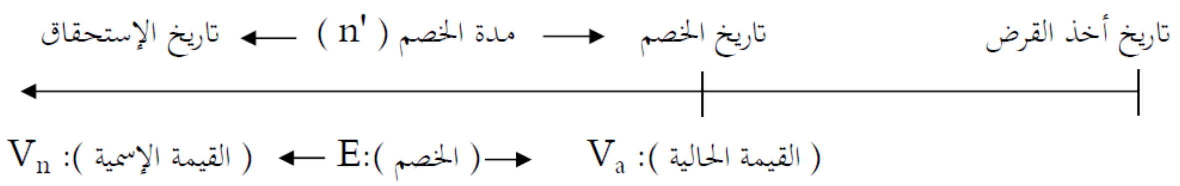
لو افترضنا أن شخصا مدينا بمبلغ معين مستحق في تاريخ لاحق، وأراد التخلص من هذا الدين حالا (أي أراد تسديد دينه حالا قبل تاريخ استحقاقه)، فإنه في هذه الحالة يدفع القيمة الحالية للدين الواجب تسديده في تاريخ لاحق، أي يدفع القيمة الحالية للقيمة المحصلة، والمدين في هذه الحالة يسدد مبلغ أقل مما هو مستحق عليه في تاريخ الإستحقاق، وذلك بعد طرح الفوائد الناتجة عن المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم (تاريخ تسديد القيمة الحالية) وتاريخ الإستحقاق، وهذه الفوائد المطروحة يطلق عليها الخصم وعندئذ يطلق على القيمة المحصلة بالقيمة الإسمية للدين. وهذا ما يوجد في النموذج التخطيطي الذي يوضح لنا الخصم وعناصره كما في الشكل أسفله وبالتالي إذا، فإن ما يقوم بسداده الآن هو ما يسمى بالقيمة الحالية للدين وليس الدين الأصلي، وأن الفرق بينهما هو الخصم. ويطلق على قيمة الدين الأصلي لفظ القيمة الاسمية للدين، ومنه عناصر الخصم هي:

- **القيمة الإسمية (Valeur Nominal):** هي المبلغ الذي يدفعه المدين في تاريخ الإستحقاق، وهي القيمة الأصلية للدين أو القيمة المحصلة أو المبلغ المستقبلي، وهو مبلغ مكتوب في الورقة التجارية، وحدتها " ون " ورمزها: **Vn**

- **القيمة الحالية (Valeur Actuel)**: هي المبلغ الذي يدفعه المدين قبل موعد استحقاق دينه، وهي المبلغ الذي يدفع آنيا، أو هو المبلغ النقدي الملموس الذي يدفع في تاريخ الخصم ، وحدتها " ون " ورمزها: **Va**

- الخصم (: يطلق على الخصم باللغة الفرنسية : L'escompte، أما باللغة الانجليزية: Discount): يمكن تعريف الخصم أنه المقابل المادي الذي يحصل عليه المدين من الدائن في مقابل سداد دينه قبل حلول موعد استحقاقه. أو هو المبلغ الذي يطرح من مبلغ الدين (القيمة الإسمية) في مقابل سداده قبل موعد استحقاقه.
وقد يعرف بأنه الفرق بين القيمة الإسمية والقيمة الحالية، ووحدته " ون " ورمزه: **E**

- مدة الخصم هي المدة الزمنية الفاصلة من تاريخ الخصم حتى تاريخ الإستحقاق وحدتها بالسنوات أو بالأشهر أو بالأيام،رمزها: **n'**



الجدول رقم (05) : حساب الخصم والعناصر المرتبطة به

الرقم	الصياغة	العلاقات الرياضية
الخصم بدلالة القيمة الإسمية والقيمة الحالية		
01	الخصم = القيمة الإسمية – القيمة الحالية	$E = V_n - V_a$
02	القيمة الإسمية = القيمة الحالية + الخصم	$V_n = V_a + E$
03	القيمة الحالية = القيمة الإسمية – الخصم	$E - V_a = V_n$

الخصم وهو عبارة عن الفوائد الناتجة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الإستحقاق		
04	الخصم = القيمة × المعدل × المدة	$E = V \times i \times n'$
حساب كلا من القيمة والمعدل والمدة بدلالة الخصم	القيمة = $\frac{\text{الخصم}}{\text{المعدل} \times \text{المدة}}$	$V = \frac{E}{i \times n'}$
	المعدل = $\frac{\text{الخصم}}{\text{القيمة} \times \text{المدة}}$	$i = \frac{E}{V \times n'}$
	المدة = $\frac{\text{الخصم}}{\text{القيمة} \times \text{المعدل}}$	$n' = \frac{E}{V \times i}$
05	**ملاحظات:** – إذا كان تاريخ الخصم هو نفسه تاريخ الإستحقاق، فإن القيمة الحالية **تساوي** القيمة الإسمية. – القيمة الإسمية تكون **دائما أكبر من** القيمة الحالية. – نفرض أن معدل الخصم هو نفسه معدل الفائدة. – الخصم في الخانة (04) يكون بدلالة القيمة الإسمية مرة وقيمة حالية مرة أخرى، وهذا ما سيتم التطرق إليه في العنصر الذي سيأتي فيما بعد.	

-2- نوعا الخصم والعلاقة بينهما:

أ- الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة:

يعرف الخصم الصحيح بأنه فائدة القيمة الحالية الصحيحة عن مدة الخصم وبمعدل الفائدة المتفق عليه، والمعدل المستخدم في حساب الخصم الصحيح يسمى بمعدل الفائدة. حيث تتحدد القيمة الحالية باعتبارها المبلغ الذي إذا استثمر بفائدة بسيطة بمعدل (1) فإن جملته في نهاية المدة (n) تصل إلى القيمة الاسمية أو الدين الأصلي.

وعلى هذا فإن الخصم والذي يمثل الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية ما هو إلا قيمة الفائدة البسيطة المستحقة على مبلغ يعادل القيمة الحالية؛ ويسمى الخصم الناتج في ضوء هذه الطريقة بالخصم

النظري أو الخصم الصحيح، وتسمى القيمة الحالية التي يحصل عليها بالقيمة الحالية النظرية أو الصحيحة ووحدتهما " ون " ويرمزلهما بالترتيب التالي: الخصم الصحيح بـ: ER؛ القيمة الحالية الصحيحة بـ: VaR

ب الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية:

يعرف الخصم التجاري لدين بأنه فائدة القيمة الإسمية لذلك الدين عن مدة الخصم وبمعدل الفائدة أو معدل الخصم المتفق عليه. ويسمى الخصم التجاري بالخصم البنكي لأنه يستخدم عادة بواسطة البنوك في خصم الأوراق التجارية. والمعدل المستخدم في حساب الخصم التجاري يسمى معدل الخصم والقيمة الحالية الناتجة بالقيمة الحالية التجارية ووحدتهما " ون " ويرمز لهما تواليا: الخصم التجاري بـ : القيمة الحالية التجارية بـ: Vac

يجدر التنويه بأن الخصم التجاري هو الأكثر شيوعا في الحياة العملية، وهو أسلوب الخصم الواجب اتباعه ما لم ينص صراحة على استخدام معدل الخصم الصحيح.

ج- العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الصحيح:

تحدد العلاقة بينهما أي بين الخصم التجاري الذي يسمى أيضا بالحطيطة الخارجية والخصم الصحيح الذي يسمى بالحطيطة الداخلية، من خلال العمليات الرياضية من قسمة وجمع وطرح، والجدول أدناه يبين لنا نتائج العمليات والعلاقة بين الخصمين:

الجدول رقم (06) : العلاقة الرياضية بين الخصم التجاري والخصم الصحيح

الرقم	الصياغة	العلاقة الرياضية
01	الخصم التجاري = القيمة الإسمية × المعدل × المدة	$E_C = V_n \times i \times n'$
02	الخصم الصحيح = القيمة الحالية × المعدل × المدة	$E_R = Va \times i \times n'$
03	القيمة الحالية التجارية = القيمة الإسمية − الخصم التجاري	$V_{aC} = V_n - E_C$
04	القيمة الحالية الصحيحة = القيمة الإسمية − الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة بعد تعويض الخصم الصحيح	$V_{aR} = V_n - E_R$ $V_{aR} = V_n - (Va \times i \times n')$
05	القيمة الحالية التجارية بدلالة القيمة الإسمية	$V_{aC} = V_n (1 - i \times n')$
06	القيمة الحالية الصحيحة بدلالة القيمة الإسمية	$V_{aR} = \dfrac{V_n}{1 + i \times n'}$
إيجاد علاقة القسمة والفرق والجمع بين الخصم التجاري والصحيح		

	علاقة **القسمة** أو النسبة بينهما هي:	$\dfrac{E_C}{E_R} = 1 + i \times n'$
ومنها يتم إيجاد	الخصم التجاري بدلالة الخصم الصحيح	$E_C = E_R (1 + i \times n')$
	الخصم الصحيح بدلالة الخصم التجاري	$E_R = \dfrac{E_C}{1 + i \times n'}$
علاقة الطرح	الفرق بدلالة الخصم التجاري	$E_C - E_R = \dfrac{i \times n' \times E_C}{1 + i \times n'}$

خصم الأوراق التجارية من طرف البنوك

قبل التطرق إلى مفهوم خصم الأوراق التجارية لابد التعريج على تعريف الأوراق التجارية وذكر أنواعها، ثم نسلط الضوء على عملية خصم الورقة التجارية من طرف البنك، والمقابل المالي الذي يأخذه البنك نظير هذه الخدمة، والكشف الذي يعده البنك في حالة تعدد الأوراق التجارية المقدمة للقطع.

أ- مفهوم الأوراق التجارية

إن للعمليات المالية والنقدية وسائل دفع فورية هي النقود والشيكات، ووسائل دفع آجلة هي الأوراق التجارية التي نظمها القانون التجاري والتي تحل محل النقود، وعرفها بأنها وثيقة تحرر وفق نموذج خاص وهي تضمن استرجاع الدين عند تاريخ الاستحقاق، وهناك ثلاثة أنواع من الأوراق التجارية : السفتجة أو الكمبيالة، السند لأمر أو السند الإذني، الشيك أو الصك.

- **الشيك**: هو تعهد من طرف المدين للدائن (المستفيد)، بأن يتحصل هذا الأخير على قيمة الشيك في شكل نقود فورا عند تقديمه للبنك أو يوم تحريره للشيك، ويسمى بشيك بنكي أو مصرفي؛ شيك بريدي أو صك بريدي.
- **السفتجة أو الكمبيالة:** هي تشمل ثلاثة أطراف الساحب (المدين) الذي يقوم بتحريرها، والمسحوب عليه (البنك) الذي يلتزم بدفع قيمتها للدائن في تاريخ الإستحقاق والمستفيد (الدائن) الذي يتلقى القيمة الإسمية للسفتجة.
- **السند لأمر:** وهو تعهد من طرف المدين للدائن بأن يدفع له قيمة السند في تاريخ استحقاق معين.

إن الورقة التجارية تحمل اسم الدائن القيمة الإسمية للدين تاريخ تحريرها وتاريخ استحقاقها.

إن السفتجة (الكمبيالة) والسند لأمر (السند الإذني) قابلان للإنتقال من يد إلى يد تسديدا لعمليات الشراء أو الديون، وذلك عن طريق عملية التظهير التي تقتضي توقيع حامل الورقة على ظهرها ليكون ملتزما بدفع قيمتها عند تاريخ استحقاقها.

ب- مفهوم عملية خصم الأوراق التجارية

إذا احتاج المدين للسيولة النقدية، قد يلجأ إلى عدة طرق للحصول على ذلك، منها الإقتراض أو التنازل عن سلع أو ممتلكات مقابل مبالغ نقدية، أو يلجأ إلى تحصيل وخصم الأوراق التجارية التي بحوزته، حيث يقدمها إلى البنك قبل تاريخ استحقاقها، فيقوم البنك بعملية الخصم.

بمجرد استلام الدائن للورقة التجارية فإنه يلجأ بالضرورة إلى تقديمها للبنك لخصمها واستلام قيمتها الحالية، على أن يحصل البنك على الخصم التجاري مقابل آداء هذه الخدمة لصالح الدائن ونتيجة تحمله المخاطرة المتعلقة باحتمالات عدم سداد المدين للقيمة الإسمية للدين في تاريخ استحقاقه.

فعملية الخصم هي تحصيل قيمة الأوراق التجارية قبل تاريخ استحقاقها وتحويلها إلى سيولة نقدية. أما خصم الورقة التجارية هو ذلك المبلغ الذي يأخذه البنك ويقتطعه من القيمة الإسمية للورقة التجارية.

ج- المقابل المالي للخدمة المقدمة من طرف البنك (الأجيو) :

بالإضافة إلى قيمة الخصم فإن البنك يقتطع قيمة العمولة ونسبة من الورقة كضريبة عن الورقة، ومجموع ما يأخذه البنك نتيجة تقديمه لهذه الخدمة يسمى بالأجيو، والذي يشمل كلا من:

– **الخصم**: والبنك يستخدم فقط الخصم التجاري، الذي هو حاصل ضرب كلا من القيمة الإسمية ومعدل الخصم ومدة الخصم بالأيام التي تقسم على 360 يوما.

– عمولة البنك أو عمولة التحصيل: تضم كلا من:

• العمولات المستقلة عن الزمن وتسمى أيضا العمولات المتناسبة مع القيمة الإسمية للورقة كعمولة التوظيف، عمولة اللائحة، عمولة القبول، ... إلخ. وتحسب كنسبة مئوية (أو نسبة في الألف) من القيمة الإسمية للورقة المقدمة للخصم ولا تعتمد على مدةالخصم.

• العمولة المرتبطة بالزمن وتسمى أيضا العمولة غير المتناسبة وهي عمولة التظهير، وتحسب كما يحسب الخصم وهي مرتبطة بالزمن.

– **الضريبة على الورقة أو الرسم على القيمة المضافة:** وهو حاصل ضرب نسبة الرسم على القيمة المضافة في مجموع العمولات المستقلة عن الزمن.

د- كشف أو حافظة خصم الأوراق التجارية المعدة من طرف البنوك :

في حالة تعدد الأوراق التجارية المرسلة للقطع في أحد البنوك يتم إعداد حافظة أو جدول للحسم يقسم إلى: القسم العلوي يوضح لنا عدد الأوراق التجارية وقيمها الإسمية ومدة خصمها ونمرها. أما القسم السفلي هو بيان للخصم يشتمل على: الخصم التجاري، عمولات البنك، مبلغ الرسم على القيمة المضافة، الآجيو خارج الرسم والآجيو المتضمن الرسم، ثم الصافي المستحق؛ وهذا ما سيتجلى لنا واضحا في الجدول أسفله.

هـ - ملاحظات:

– يحسب الخصم التجاري لعدة أوراق تجارية بطريقة النمر والقواسم التي تم ذكرها في حساب الفائدة البسيطة، ولكن هنا لدينا الخصم التجاري أي أن القاسم يكون بدلالة 360 يوما.

– القيمة الحالية تسمى أيضا الصافي المستحق.

– في أغلب الأحيان العمولات المستقلة عن الزمن هي عمولة التظهير.

– يوجد نوعين من الآجيو : الآجيو خارج الرسم على القيمة المضافة وهو المذكور أعلاه، والآجيو الإجمالي أو الآجيو المتضمن الرسم على القيمة المضافة عندما هو يتم إضافة الضريبة على القيمة المضافة إلى الآجيو خارج الرسم.

– عند حساب العمولات نحسب عمولة على كل ورقة تجارية وحدها لأن كل واحدة عندها قيمة إسمية مختلفة، ثم نقوم بجمع العمولات مع بعضها ونضعها في كشف الخصم.

الجدول رقم (07) : طريقة إعداد كشف خصم الأوراق التجارية من طرف البنك

	الرقم	القيم الإسمية (V_n)	مدة الخصم بالأيام (n')	النمر اليومية ($N = V_n \times n'$)
الجهة العلوية	01	....	......	....
	02	....	......	....
	03	....	......	....
	..	....	......	....
	المجموع	....		....

بيان الخصم

الجهة السفلية	1	الخصم التجاري:	$E_C = \frac{N}{D}$ ، $D = \frac{360}{i}$	......
	2	عمولة البنك أوعمولة التحصيل = أ + ب		......
	أ	العمولات المستقلة عن الزمن = القيمة الإسمية × النسبة المئوية للعمولة		
	ب	العمولة المرتبطة بالزمن = القيمة الإسمية × النسبة المئوية لعمولة التظهير × مدة الخصم		
	3	الآجيو خارج الرسم = الخصم التجاري + عمولات البنك	Agio H .T = Ec + عمولات البنك	......
	4	مبلغ الرسم على القيمة المضافة (T. V. A)	TVA = Taux de TVA × مجموع العمولات المستقلة عن الزمن	......
	5	الآجيو الإجمالي = الخصم التجاري + عمولة البنك + مبلغ الرسم على القيمة المضافة الآجيو الإجمالي = الآجيو (H.T) + مبلغ (T.V.A)	Agio Global = Ec + عمولة البنك + T.V.A Où: Agio Global = Agio H.T + T.V.A	......
	6	القيمة الحالية = مجموع القيم الإسمية –الآجيو الإجمالي	$V_a = \sum V_n$ - Agio Global	......

تسوية الديون قصيرة الأجل (تكافؤ الأوراق التجارية أو استبدال الديون)

أحياناً لا يتمكن المدين أو المقترض من الوفاء بالتزاماته المتمثلة في تسديد ديونه في تاريخ الاستحقاق، وهنا يتفاوض مع دائنه من أجل تسوية ديونه عن طريق استبدال ورقة أو عدة أوراق تجارية بورقة واحدة جديدة، أو بعدة أوراق تجارية أخرى ، وتسوية الديون بين الطرفين (الدائن والمدين تتم وفق قاعدة أن قيمة الديون القديمة في تاريخ استبدالها يجب أن تتساوى مع قيمة الديون الجديدة في ذلك التاريخ.

1- مفهوم تكافؤ الأوراق التجارية:

قد تحدث تغيرات غير متوقعة للمدينين تحول دون قيامهم بسداد المبالغ المستحقة عليهم وفقا لطرق وتواريخ السداد المتفق عليها من قبل. في هذه الحالة تستخدم نظرية التكافؤ للأوراق التجارية، والتي تتم باتفاق طرفيها أو أطرافها دون الإيقاع بالضرر على أحد، إن المبدأ الأساسي لتغيير الأوراق التجارية هو أن يحصل المستفيد (الدائن) على نفس القيمة الحالية إذا قدم الورقتين للخصم في نفس يوم استبدالها، في هذه الحالة نقول أن الورقتين متكافئتين في تاريخ معين إذا كان معدل الخصم واحد. فتكافؤ ورقتين تجاريتين يعني تساوي قيمتهما الحالية بتاريخ محدد وباستعمال نسب خصم متساوية فيهما، كما أنه يمكن القيام بتكافؤ ورقة أو أكثر، أو ورقة ومبلغ مالي مع ورقة أخرى أو أكثر وبالتالي يُقصد بتكافؤ الأوراق التجارية هو تساوي القيم الحالية لهذه الأوراق في تاريخ التسوية (تاريخ التكافؤ)، ويُمكن للطرفين القيام بتكافؤ ورقة تجارية مع ورقة تجارية أخرى أو عدة أوراق تجارية مع عدة أوراق تجارية أخرى شرط احترام ما يلي:

- ☑ معدلات الخصم يجب أن تكون متساوية ومشتركة؛
- ☑ حساب القيم الحالية للأوراق التجارية في نفس تاريخ التسوية أو تاريخ التكافؤ.

2- تكافؤ ورقتين تجاريتين:

يُطلق مصطلح تكافؤ ورقتين تجاريتين في تاريخ معين (تاريخ التكافؤ) إذا تم خصم هاتين الورقتين في ذلك التاريخ بنفس معدل الخصم المطبق على الورقتين، وكانت القيمتين الحاليتين للورقتين متساوية.

ليكن لدينا:

القيم الاسمية للورقتين التجاريتين على التوالي:

$$Vn_2 \text{ ،} Vn_1$$

عدد الأيام المحصورة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقتين التجاريتين على التوالي.

$$n_2 \text{ ،} n_1$$

القيمتين الحاليتين التجاريتين للورقتين.

$$Vac_2 , Vac_1$$

عند تاريخ التكافؤ تكون القيمتين الحاليتين التجاريتين متساويتين.

الورقتين التجاريتين متكافئتين يعني:

القيمة الحالية للورقة القديمة = القيمة الحالية للورقة الجديدة.

$$Vac_2 = Vac_1$$

$$Vn_1 - Ec_1 = Vn_2 - Ec_2 \Rightarrow Vn_1 - Vn_1 \times i \times n_1' = Vn_2 - Vn_2 \times i \times n_2'$$

$$\boxed{Vn_1(1 - i \times n_1') = Vn_2(1 - i \times n_2')}$$

مثال:

القيمة الاسمية لورقة تجارية هي 2000 دج مستحقة في 20 ماي 2019. وفي 05 ماي من نفس السنة اتفق المدين مع الدائن على تأجيل تاريخ الاستحقاق إلى غاية 15 جوان 2019. إذا كان معدل الخصم هو4 %. فما هي القيمة الاسمية للورقة الجديدة؟

الحل

مدة خصم الورقة القديمة هو15 يوم (من 05/05/2019 إلى 20/05/2019)

مدة خصم الورقة الجديدة هو31 يوم (من 05/05/2019 إلى 15/06/2019)

$$Vac_2 = Vac_1 \Rightarrow Vn_1(1 - i \times n_1') = Vn_2(1 - i \times n_2')$$

$$\Rightarrow 2000(1-0.04x15/360) = Vn_2\,(1 - 0.04 \times 31/360)$$

$$\Rightarrow \ Vn2 = \frac{1996.66}{0.996}$$

$$\Rightarrow Vn_2 = 2004.67$$

3- تكافؤ ورقة تجارية مع مجموع عدة أوراق تجارية أخرى:

نقول بأن ورقة تجارية متكافئة مع مجموع عدة أوراق تجارية أخرى في تاريخ معين، إذا كانت في هذا التاريخ القيمة الحالية التجارية للورقة التجارية متساوية لمجموع القيم الحالية التجارية للأوراق الأخرى، حيث هذا التاريخ يُسمى تاريخ التكافؤ.

إذا كان لدينا ورقة تجارية ذات القيمة الاسمية Vn و P من الأوراق التجارية ذات القيم الاسمية على التوالي: $V_1, V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, V_p$ لديها فترات زمنية (مدد) بين تواريخ استحقاقها وتاريخ التكافؤ على التوالي:

$n'_1, n'_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'_p$

فإن تكافؤ هذه الورقة مع مجموع هذه الأوراق التجارية يُعطى وفق الصيغة التالية:

$$Vac_2 = Vac_1 \Rightarrow Vn'(1 - i \times n') = Vn_1(1 - i \times n_1') + Vn_2(1 - i \times n_2') \ldots\ldots\ldots + Vn_p(1 - i \times n_p')$$

مثال

في 15/06/2019 اتفق مدين مع دائنه على تسديد ديونه المتمثلة في ثلاثة أوراق تجارية بواسطة ورقة تجارية وحيدة مستحقة يوم 10 جويلية 2019 وبواسطة معدل فائدة بسيطة 5 % سنوياً. كما يلي:

✍الورقة الأولى قيمتها الاسمية 2000 دج، مستحقة يوم30 جوان 2019؛

الورقة الثانية قيمتها الاسمية 2500 مستحقة دج، مستحقة يوم 15 جويلية 2019؛

الورقة الثالثة قيمتها الاسمية 4000 مستحقة دج، مستحقة يوم05 جويلية 2019؛

فما هي القيمة الاسمية لهذه الورقة التجارية الجديدة؟

الحل:

المدة المحصورة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقة الجديدة هي 25 يوم

المدة المحصورة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقة الأولى هي 15 يوم

المدة المحصورة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقة الثانية هي 30 يوم

المدة المحصورة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقة الثالثة هي 20 يوم

القوانين الأساسية للفائدة المركبة

1. مفهوم الفائدة المركبة.
2. القانون الأساسي لحساب الجملة (القيمة المكتسبة).
3. القانون الأساسي لحساب أصل المبلغ (رأس المال).
4. تقييم رأس مال يُدفع في أي تاريخ كان.

1- مفهوم الفائدة المركبة:

كما ذكرنا سالفاً في فصل الفائدة البسيطة على أنها تُحسب على القروض قصيرة الأجل (Emprunts à courts termes) والتي لا تتجاوز مدتها سنة كاملة وأن الفائدة البسيطة تُحسب على المبلغ الأصلي مقارنة بالفائدة المركبة والتي تخص القروض طويلة الأجل (Emprunts a longs termes)، وتحسب الفائدة المركبة على المبلغ وفائدته، عكس الفائدة البسيطة التي تحسب على المبلغ الأصلي فقط.

الفائدة المركبة هي تطبيق معدل الفائدة البسيطة على مدة مركبة من عدة فترات زمنية في نهاية كل فترة زمنية، الفائدة البسيطة الناتجة تُضاف إلى رأس المال لإنتاج فائدة بسيطة على رأس المال الجديد خلال الفترة الزمنية اللاحقة. ونسميها رأسملة الفوائد. الفوائد المركبة تُستخدم في العمليات المالية متوسطة وطويلة الأجل.

مثال

نفترض أننا أودعنا مبلغاً من المال قدره 1000 دج في البنك الوطني الجزائري بمعدل فائدة 5 % لمدة سنوات. سوف نحاول من خلال هذا المثال تبيان الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، وذلك كما يظهر في الجدول أدناه:

السنوات	الفائدة البسيطة		الفائدة المركبة	
	المبلغ	الفائدة	المبلغ	**الفائدة**
1	1000	50	1000	**50**
2	1000	50	1050	**52,5**
3	1000	50	1102.5	**55,125**
4	1000	50	1157,625	**57,88125**
5	1000	50	1215,50625	**60,7753125**

← في نهاية السنة الأولى، رأس المال C_0 يُنتج فائدة بسيطة I_1

$$I_1 = 1000 * 5\% = 50DA$$
←

← الفائدة I_1 سوف تُضاف إلى رأس المال C_0 لتنتج رأس مال جديد C_1

$$C_1 = C_0 + I_1 = 1000 + 50 = 1050DA \leftarrow$$

← في نهاية السنة الثانية، رأس المال C_1 يُنتج فائدة بسيطة I_2

$$I_2 = 1050 * 5\% = 52{,}5DA \leftarrow$$

← الفائدة I_2 سوف تُضاف إلى رأس المال C_1 لتنتج رأس مال جديد C_2

$$C_2 = C_1 + I_2 = 1050 + 52{,}5 = 1102{,}5DA \leftarrow$$

← في نهاية السنة الثالثة رأس المال C_2 يُنتج فائدة بسيطة I_3

$$I_3 = 1102{,}5 * 5\% = 55{,}125DA \leftarrow$$

← الفائدة 3 سوف تُضاف إلى رأس المال C_2 لتنتج رأس مال جديد C_3

$$C_3 = C_2 + I_3 = 1102{,}5 + 55{,}125 = 1157{,}625DA \leftarrow$$

← في نهاية السنة الرابعة رأس المال C_3 يُنتج فائدة بسيطة I_4

$$I_4 = 1157{,}625 * 5\% = 57{,}88125DA \leftarrow$$

← الفائدة 4 I سوف تُضاف إلى رأس المال C_3 لتنتج رأس مال جديد C_4

$$C_4 = C_3 + I_4 = 1157{,}625 + 57{,}88125 = 1215{,}50625DA \leftarrow$$

← في نهاية السنة الخامسة، رأس المال C_4 يُنتج فائدة بسيطة I_5

$$I_5 = 1215{,}50625 * 5\% = 60{,}7753125DA$$

ملاحظة: نلاحظ أن الفوائد المركبة دائماً أكبر من الفوائد البسيطة لأن الفوائد المركبة ناتجة عن رسملة الفوائد البسيطة الناتجة في نهاية كل فترة زمنية.

2- القانون الأساسي لحساب الجملة (القيمة المكتسبة)

إذا رمزنا لعناصر أو محددات الفائدة المركبة بالرموز التالية:

C.رأس المال المستثمر في بداية الفترة (المبلغ الأصلي)

n. مدة الاستثمار

t.معدل الفائدة المركبة

A القيمة المكتسبة أو جملة الفائدة المركبة

السنوات	رأس المال في بداية السنة	الفائدة	رأس المال في نهاية السنة
1	C	$C * t$	$\boldsymbol{A_1 = C + c * t = c(1 + t)}$
2	$c(1 + t)$	$c(1 + t).t$	$A_2=c(1+t)+c(1+t).t=c(1+t).[1+t]=C.(1+t)^2$
3	$C.(1+t)^2$	$C.(1+t)^2.t$	$A_3=C.(1+t)^2+C.(1+t)^2.t=c(\boldsymbol{1}$

n	$C.(1+t)^{n-1}$	$C.(1+t)^{n-1}.t$	$A_n = C.(1+t)^{n-1} + C.(1+t)^{n-1}.t$ $= c(1+t)^{n-1}.[1+t]$ $= C.(1+t)^n$

وبالتالي فإن قانون جملة فائدة مركبة يُعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\boxed{A = C(1+t)^n}$$

أما الفائدة المركبة فتحسب بالعلاقة الرياضية التالية:

الفائدة المركبة تساوي الفرق بين القيمة المكتسبة (الجملة) ورأس المال المستثمر (المبلغ الأصلي)

$$I = A - C$$
$$\Rightarrow I = C(1+t)^n - C$$
$$\Rightarrow I = C[(1+t)^n - 1]$$

$$\boxed{I = C[(1+t)^n - 1]}$$

ملاحظات هامة:

- ✓ مبلغ الفوائد المكتسبة بعد **n** فترة زمنية هي الفرق بين القيمة المكتسبة (الجملة) ورأس المال الأصلي:

$$\boxed{I_n = C_n - C_o}$$

- ✓ فترة رسملة الفوائد البسيطة يُمكن أن تكون ،شهر ثلاثي، سداسي أو سنة؛
- ✓ مبلغ القيم المكتسبة $(C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_n)$ تُشكل متتالية هندسية ذات الأساس (1-t)؛
- ✓ الفوائد المركبة تستخدم خاصةً للتوظيفات أو الإيداعات ذات الأجل المتوسط والطويل المدى (أكثر من سنة).

<u>مثال:</u>

أودع شخص مبلغ مالي قدره 5000 دج في بنك معين بمعدل فائدة مركبة 6% ، لمدة ثلاث سنوات. فما هي القيمة المكتسبة المتحصل عليها في نهاية مدة الايداع؟ وما هي قيمة الفائدة المتحصل عليها؟

<u>الحل:</u>

حساب قيمة الجملة المتحصل عليها في نهاية المدة:

$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow A = 5000(1+0,06)^3$$

من الجدول المالي رقم (01) فإن القيمة:

$$(1+0,06)^3 = 1,191016$$
$$\Rightarrow A = 5000(1+0,06)^3$$
$$= 5000 \times 1,191016$$
$$\Rightarrow A = 5955,08DA$$

حساب قيمة الفائدة المتحصل عليها في آخر سنة للإستثمار:

$$I = A - C$$
$$\Rightarrow I = 5955,08 - 5000$$
$$I = 955,08DA$$

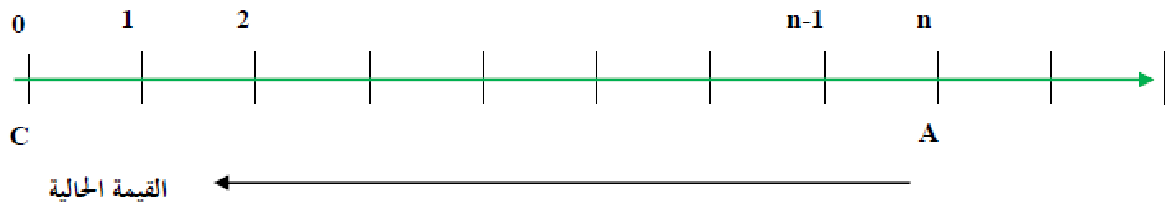
3- القانون الأساسي لحساب أصل المبلغ (رأس المال):

تعرف القيمة الحالية على أنها القيمة الأصلية لرأس المال عُرفت قيمته في نهاية مدة توظيفه، وعليه فإن القيمة الحالية تتحدد بطرح الفائدة المركبة من هذا المبلغ (القيمة النهائية).

إذا كانت لدينا المعطيات التالية:

A قيمة الجملة أو القيمة المكتسبة لرأس مال معين في نهاية فترة توظيفه؛

C قيمة رأس المال في بداية فترة التوظيف أو الاستثمار؛



$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow C = \frac{A}{(1+t)^n}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{C = A.(1+t)^{-n}}$$

$$\boxed{C = A.(1+t)^{-n}}$$

ملاحظة:

القيمة $(1+t)^{-n}$ تستخرج مباشرة من الجدول المالي رقم (02) أو تُحسب بالآلة الحاسبة.

مثال:

أودع شخص مبلغ مالي في بنك ما بمعدل فائدة مركبة 4% ، وبعد 5 سنوات أصبح في حسابه ما قيمته 4652 دج.

- أوجد قيمة رأس المال المودع لدى البنك.

لدينا :

$$C = A.(1+t)^{-n}$$
$$\Rightarrow C = 4652(1{,}04)^{-5}$$

تق 4-

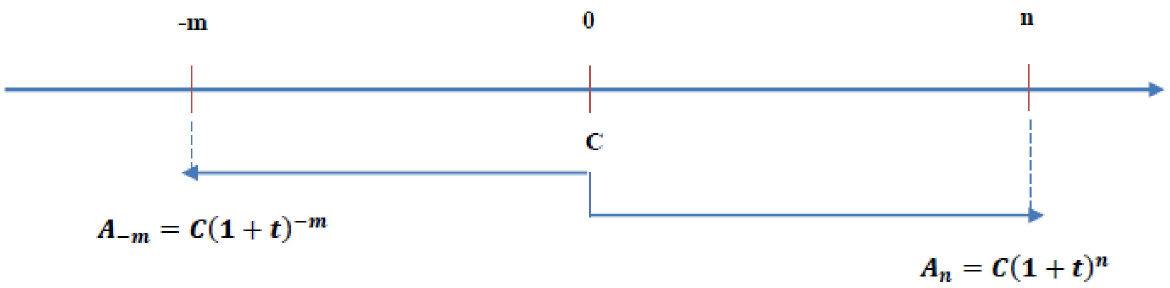
$$\Rightarrow C = 4652(1{,}04)^{-5}$$

إذا كان لدينا $(1{,}04)^{-5} \longrightarrow 0{,}8219271$ ....Tableau financier N°02

$$\Rightarrow C = 4652 * 0{,}8219271 = \mathbf{3823{,}60}\boldsymbol{DA}$$

C : رأس مال يُدفع في التاريخ صفر (0)؛

- ما هي قيمته (An) في التاريخ ؛
- ما هي قيمته (A-m) في التاريخ -m .



خلاصـــة
$A_n = A_{-m}(1+t)^{m+n}$

مثال:

دين قيمته الاسمية 100000 دج مستحق بتاريخ 01/07/2022، حيث هناك حالتين لتسديده كما يلي:

التسديد المسبق في 01/07/2019؛

تأجيل التسديد إلى 01/07/2024.

إذا كان معدل الفائدة المركبة 5% سوياً.أُحسب قيمة الدين في الحالتين.

الحل:

الحالة الأولى: التسديد المسبق في 01/07/2019

$$A_{-m} = C(1+t)^{-m}$$
$$\Rightarrow A_{-3} = C(1+0{,}05)^{-3}$$
$$\Rightarrow A_{-3} = 100000(1{,}05)^{-3}$$
$$\Rightarrow A_{-3} = 100000 * 0{,}86383759$$
$$\Rightarrow A_{-3} = 86383{,}7598 \text{ DA}$$

الحالة الثانية: تأجيل التسديد إلى 01/07/2024.

الطريقة الأولى:

$$A_n = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow A_2 = C(1+t)^2$$
$$\Rightarrow A_2 = 100000 * (1{,}05)^2$$
$$\Rightarrow A_2 = 100000 * 1{,}1025$$
$$\Rightarrow A_2 = 110250 \text{ DA}$$

الطريقة الثانية:

$$A_n = A_{-m}(1+t)^{m+n}$$
$$\Rightarrow A_2 = A_{-3}(1+0{,}05)^{3+2}$$
$$\Rightarrow A_2 = 86383{,}7598 * (1{,}05)^5$$
$$\Rightarrow A_2 = 86383{,}7598 * 1{,}27628156$$
$$\Rightarrow A_2 = 110249{,}9999 \text{ DA}$$

6. القانون الأساسي لحساب مدة الاستثمار

انطلاقاً من القاعدة العامة لحساب الجملة في حالة الفائدة المركبة يُمكننا تحديد معدل الفائدة المركبة المجهول كما يلي:

$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow (1+t)^n = \frac{A}{C}$$
$$\Rightarrow log(1+t)^n = log\left(\frac{A}{C}\right)$$
$$\Rightarrow n * log(1+t) = log\left(\frac{A}{C}\right)$$
$$\Rightarrow n = \frac{log\left(\frac{A}{C}\right)}{log(1+t)}$$

- **مثال**

أُستثمر مبلغ من المال قيمته 4000 دج بمعدل فائدة مركبة 5% فبلغت قيمته المكتسبة بعد مدة من الزمن 7491,8 دج.

أحسب مدة الاستثمار

- **الحل**

لدينا:

$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow (1+0,05)^n = \frac{7491,8}{4000}$$
$$\Rightarrow log(1,05)^n = log\left(\frac{7491,8}{4000}\right)$$
$$\Rightarrow n * log(1,05) = log\left(\frac{7491,8}{4000}\right)$$
$$\Rightarrow n = \frac{0,2725261}{0,0211892}$$
$$\Rightarrow n = 12,86$$
$$\Rightarrow n = 12\ ans + 311\ jours$$

7. الحالات الخاصة بالمدة

تختلف مدة الاستثمار حسب العقد الذي يربط بين المدين والدائن، حيث يُمكن أن تكون مدة الاستثمار عدد كامل (n) وجزء من المدة (α) أقل من الواحد، وفي هذه الحالة فإن مدة الاستثمار تُكتب كما يلي:

$$n + \alpha; \qquad \alpha < 1$$

- **مثال**

مدة استثمار 8 سنوات و أربعة أشهر تكتب كمايلي: $(8 + \frac{4}{12})$ أي:

$$n+\alpha = \left(8+\frac{4}{12}\right)$$

مدة استثمار 10 سنوات و 50 يوم تكتب كما يلي: $\left(10+\frac{50}{360}\right)$ أي:

$$n+\alpha = \left(10+\frac{50}{360}\right)$$

إذن جملة مبلغ نقدي واحد مستثمر بفائدة مركبة بمعدل (t) بعد مدة استثمار $(n+\alpha)$ تُعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{A = C(1+t)^{n+\alpha}}$$

هذه العلاقة الرياضية مثل العلاقات الرياضية السابقة، حيث تحتوي على 4 متغيرات، كما يُمكن حساب كل من هذه المتغيرات حسب الطريقة المستخدمة سابقاً.

ملاحظــــــة
الجداول المالية تأخذ بعين الاعتبار فقط مجموع المدد التي عددها كامل والمدد التي أقل من المفرد غير مذكورة في الجداول المالية، وفي هذه الحالة نستخدم بما يعرف **بطريقة التدريج**.

حساب القيمة المكتسبة (الجملة)

لحساب جملة رأس مال موظف خلال فترة من الزمن التالي:

- **مثال**

أُحسب جملة رأس مال قدره 5600 دج، أُستثمر بمعدل فائدة مركبة 4% لمدة 5 سنوات وأربعة أشهر.

- **الحل**

لدينا:

$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow A = 5600(1+0{,}04)^{5+\frac{4}{12}}$$
$$\Rightarrow A = 5600(1{,}04)^{5+\frac{4}{12}}$$

نلاحظ أن المدة $\left(5+\frac{4}{12}\right)$ محصورة بين المدتين:

$$5\ ans < 5+\frac{4}{12} < 6\ ans$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 6\ ans \Rightarrow (1{,}04)^6 \rightarrow 1{,}265319 \ldots\ldots\ldots (1) \\ n = 5\ ans \Rightarrow (1{,}04)^5 \rightarrow 1{,}216653 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) من (2) نجد:

$$1\ ans \rightarrow 0{,}048666$$
$$\frac{3}{4} \rightarrow \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,048666 * \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \alpha = 0,0364995$$
$$\Rightarrow (1,04)^{5+\frac{4}{12}} = 1,216653 + 0,0364995$$
$$\Rightarrow (1,04)^{5+\frac{4}{12}} = 1,2531525$$
$$\Rightarrow A = 5600(1,04)^{5+\frac{4}{12}}$$
$$\Rightarrow A = 5600 * 1,2531525$$
$$\Rightarrow A = 7017,654\ DA$$

حساب أصل المبلغ (رأس المال)

- **مثال**

أُحسب رأس مال مستثمر لمدة 6 سنوات و ستة أشهر بمعدل فائدة مركبة قدره 5 % سنوياً، حيث تبلغ قيمته المكتسبة بعد مدة الاستثمار 12456,70 دج.

- **الحل**

لدينا:

$$A = C(1+t)^n$$
$$\Rightarrow A = C(1+0,05)^{6+\frac{6}{12}}$$
$$\Rightarrow A = C(1,05)^{6+\frac{6}{12}}$$
$$\Rightarrow C = \frac{12456,70}{(1,05)^{6+\frac{6}{12}}}$$

$(1,05)^{6+\frac{6}{12}}$: قيمة مالية تُستخرج من الجدول المالي رقم (01)

السنة $\left(6+\frac{1}{2}\right)$ محصورة بين السنتين 6 و 7 سنوات

$$6\ ans < \left(6+\frac{1}{2}\right) < 7\ ans$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 7\ ans \Rightarrow (1,05)^7 \rightarrow 1,407100 \ldots\ldots\ldots (1) \\ n = 6\ ans \Rightarrow (1,05)^6 \rightarrow 1,340096 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) من (2) نجد:

$$1\ ans \rightarrow 0,067004$$
$$\frac{1}{2} \rightarrow \alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = 0,067004 * \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0{,}033502$$

$$\Rightarrow (1{,}05)^{6+\frac{1}{2}} = 1{,}340096 + 0{,}033502 = 1{,}373598$$

$$\Rightarrow C = \frac{12456{,}70}{1{,}373598} = \mathbf{9068{,}66DA}$$

حساب المدة

- **مثال**

أُحسب مدة استثمار مبلغ مالي قيمته 7500 دج وأصبحت قيمته المكتسبة بعدة مدة الاستثمار 10850 دج، ؛ فائدة مركبة 4 .%

- **الحل**

لدينا:

$$A = C(1+t)^n$$

$$\Rightarrow 10850 = 7500\,(1{,}04)^n$$

$$\Rightarrow (1{,}04)^n = \frac{10850}{7500}$$

$$\Rightarrow (1{,}04)^n = 1{,}45$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم (01) وعند معدل الفائدة 4% نجد أن القيمة المالية محصورة بين:

$$1{,}423312 < 1{,}45 < 1{,}480244$$

$$n = 9 < n = 9 + \alpha < n = 10$$

وبالتالي:

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 10\ ans \Rightarrow (1{,}04)^{10} \rightarrow 1{,}480244 \ldots\ldots\ldots (1) \\ n = 9\ ans \Rightarrow (1{,}04)^{9} \rightarrow 1{,}423312 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) من (2) نجد:

$$1\ ans \rightarrow 0{,}056932$$

لدينا كذلك:

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 9 + \alpha \Rightarrow (1{,}04)^{9+\alpha} \rightarrow 1{,}45 \ldots\ldots\ldots (3) \\ n = 9 \Rightarrow (1{,}04)^{9} \rightarrow 1{,}423312 \ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (3) من (4) نجد:

$$\alpha \rightarrow 0{,}026688$$

إذن:

$$1\ ans \rightarrow 0{,}056932$$

$$\alpha \rightarrow 0{,}026688$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{0,026688 * 1}{0,056932} = 0,4687\ ans$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,4687 * 360 = 168,732\ Jours$$

$$\Rightarrow n = 9\ ans + 169\ Jours$$

الدفعات المتساوية

1- مفهوم الدفعات المتساوية:

الدفعات المتساوية هي مبالغ مالية متساوية القيمة تودع أو تُسدد بصفة دورية على فترات زمنية منتظمة (متساوية)، حيث أن الفارق الزمني الفاصل بين كل إيداع أو تسديد دفعة يُسمى بالمدة، وهذه المدة أو الوحدة الزمنية يُمكن أن تكون شهرية (Mensualité)، كل شهرين (Bimensualité)، ثلاثية (trimestrialite) رباعية (Quadrimestrialite)، سداسية (Semestrialité) أو سنوية (Annualité).

2- أنواع الدفعات المتساوية:

تصنف الدفعات المتساوية أو الثابتة إلى نوعين حسب توقيت الدفعة في بداية كل وحدة زمنية أو في نهاية كل وحدة زمنية. ومن هذا المنطلق نميز ما يلي:

- **الدفعات المتساوية الفورية (دفعات الاستثمار):**

وهي الدفعات الثابتة (المبالغ المتساوية) التي تودع أو تُستثمر في بداية كل وحدة زمنية.

- **الدفعات المتساوية العادية (دفعات السداد):**

وهي الدفعات الثابتة (المبالغ المتساوية) التي تُسدد في نهاية كل وحدة زمنية.

3- القيمة المكتسبة لمتتالية الدفعات المتساوية الفورية:

وهي الجملة أو القيمة التي يكتسبها أو يتحصل عليها الشخص من جراء إيداع أو توظيف أو استثمار مبالغ مالية متساوية القيمة خلال فترات زمنية منتظمة ودورية. وبالتالي فإن القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ثابتة في بداية المدة هي مجموع القيم المكتسبة للدفعات المتتالية.

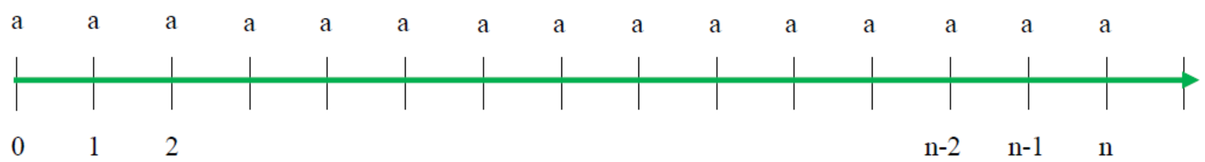
إذا رمزنا لعناصر الجملة أو القيمة المكتسبة بفوائد مركبة بالرموز التالية:

V_n القيمة المكتسبة (الجملة)

a قيمة الدفعة الثابتة

t معدل الفائدة المركبة

n عدد الدفعات



الدفعات	قيمة الدفعة	مدة كل دفعة	القيمة المكتسبة
1	a	n	$V_1 = a(1+t)^n$
2	a	$n-1$	$V_2 = a(1+t)^{n-1}$
3	a	$n-2$	$V_2 = a(1+t)^{n-2}$
……	a	……	……
……	a	……	……
$\boldsymbol{n-1}$	a	2	$V_{n-1} = a(1+t)^2$
$\boldsymbol{n}$	a	1	$V_n = a(1+t)$

لتكن $\boldsymbol{V_n}$ الجملة أو القيمة المكتسبة المتحصل عليها بعد جمع القيم المكتسبة لكل الدفعات بعد المدة n فنحصل على العلاقة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{V_n = a(1+t) + \ a(1+t)^2 + \cdots \ldots\ldots. + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}}$$

وبالتالي فإن مجموع هذه القيم المكتسبة للدفعات تُشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول **a(1+*t*)** وأساسها **(1+*t*)**، وحدها الأخير $a(\mathbf{1+}\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n-1}}$ وعدد حدودها $\boldsymbol{n}$.

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع متتالية هندسية متزايدة التي تُعطى وفق الصيغة التالية:

$$S = V_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\Rightarrow V_n = a(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_n = a(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{t}}}$$

$$V_n = a(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\Rightarrow V_n = 5000(1+0{,}04).\frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow V_n = 5000(1{,}04).\frac{(1{,}04)^{10} - 1}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_n = 62431{,}7570\ DA}$$

مثال:

قرر شخص إيداع مبلغ مالي قيمته 5000 دج في بداية كل سنة ولمدة 10 سنوات متتالية، فما سيتحصل عليها بعد نهاية المدة المتفق عليها إذا كان معدل الفائدة المركبة هو 4 % سنوياً.

الحل:

$$V_n = a(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\Rightarrow V_n = 5000(1+0{,}04).\frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow V_n = 5000(1{,}04).\frac{(1{,}04)^{10} - 1}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_n = 62431{,}7570\ DA}$$

4- القيمة المكتسبة لمتتالية الدفعات المتساوية العادية:

وهي الجملة أو القيمة التي يكتسبها أو يتحصل عليها الشخص من جراء إيداع أو توظيف أو استثمار مبالغ مالية متساوية

القيمة خلال فترات زمنية منتظمة ودورية. وبالتالي فإن القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ثابتة في نهاية المدة هي مجموع لقيم المكتسبة للدفعات المتتالية.

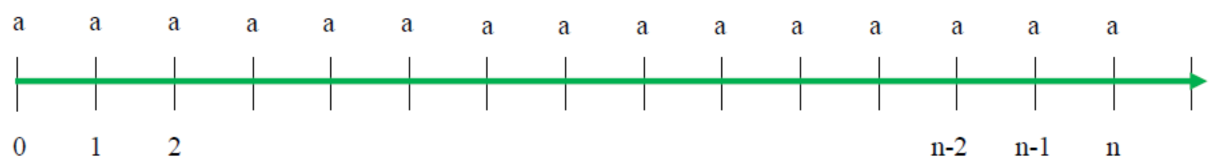
إذا رمزنا لعناصر الجملة أو القيمة المكتسبة بفوائد مركبة بالرموز التالية:

$\boldsymbol{V_n}$ القيمة المكتسبة (الجملة)

$\boldsymbol{a}$ قيمة الدفعة الثابتة

$\boldsymbol{t}$ معدل الفائدة المركبة

$\boldsymbol{n}$ عدد الدفعات



الدفعات	قيمة الدفعة	مدة كل دفعة	القيمة المكتسبة
1	a	$n-1$	$V_1 = a(1+t)^{n-1}$
2	a	$n-2$	$V_2 = a(1+t)^{n-2}$
3	a	$n-3$	$V_3 = a(1+t)^{n-3}$
......	a	......	......
$\boldsymbol{p}$	a	$\boldsymbol{n-p}$	$V_{n-p} = a(1+t)^{n-p}$
......	a	......	......
$\boldsymbol{n-1}$	a	1	$V_{n-1} = a(1+t)$
$\boldsymbol{n}$	a	*0*	$V_n = a(1+t)^0 = a$

وبالتالي فإن جملة الدفعات المتحصل عليها في نهاية المدة تُساوي مجموع الجمل (القيم) المكتسبة لكل دفعة، وتُعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V_n = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + a(1+t)^{n-1}$$

وبالتالي فإن مجموع هذه القيم المكتسبة للدفعات تُشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها$(1+t)$، وعدد حدودها. n

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع متتالية هندسية متزايدة التي تُعطى وفق الصيغة التالية:

$$S = V_0 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\Rightarrow V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{t}}}$$

ملاحظـة

جملة متتالية دفعات متساوية بداية المدة ما هي إلا جملة متتالية دفعات متساوية لنهاية المدة مضروبة في المقدار: $\boldsymbol{(1+t)}$

استخدام الصيغة العامة للقيمة المكتسبة

حساب القيمة المكتسبة ($\mathbf{V}_n$)

مثال:

قام شخص بتسديد دين على عاتقه على شكل دفعات متساوية في نهاية كل شهر بدايةً من شهر جانفي 2019 إلى غاية نهاية شهر أكتوبر 2020. حيث اتفق مع الدائن على أن تكون قيمة كل دفعة هي: 5000دج وبمعدل فائدة مركبة 5%. دج فما هو اجمالي ما يقوم بتسديده المدين في نهاية المدة المتفق عليها؟

الحل:

$$V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$
$$\Rightarrow V_n = 5000.\frac{(1+0{,}05)^{20} - 1}{0{,}05}$$
$$= 165329{,}7705\ DA$$

✓ **حساب قيمة الدفعات a**

من الصيغة العامة لجملة متتالية دفعات متساوية لنهاية المدة يُمكننا استنتاج العلاقة الرياضية لحساب قيمة الدفعات كمايلي:

$$V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$
$$\Rightarrow V_n.t = a\,[(1+t)^n - 1]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a = V_n.\frac{t}{(1+t)^n - 1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = V_n.\frac{t}{(1+t)^n - 1}}}$$

مثال:

بلغت جملة 8 دفعات متساوية دفعت في نهاية المدة وبمعدل فائدة مركبة 5% سنوياً قيمة 28647,3266دج فما هي قيمة الدفعة المتساوية؟

الحل

$$a = V_n.\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$
$$\Rightarrow a = 28647{,}3266.\frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^8 - 1}$$
$$\Rightarrow a = 28647{,}3266.\frac{0{,}05}{(1{,}05)^8 - 1}$$
$$\Rightarrow a = 28647{,}3266.\frac{0{,}05}{(1{,}05)^8 - 1}$$
$$\Rightarrow a = 28647{,}3266 * 0{,}10472181$$
$$\Rightarrow a = 3000\ DA$$

✓ **حساب عدد الدفعات n**

دائماً وانطلاقا من قانون حساب جملة متتالية الدفعات المتساوية لنهاية المدة يُمكننا حساب عدد الدفعات $\boldsymbol{n}$ كما يلي:

$$V_n = a.\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$
$$\Rightarrow V_n.t = a\,[(1+t)^n - 1]$$
$$\Rightarrow V_n.t = a(1+t)^n - a$$
$$\Rightarrow a(1+t)^n = V_n.t + a$$
$$\Rightarrow (1+t)^n = \frac{V_n.t + a}{a}$$
$$\Rightarrow (1+t)^n = \frac{V_n.t}{a} + 1$$
$$\Rightarrow \ln(1+t)^n = \ln\left(\frac{V_n.t}{a} + 1\right)$$
$$\Rightarrow n.\ln(1+t) = \ln\left(\frac{V_n.t}{a} + 1\right)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{n = \frac{\ln\left(\frac{V_n.t}{a} + 1\right)}{\ln(1+t)}}$$

مثال:

ما هو عدد الدفعات المتساوية ذات القيمة 2500 دج للدفعة الواحدة والتي تُسدد في نهاية كل شهر حتى نتحصل على قيمة مكتسبة قدرها 52537,6648 دج مع العلم أن معدل الفائدة المركبة المتفق عليه هو 6 % سنوياً.

الحل:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{V_n . t}{a} + 1\right)}{\ln(1+t)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{52537,6648 * 0,06}{2500} + 1\right)}{\ln(1+0,06)}$$

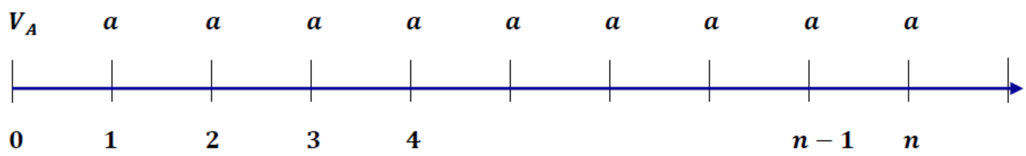
$$\Rightarrow n = \frac{0,81576471}{0,05826890}$$

$$\Rightarrow n = 14\ mois$$

. القيمة الحالية لمتتالية الدفعات المتساوية الفورية

الصيغة العامة للقيمة الحالية القيمة الحالية لمتتالية أو سلسلة دفعات ثابتة لنهاية المدة دفعات السداد هي العودة الدفعات إلى تاريخ توقيع العقد (الزمن صفر) أي القيمة المكتسبة قبل دفع الدفعة الأولى.

نرمز بالرمز VA للقيمة الحالية في التاريخ صفر قبل تسديد الدفعة الأولى.



القيمه الحاليه متتاليه دفعات متساوية لنهاية المدة تُساوي مجموع القيم الحالية نحن دفعة. كما يلي:

القيمة الحالية	القيمة المكتسبة	الدفعات
$a(1+t)^{-1}$	$V_1 = a(1+t)^{n-1}$	1
$a(1+t)^{-2}$	$V_2 = a(1+t)^{n-2}$	2
$a(1+t)^{-3}$	$V_3 = a(1+t)^{n-3}$	3
	......	......
$a(1+t)^{-p}$	$V_{n-p} = a(1+t)^{n-p}$	p
	......	......
$a(1+t)^{-(n-1)}$	$V_{n-1} = a(1+t)$	$n-1$
$a(1+t)^{-n}$	$V_n = a(1+t)^0 = a$	n

بجمع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات المتتالية نحصل على العلاقة الرياضية التالية :

$$V_A = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \cdots \ldots \ldots \ldots .. + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$$

من هذه العلاقة الرياضية لمجموع القيم الحالية نلاحظ أنها تُشكل متتالية هندسية حدها الأول $a(1+t)^{-n}$ وحدها الأخير $a(1+t)^{-1}$، وأساسها $(1+t)$من قانون مجموع متتالية هندسية نستنتج الصيغة الرياضية للقيمة الحالية لمتتالية دفعات متساوية لنهاية المدة كما يلي:

$$V_A = a(1+t)^{-n}.\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

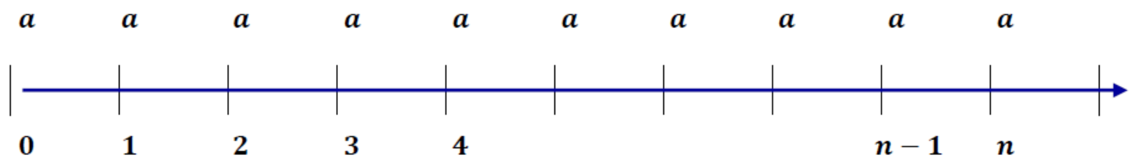
$$\Rightarrow V_A = a.\frac{(1+t)^{-n}.(1+t)^n - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$\Rightarrow V_A = a.\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\boxed{V_A = a.\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

القيمة الحالية لمتتالية الدفعات المتساوية العادية الصيغة العامة للقيمة الحالية لمتتالية أو سلسلة دفعات ثابتة لنهاية المدة هي العودة بالدفعات إلى تاريخ توقيع العقد (الزمن صفر) أي القيمة المكتسبة قبل دفع الدفعة الأولى.

نرمز بالرمز VA للقيمة الحالية في التاريخ صفر قبل تسديد الدفعة الأولى.



القيمة الحالية لمتتالية دفعات متساوية لنهاية المدة تُساوي مجموع القيم الحالية لكل دفعة. كما يلي:

الدفعات	القيمة المكتسبة	القيمة الحالية
1	$V_1 = a(1+t)^n$	$a(1+t)^{-n}$
2	$V_2 = a(1+t)^{n-1}$	$a(1+t)^{-(n-1)}$
3	$V_2 = a(1+t)^{n-2}$	$a(1+t)^{-(n-2)}$
......	......	
p	......	$a(1+t)^{-p}$
$n-1$	$V_{n-1} = a(1+t)^2$	$a(1+t)^{-2}$
n	$V_n = a(1+t)$	$a(1+t)^{-1}$

يجمع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات المتتالية نحصل على العلاقة الرياضية التالية:

$$V_A = a(1+t)^{-n} + a(1+t)^{-(n-1)} + \cdots \ldots \ldots \ldots .. + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-1}$$

من هذه العلاقة الرياضية لمجموع القيم الحالية نلاحظ أنها تُشكل متتالية هندسية حدها الأول $a(1+t)^{-n}$ وحدها الأخير $a(1+t)^{-1}$، وأساسها $(1+t)$ من قانون مجموع متتالية هندسية نستنتج الصيغة الرياضية للقيمة الحالية لمتتالية دفعات متساوية لنهاية المدة كما يلي:

$$V_A = a(1+t)^{-n} . \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\Rightarrow V_A = a . \frac{(1+t)^{-n} . (1+t)^n - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$\Rightarrow V_A = a . \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$\boxed{V_A = a . \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}}$$

استهلاك القروض

1- مفهوم القرض العادي

القرض العادي هو قرض يتم بين طرفين طبيعيين أو اعتباريين، ويُسمى هذا النوع من القروض بالقروض غير المجزئة حيث يحتوي عقد القرض على مقرض واحد.

في القرض العادي يلتزم المقترض عادة بالشروط الآتية:

- ✓ تسديد فوائد بصفة دورية على رأس المال المقترض (أصل القرض) وغير المسدد؛
- ✓ تسديد رأس المال المقترض، ويُسمى هذا التسديد بـ: "استهلاك القروض"، وقد يتم تسديد القرض دفعة واحدة أو على عدة دفعات في أغلب الأحيان.

فالمدين أو المقترض يقوم دورياً بتسديد دفعة تحتوي على فائدة رأس المال المتبقي مضافاً إليه الاستهلاك. كما يلي:

الدفعة أو القسط السنوي = فائدة رأس المال المتبقي + الاستهلاك

$$a = I_i + M_i$$

وتتشابه عملية استهلاك القروض بالأقساط الثابتة أو المتساوية مع عملية تسديد القروض بدفعات نهاية المدة، حيث أن في نهاية مدة القرض يكون مجموع الدفعات مساوياً الجملة القرض المدفوع، أما أصل القرض أو قيمته الحالية في بداية أول سنة تسديد فتساوي القيمة الحالية للدفعات فإذا كان

C_0 قيمة أصل القرض في اللحظة أو الزمن ،صفر ، أي بداية السنة الأولى للتسديد،

a: الدفعة الثابتة أو القسط الثابت؛

M_i: استهلاك السنة i؛

I_i: الفائدة في السنة i ؛

n : مدة القرض (عدد السنوات)؛

t: معدل القرض؛ فإن :

الصيغة الرياضية لأصل القرض بدلالة الدفعة الثابتة.

$$C_0 = a.\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

الصيغة الرياضية لأصل القرض بدلالة الاستهلاكات.

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

الصيغة الرياضية لأصل القرض بدلالة الاستهلاك الأول.

$$\boxed{C_0 = M_1 \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

الصيغة الرياضية الدفعة الثابتة بدلالة أصل القرض

تُعطى الصيغة العامة لحساب الدفعة أو القسط الثابت بدلالة أصل القرض بالصيغة الرياضية التالية:

$$\boxed{a = C_0 \cdot \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}}$$

$$\boxed{a = M_i + I_i}$$

2- **جدول استهلاك القرض العادي**

إذا رمزنا لعناصر اسهتلاك القروض بالرموز التالية:

Co: قيمة أصل القرض في اللحظة أو الزمن ،صفر ، أي بداية السنة الأولى للتسديد،

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$: الدفعات أو الأقساط المتساوية حيث يدفع القسط الأول سنة بعد إمضاء العقد والثانية سنة من بعد ،وهكذا، أي أننا أمام دفعات نهاية المدة.

$M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots, M_n$: الاستهلاكات المتتالية التي تحتويها الدفعة الأولى، الثانية، ..... إلى غاية الدفعة الأخيرة n.

$C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots, C_n$ رأس المال المتبقي بعد تسديد الدفعة الأولى، الثانية، الثالثة، ..... الدفعة الأخيرة n.

$I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n$ الفوائد المستحقة على رأس المال المتبقي، بعد كل فترة زمنية؛

n: مدة القرض (عدد السنوات)؛

t: معدل القرض؛

فإن جدول استهلاك القروض يكون بالشكل التالي:

الوحدة الزمنية (المدة)	الأصل في بداية كل فترة	الفائدة المستحقة في نهاية كل فترة	الدفعة أو القسط السنوي	الاستهلاك	الرصيد المتبقي من الأصل في آخر الفترة
1	C_0	$I_1 = C_0 . t$	$a_1 = I_1 + M_1$	M_1	$C_1 = C_0 - M_1$
2	C_1	$I_2 = C_1 . t$	$a_2 = I_2 + M_2$	M_2	$C_2 = C_1 - M_2$
3	C_2	$I_3 = C_2 . t$	$a_3 = I_3 + M_3$	M_3	$C_3 = C_2 - M_3$
......	......	......	......	......	......
$P - 1$	C_{p-2}	$I_{p-1} = C_{p-2} . t$	$a_{p-1} = I_{p-1} + M_{p-1}$	M_{p-1}	$C_{p-1} = C_{p-2} - M_{p-1}$
P	C_{p-1}	$I_p = C_{p-1} . t$	$a_p = I_p + M_p$	M_p	$C_p = C_{p-1} - M_p$
$P + 1$	C_p	$I_{p+1} = C_p . t$	$a_{p+1} = I_{p+1} + M_{p+1}$	M_{p+1}	$C_{p+1} = C_{p-1} - M_p$
......	......	......	......	......	......
$n - 1$	C_{n-2}	$I_{n-1} = C_{n-2} . t$	$a_{n-1} = I_{n-1} + M_{n-1}$	M_{n-1}	$C_{n-1} = C_{n-2} - M_{n-1}$
n	C_{n-1}	$I_n = C_{n-1} . t$	$a_n = I_n + M_n$	M_n	$C_n = C_{n-1} - M_n$

	رأس المال المتبقي في نهاية المدة الاجمالية C_n بعد تسديد القسط الأخير يُساوي الصفر (0) أي أن: $C_{n-1} = M_n$ الدفعات تبقى دائماً ثابتة ومتساوية القيمة أي أن: $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots = a_n$ أصل القرض يُساوي مجموع الاستهلاكات، أي أن: $C_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + M_{n-1} + M_n$ $C_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i$ مجموع الأقساط الثابتة تُساوي مجموع الفوائد + مجموع الاستهلاكات، أي أن: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{i=1}^{n} I_n$

ملاحظات :

☑ أن الدين في بداية السنة يتناقص من سنة لأخرى، وكذلك نفس الشيء الفائدة السنوية والدين المتبقي في نهاية السنة؛

☑ أن الدين المتبقي في نهاية السنة يتناقص إلى أن يصل إلى الصفر (0) في السنة الأخيرة من مدة القرض؛

☑ أن الإستهلاكات تتزايد من سنة لأخرى، وهذا يدل على التسديد الجزئي للقرض؛

☑ أن الفائدة السنوية هي عبارة عن الدين في بداية السنة مضروبا في معدل الفائدة مضروبا في الواحد؛

☑ أن مجموع الإستهلاكات هي عبارة عن أصل القرض في السنة الأولى؛

☑ الدفعات المتساوية مطروحا منه مجموع الفوائد السنوية يعطينا أصل القرض.

3. العلاقة بين عناصر استهلاك القرض

سنحاول في هذه النقطة تبيان العلاقات التي تربط بين مختلف عناصر استلاك القارض كما يلي:

1.3. العلاقة بين استهلاكين متتاليين

لدينا:

$$a_n - a_{n-1} = (I_n + M_n) - (I_{n-1} + M_{n-1})$$
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = (C_{n-1}.t + M_n) - (C_{n-2}.t + M_{n-1})$$

ومن جدول استلاك القرض نجد:

$$C_{n-1} = C_{n-2} - M_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = (C_{n-2} - M_{n-1}).t + M_n - (C_{n-2}.t + M_{n-1})$$
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = C_{n-2}.t - M_{n-1}.t + M_n - C_{n-2}.t - M_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = -M_{n-1}.t + M_n - M_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = M_n - M_{n-1}(1+t)$$

مادام أن الدفعات أو الأقساط متساوية القيمة وثابتة فإن:

$$a_n - a_{n-1} = 0$$
$$\Rightarrow M_n - M_{n-1}(1+t) = 0$$

$$\boxed{M_n = M_{n-1}(1+t)}$$

الفائدة المستحقة في آخر كل فترة زمنية تُساوي الأصل في بداية كل فترة زمنية مضروب في معدل الفائدة.

- **مثال**

قام شخص بتسديد دين (قرض بنكي) قيته 100.000 دج على 05 أقساط سنوية متساوية وبمعدل فائدة يقدر بـ 5 % سنوياً.

المطلوب

شكل جدول استهلاك هذا القرض.

- **الحل**

نعلم أن:

$$I_i = C_0.t$$

$$a = C_0.\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 100000.\frac{0.05}{1-(1+0,05)^{-5}} = 100.000 * 0,23097480$$
$$= 23097,48 \text{ DA}$$

الرصيد المتبقي من الأصل في آخر الفترة	الاستهلاك	الدفعة أو القسط السنوي	الفائدة المستحقة في نهاية كل فترة	الأصل في بداية كل فترة	المدة
81902,52	18097,48	23097,48	5000	100000	**1**
62900,166	19002,354	23097,48	4095,126	81902,52	**2**
42947,6943	19952,4717	23097,48	3145,0083	62900,166	**3**
21997,599015	20950,095285	23097,48	2147,384715	42947,6943	**4**
0.00000	21997,60004925	23097,48	1099,87995075	21997,599015	**5**

اختيار الاستثمارات

إن تطبيقات الفائدة المركبة لها عدة مجالات في ميدان المالية والتسيير، فبالإضافة إلى الدفعات وطرق تسديد القروض وغيرها هناك تطبيقات أخرى سوف نتناولها منها اختيار الاستثمارات، حيث أن بقاء المؤسسة في السوق وقدرتها على المنافسة مرهون بدور استثماراتها وفاعلية المعدات، حيث لابد من اعتمادها على تقنيات مالية ورياضية لتعيين المشروعا ت المراد الاستثمار فيها.

1. تعريف الاستثمار:

يقصد بالاستثمار اقتصاديا أنه عملية صرف أموال في الوقت الحالي، من أجل الحصول من ورائها على نتائج في المستقبل، حيث يشمل الاستثمار كل الموارد والمواد والأشياء المحصل عليها لهذا الغرض لفترات متوسطة أو طويلة.

2. تعريف اختيار الاستثمار:

يقصد به تعيين المشروع المراد إنجازه بالقياس مع بقية المشروعات الأخرى المقترحة للعرض. إن اختيار الاستثمار يتطلب المفاضلة باستخدام مقاييس علمية، ومراعاة العوامل الاجتماعية والاقتصادية والسياسية وتقنيات مالية ورياضية، تؤهل المشروع المختار لتحقيق الهدف.

3. العوامل المؤثرة في اختيار الاستثمارات:

تؤثر في الدراسة المالية والتجارية للاستثمار عدة عوامل منها:

▪**تكلفة الاستثمار** :تشمل قيمة حيازة الاستثمار ومختلف مستلزماته، والنفقات التي يتطلبها من بداية الحيازة والاستعمال، حتى نهاية الاستعمال.

▪**إيراد الاستثمار** :يتمثل في مختلف الايرادات التي يقدمها الاستثمار، عند تشغيله لمدة حياته، وما قد يبقيه من قيمة في ذلك التاريخ.

▪**مدة حياة الاستثمار** : يقصد به المدة الزمنية لتشغيل الاستثمار، وإعطاء نواتج عن ذلك، وتختلف المدة حسب طبيعة الاستثمار وطرق استعماله.

▪**سعر الفائدة المطبق** : ونميز نوعين لهذا السعر، الأول هو سعر الفائدة المطبق على القروض المحصل عليها، أما الثاني فهو المعدل المطبق على الإيرادات ونواتج الاستثمار لحساب قيمته الحالية، ويسمى سعر الخصم.

▪**ظروف النشاط للاستثمار** : إن المحيط الاقتصادي من أهم العوامل المؤثرة في نتائج وتكاليف الاستثمارات، وأهم هذه الظروف عنصر الضرائب أو المزايا التي يتحصل عليها.

▪**زمن تحديد الايرادات والأعباء** : حيث يختلف تاريخ تحقيق الإيرادات، ودفع الأعباء خلال سنة أو سنوات بين استثمار وآخر، ولكن تعتبر نهاية السنة هي زمن التحقيق وزمن الدفع في كل الاستثمارات.

إن الاختيار يكون للاستثمارات التي تحقق نتيجة ايجابية في مدة استعمالها أو على الأقل تغطي مختلف تكاليفها بإيراداتها، أما ما يحقق منها نتائج سلبية فهو يخرج من هذا.

4. معايير اختيار الاستثمارات:

يوجد عدة طرق للمفاضلة بين الاستثمارات سنتطرق لأهمها:

أ-طريقة فترة استرداد رأس المال:

حسب هذه الطريقة فإنه يتم اختيار الاستثمارات على أساس المشروع الذي يحقق ايرادات صافية في أقل مدة، تسمح

من تغطية تكلفة الاستثمار، أي نختار المشروع ذي أقل فترة.

- **مزايا الطريقة:**

-سهولة الحساب دون تعقيد؛

-تتفادى الأخطار الناتجة عن تغيير الظروف الاقتصادية والمالية، عند طول مدة الاستثمار؛

-عند اختيار الاستثمار أي الأقصر مدة الاسترجاع، تستطيع المؤسسة إعادة استثمار المبالغ المسترجعة لفترة مقبلة أخرى أو لتجديد الاستثمار.

- **عيوب الطريقة:**

-لا تأخذ بعين الاعتبار التدفقات النقدية بعد مدة استرداد رأس المال (أي باقي القيمة للاستثمار لصعوبة حسابها) ، رغم أ ن هناك تدفقات كبيرة أحيانا بعد هذه المدة قد تعطي أرباحا معتبرة؛

-لا تأخذ بعين الاعتبار القيمة الزمنية للنقود، فهي تجمع كل التدفقات النقدية الصافية بنفس القيمة، سواء في السنة الأولى أو الأخيرة.

-بالرغم من عيوب طريق ة فترة استرداد رأس المال، إلا أنه يفضل استعمالها، خاصة الأشخاص وبعض المستثمرين من الدول الغربية، أي يفضلون استثمارات في الميادين ذات الاسترداد الأسرع للأموال. و تعتمد طريقة فترة الاسترداد على مفهوم صافي التدفق النقدي لا الربح المحاسبي، ونميز بين حالتين لحسابها:

- حالة تساوي صافي التدفق النقدي السنوي: ما يميز هذه الحالة أن صافي التدفق النقدي السنوي للمشروع الاستثماري متساو خلال عمره الافتراضي، وعليه تكون $DR = \frac{I_0}{CFN}$ العامة:

حيث DR: فترة الاسترداد، I_0: التكلفة المبدئية للاستثمار CFN: صافي التدفق النقدي السنوي.

- حالة عدم تساوي صافي التدفق النقدي السنوي : في هذه الحالة، يتم حصر قيمة التكلفة المبدئية للاستثمار بين صافي التدفق النقدي السنوي المتراكم غير الكافي لتغطيتها، والآخر الفائض عنها لإيجاد المدة الزمنية الباقية للتغطية مع اعتبار أن التدفق النقدي السنوي للسنة الأخيرة منتظم عبر الوحدات الزمنية الأقل الأشهر والأيام.

وتحسب $DR = T_0 + \frac{I_0 - \sum_{1}^{T_0} CFN}{CFN(T_1)}$ في هذه الحـ $\sum_{1}^{T_0} CFN$ ا يلي : حيث صافي التدفق النقدي

$CFN(T_1)$

المتراكم غير الكافي لتغطية الاستثمار المبدئي، T_0 المدة الزمنية المقابلة لصافي التدفق النقدي المتراكم غير الكافي لتغطية الاستثمار المبدئي، صافي التدفق النقدي السنوي للسنة الموالية لـ T_0

مثال: إليك فيما يلي معلومات حول ثلاث اقتراحات استثمارية مستقلة:

البيان	المشروع الأول	المشروع الثاني
التكلفة المبدئية للاستثمار	500000	500000
صافي التدفق النقدي السنوي للسنة 1	128000	80000
صافي التدفق النقدي السنوي للسنة 2	128000	125000
صافي التدفق النقدي السنوي للسنة 3	128000	175000
صافي التدفق النقدي السنوي للسنة 4	128000	200000
صافي التدفق النقدي السنوي للسنة 5	128000	100000

أما المشروع الثالث فبلغت تكلفته المبدئية 600000، عمره الافتراضي 6 سنوات، يهتلك خطيا، ويحقق ربحا سنويا إجماليا بقيمة 62500 .

إذا علمت أن معدل الضريبة على الربح 20 %

المطلوب: - أحسب صافي التدفق النقدي السنوي للمشروع الثالث.

- رتب المقترحات الاستثمارية حسب معيار فترة الاسترداد.

الحل:

حساب صافي التدفق النقدي السنوي للمشروع الثالث:

البيان	المبلغ
النتيجة الإجمالية	62500
الضريبة على الربح	(12500)
النتيجة الصافية	50000
قسط الاهتلاك السنوي	100000
صافي التدفق النقدي السنوي	150000

حساب فترة الاسترداد لكل مشروع استثماري

$$DR_1 = \frac{500000}{128000} = 3.90625 \qquad DR_3 = \frac{600000}{150000} = 4$$

– حساب صافي التدفق النقدي المتراكم للمشروع الثاني

السنوات i	1	2	3	4	5
$CFN(T_i)$	80000	125000	175000	200000	100000
$\sum_1^i CFN(T_i)$	80000	205000	380000	580000	680000

من خلال الجدول أعلاه نجد T_0 هي السنة الثالثة، وعليه يمكن حساب فترة الاسترداد للمشروع الثاني كما يلي:

$$DR_2 = 3 + \frac{500000 - 380000}{200000} = 3.60$$

ترتيب المقترحات الاستثمارية وفق معيار فترة الاسترداد:

المشاريع	المشروع الأول	المشروع الثاني	المشروع الثالث
فترة الاسترداد	3.90625 سنوات	3.60 سنوات	04 سنوات
الترتيب	02	01	03