

UNIVERSITE TAHRI MOHAMMED, BECHAR

ELECTROTECHNIQUE FONDAMENTALE 1

Cours et exercices corrigés

Par : Dr. SAMIRA BEDIAR



L'année universitaire : 2025-2026

Table des matières

Avant-propos	01
Chapitre 1 : Rappels mathématiques sur les NC	03
1.1. Introduction.....	05
1.2. Notions du nombre complexe.....	05
Notion cartésienne.....	05
Notion polaire.....	05
Notion exponentielle.....	06
Notion trigonométrique.....	06
1.3. Nombre complexe conjugué.....	06
1.4. Les opérations arithmétiques sur les nombres complexes.....	06
Somme.....	06
Produit.....	06
Rapport.....	06
1.5. Formule de MOIVRE.....	07
1.6. Racines des nombres complexes.....	07
1.7. Application trigonométrique de formule d'Euler.....	08
1.8. Application à l'électricité des nombres complexes.....	08
Impédance $Z [\Omega]$	08
Admittance $Y [\text{Siemens}] [\frac{1}{\Omega}]$	09
1.9. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 01.....	10
Chapitre 02 : Les lois fondamentales de l'électricité	21
2.1. Introduction.....	23
2.2. Notions de base et définitions.....	23
Différence de potentiel ou tension.....	23
Courant électrique.....	23
2.3. Régime continu (DC ou =).....	24
a) Dipôles électriques.....	24
b) Dipôle passif et dipôle actif	24
c) Dipôles linéaire et non linéaire.....	24
2.4. Les trois composants passifs linéaires de base.....	26
La résistance.....	26
a) La résistance d'un fil homogène.....	26
b) L'énergie électrique [joule].....	27
La capacité (le condensateur).....	27
a) Capacité du condensateur plan.....	27
b) L'énergie d'un condensateur en [Joule].....	28
La bobine (l'inductance).....	28
a) Bobine à air.....	28
b) Bobine à noyau magnétique.....	29
c) L'énergie emmagasinée par une bobine.....	29
2.5. Association des dipôles R, C et L	29
2.6. Régime alternatif.....	30
Régime sinusoïdal.....	30
La valeur moyenne.....	31
La valeur efficace.....	31
Représentation de Fresnel.....	33

La représentation complexe.....	34
2.7. Application de la notation complexe aux dipôles linéaires passifs élémentaires	35
2.8. Règles d'association des impédances	36
a) Cas d'un condensateur réel (Dipôle capacitif).....	36
b) Cas d'une bobine réelle (Dipôle inductif).....	37
c) Cas d'un circuit RLC série.....	37
2.9. Notions d'énergie et de puissance.....	38
a) Puissances électrique en régime continu.....	38
b) Puissance électrique en régime alternatif sinusoïdal.....	39
La puissance instantanée.....	39
La puissance fluctuante.....	40
La puissance active.....	40
La puissance apparente (Puissance de dimensionnement).....	40
La puissance réactive.....	41
Facteur de puissance.....	41
Puissance apparente complexe.....	41
Facteur de tangente (Tangente de l'angle de déphasage).....	42
Puissances associées aux dipôles passifs.....	43
Théorème de Boucherot et triangle des puissances.....	44
Représentation de la conservation des puissances sous la forme de triangle des puissances	45
2.10. Régime transitoire.....	45
Rappels sur la résolution des équations différentielles.....	45
Circuit RL.....	47
Circuit RC.....	48
Circuit RLC.....	50
2.11. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 02.....	52
 Chapitre 03 : Circuits et puissances électrique	
3.1. Introduction.....	87
3.2. Type d'alimentation.....	89
3.3. Définitions.....	89
Récepteur triphasé.....	89
Système équilibré.....	89
Courant par phase.....	89
Courants en ligne.....	89
3.4. Circuit monophasé.....	89
3.4.1. Les puissances en monophasé.....	89
La puissance apparente.....	89
La puissance active.....	90
La puissance réactive.....	90
3.4.2. Facteur de puissance	91
3.5. Système triphasé.....	91
3.5.1. Système de tension triphasé équilibré.....	92
Les tensions simples.....	92
Tensions composées.....	93
La relation entre les tensions simples et composées.....	94

Les puissances en triphasé équilibré.....	94
Caractéristiques des couplages en étoile.....	94
Caractéristiques des couplages en triangle.....	96
Relation entre le couplage étoile et le couplage triangle.....	97
Transformation Triangle-Etoile (Théorème de Kennely).....	98
Transformation étoile-triangle.....	98
3.5.2. Système triphasé déséquilibré et puissances électriques.....	100
Récepteur triphasé déséquilibré.....	100
Les puissances en triphasé déséquilibré.....	100
3.6. Mesure de la puissance en triphasé.....	101
Pour une ligne à 4 fils.....	10
Cas du circuit équilibré.....	101
Cas du circuit déséquilibré.....	101
Pour une ligne à 3 fils.....	101
La méthode de deux Wattmètres.....	101
Cas particulier.....	102
3.7. L'amélioration de " $\cos \varphi$ ".....	103
Calcul de la capacité des condensateurs de compensation.....	104
a) Couplage des condensateurs en triangle.....	104
b) Couplage en étoile des condensateurs.....	105
3.8 Définition du théorème de Fortescue	105
3.9. Composantes symétriques des courants.....	105
Composante directe.....	105
Système inverse.....	106
Système homopolaire.....	106
Les composantes symétriques des tensions.....	106
Les composantes symétriques des courants.....	109
Composantes symétriques appliquées aux impédances.....	109
3.8. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 03.....	111

Chapitre 04 : Circuits magnétiques

Chapitre 04 : Circuits magnétiques	133
4.1. Introduction.....	135
4.2. Matériau magnétique.....	135
4.3. Circuit magnétique.....	135
4.4. Constitution et fabrication.....	135
4.5. Circuit magnétique soumis à un champ magnétique indépendant du temps	136
4.6. Circuit magnétique soumis à un champ magnétique périodique haute fréquence	136
4.7. Réluctance d'un circuit magnétique.....	137
La réluctance du circuit magnétique homogène.....	137
La réluctance équivalente de l'entrefer.....	137
La réluctance du circuit magnétique hétérogène.....	137
Associations des réluctances	137
4.8. L'inductance de la bobine.....	138
4.9. Modèle électrique de la bobine à noyau.....	138
Cycle d'hystérésis	139
Perte par hystérésis.....	140
Pertes par courants induit.....	140
4.10. L'Induction électromagnétique.....	141

Description des expériences.....	141
Interprétations.....	142
4.11. La force électromotrice.....	142
La loi de Lenz (ou loi de Faraday-Lenz).....	142
Enoncé de la loi de Lenz.....	143
4.12. Le flux magnétique.....	143
4.13. Force magnétomotrice (fmm).....	144
4.14. Analogie entre un circuit électrique et un circuit magnétique.....	145
4.15. Force de magnétique (Force de Laplace)	145
4.16. Inductance propre et inductance mutuelle.....	146
Inductance propre.....	146
Inductance mutuelle.....	147
4.17. Couplage de deux circuits magnétiques.....	148
Loi d'Ohm d'une partie du circuit magnétique.....	148
L'énergie magnétique de deux circuits.....	149
Coefficient de couplage entre deux circuits.....	149
4.18. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 04.....	151
Chapitre 05 : Les transformateurs	169
5.1. Introduction.....	171
5.2. Définition.....	171
5.3. Utilisation.....	171
5.4. Constitution.....	171
Circuit magnétique	172
Enroulements(Bobinage).....	173
5.5. Symbole du transformateur	173
5.6. Principe de fonctionnement	173
5.7. Equations générales de fonctionnement	174
Mise en équations.....	175
5.8. Modèle du transformateur monophasé idéal (Parfait)	175
Relation entre les tensions	175
Relation entre les courants	176
Utilisation en régime sinusoïdal.....	177
Diagramme de Fresnel.....	178
Transposition d'une impédance	178
5.9. Le transformateur réel.....	179
Les pertes dans un transformateur réel	179
Influence de la réluctance du circuit magnétique	179
Introduction des pertes fer	181
Schéma réel équivalent	182
Schéma équivalent dans l'hypothèse de Kapp	182
Procédé expérimental de détermination du schéma de Kapp	183
a) Essai à vide sous tension nominale.....	183
b) Essai en court circuit ($V_2=0$).....	184
c) Chute de tension	184
Prédétermination de la chute de tension	184
Diagramme de Kapp.....	184

Expression de ΔU_2 (la chute de tension).....	184
Contexte industriel.....	188
La variation de la chute de tension en fonction du facteur de puissance	188
Prédétermination du rendement d'un transformateur	189
a) Les pertes du transformateur.....	189
b) Le rendement du transformateur.....	190
5.10. La mise en parallèle des transformateurs	191
Raisons de la mise en parallèle	191
Conditions de la mise en parallèle.....	192
5.11. Classification des transformateurs.....	192
Paramètres de classification.....	193
a) Classe de tension.....	193
b) Puissance nominale.....	193
c) Nombre de spires des enroulements primaire et secondaire.....	193
d) Construction du noyau.....	193
e) Type de refroidissement.....	193
f) Type d'application.....	193
1. Autotransformateur.....	193
Avantage	194
Inconvénients	195
Utilisations	195
2. Le transformateur variac.....	196
3. Le transformateur d'isolement	196
4. Le transformateur d'impédance.....	196
5. Le transformateur de puissance.....	197
6. Le transformateur de mesure (Transformateurs d'instruments).....	197
7. Le transformateur de haute fréquence.....	198
8. Le T transformateur d'impulsions.....	198
5.12. Le transformateur triphasé.....	199
Principe de fonctionnement.....	199
Construction d'un transformateur triphasé	199
Les trois types de transformateur triphasé.....	200
a) Type scellé.....	200
b) Type ouvert.....	200
c) Type sec.....	200
5.13. Comparaison entre le transformateur monophasé et triphasé	201
5.14. Inconvénients des transformateurs triphasés	201
5.15. Couplage des enroulements	202
Couplages usuels des transformateurs triphasés	202
5.16. Mise en parallèle des transformateurs.....	204
L'indice horaire.....	204
5.17. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 05.....	208
 Chapitre 06 : Machines à courant continu (MCC)	 227
6.1. Introduction.....	229
6.2. Définitions.....	229
6.3. Avantages et inconvénients.....	229
6.4. Symbole.....	230

6.5. Constitution de la MCC à excitation indépendante.....	230
a) L'inducteur	230
b) L'induit	231
c) Collecteur et balais	231
6.6. Principe de fonctionnement	231
6.7. Fonctionnement dans les quatre cadrans.....	233
6.8. L'expression de la fém induite	233
6.9. L'expression du couple électromagnétique	234
6.10. Puissance électromagnétique	234
La puissance électrique	234
La puissance mécanique	234
6.11. Schéma électrique équivalent de l'induit	234
6.12. Couple et courant de démarrage	235
6.13. Les différents types de la MCC.....	235
Machine à excitation indépendante	235
Machine à aimant permanent	236
Machine à excitation en série	236
Machine à excitation shunt (excitation en dérivation)	237
Machine à excitation composée ou compound.....	237
6.14. Essai à vide.....	238
Caractéristique $E_0 = f(\Omega)$ à Φ constant.....	239
6.15. Essai en charge	240
6.16. Point de fonctionnement.....	241
6.17. Bilan des puissances	241
Pertes par effet Joule.....	241
Pertes magnétiques dans le fer (pertes d'hystérésis plus pertes par courant de Foucault)	242
Pertes mécaniques dues au mouvement P_m	242
6.18. Plaque signalétique du moteur	242
6.19. Le risque d'emballement du moteur.....	243
6.20. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 06.....	244

Chapitre 07 : Machine à courant alternatif (MCA)	257
7.1. Introduction.....	259
7.2. Les moteurs universels.....	259
7.3. Les machines synchrones.....	259
7.4. Constitution.....	260
a) Le rotor (inducteur).....	260
b) Le stator (induit).....	260
c) Le champ tournant.....	260
7.5. Synchronisme.....	261
Schémas.....	261
Symbole.....	261
7.6. La FEM de l'induit	262
7.7. Modes de fonctionnement de la MCA.....	262
a) Mode moteur.....	262
b) Mode alternateur (génératrice).....	262
7.8. Réaction magnétique d'induit.....	262

7.9. Modèle équivalent d'un enroulement.....	262
Diagramme de Fresnel.....	263
7.10. Caractéristique à vide d'une machine synchrone.....	264
7.11. Bilan des puissances d'un alternateur.....	264
a) Puissance absorbée.....	264
b) Puissance utile.....	265
c) Les pertes.....	265
Pertes par effet joule dans l'inducteur.....	265
Pertes par effet joule dans l'induit.....	265
Pertes constantes.....	265
d) Le rendement.....	265
7.12. Moteur synchrone.....	266
7.13. Stabilité.....	266
7.14. Les machines asynchrones.....	267
Constitution et principe de fonctionnement.....	268
a) Stator (inducteur).....	268
b) Rotor (induit).....	268
Rotor à cage d'écureuil.....	268
Rotor bobiné.....	269
c) Courants induits.....	269
d) Entrefer.....	269
e) Glissement.....	269
Symboles du moteur asynchrone.....	270
Fonctionnement du moteur asynchrone.....	270
a) Fonctionnement à vide.....	270
b) Fonctionnement en charge.....	271
Caractéristique mécanique $T_u = f(n)$	271
Caractéristique mécanique en fonction du glissement.....	271
7.15. Machines auto synchrones.....	272
7.16. Plaque signalétique du moteur.....	272
Point de fonctionnement.....	272
7.18. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 07.....	273
Référence bibliographiques.....	283

Avant propos

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième année licence électrotechnique, électronique, automatique et télécommunication. Il est destiné également à toute personne désirant de se préparer des concours d'accès au doctorat en génie électrique.

Cette polycopie de cours est conforme au programme du LMD. Son mode d'évaluation est de 40% control continu et 60% examen.

La matière électrotechnique couverte et vaste, le présent support est constitué de sept chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des rappels mathématiques sur les nombres complexes,

Le deuxième chapitre est rappelle les lois fondamentales de l'électricité (régime continu, régime harmonique, régime sinusoïdal et régime transitoire) ;

Le troisième chapitre étudié les circuits électriques : en monophasés, en triphasé équilibré, en triphasé déséquilibré en insistant sur l'aspect énergétique;

Le quatrième chapitre traite les circuits magnétiques qui sont indispensables à la compréhension de la structure des transformateurs, des machines à courant continu MCC, des machines synchrones MS et des machines à synchrones MAS ;

Le cinquième chapitre étudie les transformateurs (transformateur monophasé, transformateur triphasé, autotransformateur.....) ;

Le sixième et le septième chapitre présentent respectivement les machines électriques à courant continu MCC et les machines électriques à courant alternatif synchrone MS et à synchrone MAS.

A la fin de chaque chapitre, un grand nombre d'exercices résolus explicitent les points essentiels sont destinés à valider les acquis du chaque chapitre.

CHAPITRE 01:

RAPPELS MATHÉMATIQUES SUR LES NOMBRES COMPLEXES.

1.1. Introduction

En électricité, et plus particulièrement en régime sinusoïdal, l'utilisation des nombres complexes permet de simplifier l'analyse des circuits électriques en facilitant le calcul des tensions, des courants et des déphasages, et par conséquent le calcul des puissances.

Ce chapitre rappelle les notions essentielles sur les nombre complexes :

- Les différentes notations des nombres complexes ;
- Le conjugué et ses propriétés ;
- Les racines des nombres complexes ;
- L'application à l'électricité des nombres complexe.

1.2. Notions du nombre complexe

Les nombres complexes reposent sur la définition de la quantité :

$$j = \sqrt{-1}$$

Notion cartésienne

Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme unique :

$$\underline{Z} = x + jy$$

Ou : x et y sont des réels.

Notion polaire

$$\underline{Z} = \rho e^{j\theta}$$

Avec :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad : \text{Le module de } \underline{Z} ;$$

$$x = \operatorname{Re}(Z) = \rho \cos \theta \quad : \text{La partie réelle de } \underline{Z} \text{ (l'abscisse)};$$

$$y = \operatorname{Im}(Z) = \rho \sin \theta \quad : \text{La partie imaginaire de } \underline{Z} \text{ (l'ordonnée)}.$$

$$\text{L'angle } \theta \quad : \text{Argument de } \underline{Z}.$$

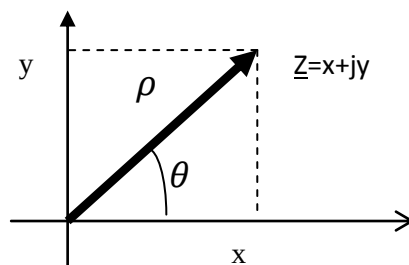


Figure 1.1 : Représentation du vecteur associé au nombre complexe $\underline{Z}$.

Au nombre complexe $\underline{Z} = x + jy$ on peut associer le vecteur $\vec{Z} = x\vec{i} + y\vec{j}$

dans un plan muni d'un repère orthonormé $\vec{i}, \vec{j}$.

Notion exponentielle

$$\underline{Z} = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Notion trigonométrique

$$\underline{Z} = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

1.3. Nombre complexe conjugué

Soit le nombre complexe :

$$\underline{Z} = x + jy$$

Le conjugué de $\underline{Z}$ est $\bar{\underline{Z}}$.

Avec :

$$\bar{\underline{Z}} = x - jy$$

$$\bar{\underline{Z}} = \rho^{-\theta}$$

$$\bar{\underline{Z}} = \rho e^{-j\theta}$$

$$\bar{\underline{Z}} = \rho(\cos \theta - j \sin \theta)$$

1.4. Les opérations arithmétiques sur les nombres complexes

Les opérations sur les nombres complexes s'apparentent aux opérations sur les vecteurs.

Somme

Soient deux nombres complexes $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ avec :

$$\underline{X} = a + jb$$

$$\underline{Y} = c + jd$$

Leur somme est égale à :

$$\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y} = (a + c) + j(b + d)$$

Le vecteur associé à $\underline{Z}$ est la somme vectorielle des vecteurs associés à $\underline{X}$ et $\underline{Y}$.

Produit

Soient deux nombres complexes :

$$\underline{X} = \rho \cdot e^{j\theta}$$

$$\underline{Y} = \gamma \cdot e^{j\varphi}$$

Leur produit est égal à :

$$\underline{Z} = \underline{X} \cdot \underline{Y} = \rho \cdot \gamma \cdot e^{j(\theta+\varphi)}$$

Rapport

Soient deux nombres complexes :

$$\underline{X} = \rho \cdot e^{j\theta}$$

$$\underline{Y} = \gamma \cdot e^{j\varphi}$$

Leur rapport est égal à :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{X}}{\underline{Y}} = \frac{\rho}{\gamma} \cdot e^{j(\theta-\varphi)}$$

1.5. Formule de MOIVRE

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$$

1.6. Racines des nombres complexes

Supposons $\underline{Z} \neq 0$, $\underline{z}$ une racine $n^{\text{ième}}$ de $\underline{Z}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \rho \cdot e^{j\theta} \text{ et } \underline{z} = \gamma \cdot e^{j\varphi} \\ \underline{z}^n &= \underline{Z} \Leftrightarrow (\gamma \cdot e^{j\varphi})^n = \rho \cdot e^{j\theta} \\ &\Leftrightarrow \gamma^n \cdot e^{jn\varphi} = \rho \cdot e^{j\theta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^n = \rho \\ n\varphi = \theta + k2\pi \quad ; k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} \end{cases}$$

Où :

$$\left. \begin{matrix} \rho > 0 \\ \gamma > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \gamma^n = \rho \quad ,$$

Admet une seule solution :

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}} \\ n\varphi = \theta + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

D'où, les racines de $\underline{Z}$ sont les nombres complexes :

$$\underline{z}_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{j\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad / k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$$

Exemple

On veut déterminer les racines $4^{\text{ième}}$ du nombre complexe :

$$Z = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

On met le nombre $\underline{Z}$ sous la forme exponentielle :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (\gamma \cdot e^{j\varphi})^4 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \\ &\Rightarrow \gamma^4 \cdot e^{j4\varphi} = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

D'où, les solutions sont les nombres complexes $\underline{z}_k$:

$$\underline{z}_k = \sqrt[4]{2} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)} \quad / K \in \{0, 1, 2, 3\}$$

1.7. Application trigonométrique de formule d'Euler

Pour tout réel θ :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

En conséquence :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Et :

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}$$

Exemples

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \right)^4 = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3)$$

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right)^4 = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

1.8. Application à l'électricité des nombres complexes

Soient les grandeurs électriques courant et tension :

$$i(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = I_{max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$v(t) = V_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_v) \Rightarrow \underline{V} = V_{max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)}$$

Impédance Z [Ω]

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} \Rightarrow \begin{cases} |Z| = Z = \frac{V}{I} \\ \arg(Z) = \varphi_v - \varphi_i = \theta \end{cases}$$

$$\underline{Z} = \frac{V}{I} \cdot e^{j\theta} = \frac{V}{I} (\cos \theta + j \sin \theta)$$

Avec :

$$\underline{Z} = R + jX$$

R : Résistance en [Ω] ;

X : Réactance en [Ω]

Admittance Y [Siemens][$\frac{1}{\Omega}$]

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$
$$\underline{Y} = G + jB$$

G : la conductance [$\frac{1}{\Omega}$]

B : la susceptance [$\frac{1}{\Omega}$]

1.9. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 01**Exercice 1.1**

On donne : $Z_1 = 2 - j2$; $Z_2 = 1 - j\sqrt{3}$;

Déterminez le module et l'argument des nombres complexes suivants : $Z_1 \cdot Z_2$ et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

Solution de l'exercice 1.1

Soit un nombre complexe : $\underline{Z} = x + jy$

Module de: $|\underline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$; argument de $\underline{Z}$: $\text{Arg}(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\underline{Z}_1 = 2\sqrt{2} \left| -\frac{\pi}{4} \right| = 2\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} ; \underline{Z}_2 = 2 \left| -\frac{\pi}{3} \right| = 2 e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = (2\sqrt{2} \times 2) e^{j(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = 4\sqrt{2} e^{-j\frac{7\pi}{12}} = 4\sqrt{2} \left| -\frac{7\pi}{12} \right|$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{2\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2 e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{j(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2} \left| \frac{\pi}{12} \right|$$

Exercice 1.2

Mettez les nombres complexes suivants sous la forme cartésienne :

$$\frac{1 + j2}{1 - j2} ; \frac{1}{(1 + j2)(3 - j)} ; \frac{-2}{1 - j\sqrt{3}}$$

Solution de l'exercice 1.2

La forme cartésienne :

$$\underline{Z}_1 = \frac{1 + j2}{1 - j2} = \frac{(1 + j2)(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = \frac{1 + j2 + j2 - 4}{1 + 4} = \frac{-3 + j4}{5} = -\frac{3}{5} + j\frac{4}{5}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{(1 + j2)(3 - j)} = \frac{1}{3 - j + j6 + 2} = \frac{1}{5 + j5} = \frac{1}{5} \frac{(1 - j)}{(1 + 1)} = \frac{1}{10} - j\frac{1}{10}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{-2}{1 - j\sqrt{3}} = \frac{-2(1 + j\sqrt{3})}{1 + 3} = \frac{-2}{4} (1 + j\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 1.3

Ecrivez le nombre suivant sous la forme cartésienne, c'est-à-dire calculez sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$(\sqrt{3} + j)^{1967}$$

Solution de l'exercice 1.3

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= (\sqrt{3} + j)^{1967} = \left(2e^{j\frac{\pi}{6}}\right)^{1967} = 2^{1967} e^{j\frac{1967\pi}{6}} \\ &= 2^{1967} \left(\cos\left(\frac{1967\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{1967\pi}{6}\right) \right) = Re + jIm\end{aligned}$$

Exercice 1.4

Linéariser $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$

Solution de l'exercice 1.4

Linéarisation de $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$

Connaissant que :

$$\begin{aligned}j^0 &= 1 \\ j^1 &= j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= -j\end{aligned}$$

Ordre	Les coefficients du polynôme de n ordre					
2	1	+2	+1			
3	1	+3	+3	+1		
4	1	+4	+6	+4	+1	
5	1	5	10	10	5	1
.....						

Triangle de pascal

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}\right)^3 = \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^3}{-j8} \\ &= \frac{e^{j3\theta} \cdot e^{-j\theta} - 3e^{j2\theta} \cdot e^{-j\theta} + 3e^{j\theta} \cdot e^{-j2\theta} - e^{j0} \cdot e^{-j3\theta}}{-j8} \\ &= \frac{e^{j3\theta} - 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta} - e^{-j3\theta}}{-j8} \\ &= \frac{(e^{j3\theta} - e^{-j3\theta}) - 3(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{-j8} = \frac{2j\sin(3\theta) - j6\sin\theta}{-j8} \\ \sin^3\theta &= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin\theta \\ \cos^4\theta &= \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^4}{16} \\ &= \frac{e^{j4\theta} + 4e^{j3\theta} \cdot e^{-j\theta} + 6e^{j2\theta} \cdot e^{-j2\theta} + 4e^{j\theta} \cdot e^{-j3\theta} + e^{-j4\theta}}{16} \\ &= \frac{(e^{j4\theta} - e^{-j4\theta}) + 4(e^{j2\theta} + e^{-j2\theta}) + 6}{16} \\ \cos^4\theta &= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Exercice 1.5

Démontrez que : $\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Indication : utilisez le fait que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Re}(e^{j\frac{\pi}{12}})$

Solution de l'exercice 1.5

Démonstration de :

$$\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ rad}$$

$$15^\circ \rightarrow x \text{ rad}$$

D'où :

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

On a :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Et :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \operatorname{Re}(e^{j\frac{\pi}{12}})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$e^{j\frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12}$$

Alors :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \operatorname{Re}\left(e^{j\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 1.6

Mettre sous la forme $a + jb$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\frac{3 + j6}{3 - j4} ; \left(\frac{1 + j}{2 - j}\right)^2 + \frac{3 + j6}{3 - j4} ; \frac{2 + j5}{1 - j} + \frac{2 - j5}{1 + j}$$

Solution de l'exercice 1.6

$$\frac{3 + j6}{3 - j4} = -\frac{3}{5} + j\frac{6}{5}$$

$$\left(\frac{1 + j}{2 - j}\right)^2 + \frac{3 + j6}{3 - j4} = -\frac{8}{25} + j\frac{6}{25} + -\frac{3}{5} + j\frac{6}{5}$$

$$\frac{2+j5}{1-j} + \frac{2-j5}{1+j} = -3$$

Exercice 1.7

Écrire sous la forme $a + jb$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Solution de l'exercice 1.7

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$:

$$\underline{Z}_1 = 2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

$$\underline{Z}_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{8}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Exercice 1.8

Soit φ réel ; $z = \cos^2 \varphi + j \sin \varphi \cos \varphi$

1. Déterminer φ tel que $z = 0$.
2. Si $z \neq 0$, calculer $z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}$.

Solution de l'exercice 1.8

Soit φ réel ; $z = \cos^2 \varphi + j \sin \varphi \cos \varphi$

1. Détermination de φ tel que $z = 0$:

$$\begin{aligned} z = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 \varphi + j \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \varphi (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 & \text{ou} \\ (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 0 \end{cases} \\ \cos \varphi = 0 &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 0 \Rightarrow e^{j\varphi} = 0 ;$$

Ce qui est impossible car $|e^{j\varphi}| = 1$ est un nombre complexe de module 1 ne peut jamais être égale à 0.

Les seuls solutions du problème sont donc données par :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

2. Si $z \neq 0$, calculer

$$z^{-1} = \frac{1}{\cos \varphi \cdot e^{j\varphi}} = \frac{e^{-j\varphi}}{\cos \varphi} = 1 - \tan \varphi$$

$$z^2 = \cos^2 \varphi \cdot e^{j2\varphi} = \cos^2 \varphi (\cos 2\varphi + j \sin 2\varphi)$$

$$z^{-2} = \frac{e^{-j2\varphi}}{\cos^2 \varphi} = (1 - \tan^2 \varphi) - j2 \tan \varphi$$

$$z^3 = \cos^3 \varphi \cdot e^{j3\varphi} = \cos^3 \varphi (\cos 3\varphi + j \sin 3\varphi)$$

$$z^{-3} = \frac{e^{-j3\varphi}}{\cos^3 \varphi} = \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi} - j \frac{\sin 3\varphi}{\cos^3 \varphi}$$

Exercice 1.9

Dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres complexes, j désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- Montrer que $(1 + j)^6 = -j8$
- On considère l'équation (E) : $z^2 = -j8$.
 - Déduire de la question 1 une solution de l'équation (E)
 - L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
- Déduire également de l'équation 1 une solution de l'équation (E') :

$$z^3 = -j8.$$

Solution de l'exercice 1.9

- Montrer que $(1 + j)^6 = -j8$

$$(1 + j)^6 = \left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \sqrt{2}^6 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -j\sqrt{2}^6 = -j8$$
- On considère l'équation (E) : $z^2 = -j8$.

$$\left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \left(\left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}^3 e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)^2$$

Alors :

$\sqrt{2}^3 e^{j\frac{3\pi}{4}}$: Une solution de l'équation E.

$$(1 + j)^6 = ((1 + j)^3)^2 = (-2 + j2)^2$$

$-2 + j2$: Une autre solution sous la forme algébrique de l'équation E.

- E' : $z^3 = -j8$

$$(1 + j)^6 = ((1 + j)^2)^3 = -j8$$

$$(1 + j)^2 = j2$$

Alors : $z = j2$ une solution de l'équation E'.

Exercice 1.10

Mettre sous la forme algébrique $a + jb$ les nombres complexes suivants:

$$\underline{Z}_1 = \frac{2 + j}{3 - j2} ; \underline{Z}_2 = \left(\frac{5 + j}{1 - j}\right)^2 ; \underline{Z}_3 = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 ;$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{(1+j)^9}{(1-j)^7} ; \underline{Z}_5 = j^{73} ; \underline{Z}_6 = (1+j\sqrt{3})^{2022}$$

Solution de l'exercice 1.10

La forme algébrique des nombres suivants :

$$\underline{Z}_1 = \frac{2+j}{3-j2} = \frac{(2+j)(3+j2)}{9+4} = \frac{4}{13} + j\frac{7}{13}$$

$$\underline{Z}_2 = \left(\frac{5+j}{1-j}\right)^2 = \frac{(5+j)^2}{(1-j)^2} = -5 + j12$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{(1+j)^9}{(1-j)^7} = \frac{(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^9}{(\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})^7} = 2e^{j4\pi} = 2(\cos 4\pi + j\sin 4\pi) = 2$$

$$\underline{Z}_5 = j^{73} = j^{(4 \cdot 18 + 1)} = (j^4)^{18} \cdot j = j$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_6 &= (1+j\sqrt{3})^{2010} = \left(2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2010} \\ &= 2^{2010} \left(\cos\left(2010\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(2010\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{2010} \end{aligned}$$

Exercice 1.11

Soient les nombres complexes suivants des:

$$\underline{Z}_1 = 1 + j\sqrt{3} ; \underline{Z}_2 = -1 - j\sqrt{3} ; \underline{Z}_3 = \sqrt{2}(1-j)$$

1. Donner le module et l'argument;
2. Déduire la forme exponentielle.

Solution de l'exercice 1.11

La forme exponentielle des nombres suivants :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 = 1 + j\sqrt{3} &= \begin{cases} |\underline{Z}_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \varphi_1 = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \underline{Z}_1 &= 2e^{j\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_2 = -1 - j\sqrt{3} = \begin{cases} |\underline{Z}_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \varphi_2 = \arctg(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\underline{Z}_2 = 2e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{Z}_3 = \sqrt{2}(1 - j) = \begin{cases} |\underline{Z}_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi_3 = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\underline{Z}_3 = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 1.12

Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$\underline{Z}_1 = 3e^{-j\frac{7\pi}{8}} ; \quad \underline{Z}_2 = \left(2e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{3\pi}{4}}\right) ; \quad \underline{Z}_3 = \frac{2e^{j\frac{7\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{13\pi}{4}}}$$

Solution de l'exercice 1.12

La forme cartésienne des nombres suivants :

$$\underline{Z}_1 = 3e^{-j\frac{7\pi}{8}} = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + j\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right) = -2.77 - j1.14$$

$$\underline{Z}_2 = \left(2e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{3\pi}{4}}\right) = 2e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{j\pi} = (\cos(\pi) + j\sin(\pi)) = -2$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{2e^{j\frac{7\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{13\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + j$$

Exercice 1.13

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\underline{Z}_1 = 3 + j3 ; \quad \underline{Z}_2 = -j\frac{4}{3} ; \quad \underline{Z}_3 = -2 ; \quad \underline{Z}_4 = \frac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{3} - j}$$

Solution de l'exercice 1.13

La forme trigonométrique :

$$\underline{Z}_1 = 3 + j3 = 3\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\underline{Z}_2 = -j\frac{4}{3} = \frac{4}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} = \frac{4}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right)$$

$$\underline{Z}_3 = -2 = 2e^{j\pi} = 2(\cos\pi + j\sin\pi)$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{3} - j} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{3}}}{2e^{-j\frac{\pi}{6}}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 1.14

Calculer :

1. $\underline{Z}_1 = \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^{2022}$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Solution de l'exercice 1.14

1. $\underline{Z}_1 = \left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^{2022} = \left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^{2022} = e^{j\frac{2022\pi}{3}} = e^{j674\pi} = 1$
2. $\left(2e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{-j\frac{5\pi}{6}}\right) = 6e^{-j\frac{\pi}{2}}$
3. $\frac{\left(2e^{j\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(3e^{-j\frac{5\pi}{6}}\right)} = \frac{2}{3}e^{j\frac{7\pi}{6}}$

Exercice 1.15

Soit : $\underline{Z} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + j\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer $\underline{Z}^2$, puis déterminer le module et un argument de $\underline{Z}^2$, puis écrire $\underline{Z}^2$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $\underline{Z}$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution de l'exercice 1.15

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} + j\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \underline{Z}^2 &= 2\sqrt{3} + j2 = \gamma e^{j\varphi} = 4e^{j\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \begin{cases} \rho = \sqrt{\gamma} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} & \quad \text{Avec : } k \in \{0,1\}\end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{Z} = 2e^{j\frac{\pi}{12}}$$

Ou :

$$\underline{Z} = 2e^{j\frac{\pi}{12}}$$

En déduire : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\underline{Z} = 2e^{j\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + j\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + j\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = 0,96$$

Et :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0,26$$

Exercice 1.16

Mettre sous la forme algébrique $a + jb$ les nombres complexes suivants:

$$\underline{Z}_1 = \frac{(1 + j\sqrt{3})^5}{(1 - j)^2}; \underline{Z}_2 = -j^{54}; \underline{Z}_3 = (1 + j\sqrt{2})^{2024}; \underline{Z}_4 = \frac{5 + j3}{1 - j2}$$

Solution de l'exercice 1.16

$$\underline{Z}_1 = \frac{(1 + j\sqrt{3})^5}{(1 - j)^2} = \frac{(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^5}{(\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})^2} = \sqrt{2}^3 e^{j\frac{7\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - j2$$

$$\underline{Z}_2 = j^{-54} = \frac{1}{j^{54}} = \frac{1}{j^{((4 \times 13) + 2)}} = \frac{1}{((j^4)^{13} \times j^2)} = \frac{1}{(1)^{13} \times (-1)} = -1$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= (\sqrt{2} + j\sqrt{2})^{2024} = (2e^{j\frac{\pi}{4}})^{2024} = 2^{2024} e^{j\frac{2024\pi}{4}} = 2^{2024} e^{j506\pi} \\ &= 2^{2024} (\cos(506\pi) + j\sin(506\pi)) = 2^{2024} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{5 + j3}{1 - j2} = -\frac{1}{5} + j\frac{13}{5}$$

Exercice 1.17

Pour chacun des cas, calculer l'expression suivante sous la forme polaire :

$$\underline{Z} = A|\varphi^\circ$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

a) $\underline{Z}_1 = 10 + j5$; $\underline{Z}_2 = 20|30^\circ$;

b) $\underline{Z}_1 = 5|45^\circ$; $\underline{Z}_2 = 10|-70^\circ$;

c) $\underline{Z}_1 = 6 - j2$; $\underline{Z}_2 = 1 + j8$;

$$d) \underline{Z}_1 = 20 \quad ; \quad \underline{Z}_2 = j40 \quad ;$$

Solution de l'exercice 1.17

Sous la forme polaire :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$a) \underline{Z}_1 = 10 + j5 = 11,18[26,56^\circ] ; \underline{Z}_2 = 20[30^\circ] = 10\sqrt{3} + j10$$

$$\underline{Z} = \frac{(11,18[26,56^\circ])(20[30^\circ])}{(10 + j5) + (10\sqrt{3} + j10)} = \frac{223,6[56,56^\circ]}{27,32 + j15} = \frac{223,6[56,56^\circ]}{31,16[28,76^\circ]}$$

$$\underline{Z} = 7,17[27,8^\circ]$$

$$b) \underline{Z}_1 = 5[45^\circ] = 3,53 + j3,53 \quad ; \quad \underline{Z}_2 = 10[-70^\circ] = 3,42 - j9,39$$

$$\underline{Z} = \frac{50[-25^\circ]}{6,95 - j5,86} = \frac{50[-25^\circ]}{9,09[-40,13^\circ]}$$

$$\underline{Z} = 5,50[15,13^\circ]$$

$$c) \underline{Z}_1 = 6 - j2 = 6,32[-18,43^\circ] \quad ; \quad \underline{Z}_2 = 1 + j8 = 8,06[-82,87^\circ]$$

$$\underline{Z} = \frac{50,93[64,44^\circ]}{9,21[40,60^\circ]} = 5,52[23,84^\circ]$$

$$d) \underline{Z}_1 = 20 = 20[0^\circ] \quad ; \quad \underline{Z}_2 = j40 = 40[90^\circ]$$

$$\underline{Z} = \frac{800[90^\circ]}{44,72[63,43^\circ]} = 17,88[28,57^\circ]$$

Exercice 1.18

Mettre sous la forme trigonométrique les expressions suivantes :

$$a) X = Ae^{-\alpha t} e^{j(\omega+Bt)} + Ae^{-\alpha t} e^{-j(\omega+Bt)} \quad ;$$

$$b) Y = Be^{j\omega t} + Ce^{-j\omega t} \quad ;$$

Solution de l'exercice 1.18

Sous la forme trigonométrique :

$$a) X = Ae^{-\alpha t} e^{j(\omega+Bt)} + Ae^{-\alpha t} e^{-j(\omega+Bt)}$$

$$X = 2A(\cos(\alpha t) - j\sin(\alpha t))\cos(\omega + Bt)$$

$$X = 2A(\cos(\alpha t) \cdot \cos(\omega + Bt) - j\sin(\alpha t)\cos(\omega + Bt))$$

$$b) Y = Be^{j\omega t} + Ce^{-j\omega t}$$

$$Y = B(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) + C(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t))$$

$$Y = (B + C)\cos(\omega t) + j(B - C)\sin(\omega t)$$

Exercice 1.19

Mettre sous la forme exponentielle les expressions suivantes :

- a) $H = e^{-\alpha t} \sin(\varphi + Bt)$;
- b) $K = A \sin \omega t + B \cos \omega t$;

Solution de l'exercice 1.19

Sous la forme exponentielle:

- a) $H = e^{-\alpha t} \sin(\varphi + Bt)$

$$H = e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{j(\varphi+Bt)} - e^{-j(\varphi+Bt)}}{j2} \right)$$

- b) $K = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$K = A \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} \right) + B \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right)$$

CHAPITRE 02 :

RAPPELS SUR LES LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRICITÉ.

2.1. Introduction

Ce chapitre constitue un rappel des lois fondamentales de l'électricité. Ces rappels permettent de consolider les acquis et de disposer des outils théoriques indispensables pour aborder les chapitres suivants et résoudre efficacement les problèmes liés aux circuits électriques

2.2. Notions de base et définitions

Différence de potentiel ou tension

Entre deux points la tension (E) se mesure par le travail nécessaire pour déplacer une charge unitaire d'un point à l'autre, en présence d'un champ électrique. C'est la variation d'énergie (W) par unité de charge (Q) :

$$E = \frac{dW}{dQ}$$

Le volt (V) est la différence de potentiel entre deux points lorsque le travail nécessaire pour déplacer une charge de $1C$ (coulomb: $6.24 \cdot 10^{18}$ électrons) d'un point à un autre est égal à $1J$ (Joule).

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

La différence de potentiel ou tension E_{AB} est égale au potentiel du point A (E_A) moins le potentiel du point B (E_B) :

$$E_{AB} = E_A - E_B = -E_{BA}$$

Courant électrique

Un courant électrique existe dans un conducteur chaque fois qu'une charge Q se déplace d'un point à un autre dans ce conducteur. Le courant (I) se définit comme la variation de charge par unité de temps :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Si la charge se déplace d'une façon uniforme à raison de $1C/s$ (coulomb par seconde), le courant qui circule dans le condensateur est de $1A$ (ampère) :

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

2.3. Régime continu (DC ou =)

En régime continu, les courants et les tensions sont constants dans le temps.

a) Dipôles électriques

On dit dipôle électrique une partie d'un réseau électrique ou composant relié à l'extérieur par deux pôles ou deux bornes.

b) Dipôle passif et dipôle actif

Un dipôle passif est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et qui transforme toute cette énergie en chaleur (ex : résistance, ampoule....). Sa caractéristique passe par l'origine (= 0 si $U = 0$).

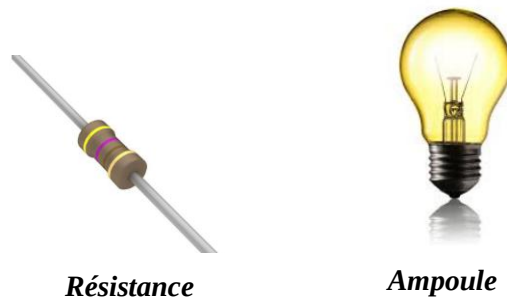


Figure 2.1 : Exemple de dipôles passifs.

Un dipôle actif fournit de l'énergie au circuit dans lequel il est connecté (ex : pile, moteur électrique à courant continu.....).

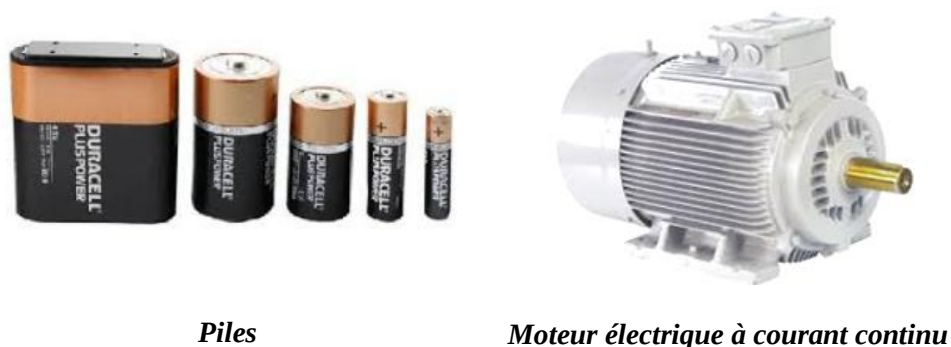


Figure 2.2 : Exemple de dipôles actifs.

c) Dipôles linéaire et non linéaire

Les fonctions $u=f(i)$ et $i=g(u)$ sont les caractéristiques du dipôle électrique.

Un dipôle est linéaire si la fonction f ou la fonction g est linéaire (une droite).

$$f(k_1 i_1 + k_2 i_2) = k_1 f(i_1) + k_2 f(i_2)$$

$$g(\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2) = \delta_1 g(u_1) + \delta_2 g(u_2)$$

Avec : k_1, k_2, δ_1 et δ_2 sont des constants réelles.

Alors, on dit qu'un dipôle est linéaire si une tension sinusoïdale alimente une charge linéaire, alors que le courant dans celle-ci est sinusoïdal.

Exemple 1

Résistance :

$$u = Ri$$

Condensateur :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Bobine :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Autrement, le dipôle est non linéaire.

Exemple 2

Une bobine à noyau ferromagnétique (effet d'hystérésis), une diode, un interrupteur sont des dipôles non linéaires.

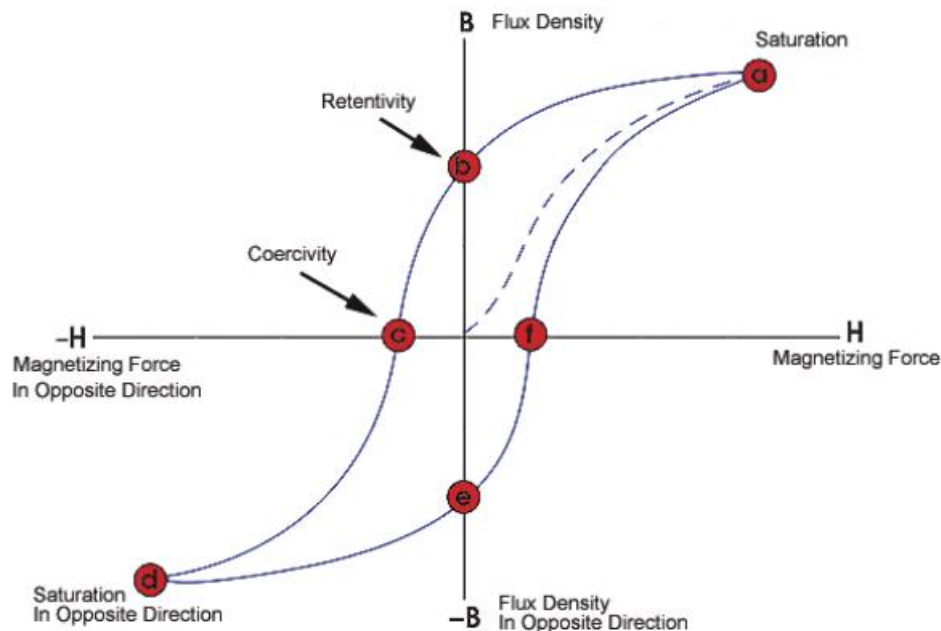


Figure 2.3 : La courbe de l'effet d'hystérésis.

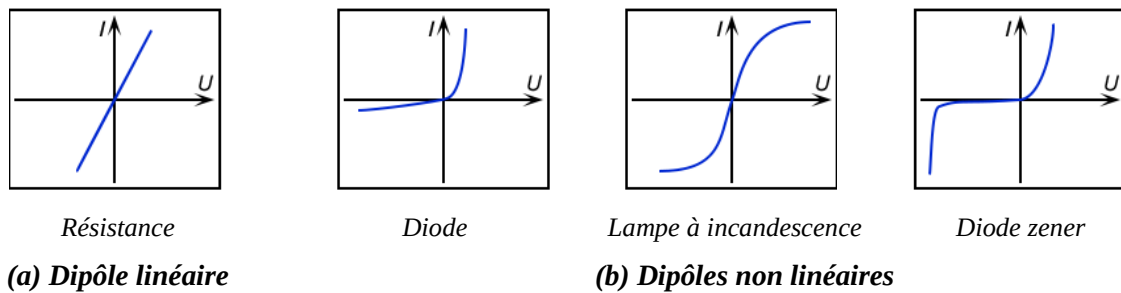


Figure 2.4 : Caractéristiques courant-tension de quelques éléments électriques.

Résumé :

- Passif $\Rightarrow u(i)$ passe par zéro ;
- Actif $\Rightarrow u(i)$ ne passe pas par zéro ;
- Linéaire $\Rightarrow u(i)$ la caractéristique est une droite ;
- Non linéaire $\Rightarrow u(i)$ n'est pas une droite.

2.4. Les trois composants passifs linéaires de base

La résistance

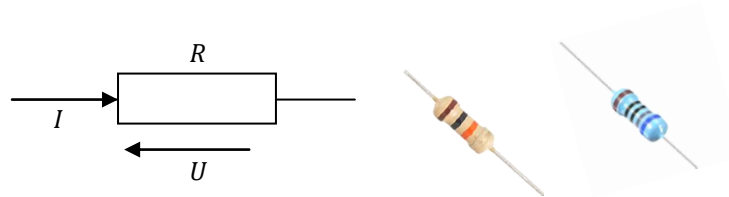


Figure 2.5 : Symbole de la résistance.

Traduit la propriété d'un composant électrique à s'opposer au passage du courant électrique.

a) La résistance d'un fil homogène

Elle est donnée par la relation suivante :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s} = \frac{l}{\gamma \cdot s}$$

Avec :

ρ : Résistivité [$\Omega \cdot m$] ;

l : Longueur [m] ;

s : Section [m^2] ;

γ : conductivité [$\frac{siemens}{m}$] .

b) L'énergie électrique [joule]

$$w_R = R.I^2.t$$

Avec:

R : Résistance [Ω] ;

I : Courant [A] ;

t : Temps en [s].

La capacité (le condensateur)

Un condensateur est un dipôle électrique constitué, dans le cas le plus simple, de deux plaques métalliques (donc contenant des électrons libres), appelées armatures, séparées par un isolant (diélectrique).

Soumis à une tension continue le condensateur peut accumuler des charges électriques. Sa grandeur caractéristique est appelée capacité C (unité : Farad [F]). Elle traduit la relation entre la quantité de charges q (en coulomb) et la tension U appliquée (en Volt) et dépend de la structure du condensateur (surface et distance des armatures, nature du diélectrique).

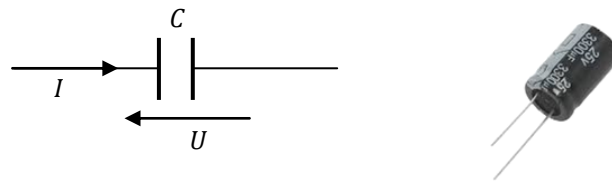


Figure 2.6 : Symbole du condensateur.

a) Capacité d'un condensateur plan

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

Avec :

d : Distance (espace entre les armatures) en [m] ;

S : Surface en [m^2] ;

ε_r : Permittivité du diélectrique ;

ε_0 : Permittivité du vide ;

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi.10^9}$$

La capacité est donnée également par la relation :

$$C = \frac{q}{U}$$

C : Capacité en [Farad][F];

q : Charge positive en [Coulomb][C];

U : Tension aux bornes du système capacitif [V];

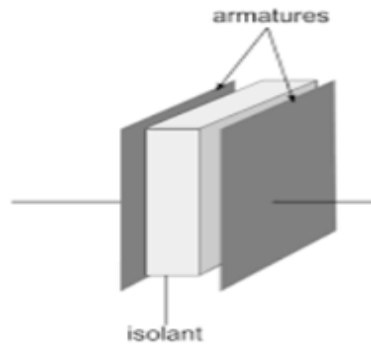


Figure 2.7 : Condensateur plan.

b) L'énergie stockée dans un condensateur en [Joule]

$$w_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

$$w_C = \frac{1}{2} \cdot q \cdot U$$

$$w_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$$

La bobine (l'inductance)

La bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur éventuellement autour d'un noyau en matériaux ferromagnétique.

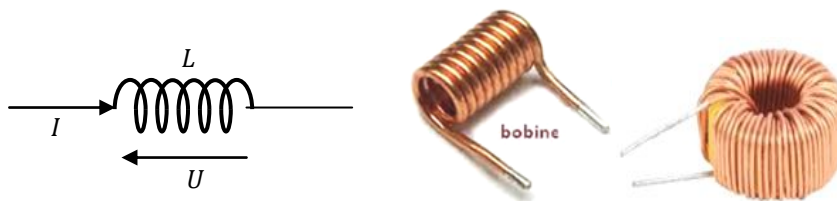


Figure 2.8 : Symbole de la bobine.

a) Bobine à air

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot s}{l}$$

Avec :

L : Inductance en [Henry][H] ;

μ_0 : Constante magnétique $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}[H.m^{-1}]$;

S : Section de la bobine [m^2] ;

l : Longueur de la bobine [m] ;

N : Nombre de spires.

b) Bobine à noyau magnétique

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot N^2 \cdot S}{l}$$

S : Section effective de noyau magnétique [m^2] ;

l : Longueur effective du noyau magnétique [m].

c) L'énergie emmagasinée par une bobine

$$w_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

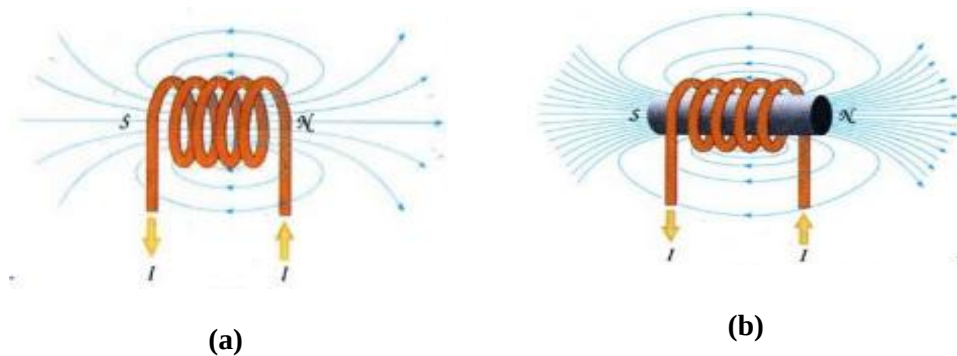


Figure 2.9 : (a) Bobine à air, (b) Bobine à noyau ferromagnétique.

2.5. Association des dipôles R, C et L

Le tableau suivant récapitulant différents modes d'association des dipôles passifs linéaires de base :

	Association série	Association parallèle
 Résistance	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ $R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \dots = \frac{1}{R_n}$ $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$
 Condensateur	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \dots = \frac{1}{C_n}$ $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$	$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$
 Bobine	$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ $L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{L_2} = \dots = \frac{1}{L_n}$ $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$

Tableau 2.1 : Association des dipôles passifs linéaires de base.

2.6. Régime alternatif

Pour des raisons historiques, principalement technologiques, l'électricité est aujourd'hui très largement produite, transportée, distribuée et consommée en courant alternatif. En réalité on devrait dire sous tension alternative, car c'est la tension qui est imposée. Alternative signifie qu'elle oscille autour d'une valeur moyenne nulle, en outre sa forme d'onde est de type sinusoïdal.

Régime sinusoïdal (AC ou ~)

Une grandeur est dite sinusoïdale si elle a pour expression :

$$x(t) = x_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Ou :

$$x(t) = x_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec :

x_{max} : L'amplitude (Même nature que x) ;

$(\omega t + \varphi)$: La phase [rad] ;

φ : La phase initiale (c'est la valeur de la phase à $t = 0$) ;

ω : la pulsation [rad/s] : $\omega = 2\pi f$.

f : La fréquence en Hertz [HZ] : $f = \frac{1}{T}$

T : la période [s].

$$\theta = \omega t$$

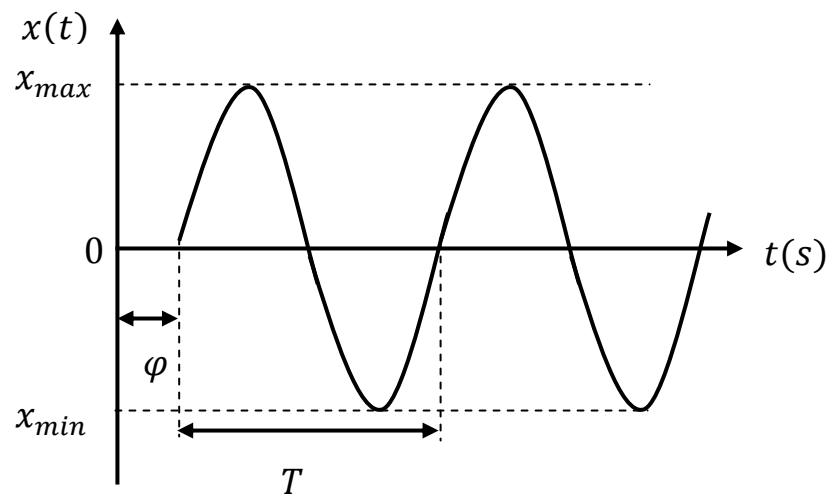


Figure 2.10 : Représentation d'une grandeur sinusoïdale.

La valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal périodique est la moyenne des valeurs instantanées mesurées sur une période complète.

$$x_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cdot dt$$

Ou :

$$x_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta) \cdot d\theta$$

Ou :

$$x_{moy} = \frac{\text{(Air sous la courbe de } x(t) \text{ prise sur } T)}{T}$$

Remarques

- 1- $x_{moy}(x_1 + x_2) = x_{moy1} + x_{moy2}$
- 2- La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

La valeur efficace

En électricité, la valeur efficace d'une tension ou d'un courant correspond à la valeur de la tension ou du courant continu qui produirait le même échauffement dans la même résistance en un temps identique.

$$x_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) \cdot dt$$

Ou :

$$x_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(\theta).d\theta$$

Remarque

$$x_{eff}(x_1 + x_2) \neq x_{eff1} + x_{eff2}$$

Exemple

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace de la fonction sinusoïdale suivante :

$$v(\theta) = v_{max} \cdot \sin(\theta)$$

La valeur moyenne :

$$v_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta).d\theta$$

$$v_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{max} \cdot \sin(\theta).d\theta$$

$$v_{moy} = \frac{v_{max}}{2\pi} \cdot [-\cos\theta]_0^{2\pi}$$

$$v_{moy} = 0$$

La valeur efficace :

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(\theta).d\theta$$

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{max}^2 \cdot \sin^2(\theta).d\theta$$

$$v_{eff}^2 = \frac{v_{max}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta).d\theta$$

On a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Par soustraction :

$$-2 \sin^2 a = \cos(2a) - 1$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Alors :

$$v_{eff}^2 = \frac{v_{max}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) \cdot d\theta$$

$$v_{eff}^2 = \frac{v_{max}^2}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$v_{eff} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$$

Représentation de Fresnel

Pour simplifier les calculs (additivité des tensions, lois de nœuds....) on associe à chaque grandeur sinusoïdale son vecteur de Fresnel équivalent.

Dans le plan (xoy) la tension (courant) est représentée par un vecteur :

$$v(t) = v_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \vec{v} = [v_{max}, (\omega t, \varphi)]$$

La tension instantanée est donnée par la composante y de ce vecteur :

$$v_y(t) = v_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

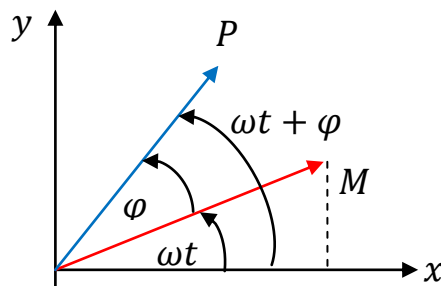


Figure 2.11 : Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale.

Remarque

Les signaux de même période $\Rightarrow$ même fréquence $\Rightarrow$ même pulsation

Alors, les calculs peuvent s'effectuer pour $t=0$, c'est pourquoi on travaille avec le phaseur $\vec{v} = [||\vec{v}||, \varphi]$.

Exercice

Soit le circuit suivant : Calculer E

$$\omega = \pi \text{ [rad/s]} .$$

$$v_R(t) = 2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$v_C(t) = 3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_L(t) = 4 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La représentation de Fresnel :

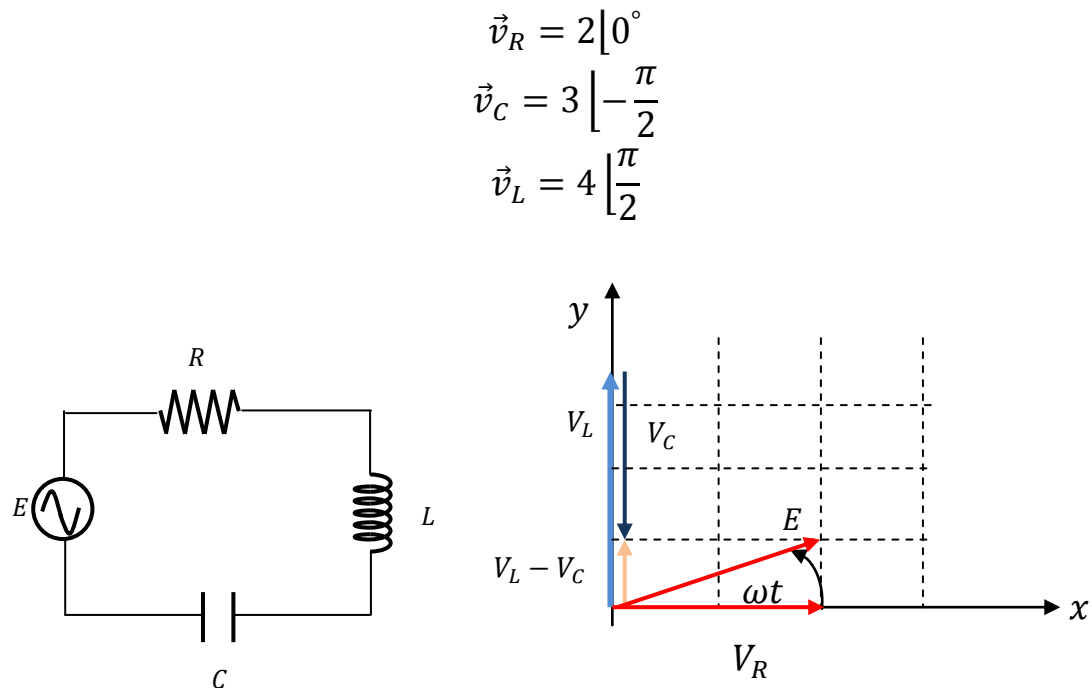


Figure 2.12 : Circuit RLC série et représentation de Fresnel Tension –courant.

$$\vec{E} = \vec{v}_R + \vec{v}_C + \vec{v}_L$$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{(v_L - v_C)^2 + v_R^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ V}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = 26,56^\circ \approx 27^\circ$$

$$\vec{E} = \sqrt{5}[27^\circ \Rightarrow E(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(\omega t + 27^\circ)$$

La représentation complexe

Pour simplifier de plus en plus les calculs, on utilise la représentation complexe.

$$\underline{V} = x + jy$$

$$\underline{V} = v_{\max}(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi))$$

$$\underline{V} = v_{\max}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Exercice

Même exercice précédent, déterminer E par la représentation complexe.

$$v_R = 2 \cdot \sin(\omega t) \quad V_R = 2e^{j0} = 2(\cos 0 + j\sin 0)$$

$$v_C = 3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V_C = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 3(\cos \frac{\pi}{2} - j\sin \frac{\pi}{2})$$

$$v_L = 4. \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad V_L = 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 4(\cos \frac{\pi}{2} + j\sin \frac{\pi}{2})$$

$$E = V_R + V_C + V_L \Rightarrow E = 2 + (-j3) + j4 = 2 - j3 + j4$$

$$E = 2 + j$$

Alors :

$$|E| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ V}$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \theta = 27^\circ$$

$$\vec{E} = \sqrt{5}.e^{j27^\circ} \Rightarrow E = \sqrt{5}. \sin (\omega t + 27^\circ)$$

2.7. Application de la notation complexe aux dipôles linéaires passifs élémentaires

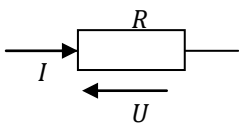
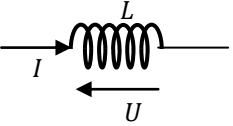
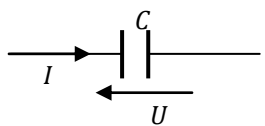
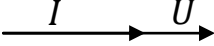
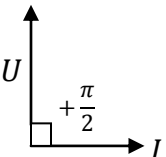
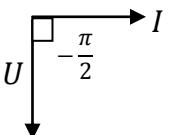
Dipôle			
	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole			
Relation entre tension et courant	$u = R.i$	$u = L.\frac{di}{dt}$	$i = C.\frac{du}{dt}$
Relation entre grandeurs complexes	$\underline{U} = R.\underline{I}$	$\underline{U} = jL\omega.\underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}.\underline{I}$ $\underline{U} = -j\frac{1}{C\omega}.\underline{I}$
Impédance	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = jL\omega$	$\underline{Z} = -j\frac{1}{C\omega}$
Relation entre valeurs efficaces	$U = R.I$	$U = L\omega.I$	$U = \frac{1}{C\omega}.I$
Déphasage	$\varphi = 0$	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			

Tableau 2.2 : Récapitulatif de différentes caractéristiques des éléments passifs linéaires de base.

2.8. Règles d'association des impédances

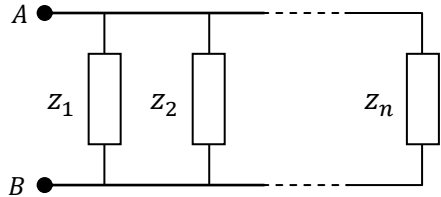
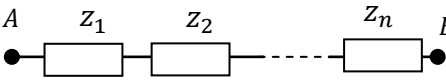
Association parallèle	Association série
	
$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} \quad , \quad Y_{eq} = \sum_{i=1}^n Y_i$	$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$

Tableau 2.3 : Association des impédances.

Exemples

Nous allons maintenant étudier l'association de dipôles de nature différente en utilisant les impédances complexes.

a) Cas d'un condensateur réel (Dipôle capacitif)

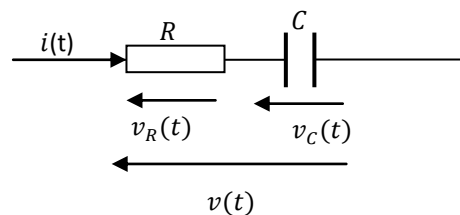


Figure 2.13 : Condensateur réel.

Nous pouvons écrire :

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_C$$

$$\underline{V} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\underline{I} = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I} = \underline{Z}_{eq}\cdot\underline{I}$$

Avec :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(R - \frac{1}{jC\omega}\right) = \left[\sqrt{(R)^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} ; \arctan\left(\frac{\left(-\frac{1}{C\omega}\right)}{R}\right) \right]$$

Le diagramme de Fresnel dans ce cas est le suivant:

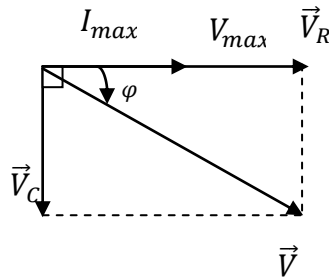


Figure 2.14 : Représentation de Fresnel du dipôle capacitif.

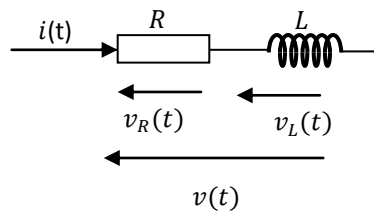
b) Cas d'une bobine réelle (Dipôle inductif)

Figure 2.15 : Bobine réelle.

Nous pouvons écrire :

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L$$

$$\underline{V} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L)\underline{I} = (R + jL\omega)\underline{I} = \underline{Z}_{eq}\cdot\underline{I}$$

Avec :

$$\underline{Z}_{eq} = (R + jL\omega) = \left[\sqrt{(R)^2 + (L\omega)^2}; \arctan\left(\frac{(L\omega)}{R}\right) \right]$$

Le diagramme de Fresnel dans ce cas est le suivant :

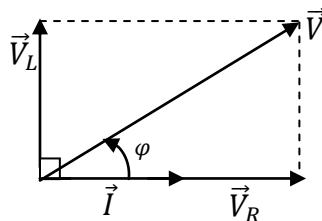


Figure 2.16 : Représentation de Fresnel du dipôle inductif.

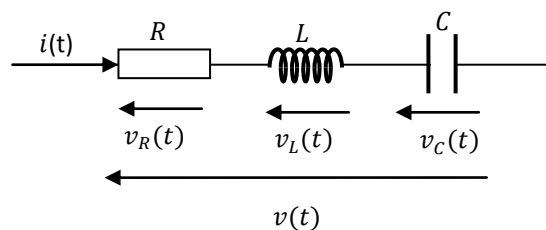
c) Cas d'un circuit RLC série

Figure 2.17: Circuit RLC série.

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$$

$$\underline{V} = R \cdot \underline{I} + jL\omega \cdot \underline{I} - j \frac{1}{C\omega} \cdot \underline{I} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{eq} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\underline{Z}_{eq} = \left[\sqrt{(R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} ; \arctan \left(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R} \right) \right]$$

Cas (a) :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi = 0$$

Le dipôle RLC à un comportement résistif.

Cas (b):

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0 \Rightarrow L\omega < \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi < 0 :$$

Le dipôle RLC à un comportement capacitif.

Cas (c):

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0 \Rightarrow L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \varphi > 0$$

Le dipôle RLC à un comportement inductif.

La représentation de Fresnel du circuit RLC :

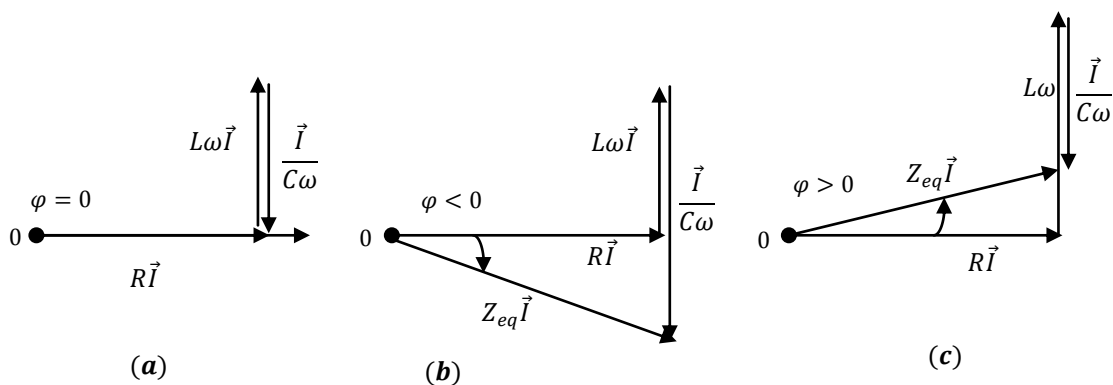


Figure 2.18 : la représentation de Fresnel du circuit RLC dans les trois cas.

2.9. Notions d'énergie et de puissance

L'énergie représente la capacité d'un système physique à produire un travail (application d'une force dans une direction donnée) qui va modifier son

environnement. L'unité d'énergie officielle du système international (SI) est le joule (J), mais des unités comme la calorie dans le domaine diététique (1 cal = 4.19 J), la tonne d'équivalent pétrole (1tep = 4.18 GJ) ou les wattheures pour des quantités plus importantes (1Wh = 3.6 kJ = 859.8 cal) sont également reconnues.

La puissance est une quantité d'énergie par unité de temps, fournie par un système. Elle correspond donc à un débit d'énergie, exprimé en watts ou en joules par seconde.

d) Puissances électrique en régime continu

En régime continu, l'énergie électrique est l'énergie que le champ électrique fournit pour déplacer les charges dans un circuit électriques.

La puissance est le produit de la tension par le courant :

$$P = VI$$

Elle indique la quantité d'énergie utilisée ou transformée chaque seconde.

C'est le cas le plus simple de calcul des puissances électriques puisque le facteur de puissance vaut 1.

Par exemple :

Dans une résistance, toute l'énergie devienne chaleur (effet Joule) $P = RI^2$.

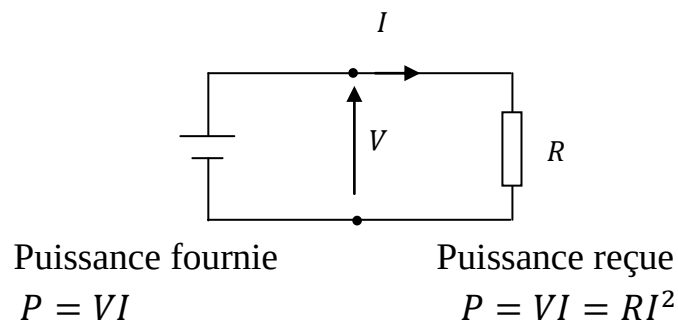


Figure 2.19 : Puissance en régime continu.

- Dans un moteur, l'énergie devienne mouvement.
- Dans une batterie, l'énergie peut être stockée.

b) Puissance électrique en régime alternatif sinusoïdal

Soient les grandeurs tension et courant sinusoïdales suivants :

$$v(t) = V\sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi_i)$$

La puissance instantanée

La puissance électrique instantanée p correspond à la variation d'énergie par unité de temps. Elle est égale au produit de la tension instantanée et du courant instantané.

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = e(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = [V\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_v)] * [I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)]$$

$$p(t) = 2VI \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

En utilisant la relation trigonométrique :

$$2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

On aura :

$$p(t) = VI (\cos(\omega t + \varphi_v - \omega t - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i))$$

$$p(t) = VI (\cos(\varphi_v - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i))$$

$$p(t) = \underbrace{VI \cos \varphi}_{\text{Partie constante}} + \underbrace{VI \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)}_{\text{Partie variable}}$$

La puissance instantanée est la somme d'une puissance transmise à la résistance, appelée puissance active instantanée, et d'une puissance transmise à la réactance, appelée puissance réactive instantanée.

La puissance fluctuante

C'est la partie variable de la puissance instantanée.

$$p_f(t) = VI \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

La puissance active

En intégrant la puissance instantanée on obtient la puissance électrique moyenne P . Elle représente la valeur moyenne de la puissance instantanée. Elle est appelée aussi la puissance utile ou puissance réelle. C'est la puissance qui correspond à un travail physique effectif, son unité est le watt $[W]$.

$$P = \langle p(t) \rangle = VI \cos \varphi$$

La puissance apparente (Puissance de dimensionnement)

Cette grandeur a peu de signification physique. Elle n'exprime en aucune façon la puissance développée par un circuit alternatif. Elle a la même expression que

celle de la puissance développée par un circuit continu, de là le terme de puissance "apparente".

$$S = VI$$

Elle est la grandeur caractéristique de l'isolation et de la section des conducteurs, c-à-d des dimensions des appareillages, son unité est Volt-Ampères [VA].

La puissance réactive

C'est la puissance sans effet physique en termes de travail qui correspond à la partie (réactive) du courant, elle est nécessaire dans de nombreux systèmes, notamment dans tous ceux qui sont équipés d'un bobinage. Parmi eux, on peut noter les moteurs tournants évidemment, mais aussi les appareils de froid, certains composants informatiques, etc.

On pourrait comparer cette situation à celle d'un ressort qui doit être tendu par une force oblique : la composante perpendiculaire au chemin de déplacement $\vec{F}$ ne produit aucun effet, aucun travail. Et pourtant, la force est bien réelle !

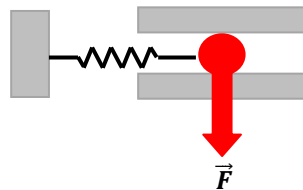


Figure 2.20 : Analogie avec un ressort.

Son unité est le Volt-Ampères Réactif [Var].

$$Q = VI \sin \varphi$$

Facteur de puissance

Sa valeur est comprise entre 0 et 1.

$$F = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Puissance apparente complexe

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{\bar{I}}$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Facteur de tangente (Tangente de l'angle de déphasage)

Il est donné par la formule suivante :

$$f_Q = \frac{|Q_C|}{P} = \frac{Q_L}{P} > 0$$

Ce rapport a une signification importante en analyse des circuits en régime alternatif, notamment dans l'étude de la compensation de la puissance réactive.

Avec :

Q_C : Puissance réactive totale dans les condensateurs.

Q_L : Puissance réactive totale dans les inductances.

P : Puissance active totale dissipée dans les résistances.

Puissances associées aux dipôles passifs

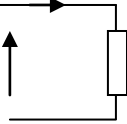
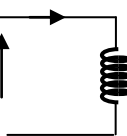
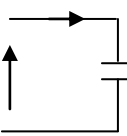
Dipôles	Puissance active P[W]	Puissance réactive Q[Var]	Facteur de puissance F
 Résistance	$P = UI = RI^2$ $= \frac{U^2}{R}$	$Q=0$	$F=1$
 Inductance	0	$Q = L\omega I^2 = \frac{U^2}{L\omega}$	$F=0$
 Condensateur	0	$Q = -\frac{I^2}{C\omega}$ $= -C\omega U^2$	$F=0$

Tableau 2.4 : Récapitulatif de puissances associées aux dipôles passifs.

Exemple :

Soit un système triphasé de puissance active $P = 100 \text{ kW}$, de facteur de puissance $\cos \varphi_1 = 0.8$ inductif, de tension triphasé $U = 400 \text{ V}$ et de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

- Déterminer la valeur de C pour que le facteur de puissance $\cos \varphi_2 = 0.95$.

1- On détermine d'abord la puissance réactive initiale Q_1 :

On utilise la relation :

$$\tan(\varphi_1) = \sqrt{\frac{1}{(\cos \varphi_1)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(0.8)^2} - 1} = \sqrt{1.5625 - 1} = \sqrt{0.5625}$$

$$\tan(\varphi_1) = 0.75$$

On a :

$$\tan(\varphi_1) = \frac{Q_L}{P}$$

D'où :

$$Q_L = 100000 * 0.75 = 75000 \text{ Var}$$

$$Q_L = 75 \text{ kVar}$$

Donc :

$$\tan(\varphi_2) = \sqrt{\frac{1}{(\cos \varphi_2)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(0.95)^2} - 1} = \sqrt{1.108 - 1} = \sqrt{0.108}$$

$$\tan(\varphi_2) = 0.328$$

On a :

$$\tan(\varphi_2) = \frac{Q_2}{P}$$

$$Q_2 = 100000 * 0.328 = 32800 \text{ Var}$$

$$Q_2 = 32.8 \text{ kVar}$$

La puissance réactive nécessaire à ajouter pour atteindre un facteur de puissance de 0.95 :

$$Q_C = Q_L - Q_2 = 75 - 32.8$$

$$Q_C = 42.2 \text{ kVar}$$

$$Q_C = 3U^2 2\pi f C$$

Alors :

$$C = \frac{Q_C}{3U^2 2\pi f} = \frac{42.2}{3 \cdot (400)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}$$

$$C = 0.00028 F = 280 \mu F$$

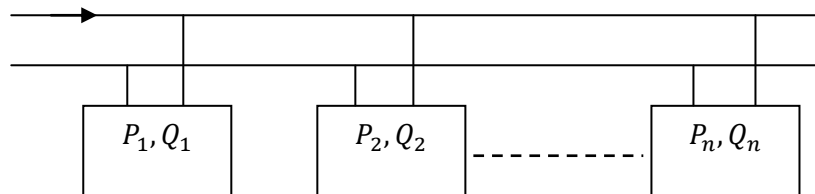
Alors :

Pour relever le facteur de puissance de 0.8 à 0.95 , li faut installer en triangle trois condensateurs $280 \mu F$ chacun.

Théorème de Boucherot et triangle des puissances

La puissance active d'un système est la somme des puissances actives des éléments le constituant, de même pour la puissance réactive et la puissance apparente complexe. En revanche c'est faux en ce qui concerne la puissance apparente.

Le théorème de Boucherot, s'applique à tout type de groupements, série ou parallèle.



$$S = VI$$

$$P_{tot} = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i$$

Figure 2.21 : Théorème de Boucherot

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$\underline{S}_{tot} \neq \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \dots + \underline{S}_n$$

$$S_{tot} \neq S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

$$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}$$

Représentation de la conservation des puissances sous la forme de triangle des puissances

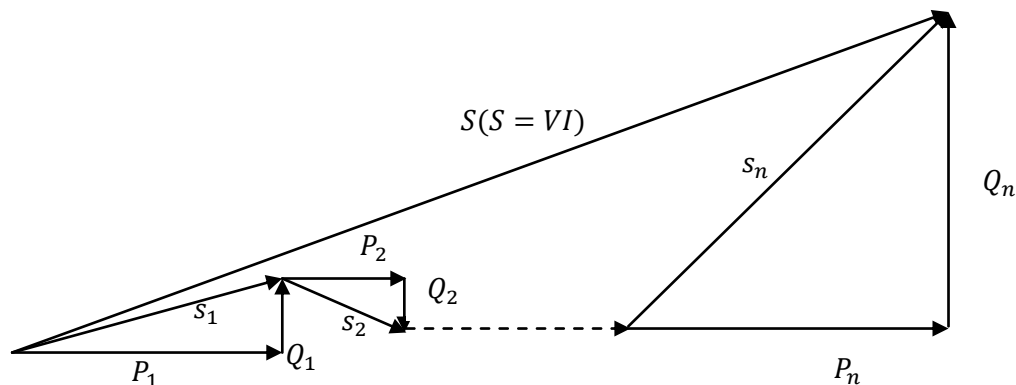


Figure 2.22 : Triangle des puissances.

2.10. Régime transitoire

Un système est en régime transitoire tant que la réponse permanente n'est pas atteinte. Généralement, le régime transitoire correspond au passage d'un régime permanent à un autre régime permanent due à l'ouverture et à la fermeture d'un interrupteur.

Rappels sur la résolution des équations différentielles

L'écriture des lois de Kirchhoff dans un circuit en régime transitoire génère des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

- 1) $\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \Rightarrow x(t) = K e^{-\alpha t} \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\alpha}$
- 2) $\frac{dx}{dt} + \alpha x = A \Rightarrow x(t) = \frac{A}{\alpha} + K e^{-\alpha t}$
- 3) $\frac{dx}{dt} + \alpha x = At \Rightarrow x(t) = \frac{A}{\alpha} \left(t - \frac{1}{\alpha} \right) + K e^{-\alpha t}$
- 4) $\frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = K \Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Avec : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$x_1(t)$: La solution générale SG (solution de l'équation différentielle sans second membre, correspond au régime transitoire (régime libre ou régime propre)).

$x_2(t)$: La solution particulière SP (solution de l'équation différentielle avec second membre, correspond au régime forcé).

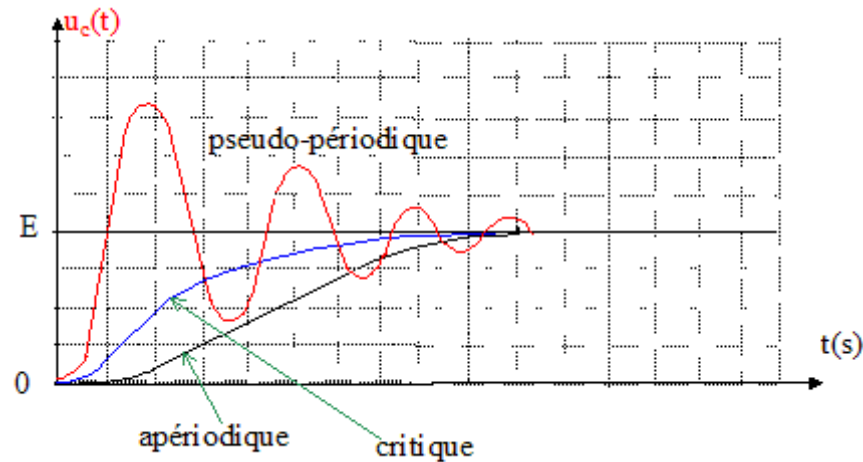


Figure 2.23 : Représentation graphiques des trois régimes transitoires.

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$$

1^{ier} cas :

$\Delta' > 0 \Rightarrow$ Racines réelles

$$r_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$x_1(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

$x(t)$ Subit un régime amorti (apériodique).

2^{ième} cas :

$\Delta' = 0 \Rightarrow$ Racine double réelle.

$$x_1(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t \cdot e^{-\alpha t}$$

$x(t)$ subit un régime oscillatoire .

3^{ième} cas :

$\Delta' < 0 \Rightarrow$ Racine complexes conjuguées.

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \left(K_1 \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t \right) + K_2 \cdot \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t \right) \right)$$

$$x_1(t) = K e^{-\alpha t} \cos \left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \right) t + \varphi \right)$$

$x(t)$ subit un régime pseudo – périodique (oscillatoire amorti) .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Circuit RL

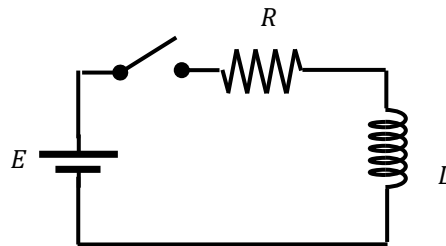


Figure 2.24 : Circuit RL série.

Circuit fermé (charge d'une bobine) :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad ; \quad \text{EDASM}$$

EDASM : Équation différentielle avec second membre.

La solution de cette équation est : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Solution générale :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \Rightarrow i_1(t) = A e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow i_1(t) = A e^{-\frac{R}{L}t}$$

Solution particulière :

$$i(t) = cst \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow i_2(t) = \frac{E}{R}$$

D'où :

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

A $t = 0$:

$$i(0) = A + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

Alors :

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}); \quad \tau = \frac{L}{R}$$

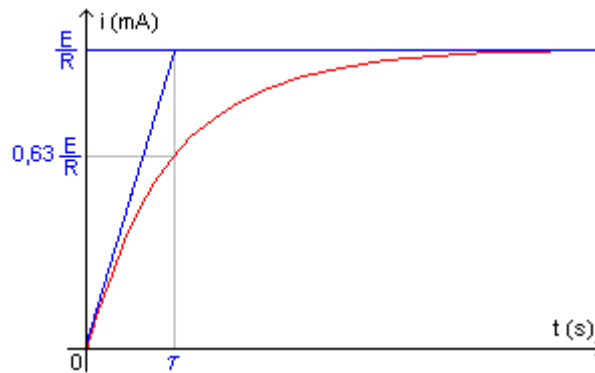


Figure 2.25 : L'allure du courant lors de charge d'une bobine.

Circuit ouvert (décharge de la bobine) :

$$\begin{aligned}
 u_R + u_L &= 0 \\
 Ri = -L \frac{di}{dt} &\Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \\
 &\Rightarrow i(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} \\
 &\Rightarrow i(t) = A e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad ; A = cst
 \end{aligned}$$

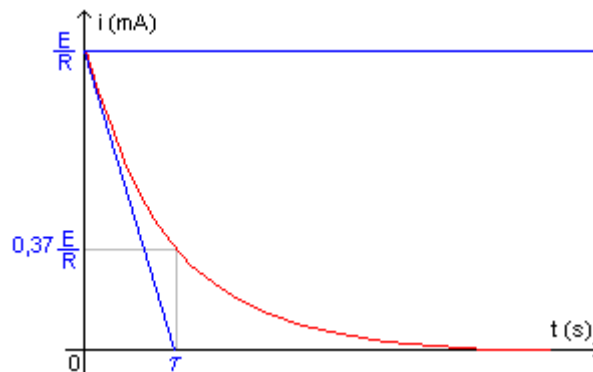


Figure 2.26 : L'allure du courant lors de décharge d'une bobine.

Circuit RC

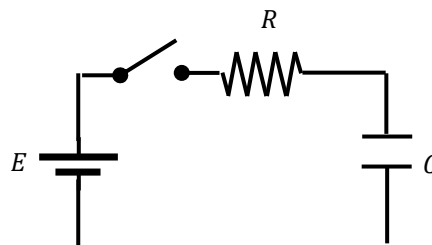


Figure 2.27 : Circuit RC série.

Circuit fermé (charge d'un condensateur) :

$$C = \frac{Q}{u_C}$$

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = C \cdot u_C \Rightarrow i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$E = u_R + u_C$$

$$E = Ri + u_C \Rightarrow E = R \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C$$

$$\Rightarrow E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$\Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

$\tau = RC$ est la constante du temps

La solution de cette équation s'écrit :

$$u_C(t) = A e^{-\frac{1}{\tau}t} + E$$

à $t=0$: le condensateur n'est pas chargé on vient de le brancher, il n'a pas eu le temps.

$$u_C(0) = 0 \Rightarrow u_C(0) = A e^{-\frac{0}{\tau}} + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

Alors :
$$u_C(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Circuit ouvert (décharge du condensateur) :

à $t=0$: le condensateur est initialement chargé.

$$u_C(0) = E$$

$$u_R + u_C = 0 ; \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$Ri + u_C = 0$$

$$R \left(C \frac{du_C}{dt} \right) - u_C = 0 \Rightarrow \tau \cdot \frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

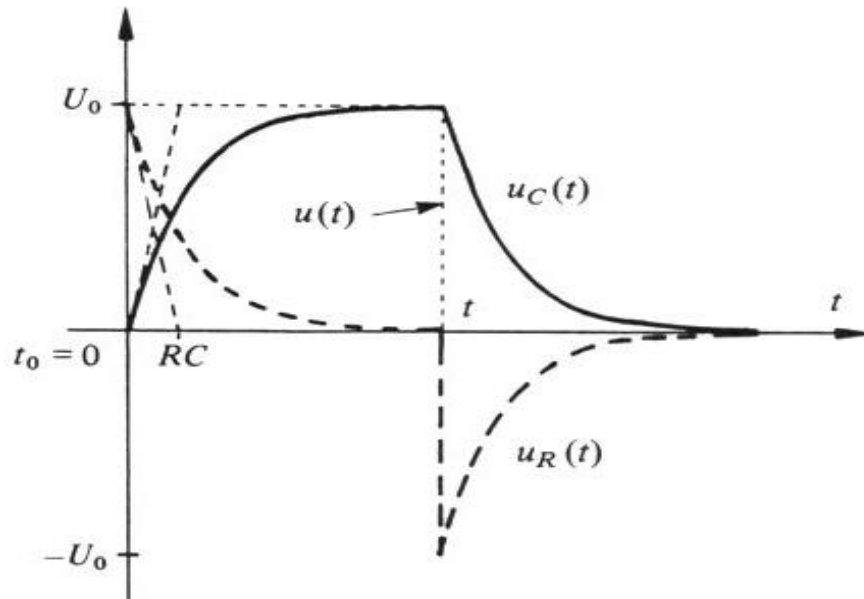


Figure 2.28 : L'allure du courant lors de charge et décharge d'un condensateur.

Circuit RLC

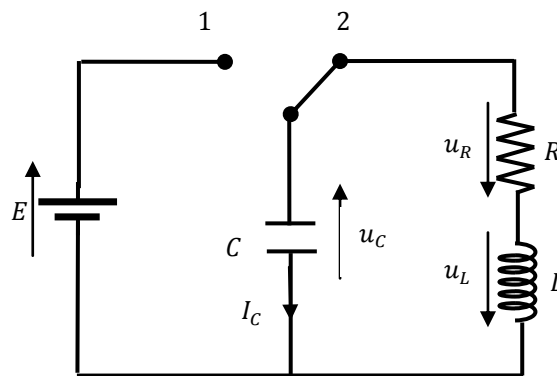


Figure 2.29 : Circuit RLC.

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{du_C^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{du_C^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

On pose :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\frac{du_C^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

T_0 : pseudo – période ;

f_0 : La fréquence propre;

ω_0 : La pulsation propre.

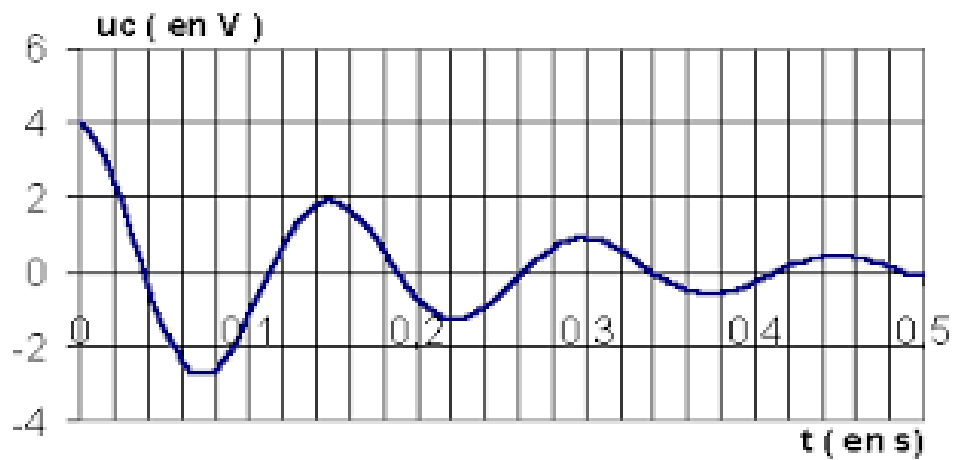


Figure 2.30 : L'allure de la tension aux bornes du condensateur.

2.11. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 02

Exercice 2.1

Trois résistances R_1 , R_2 , R_3 en série, sont soumises à une tension constante U . La tension U_1 , aux bornes de R_1 est de 20 V , La puissance dissipée dans R_2 est $P_2 = 25\text{ W}$ et $R_3 = 2\Omega$.

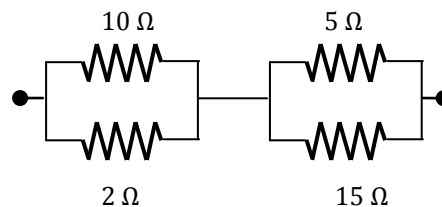
Déterminer la tension appliquée U , si le courant I est de 5 A ? Représenter le circuit ?

Solution de l'exercice 2.1

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = 20 + \frac{P_2}{I} + R_3 I = 35\text{ V}$$

Exercice 2.2

- Déterminer la résistance équivalente R_{eq} pour le circuit représenté sur la figure suivante.



- On applique une tension constante $U = 100\text{ V}$ aux bornes du circuit. Quelle est la résistance qui dissipe le plus de puissance?

Solution de l'exercice 2.2

- La résistance équivalente R_{eq} :

$$R_{eq} = R_{eq_1} + R_{eq_2} = (10//5) + (5//15) = \frac{10 \times 5}{10 + 5} + \frac{5 \times 15}{5 + 15} = 5,41\Omega$$

- La résistance qui dissipe plus de puissance :

$$U = 100\text{ V} \Rightarrow R_{eq} = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{R_{eq}} \Rightarrow I = \frac{100}{5,41} = 18,48\text{ A}$$

$$P_1 = \frac{(R_{eq_1} \cdot I)^2}{R_1} = \frac{(1,66 \cdot 18,48)^2}{10} = 94,51\text{ W}$$

$$P_2 = \frac{(R_{eq_1} \cdot I)^2}{R_2} = \frac{(1,66 \cdot 18,48)^2}{2} = 472,57\text{ W}$$

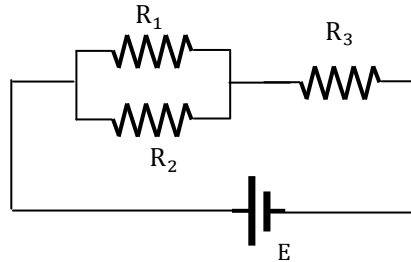
$$P_1 = \frac{(R_{eq_2} \cdot I)^2}{R_3} = \frac{(3,75 \cdot 18,48)^2}{10} = 964,66\text{ W}$$

$$P_1 = \frac{(R_{eq2} \cdot I)^2}{R_4} = \frac{(3,75 \cdot 18,48)^2}{10} = 321,55 \text{ W}$$

Donc : la résistance qui dissipe le plus de puissance est la résistance $R_3 = 2 \Omega$

Exercice 2.3

Les résistances R_1 , R_2 , R_3 sont branchées comme indiqué sur la figure suivante :



Sachant que: $R_1 = 9\Omega$, $E = 120 \text{ V}$ et $r = 4 \Omega$, déterminer les résistances $R_2 = R_3$ pour lesquelles le courant I a la valeur maximale?

Solution de l'exercice 2.3

Détermination des résistances $R_2 = R_3$ pour lesquelles le courant I a la valeur maximale :

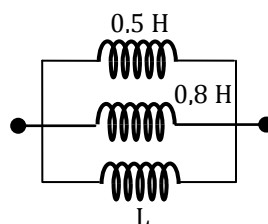
$$E = rI + R_3I + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I \Rightarrow I = \frac{E}{r + R_3 + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}$$

$$I \text{ est max quand } R_2 = R_3 = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{r} \Rightarrow I = \frac{120}{4} \Rightarrow I = 30 \text{ A}$$

Exercice 2.4

Les auto-inductances du montage de la figure 03 ont une inductance équivalente $L_{eq} = 0.0755 \text{ H}$.

1. Déterminer la valeur de l'auto-inductance inconnue L ?
2. Existe-t-il une valeur de L , tel que $L_{eq} = 0,5 \text{ H}$?
3. Quelle est la valeur maximale de L_{eq} , si L peut prendre n'importe quelle valeur ?



Solution de l'exercice 2.4

1. Détermination de L :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,8} + \frac{1}{L} \Rightarrow L = 0,1001 H$$

2. Il n'existe pas de valeur pour que $L_{eq} = 0,5H$

3. La valeur maximale de L_{eq} :

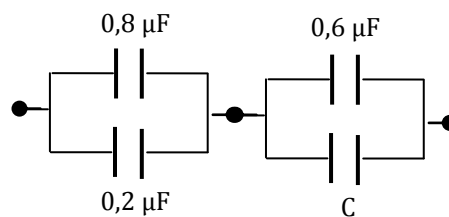
$$\frac{1}{L_{eq_{max}}} = \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,8} + \cancel{\left(\frac{1}{L}\right)}^0$$

Alors :

$$L_{eq_{max}} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,8 + 0,5} = 0,308 H$$

Exercice 2.5

Quelle doit être la capacité C pour que le circuit de la figure suivante ait une capacité équivalente $C_{eq} = 0,5 \mu F$?

**Solution de l'exercice 2.5**

$$C_{eq} = (0,8 + 0,2) // (0,6 + C)$$

$$0,5 = \frac{(0,8 + 0,2)(0,6 + C)}{(0,8 + 0,2) + (0,6 + C)} = \frac{(0,6 + C)}{1,6 + C} \Rightarrow C = 0,4 \mu F$$

Exercice 2.6

Les armatures d'un condensateur plan à lame d'air sont constituées de deux plaques rectangulaires de longueur $15cm$ et de largeur $10cm$, distantes de $2cm$.

1. Calculer la capacité de ce condensateur
2. Le condensateur est chargé sous une tension de $20KV$ puis isolé. Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur.

Solution de l'exercice 2.6

1. Calcul de C :

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot 10 \cdot 10^9}$$

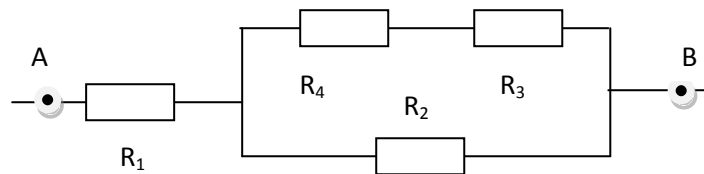
$$C = \frac{1}{36 \cdot 10 \cdot 10^9} \times \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 6,63 \cdot 10^{-12} F = 6,63 \text{ pF}$$

2. L'énergie stockée par le condensateur :

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} (6,63 \cdot 10^{-12}) (20 \cdot 10^3)^2 = 1,326 \cdot 10^{-3} \text{ Joule} = 1,326 \text{ mJ}$$

Exercice 2.7

Calculer la résistance de dipôle (A, B) ci-dessus : Avec : $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 9 \Omega$.



Solution de l'exercice 2.7

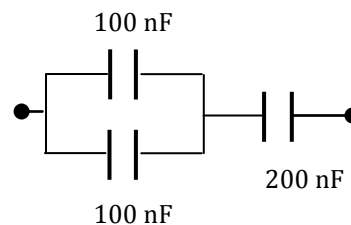
$$R_{AB} = R_1 + ((R_4 + R_3) // R_2)$$

$$R_{AB} = R_1 + \frac{(R_4 + R_3) \times R_2}{(R_4 + R_3) + R_2}$$

$$R_{AB} = 10 + \frac{(9 + 6) \times 20}{(9 + 6) + 20} = 18,57 \Omega$$

Exercice 2.8

Calculer la capacité équivalente du dipôle ci-contre.



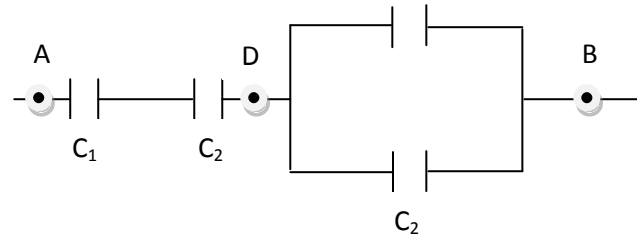
Solution de l'exercice 2.8

$$C_{eq} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{(100 + 100) \cdot 200}{100 + 100 + 200} \Rightarrow C_{eq} = 100 \text{ nF}$$

Exercice 2.9

Soit le groupement de condensateurs suivant :

1. La capacité C_1 étant donnée, quelle doit être la capacité C_2 pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente C_{eq} ? Telle que : $C_{eq} = \frac{C_2}{2}$ et $C_1 = 8 \mu F$.



Une tension $U = 500 V$ est appliquée entre les points A et B.

2. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.

Solution de l'exercice 2.9

$$C_{AD} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{et} \quad C_{DB} = C_1 + C_2$$

Alors :

$$C_{AB} = \frac{\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \times (C_1 + C_2)}{\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) + (C_1 + C_2)}$$

$$C_2^2 + C_1 C_2 - C_1^2 = 0$$

$$\Delta = 5C_1^2 \Rightarrow \begin{cases} C_2' = \frac{-C_1 - \sqrt{5}C_1}{2} \Rightarrow \text{éliminée} \\ C_2'' = \frac{-C_1 + \sqrt{5}C_1}{2} = 4,944 \mu F \end{cases}$$

On a :

$$U = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = U_{C_1} + U_{C_2} + U_{C_1} = 3U_{C_1}$$

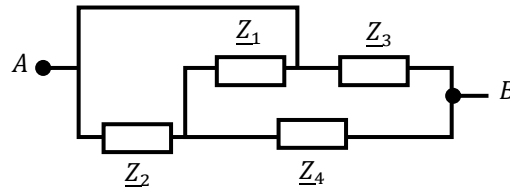
$$U_{C_1} = U_{C_2} = \frac{U_{AB}}{3} = 166.67 V$$

$$U_{C_1} = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow q_1 = 1.333 \times 10^{-3} C$$

$$U_{C_2} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q_2 = 0.824 \times 10^{-3} C$$

Exercice 2.10

Soit le dipôle linéaire ci-contre en régime alternatif sinusoïdal de fréquence « f ». A la fréquence « f » considérée, les impédances des différents éléments qui le constituent ont les valeurs complexes suivantes :



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 30e^{j0} ; \underline{Z}_3 = 10e^{-j0,8} ; \underline{Z}_4 = 3000e^{j1,2}$$

1. Donner l'expression littérale de l'impédance équivalente de ce dipôle en fonction de $\underline{Z}_1$; $\underline{Z}_2$; $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_4$.
2. Calculer le module et l'argument de l'impédance équivalente.

Solution de l'exercice 2.10

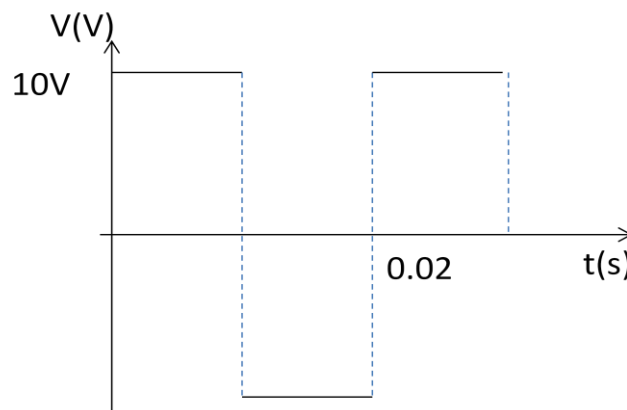
$$\underline{Z}_{eq} = ?$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\left(\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_4 \right) \underline{Z}_3}{\left(\frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_4 \right) + \underline{Z}_3} = \left(\left((\underline{Z}_1^{-1} + \underline{Z}_2^{-1})^{-1} + \underline{Z}_4 \right)^{-1} + \underline{Z}_3^{-1} \right)^{-1}$$

$$\underline{Z}_{eq} = 9,86 - j0.138 = 9,86 \cdot e^{-j0,8}$$

Exercice 2.11

Soit le signal suivant :



1. Donner l'expression de signal.
2. Calculer la valeur moyenne.
3. Calculer la valeur efficace.

Solution de l'exercice 2.11

1. L'expression de $v(t)$:

$$v(t) = \begin{cases} 0 \leq t < \frac{T}{2} & ; \quad 10V \\ \frac{T}{2} \leq t < T & ; \quad -10V \end{cases}$$

2. La valeur moyenne :

$$V_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} 10 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -10 dt \right] = \frac{1}{T} \left(10 \frac{T}{2} - 10 \frac{T}{2} \right)$$

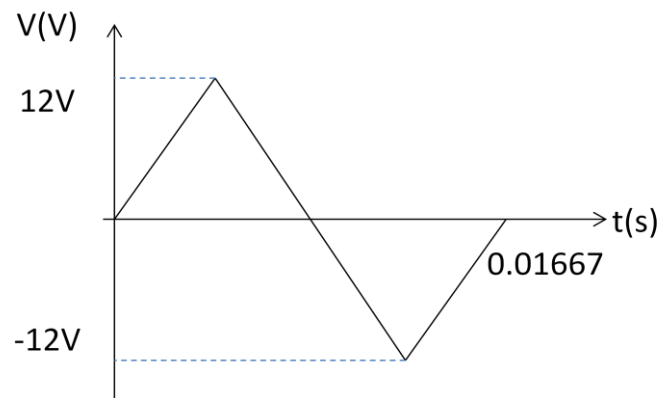
$$V_{moy} = 0$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v(t))^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 10^2 dt = \frac{2}{T} 10^2 t \Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$V_{eff} = 10V$$

Exercice 2.12

Pour la tension $v(t)$ de la figure suivante :



1. Déterminer la valeur crête à crête.
2. Déterminer la fréquence.
3. Déterminer l'amplitude.
4. Quelle est la nature de $v(t)$.
5. Donner l'expression temporelle de $v(t)$.

Solution de l'exercice 2.12

1. La valeur crête à crête de $v(t)$ est :

$$V_{max} - (-V_{min}) = 24V$$

2. La fréquence de $v(t)$ est : $f = \frac{1}{T} = 0,01667 = 60\text{HZ}$

3. L'amplitude de $v(t)$ est $V = 12V$

4. $v(t)$ est une grandeur (tension) période alternative est triangulaire.

5. L'expression de $v(t)$, il suffit de définir $v(t)$ sur une période :

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} & ; \quad \alpha t + \beta \\ \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} & ; \quad \gamma t + \sigma \end{cases}$$

$-\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \Rightarrow$ Le graphe $v(t)$ est une droite qui passe par l'origine.

$$\Rightarrow \beta = 0 \text{ (à } t = 0, v(t) = 0, \beta = 0)$$

La pente est $\tan \theta = \alpha = \frac{12-0}{\left(\frac{0.01667}{4}\right)-0} = 2880$

$\frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \Rightarrow$ Le graphe $v(t)$ est une droite qui ne passe pas par l'origine.

$$\text{à: } t = \frac{T}{4}: v\left(\frac{T}{4}\right) = 12V \Rightarrow \gamma\left(\frac{T}{4}\right) + \sigma = 12$$

$$\text{à: } t = \frac{3T}{4}, v\left(\frac{3T}{4}\right) = -12V \Rightarrow \gamma\left(\frac{3T}{4}\right) + \sigma = -12$$

$$\gamma = -2880 \Rightarrow \sigma = 24$$

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} & ; \quad 2880t \\ \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} & ; \quad -2880t + 24 \end{cases}$$

Exercice 2.13

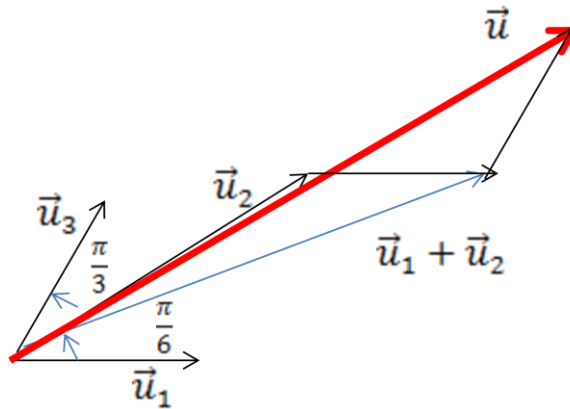
Soit trois récepteurs en série, la tension aux bornes de chacun est :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 40\sqrt{2} \sin(300t) \\ u_2(t) &= 95\sqrt{2} \sin\left(300t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_3(t) &= 40 \sin\left(300t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

1. Déterminer vectoriellement la tension équivalente $u(t)$ de ces trois récepteurs.
2. Donner l'expression temporelle de $u(t)$.

Solution de l'exercice 2.13

1. Détermination du vecteur de la tension totale $u(t)$:



$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{40}{\sqrt{2}} + \frac{95}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{40}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 100,86$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{95}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{40}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 58,19$$

Alors :

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(100,86)^2 + (58,19)^2} = 116,44 \text{ V}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{58,19}{100,86}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

D'où :

$$\vec{u} = 116,44 \text{ V} \left| \frac{\pi}{6} \text{ rad} \right.$$

2. L'expression temporelle est:

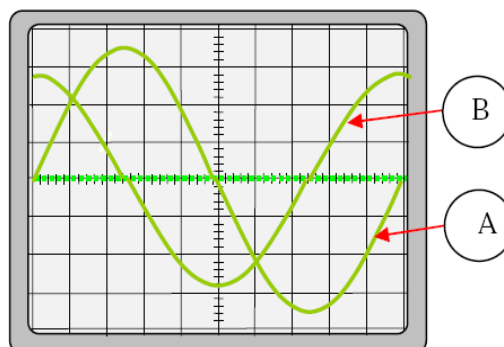
$$u(t) = 116,44\sqrt{2} \sin(300t + 0,52)$$

Exercice 2.14

On a relevé sur un oscilloscope les signaux ci-dessous :

Mesure sur la voie A de la tension : calibre 1 V/div avec une sonde atténuatrice de tension 1/20.

Mesure sur la voie B du courant : calibre 100mV/div avec une sonde de courant 100mV/A. Base de temps : 2ms/div.



1. Déterminer les valeurs efficaces de V et de I.
2. Déterminer la période et le déphasage entre I et V. En déduire la nature du récepteur.
3. En déduire l'impédance et la réactance du récepteur.
4. Calculer sa capacité ou son inductance suivant le cas.

Solution de l'exercice 2.14

Voie1 : 1V/Div avec atténuation de 1/20.

Voie1 : 100mV/Div 100mV/A.

Base du temps : 2ms/Div.

1. Valeur efficace de la tension et du courant :

Voie 1 :

$$V_{max} = 3,5.1V.20 = 70V \Rightarrow V_{eff} = \frac{70}{\sqrt{2}} \approx 50V$$

Voie 2 :

$$I_{max} = 2,8.100 = 280mA \Rightarrow I_{eff} = \frac{280.10^{-3}}{\sqrt{2}} \approx 2A$$

2. La période :

$$T = 10.2ms = 20ms$$

Le déphasage entre I et V :

$$\varphi = 2,5.2 = 5ms = \frac{5.360}{20} = 90^\circ$$

Le courant est en avance sur la tension. Alors, le récepteur est un condensateur.

3. L'impédance :

$$|Z| = Z = \frac{V}{I} = \frac{50}{2} = 25\Omega$$

La réactance :

$$Z_C = X_C = 25\Omega$$

4. La capacité :

$$X_C = 25\Omega = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C 2\pi f} = \frac{1}{25.2\pi \frac{1}{T}} = 127,38\mu F$$

Exercice 2.15

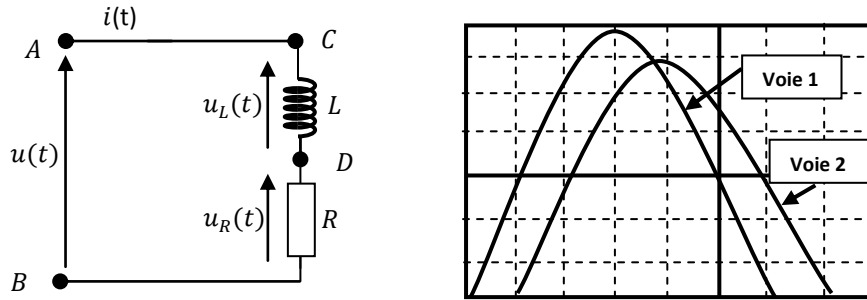
On considère le circuit suivant : On donne : $R = 200\Omega$.

Le relevé des oscillogrammes a donné les résultats suivants :

Calibre voie 1 : 2V=div.

Calibre voie 2 : 2V=div

Base de temps : 0,25ms=div.



1. Déterminer :
 - a) La période de $u(t)$. En déduire sa fréquence ainsi que sa pulsation.
 - b) Les valeurs crêtes et efficaces des tensions $u(t)$ et $u_R(t)$.
 - c) La valeur efficace I de l'intensité du courant $i(t)$.
 - d) Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$.
2. Tracer le diagramme de Fresnel relatif au circuit donné. En déduire U_L , la valeur efficace de $u_L(t)$.
3. Déterminer l'impédance Z du circuit. En déduire la valeur de L .

Solution de l'exercice 2.15

1. Détermination de :

- a) La période :

$$T = 8,0,25 = 2 \text{ ms} \quad \text{D'où : la fréquence } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ Hz}$$

- b) Les tensions efficaces de $u(t)$ et $u_R(t)$:

$$U_{max} = 4,2 = 8V \Rightarrow U_{eff} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5,6V$$

$$U_{Rmax} = 2,8,2 = 5,6V \Rightarrow U_{Reff} = \frac{5,6}{\sqrt{2}} \approx 4V$$

- c) Le courant efficace:

$$R = \frac{U_{Reff}}{I} \Rightarrow I = \frac{U_{Reff}}{R} = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ A}$$

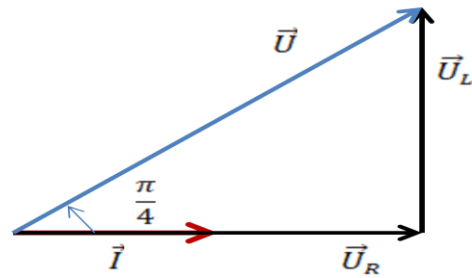
- d) Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$:

$$\varphi^\circ = \frac{t \cdot 360^\circ}{T} = \frac{t \cdot 2\pi}{T} \text{ (rad)}$$

$$\varphi^\circ = \frac{(1,0,25) \cdot 360}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

2. Diagramme de Fresnel :

$$U^2 = U_L^2 + U_R^2 \Rightarrow U_L = \sqrt{U^2 - U_R^2} = \sqrt{(5,6)^2 - (4)^2} \approx 4 \text{ V}$$



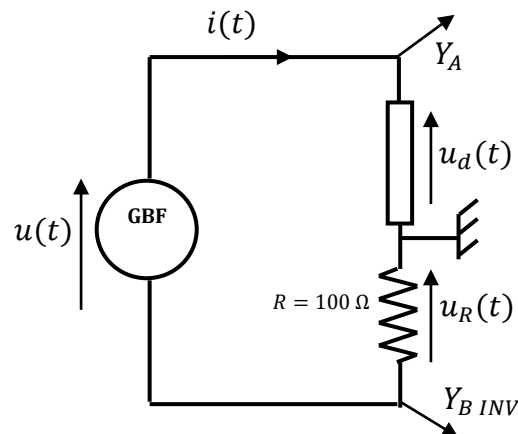
3. L'impédance du circuit :

$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{5,6}{0,02} = 280 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} \Rightarrow L = 0,062 H$$

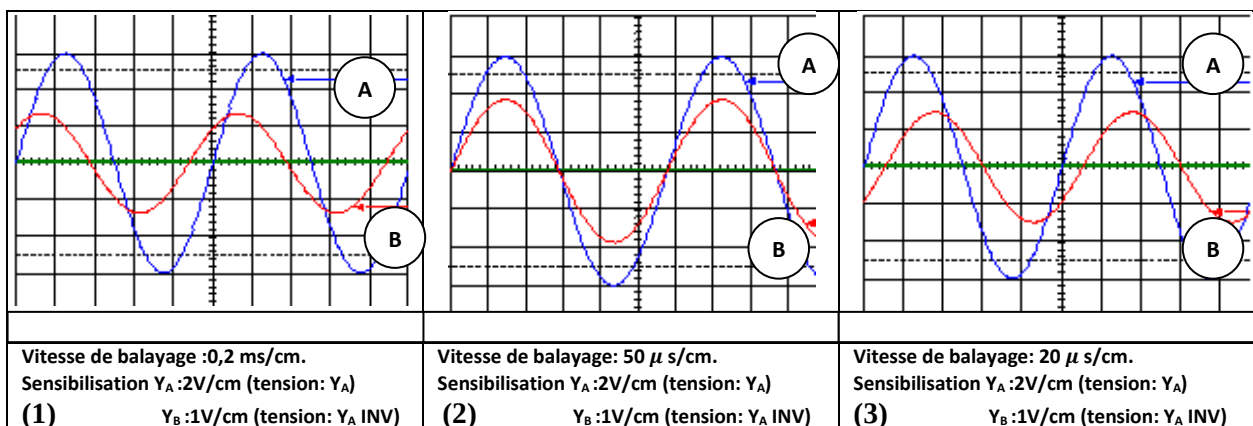
2.7.6.3. Exercice 2.16

Considérons les oscillogrammes au-dessous.



Déterminer:

1. La fréquence des signaux visualisés.
2. La valeur efficace de la tension u_d et du courant i .
3. Le déphasage créé par le dipôle DI.
4. La nature du dipôle d .
5. L'impédance du dipôle d .



Solution de l'exercice 2.16

1. La fréquence des signaux : $f = \frac{1}{T}$

$$T_1 = 5,0,2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow f_1 = 1\,000 \text{ Hz}$$

$$T_2 = 5,850 \cdot 10^{-6} \Rightarrow f_2 \approx 3\,448 \text{ Hz}$$

$$T_3 = 5,20 \cdot 10^{-6} \Rightarrow f_3 = 10\,000 \text{ Hz}$$

2. La valeur efficace de U_{D1} et de i :

$$u_{D1max} = 3,2 = 6 \text{ V} \Rightarrow U_{D1} = \frac{U_{D1max}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24 \text{ V}$$

$$U_{D2} = 4,24 \text{ V}$$

$$U_{D3} = 4,24 \text{ V}$$

$$i_{D1max} = \frac{U_{1Rmax}}{R} = \frac{1,2,1}{100} = 0,012 \text{ A} \Rightarrow I_{D1} = \frac{i_{D1max}}{\sqrt{2}} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$i_{D2max} = \frac{U_{2Rmax}}{R} = \frac{1,8,1}{100} = 0,018 \text{ A} \Rightarrow I_{D2} = \frac{i_{D2max}}{\sqrt{2}} = 12,73 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$i_{D3max} = \frac{U_{3Rmax}}{R} = \frac{1,5,1}{100} = 0,015 \text{ A} \Rightarrow I_{D3} = \frac{i_{D3max}}{\sqrt{2}} = 10,6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

3. Le déphasage et la nature du dipôle :

$$T \rightarrow 2\pi$$

$$\Delta T \rightarrow \varphi \quad d'où: \varphi = \frac{\Delta T \cdot 2\pi}{T}$$

$$\varphi_1 = \frac{-0,5,0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 360}{5,0,2 \cdot 10^{-3}} = -36^\circ \Rightarrow \text{dipôle capacitif}$$

$$\varphi_2 = 0^\circ \Rightarrow \text{dipôle résistif}$$

$$\varphi_3 = \frac{0,5,20 \cdot 10^{-6} \cdot 360}{5,20 \cdot 10^{-6}} = 36^\circ \Rightarrow \text{dipôle inductif}$$

4. L'impédance :

$$Z_1 = \frac{U_{D1}}{I_{D1}} = \frac{4,24}{8,5 \cdot 10^{-3}} = 498,8 \, \Omega$$

$$Z_2 = \frac{U_{D2}}{I_{D2}} = \frac{4,24}{12,73 \cdot 10^{-3}} = 333,07 \, \Omega$$

$$Z_3 = \frac{U_{D3}}{I_{D3}} = \frac{4,24}{10,6 \cdot 10^{-3}} = 400 \, \Omega$$

Exercice 2.17

Sur un tore ferromagnétique de perméabilité relative constante $\mu_r = 1200$ de longueur moyenne 120 cm , de section carrée de $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$, on dispose un enroulement comporte 250 spires parcourues par un courant de 50 A . Calculer :

1. L'inductance de la bobine ;
2. L'énergie stockée dans la bobine.

Solution de l'exercice 2.17

1. Calcule de l'inductance :

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot s}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1200 \cdot (250)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2})}{120 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 31,4 \cdot 10^{-3} H = 31,4 \text{ mH}$$

2. L'énergie emmagasinée dans la bobine :

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 31,4 \cdot 10^{-3} \cdot (50)^2 = 39,25 \text{ Joule}$$

Exercice 2.18

Une bobine d'inductance L est traversée par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Soit $u(t)$ la tension aux bornes de L .

1. Donner l'expression de $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi + \varphi')$.
2. Quelles relations lient les amplitudes et les phases de $u(t)$ et $i(t)$?
3. Représenter les vecteurs de Fresnel associés à $u(t)$ et $i(t)$ dans le repère orthonormé (xoy) .

Solution de l'exercice 2.18

1. L'expression de $u(t)$:

$$\underline{U}_L = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{U}_L = L \frac{d}{dt} (I_{max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}) = jL \cdot I_{max} \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Alors :

$$\underline{U}_L = L \cdot I_{max} \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = I_{max} \cdot L \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

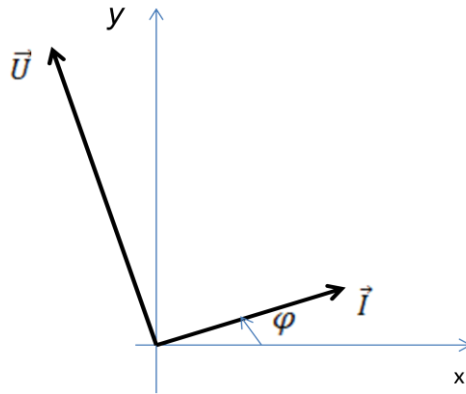
$$u(t) = I_{max} \cdot L \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. La relation entre les amplitudes et les phases $u(t)$ et $i(t)$:

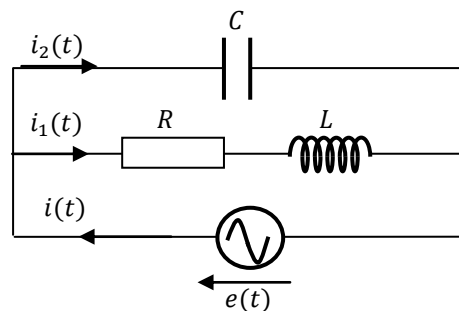
$$\underline{Z}_L = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{I_{max} \cdot L \cdot \omega}{I_{max}} = L \cdot \omega$$

Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ égale à $\frac{\pi}{2}$.

3. La représentation de Fresnel :

**Exercice 2.19**

Le circuit suivant est alimenté par un générateur de tension $e(t) = E \cos(\omega t)$, avec : $f = 50\text{Hz}$ et $E = 311\text{V}$. On a : $R = 600\Omega$, $L = 0,3\text{H}$, et $C = 5\mu\text{F}$.



1. Exprimer les amplitudes complexes I_1 et I_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. Représenter dans le plan complexe les amplitudes I_1 et I_2 . En déduire l'amplitude I de l'intensité $i(t)$ et le déphasage φ de l'intensité i par rapport à la tension e (graphiquement). Vérifier par le calcul complexe.

Solution de l'exercice 2.19

1. Les amplitudes complexes I_1 et I_2 :

$$\underline{e} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_C}$$

Avec :

$\underline{e} = E \cdot e^{j\omega t}$ (Dans un circuit électrique toutes les grandeurs tournent avec la même pulsation) $\Rightarrow \underline{e} = E = 311\text{V}$

$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{C\omega}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_C} = \frac{E}{j \frac{1}{C\omega}} = j311 \cdot C\omega = j311(5 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |I_2| = \frac{|e|}{|Z_c|} = \frac{E}{\frac{1}{C\omega}} = E.C.\omega = 311.5.10^{-6}.2\pi.50 = 0,488 \text{ A} \\ \arg(I_2) = \arg(e) - \arg(Z_c) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{e}{\underline{Z}_1} \rightarrow (*)$$

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_1| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \\ \arg(\underline{Z}_1) = \arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \arctg\left(\frac{0,3.2.\pi.50}{600}\right) = 9^\circ \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} |I_1| = \frac{311}{\sqrt{(600)^2 + (0,3.2\pi.50)^2}} = 0,512 \text{ A} \\ \arg(I_1) = \arg(e) - \arg(\underline{Z}_1) = -9^\circ \end{cases}$$

Par la méthode analytique :

$$\|\vec{I}\| = \|\vec{OA} + \vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 + 2\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos(81^\circ) = 0,760 \text{ A}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \arctg\left(\frac{BC}{OC}\right)$$

$$\cos(9^\circ) = \frac{OC}{|I_1|} \Rightarrow OC = |I_1| \cdot \cos(9^\circ) = 0,505$$

$$\begin{aligned} (OB)^2 &= (BC)^2 + (OC)^2 \Rightarrow BC = \sqrt{(OB)^2 - (OC)^2} \\ &= \sqrt{\|\vec{I}\|^2 - (|I_1| \cdot \cos(-9^\circ))^2} = \sqrt{0,760^2 - (0,512 \cdot \cos(-9^\circ))^2} \\ &= \sqrt{0,322} = 0,567 \end{aligned}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{0,567}{0,505}\right) = 48,31^\circ$$

Par calcul :

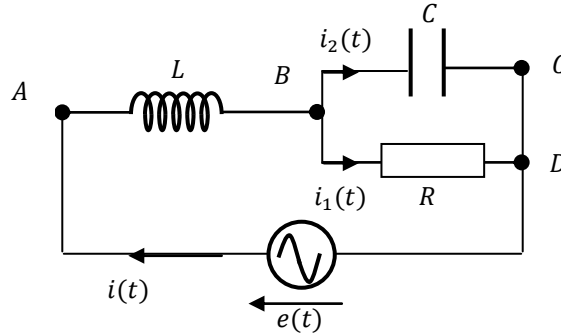
$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0,512.e^{-j9} + 0,488.e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= 0,512\left(\cos(9^\circ) - j\sin(9^\circ) + 0,488\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\ &= 0,512(0,987 - j0,156) + 0,488(-j) = 0,505 - j0,568 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |I| = \sqrt{0,505^2 + 0,568^2} = 0,760 \text{ A} \\ \arg(I) = \theta = \arctg\left(\frac{-0,568}{0,505}\right) = \arctg(-1,125) = 48,36^\circ \end{cases}$$

Exercice 2.20

On alimente un dipôle AD par une source de tension sinusoïdale d'amplitude E et de pulsation ω . Données : $E = 155V$, $R = 100\Omega$, $\omega = 400 \text{ rad/s}$, et $C = 33\mu F$.

1. Exprimer l'inductance L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure R_{eq} . Calculer L ainsi que R_{eq} .



2. Exprimer puis calculer alors l'amplitude I de l'intensité $i(t)$.
3. Exprimer puis calculer les amplitudes U_{AB} et U_{BD} de tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{BD}(t)$.
4. Exprimer puis calculer les amplitudes I_1 et I_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Solution de l'exercice 2.20

$$e(t) = E \cdot \cos \omega t = 155 \cdot \cos(400t)$$

1. $L = f(R, C, \omega)$ pour que le dipôle AD soit équivalent à une résistance pure R_{eq} :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AD} &= \underline{Z}_L + \underline{Z}_{C//R} \\ \underline{Z}_{C//R} &= \frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{-j \frac{R}{C\omega}}{-j \frac{1}{C\omega} + R} = \frac{R - jR^2C\omega}{(RC\omega)^2 + 1} = Z_{eqBD} \\ \underline{Z}_{AD} &= jL\omega + \left(\frac{R}{(RC\omega)^2 + 1} \right) - j \frac{R^2C\omega}{(RC\omega)^2 + 1} \\ &= \left(\frac{R}{(RC\omega)^2 + 1} \right) + j \left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{(RC\omega)^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{R}{(RC\omega)^2 + 1} \right) + j \left(\frac{L\omega((RC\omega)^2 + 1) - (R^2C\omega)}{(RC\omega)^2 + 1} \right) = \\ \underline{Z}_{AD} &= R_{eq} + jX_{eq} \end{aligned}$$

Dipôle AD équivalent à une résistance pure R_{eq} :

$$\text{Im}(\underline{Z}_{AD}) = 0 \Rightarrow L\omega((RC\omega)^2 + 1) - (R^2C\omega) = 0 \Rightarrow L = \frac{R^2C\omega}{\omega((RC\omega)^2 + 1)}$$

$$L = \frac{R^2 C}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{1000^2 \cdot 33 \cdot 10^{-6}}{(100 \cdot 33 \cdot 10^{-6} \cdot 400)^2 + 1} = 0,120 \text{ H}$$

$$R_{eq} = \frac{R}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{100}{(100 \cdot 33 \cdot 10^{-6} \cdot 400)^2 + 1} = 36,46 \Omega$$

1. .

$$\underline{I} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}}$$

Alors :

$$\underline{I} = \frac{\underline{e}}{R_{eq}} = \frac{E}{R_{eq}} \Rightarrow |\underline{I}| = \frac{155}{36,46} = 4,25 \text{ A}$$

2. $\underline{U}_{AB}$? et $\underline{U}_{BD}$?

$$\underline{U}_{AB} = \underline{V}_L \text{ et } \underline{U}_{BD} = \underline{U}_R$$

$$\underline{e} = \underline{U}_{AB} + \underline{U}_R = \underline{Z}_L \underline{I} + R \underline{I}_1 = \underline{Z}_L \underline{I} + \underline{U}_{BD}$$

$$\underline{U}_{BD} = \underline{e} - \underline{Z}_L \underline{I}$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_L \underline{I} \Rightarrow |\underline{U}_{AB}| = |\underline{Z}_L| \cdot |\underline{I}| = L\omega \cdot |\underline{I}| = 0,20 \cdot 400 \cdot 4,25 = 204 \text{ V}$$

Alors :

$$\underline{U}_{BD} = \underline{e} - \underline{U}_{AB}$$

$$\underline{Z}_{eqBD} = \frac{\underline{U}_{BD}}{\underline{I}} \Rightarrow \underline{U}_{BD} = \underline{Z}_{eqBD} \cdot \underline{I} \Rightarrow |\underline{U}_{BD}| = |\underline{Z}_{eqBD}| \cdot |\underline{I}|$$

$$|\underline{Z}_{eqBD}| = \sqrt{\frac{R^2 + (R^2 C \omega)^2}{((RC\omega)^2 + 1)^2}} = \frac{R}{(RC\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + (RC\omega)^2} = \frac{R}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{(100 \cdot 33 \cdot 10^{-6} \cdot 400)^2 + 1}} \approx 60,24 \Omega$$

$$|\underline{U}_{BD}| = 60,24 \cdot 4,25 = 256,20 \text{ V}$$

Exercice 2.21

Mettre sous la forme $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ les tensions suivantes ; en déduire leurs expressions complexes (module et arguments en degrés).

$$1. u_1(t) = 100\sqrt{2} \cdot \cos \omega t.$$

$$2. u_2(t) = -141 \cdot \cos \omega t.$$

$$3. u_3(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right).$$

Solution de l'exercice 2.21

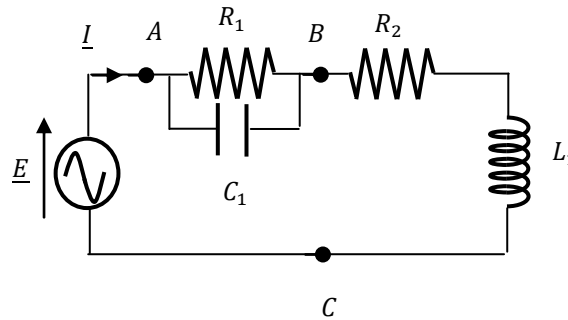
Mettre sous la forme : $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$$1. u_1(t) = 100\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underline{U} = 100 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

2. $u_2(t) = -141. \cos(\omega t) = 100\sqrt{2}. \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underline{U} = 100. e^{-j\frac{\pi}{2}}$
3. $u_3(t) = 100\sqrt{2}. \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = 100\sqrt{2}. \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underline{U} = 100. e^{j\frac{\pi}{2}}$

Exercice 2.22

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}_2$ du dipôle compris entre les bornes B et C .



2. Calculer l'impédance $\underline{Z}_1$ du dipôle compris entre les bornes A et B .
 3. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $\underline{Z}_1$.
 4. Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle compris entre les bornes A et C .
- Application numérique : $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 200\Omega$; $C_1 = 10\mu F$; $L_2 = 100mH$.
5. Calculer les parties réelles et imaginaires de $\underline{Z}$ pour $\omega = 1000 \text{ rad/s}$
 6. Calculer le module et l'argument de $\underline{Z}$ pour la même pulsation .
 7. Quelle est l'expression temporelle du courant $i(t)$ fourni par la source si $e(t) = 25,5 . \sin(\omega t) \text{ V}$?
 8. Tracer, dans ce cas de figure, le diagramme de Fresnel complet du circuit avec les échelles de $0,5 \text{ cm/V}$ pour les tensions et $0,1 \text{ cm/mA}$ pour les courants.

Solution de l'exercice 2.23

1. L'impédance $\underline{Z}_{BC}$ du dipôle BC:

$$\underline{Z}_{BC} = R_2 + jL_2\omega$$

2. L'impédance $\underline{Z}_{AB}$ du dipôle AB :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{R_1} \Rightarrow \underline{Z}_{AB} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

$$\text{Re}(\underline{Z}_{AB}) = \frac{R_1}{1 + (R_1C_1\omega)^2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(\underline{Z}_{AB}) = \frac{-R_1^2C_1\omega}{1 + (R_1C_1\omega)^2}$$

3. L'impédance $\underline{Z}$ du dipôle AC :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC}$$

$$\underline{Z} = \left(R_2 + \frac{R_1}{1 + (R_1 C_1 \omega)^2} \right) + j \left(L_2 \omega - \frac{R_1^2 C_1 \omega}{1 + (R_1 C_1 \omega)^2} \right)$$

4. Application numérique :

$$\underline{Z} = 250 + j50 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = Z = \sqrt{250^2 + 50^2} = 255 \Omega \\ \varphi = \arctg\left(\frac{50}{250}\right) = 11,31^\circ + 0,197 \text{ rad} \end{cases}$$

5. L'expression temporelle de courant $i(t)$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{I}| = \frac{E}{Z} = \frac{25.5}{255} = 100 \text{ A} \\ \theta = 0 - 0.197 = -0,197 \text{ rad} \end{cases}$$

Alors :

$$i(t) = 100 \sin(\omega t - 0,197)$$

6. Le diagramme de Fresnel :

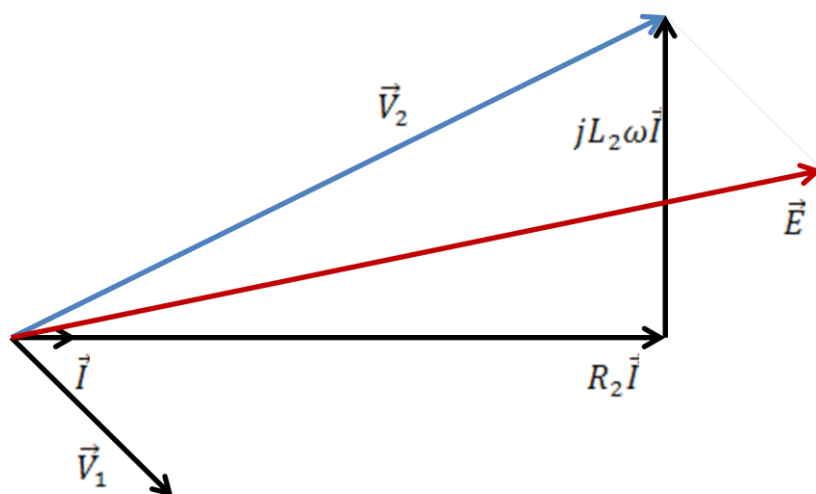
L'échelle : Pour les tensions : 0.5 cm/V

Pour les courants : 0.1 cm/mA

$$\underline{Z}_1 = 50 - j50 ; \underline{Z}_2 = 200 - j100$$

$$\vec{V}_1 = (50 - j50) \times \vec{I} ; \vec{V}_2 = (200 - j100) \times \vec{I}$$

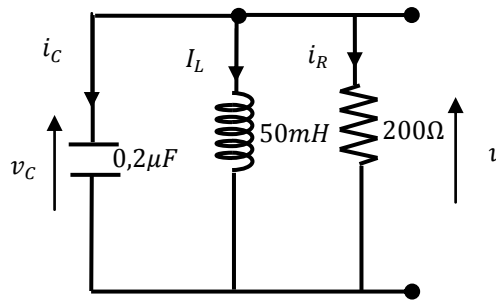
$$\vec{E} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$



Exercice 2.24

Pour le circuit de la figure suivante, où l'on a les conditions initiales :

$$v_C(0^+) = 12V \text{ et } i_L(0^+) = 30mA,$$



1. Calculer le courant initial dans chaque branche.
2. Calculer la valeur initiale de $\frac{dv}{dt}$.
3. Donner l'expression de $v(t)$.
4. Donner l'expression de $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $i_R(t)$.

Solution de l'exercice 2.24

1. Le courant initial dans chaque branche :

L'inductance :

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_L(0) = 30 \text{ mA}$$

La résistance :

$$R = \frac{v_R}{i_R} \Rightarrow v_R(0^+) = R \cdot i_R(0^+) \Rightarrow i_R(0^+) = \frac{v_R(0^+)}{R} = \frac{12}{200} = 0,06 \text{ A} \\ = 60 \text{ mA}$$

Le condensateur :

$$i_R + i_L + i_C = 0 \Rightarrow i_C = -i_R - i_L = -30 - 60 = 90 \text{ mA}$$

2. La valeur initial de $\frac{dv}{dt}$:

$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C = \frac{1}{0,2 \cdot 10^{-6}} \cdot (-90 \cdot 10^{-3}) = -450 \frac{kV}{s}$$

3. L'expression de $v(t)$:

On a :

$$v(t) = v_C(t); \quad v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}; \quad R = \frac{v_R}{i_R}$$

$$i_R + i_L + i_C = 0 \Rightarrow C \cdot \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L} \int v \cdot dt + i_0 + \frac{v}{R} = 0$$

On dérive cette équation par rapport à t pour éliminer l'intégrale :

$$C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} = 0$$

On pose :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad ; \quad \frac{1}{RC} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC} \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2.200.0,2.10^{-6}}$$

$$\alpha = 0,0125.10^{-6}$$

$$\ddot{v} + 2\alpha.\dot{v} + \omega_0^2.v = 0$$

$$\Delta' = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \omega_0^2 = 54,25.10^6 > 0 \Rightarrow \text{L'équation à racines doubles réelles}$$

subit un régime apériodique

$$v(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

Avec :

$$r_1 = -\alpha - \sqrt{\Delta'} \Rightarrow r_1 = -0,025.10^6 + 7500 = -5\,000 \text{ rad/s}$$

$$r_2 = -\alpha + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow r_2 = -0,025.10^6 - 7500 = -20\,000 \text{ rad/s}$$

Détermination des constants k_1 et k_2 :

$$v(0^+) = 12 \text{ V} \Rightarrow k_1 + k_2 = 12$$

$$i_C(0^+) = C \frac{dv(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$k_1 r_1 + k_2 r_2 = -450.10^3 \Rightarrow -k_1 5000 - 20000 k_2 = 450.10^3$$

On solutionne(*) :

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 12 \\ -k_1 5000 - 20000 k_2 = -450.10^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 = 12 - k_1 \\ k_1 15 = 210 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = -14 \\ k_2 = 26 \end{cases}$$

Alors la tension est :

$$v(t) = -14.e^{-5000t} + 26.e^{-20000t}$$

Vérification :

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow v(0) = v(0^+) = 12$$

$$v(0) = -14 + 26 = 12 \text{ (vérifiée)}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 14.5000 - 26.20000 = -450\,000 \text{ (vérifiée)}$$

4. Calcul des courants :

Pour la résistance :

à $t \geq 0$

$$i_R i_C(0^+) = C \frac{dv(0^+)}{dt}(t) = \frac{v(t)}{R} = -0,07.e^{-5000t} + 0,13.e^{-20000t}$$

Pour la capacité :

à $t \geq 0^+$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C(-14.(-5000)e^{-5000t} + 26.(-20000)e^{-20000t})$$

$$i_C(t) = 0,014.e^{-5000t} - 0,104.e^{-20000t}$$

Pour la bobine :

à $t \geq 0$

$$i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t)$$

$$i_L(t) = 0,07.e^{-5000t} - 0,13.e^{-20000t} - 0,014.e^{-5000t} + 0,104.e^{-20000t}$$

$$i_L(t) = 0,056.e^{-5000t} - 0,026.e^{-20000t}$$

Vérification :

$$i_R(0) = -0,07 + 0,13 = 0,06 = 60 \text{ mA}$$

$$i_C(0) = 0,014 - 0,104 = -0,09 = -90 \text{ mA}$$

$$i_L(0) = 0,056 - 0,026 = -0,03 = -30 \text{ mA}$$

Exercice 2.25

Un condensateur de $47 \mu F$ et un autre de $33 \mu F$ supportent la même tension maximale soit 25 V . On les branche en série puis en parallèle. Calculer dans chaque cas:

1. La capacité équivalente.
2. La tension maximale que peut supporter le groupement.
3. L'énergie emmagasinée par le groupement lorsqu'il est chargé sous la tension maximale.

Solution de l'exercice 2.25

a) En série :

1. La capacité équivalente :

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{47 \cdot 33}{47 + 33} \Rightarrow C_{eq} = 19,39 \mu F$$

2. La tension maximale :

$$V_{max} = V_{1max} + V_{2max} = 25,2 = 50 \text{ V}$$

3. L'énergie emmagasinée :

$$W_C = \frac{1}{2} C V_{max}^2 \Rightarrow W_C = \frac{1}{2} \cdot 19,39 \cdot 10^{-6} (50)^2 = 0,024 \text{ Joule}$$

b) En parallèle :

1. La capacité équivalente :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 47 + 33 \Rightarrow C_{eq} = 80 \mu F$$

2. La tension maximale :

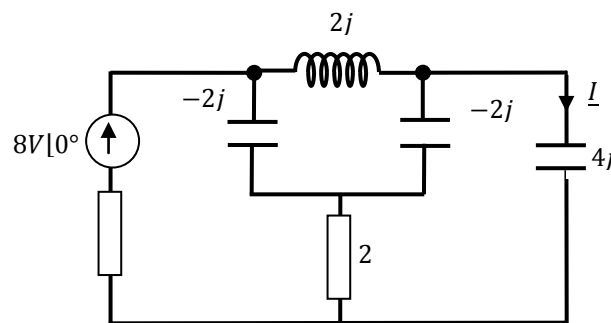
$$V_{max} = V_{1max} = V_{2max} = 25 V$$

3. L'énergie emmagasinée :

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_{max}^2 \Rightarrow W_C = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 10^{-6} (25)^2 = 0,025 \text{ Joule}$$

Exercice 2.26

Déterminer le courant de la figure ci-dessous :



Solution de l'exercice 2.26

$$\underline{Z}_A = \frac{(j2) \cdot (-j2)}{j2 + (-j2) + (-j2)} = \frac{4}{-j2} = \frac{2}{-j} = j2$$

$$\underline{Z}_B = \frac{(j2) \cdot (-j2)}{j2 - j2 - j2} = \frac{4}{-j2} = j2$$

$$\underline{Z}_C = \frac{(-j2) \cdot (-j2)}{j2 - j2 - j2} = \frac{-4}{-j2} = -j2$$

$$\underline{Z}_{34'} = \underline{Z}_C + 2 = -j2 + 2 = 2 - j2$$

$$\underline{Z}_{34''} = \underline{Z}_B + j4 = j2 + j4 = j6$$

$$\underline{Z}_{34} = \frac{(2 - j2) \cdot (j6)}{(2 - j2) + (j6)} = \frac{18}{5} - j\frac{6}{5}$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_{34} = \frac{28}{5} - j\frac{4}{5} \Rightarrow |\underline{Z}_{12}| = \sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 5,65 \Omega$$

$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{8}{5,65} = 1,41 A$$

$$I_{max} = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 1,41 = 2 A$$

Le courant est en avance par rapport à la tension.

Alors : le récepteur est un condensateur.

L'impédance :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{50}{2} = 25\Omega$$

La réactance : pour un condensateur : $X = Z_C = 25\Omega$

La capacité :

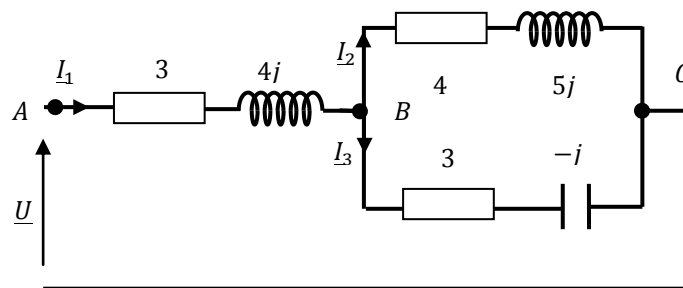
$$X = \frac{1}{C\omega} = 25 \Rightarrow C = \frac{1}{25\omega} \quad ; \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$$

$$C = \frac{1}{25} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2\pi} = 127\mu F$$

Exercice 2.27

Une tension sinusoïdale de 220 V et de 50 Hz est

Appliquée au dipôle passif représenté sur la figure suivante. Calculer :



1. Le courant I_1 .
2. Les tensions $\underline{U}_{AB}$ et $\underline{U}_{BC}$.
3. Les courants I_2 et I_3 .
4. Les puissances active et réactive consommées par le dipôle.

Solution de l'exercice 2.27

1. Le courant I_1 :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_{AB} + \frac{\underline{Z}_{BC1} \cdot \underline{Z}_{BC2}}{\underline{Z}_{BC1} + \underline{Z}_{BC2}}$$

$$\underline{Z}_{eq} = (3 + j4) + \frac{(4 + j5) \cdot (3 - j)}{(4 + j5) + (3 - j)} = 5,5 + j4,14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{eq}| = \sqrt{5,5^2 + 4,14^2} = 6,88 \Omega \\ \varphi = \arctg\left(\frac{4,14}{5,5}\right) = 37^\circ \end{cases}$$

Avec :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{U}{I_1} \Rightarrow I_1 = \frac{U}{\underline{Z}_{eq}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |I_1| = \frac{|U|}{|\underline{Z}_{eq}|} = \frac{220}{6,88} = 32 \text{ A} \\ \varphi_{i1} = \arg(I_1) = \arg(U) - \arg(\underline{Z}_{eq}) = 0 - 37 = -37^\circ \end{cases}$$

Alors :

$$I_1 = 32 \cdot e^{-j37^\circ} = 32 \angle -37^\circ$$

2. Les tensions $\underline{U}_{AB}$ et $\underline{U}_{BC}$

$$\underline{Z}_{AB} = 3 + j4 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \Omega \\ \arg(\underline{Z}_{AB}) = \varphi_{AB} = \arctg\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ \end{cases}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{I_1} \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB} \cdot I_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{U}_{AB}| = |\underline{Z}_{AB}| \cdot |I_1| = 5 \cdot 32 = 160 \text{ V} \\ \varphi_{uAB} = \arg(\underline{U}_{AB}) = \varphi_{AB} + \varphi_{i1} = 53,13^\circ + (-37^\circ) = 16,13^\circ \end{cases}$$

$$\underline{U}_{AB} = 160 \angle 16,13^\circ$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{Z}_{BC} \cdot I_1$$

$$\underline{Z}_{BC} = \frac{17 + j11}{7 + j4} = \frac{(17 + j11)(7 - j4)}{49 + 16} = \frac{163}{65} + j \frac{9}{65}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{BC}| = \sqrt{\left(\frac{163}{65}\right)^2 + \left(\frac{9}{65}\right)^2} = 2,511 \Omega \\ \arg(\underline{Z}_{BC}) = \varphi_{BC} = \arctg\left(\frac{9}{163}\right) = 3,16^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{U}_{BC}| = |\underline{Z}_{BC}| \cdot |I_1| = 2,511 \cdot 32 = 80,352 \text{ V} \\ \varphi_{uBC} = \arg(\underline{U}_{BC}) = \varphi_{BC} + \varphi_{i1} = 3,16^\circ - 37^\circ = -33,84^\circ \end{cases}$$

$$\underline{U}_{BC} = 80,352 \angle -33,84^\circ$$

3. Les courants I_2 et I_3 :

$$\underline{Z}_{BC1} = \frac{\underline{U}_{BC}}{I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC1}}$$

$$\underline{Z}_{BC1} = 4 + j5 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{BC1}| = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = 6,403 \Omega \\ \arg(\underline{Z}_{BC1}) = \varphi_{BC1} = \arctg\left(\frac{5}{4}\right) = 51,34^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |I_2| = \frac{|U_{BC}|}{|Z_{BC1}|} = \frac{80,352}{6,403} = 12,55 \text{ A} \\ \arg(I_2) = \arg(U_{BC}) - \arg(Z_{BC1}) = -33,84^\circ - 51,34^\circ = -85,18^\circ \\ I_2 = 12,55 \angle -85,18^\circ \\ I_3 = \frac{U_{BC}}{Z_{BC2}} \end{cases}$$

$$Z_{BC2} = 3 - j \Rightarrow \begin{cases} |Z_{BC2}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = 3,16 \Omega \\ \arg(Z_{BC2}) = \varphi_{BC2} = \arctg\left(\frac{-1}{3}\right) = -18,43^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |I_3| = \frac{|U_{BC}|}{|Z_{BC2}|} = \frac{80,352}{3,16} = 25,43 \text{ A} \\ \arg(I_3) = \arg(U_{BC}) - \arg(Z_{BC2}) = -33,84^\circ + 18,43^\circ = -15,41^\circ \\ I_3 = 25,43 \angle -15,41^\circ \end{cases}$$

4. Les puissances consommées par le dipôle :

La puissance active :

$$P = VI \cos \varphi$$

Avec : $V = |U|$; $I = |I_1|$; $\varphi = \varphi_{eq}$

Alors :

$$P = VI \cos \varphi = 220.32. \cos(37^\circ) = 5\,622,4 \text{ W} = 5,6224 \text{ kW}$$

La puissance réactive :

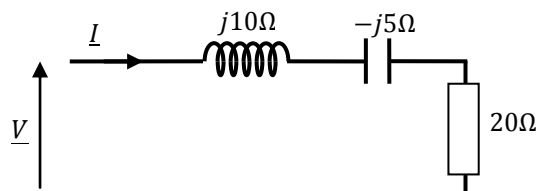
$$P = VI \sin \varphi = 220.32. \sin(37^\circ) = 4\,236,8 \text{ VAR} = 4,2368 \text{ kVAR}$$

La puissance apparente :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI = 7\,040 \text{ VA}$$

Exercice 2.28

On considère le circuit représenté sur la figure suivante :



Où : $\underline{V}$ est la représentation complexe d'une tension sinusoïdale de valeur efficace $V=100 \text{ V}$ et de fréquence 50 Hz . Les composants de ce circuit sont directement caractérisés par la valeur de leur impédance complexe.

1. Calculer la valeur efficace I du $\underline{I}$.
2. Calculer la phase du courant $\underline{I}$ si on considère la tension $\underline{V}$ à l'origine des phases. Ecrire alors l'expression temporelle de la tension v et du courant i .
3. Ecrire la loi de maille qui régit ce circuit.
4. Représenter tous les complexes formant cette loi de maille sur un diagramme vectoriel dans le plan complexe (diagramme de Fresnel).

Solution de l'exercice 2.28

1. L'impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{eq} = 20 + j(10 - 5) = 20 + j5 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{eq}| = \sqrt{(20)^2 + (5)^2} = 20,61 \, \Omega \\ \varphi = \arctg\left(\frac{5}{20}\right) = 14,036^\circ \end{cases}$$

2. Les expressions temporelles de la tension et du courant:

$$|\underline{Z}_{eq}| = \frac{|\underline{V}|}{|\underline{I}|} = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{|\underline{Z}_{eq}|} = \frac{100}{20,61} = 4,85 \, A$$

$$\arg(\underline{I}) = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{Z}_{eq}) = -14,036^\circ$$

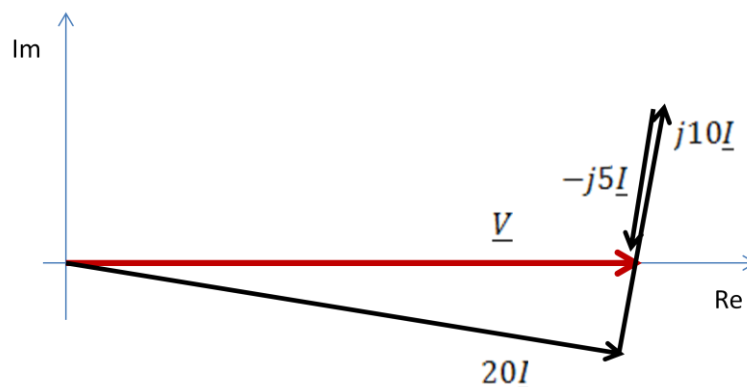
Alors :

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 4,85 \cdot \sin(\omega t - 14,036^\circ)$$

3. Diagramme de Fresnel :

$$\underline{V} = \underline{V}_L + \underline{V}_C + \underline{V}_R \Rightarrow \underline{V} = (j10 - j5 + 20)\underline{I}$$

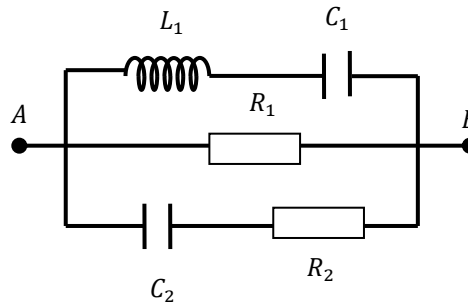


Exercice 2.29

La figure au-dessous donne la composition d'un dipôle tel que :

$$C_1 = 2 \, \mu F ; \quad L_1 = 40 \, \mu H ; \quad R_1 = 5 \, \Omega ; \quad C_2 = 4 \, \mu F ; \quad R_2 = 0,2 \, \Omega$$

Il est alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 120 \, \text{kHz}$ et la tension efficace aux bornes A et B du dipôle est $U_e = 12 \, \text{V}$.



On demande de calculer :

1. Les valeurs efficaces des intensités dans les trois branches.
2. L'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle.

Solution de l'exercice 2.29

1. Les intensités dans les trois branches :

$$\underline{Z}_1 = jL_1\omega - j\frac{1}{C_1\omega} = j(40 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 120 \cdot 10^3) - j\frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 120 \cdot 10^3}$$

$$\underline{Z}_1 = j29,49 \Rightarrow |\underline{Z}_1| = 29,49 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 5\Omega \Rightarrow |\underline{Z}_2| = 5\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{C_3\omega} = 0,2 - j\frac{1}{(40 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 120 \cdot 10^3)}$$

$$\underline{Z}_3 = 0,2 - j0,331 \Rightarrow |\underline{Z}_3| = 0,386 \Omega$$

$$\underline{Z}_{eq} = (\underline{Z}_1 // \underline{Z}_2) // \underline{Z}_3$$

$$\underline{Z}_{eq} = 0,21 - j0,306 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_{eq}| = 0,371 \Omega \\ \arg(\underline{Z}_{eq}) = -55^\circ \end{cases}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{12}{0,371} \Rightarrow I = 32,34 A$$

$$\underline{Z}_{eq} = 0,371 \cdot e^{-j55^\circ}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{0,21 - j0,306} = \frac{1}{0,371 \cdot e^{-j55^\circ}} = 2,7 \cdot e^{j55^\circ}$$

Exercice 2.30

1. L'énergie absorbée par un appareil est de 9.2 kWh. Quelle est l'intensité du courant si l'appareil a fonctionné de 7 h à 16 h sous une tension de 230 V? Calculer aussi sa résistance.
2. On fabrique un condensateur au moyen de deux feuilles d'aluminium de 70 mm de large, séparées par une bande de papier paraffiné de 80 μm

d'épaisseur. Calculer la longueur d'une bande, sachant que ce condensateur a une capacité de 220 nF ($\epsilon_r(\text{paraffine}) = 2,25$ et $\epsilon_0(\text{air}) = 8,86 \times 10^{-12}$).

3. Calculer la capacité totale d'un groupe de cinq condensateurs de 3 μF placées en parallèle puis en série.

Solution de l'exercice 2.30

1. L'intensité du courant :

$$E = P \cdot t = VI \cdot t \Rightarrow I = \frac{E}{V \cdot t} = \frac{9,2 \cdot 10^3}{230 \cdot (16 - 7)} = 4,44 \text{ A}$$

$$P = R \cdot I^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{230 \cdot 4,44}{(4,44)^2} = 51,80 \Omega$$

2. Calcul de la longueur de la bande :

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{s}{d} \Rightarrow s = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{220 \cdot 10^{-9} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 2,25} = 0,882869 \text{ m}^2$$

$$s = \text{largeur} \times \text{longueur} \Rightarrow \text{longueur} = \frac{s}{\text{largeur}} = \frac{0,882869}{0,07} \\ \Rightarrow \text{longueur} = 12,61 \text{ m}$$

3. Capacité équivalente :

En parallèle :

$$C_{eqP} = 5 \cdot 3 = 15 \mu\text{F}$$

En série :

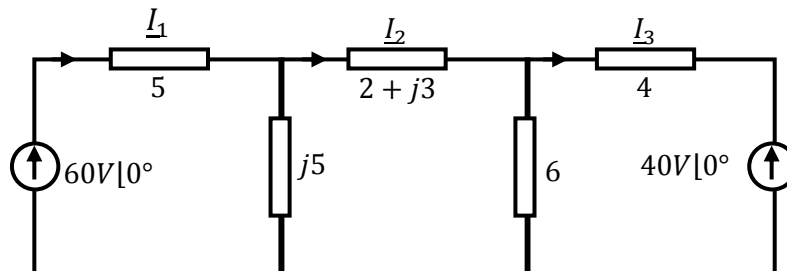
$$\frac{1}{C_{eqS}} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{C_i} \Rightarrow C_{eqS} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6 \mu\text{F}$$

Exercice 2.31

On considère le circuit suivant :

En utilisant la méthode de Kirchhoff,

Déterminer les courants I_1 , I_2 et I_3 .



Solution de l'exercice 2.31

Appliquant les lois de Kirchhoff sur le circuit:

$$\begin{cases} 5\underline{I}_1 + 5j(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = 60 \\ 6(\underline{I}_2 - \underline{I}_3) + (2 + j3)\underline{I}_2 - j5(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = 0 \Rightarrow (*) \\ 6(\underline{I}_2 - \underline{I}_3) - 4\underline{I}_3 = 40 \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1(1 + j) - j\underline{I}_2 = 12 & \rightarrow (1) \\ -j5\underline{I}_1 + 8(1 + j)\underline{I}_2 - 6\underline{I}_3 = 0 & \rightarrow (2) \\ 3\underline{I}_2 - 5\underline{I}_3 = 20 & \rightarrow (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{12 + j\underline{I}_2}{1 + j}$$

$$(3) \Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{3\underline{I}_2 - 20}{5}$$

En remplaçant dans l'équation (2) :

$$(2) \Rightarrow -j5 \left(\frac{12 + j\underline{I}_2}{1 + j} \right) + 8(1 + j)\underline{I}_2 - 6 \left(\frac{3\underline{I}_2 - 20}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I}_2 = 2,65 + j2,23$$

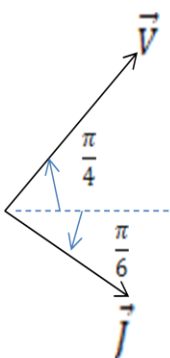
$$|\underline{I}_2| = 3,46 \text{ A}$$

$$\arg(\underline{I}_2) = \arctg\left(\frac{2,23}{2,65}\right) \approx 40,1^\circ$$

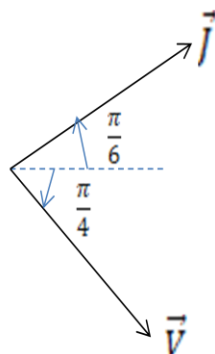
$$\underline{I}_2 = 3,46 \text{ A} \angle 40,1^\circ$$

Exercice 2.32

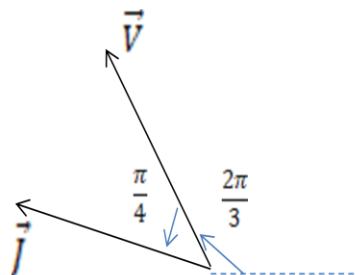
Pour les diagrammes vectoriels suivant :



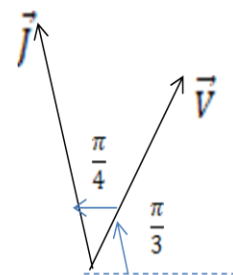
(1)



(2)



(3)



(4)

On donne : $V = 400 \text{ V}$ et $I = 23 \text{ A}$

Donner :

1. La représentation analytique et complexe de la tension $\vec{V}$ et du courant $\vec{I}$.

2. La valeur de la résistance, la réactance, l'impédance, la conductance, la susceptance et l'admittance totale.

Solution de l'exercice 2.32

1. La représentation analytique et complexe :

$$a) V(t) = 400\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \underline{V} = 400e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$J(t) = 23\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \underline{J} = 23e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{J}} = \frac{400e^{j\frac{\pi}{4}}}{23e^{-j\frac{\pi}{6}}} = 17,39e^{j\frac{5\pi}{12}} = 17,39 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\underline{Z} = 4,50 + j16,79$$

D'où :

La résistance est : $R = 4,50 \Omega$

La réactance est : $X = 16,79 \Omega$

Le circuit est inductif.

L'admittance est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{4,50 + j16,79} = 0,049 - j0,0556$$

La conductance est :

$$G = 0,049 [\Omega^{-1}]$$

La susceptance est :

$$B = -0,0556 [\Omega^{-1}]$$

$$b) V(t) = 400\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \underline{V} = 400e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$J(t) = 23\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \underline{J} = 23e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{J}} = \frac{400e^{-j\frac{\pi}{4}}}{23e^{j\frac{\pi}{6}}} = 17,39e^{-j\frac{5\pi}{12}} = 17,39 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - j\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\underline{Z} = 4,50 - j16,79$$

D'où :

La résistance est :

$$R = 4,50 \Omega$$

La réactance est :

$$X = -16,79 \Omega$$

Le circuit est capacitif.

L'admittance est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{4,50 - j16,79} = 0,049 + j0,0556$$

La conductance est :

$$G = 0,049 \left[\frac{1}{\Omega} \right]$$

La susceptance est :

$$B = 0,0556 \left[\frac{1}{\Omega} \right]$$

$$c) V(t) = 400\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \underline{V} = 400e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$J(t) = 23\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{11\pi}{12}\right) \Rightarrow \underline{J} = 23e^{j\frac{11\pi}{12}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{J}} = \frac{400e^{j\frac{2\pi}{3}}}{23e^{j\frac{11\pi}{12}}} = 17,39e^{-j\frac{\pi}{4}} = 17,39 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\underline{Z} = 12,29 - j12,29$$

D'où :

La résistance est :

$$R = 12,29 \Omega$$

La réactance est :

$$X = 12,29 \Omega$$

Le circuit est capacitif.

L'admittance est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{12,29 - j12,29} = 0,0407 + j0,0407$$

La conductance est :

$$G = 0,0407 [\Omega^{-1}]$$

La susceptance est :

$$B = 0,0407 [\Omega^{-1}]$$

$$d) V(t) = 400\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \underline{V} = 400e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$J(t) = 23\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow \underline{J} = 23e^{j\frac{7\pi}{12}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{J}} = \frac{400e^{j\frac{\pi}{3}}}{23e^{j\frac{7\pi}{12}}} = 17,39e^{-j\frac{3\pi}{12}} = 17,39 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) - j\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right)$$

$$\underline{Z} = 12,29 - j12,29$$

D'où :

La résistance est :

$$R = 12,29 \, \Omega$$

La réactance est :

$$X = -12,29 \, \Omega$$

Le circuit est capacitif.

L'admittance est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{12,29 - j12,29} = 0,0407 + j0,0407$$

La conductance est :

$$G = 0,0407 \, [\Omega^{-1}]$$

La susceptance est :

$$B = 0,0407 \, [\Omega^{-1}]$$

Le circuit est le même dans les deux cas (c) et (d) malgré la représentation vectorielle différente.

CHAPITRE 03 :

CIRCUITS ET PUISSANCES ÉLECTRIQUES.

3.1. Introduction

La puissance électrique est une grandeur essentielle. Elle joue un rôle fondamental dans la conception, l'exploitation et la sécurité des installations électriques. En effet, le calcul des puissances permet non seulement d'évaluer la consommation d'énergie, mais aussi de dimensionner correctement les câbles, transformateurs et générateurs, d'optimiser le fonctionnement des appareils et d'assurer la sécurité du réseau. Ainsi, il permet une utilisation efficace et sécurisée de l'électricité tant dans le quotidien que dans l'industrie.

Dans ce chapitre nous abordons les puissances électriques en régime sinusoïdal monophasé ainsi qu'en régime sinusoïdal triphasé équilibré et déséquilibré.

3.2. Type d'alimentation

L'alimentation électrique peut être réalisée en monophasé ou en triphasé selon la puissance demandée par les équipements. Le monophasé est généralement utilisé pour les installations domestiques et les charges de faible puissance, tandis que le triphasé est largement répandu dans le domaine industriel grâce à ses avantages, notamment une meilleure production, un transport plus efficace et une utilisation optimale de l'énergie électrique.

3.3. Définitions

Récepteur triphasé

C'est un récepteur constitué de trois éléments, d'impédance Z .

Système équilibré

On dit que le système est équilibré, si les trois éléments sont identiques.

Courant par phase

C'est le courant qui traverse les éléments Z du récepteur triphasé. Symbole : J .

Courants en ligne

C'est le courant dans les fils du réseau triphasé. Symbole : I

3.4. Circuit monophasé

Un circuit monophasé est un circuit qui contient une source et deux lignes d'alimentation.

3.4.1. Les puissances en monophasé

Puissance apparente

Pour une impédance

$$\underline{Z} = Z|\theta$$

Est correspond une puissance apparente $\underline{S}$.

Avec :

$$\underline{S} = P + jQ$$

P et Q sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la puissance apparente.

La puissance active (Puissance réelle)

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = VI \cos \theta$$

Elle se transforme intégralement en puissance utile de forme mécanique, thermique ou lumineuse. L'unité est le watt[W].

Puissance réactive

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = VI \sin \theta$$

Son unité est le Volt-ampère Réactif [Var]. Elle sert à la magnétisation des circuits magnétiques et des machines électriques (transformateurs et moteurs). La puissance réactive correspond à une énergie réactive qui va périodiquement de la source vers le récepteur, puis du récepteur vers la source, et ainsi de suite sans ne jamais être absorbée par le récepteur.

L'existence d'une puissance réactive conduit à une augmentation du courant dans le générateur et la ligne alimentant le récepteur. Cette augmentation engendre une augmentation des pertes, et nécessite un surdimensionnement des lignes de transport.

Alors :

$$\vec{S} = VI \cos \theta + j VI \sin \theta$$

$$\vec{S} = VI(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\vec{S} = VI \angle \theta$$

$$\vec{S} = S \angle \theta$$

$$\underline{S} = S \angle \theta^\circ$$

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = Z \cdot I^2$$

L'unité de la puissance apparente S est le Volt-Ampère [VA].

D'autre part, si on prend la tension comme référence, on peut écrire :

$$\underline{V} = V \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = I \angle -\theta$$

$$\bar{\underline{I}} = I \angle \theta$$

$\bar{\underline{I}}$: est le conjugué de $\underline{I}$.

Alors :

$$\underline{V} \bar{I} = VI \angle \theta$$

D'où :

$$\vec{S} = V \bar{I}$$

A partir des expressions des puissances au-delà, on peut construire le triangle des puissances semblable à celui de l'impédance.

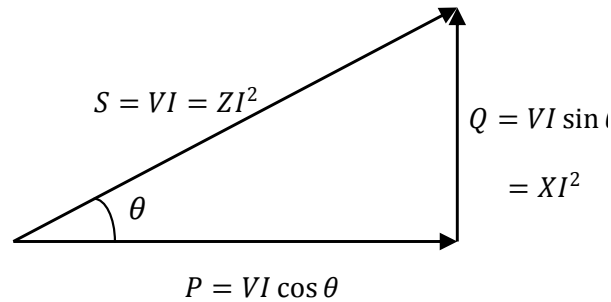


Figure 3.1 : Triangle des puissances.

V, I : Valeurs efficaces de la tension et du courant respectivement.

θ : Déphasage entre la tension et le courant.

3.4.2. Facteur de puissance

$$F = \frac{P}{S} = \cos \theta$$

3.5. Système triphasé

Un **circuit triphasé** est équilibré quand la source et la charge sont toutes deux équilibrées.

Une **source triphasée** est équilibrée lorsque les trois tensions générées sont de même amplitude et déphasées de 120° l'une par rapport à l'autre.

Une **charge triphasée** est équilibrée lorsque les impédances de chacune des trois phases sont identiques en grandeur et en angle.

Généralement la distribution de l'énergie électrique est effectuée en triphasé.

Une ligne d'alimentation triphasée comporte quatre fils :

1. Les trois fils (3 phases) ;
2. Un fil neutre N.

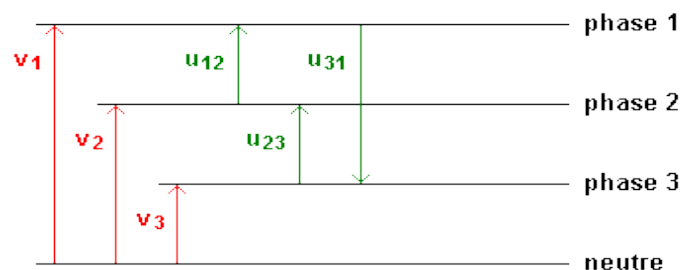


Figure 3.2 : Réseau triphasé.

Les tensions V_1, V_2 et V_3 : sont les tensions efficaces simples ;

Les tensions U_{12}, U_{23} et U_{31} : sont les tensions efficaces composées.

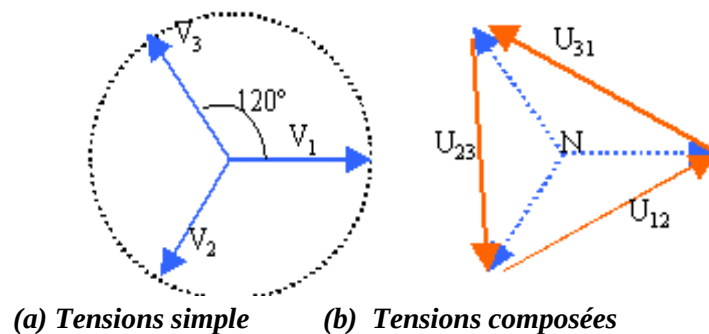


Figure 3.3 : Diagramme des tensions en triphasé.

L'équilibre et le déséquilibre d'un système triphasé sont des notions très importantes, par ailleurs, ce sont des états directement imposés par les charges du système.

Système de tension triphasé équilibré

Dans un système équilibré, toutes les tensions sont de même amplitude, décalées de 120° et de séquence de phase dans l'ordre normale ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$).

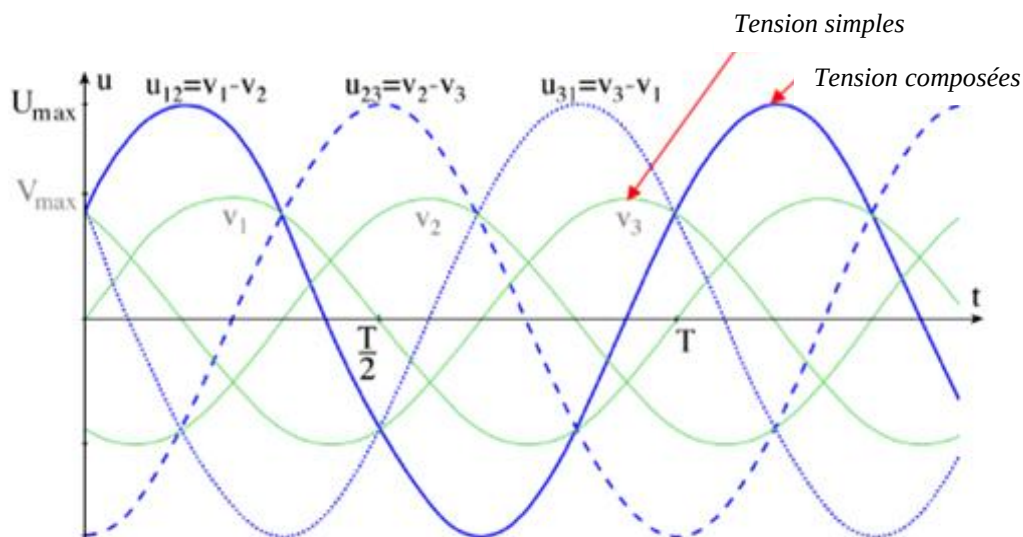


Figure 3.4 : Ondes des tensions simples et composées dans un circuit triphasé.

Tensions simples

Les tensions : V_1, V_2 et V_3 sont des tensions simples, avec :

V_1 : est la différence de potentiel entre la phase 1 et le fil neutre N.

V_2 : est la différence de potentiel entre la phase 2 et le fil neutre N.

V_3 : est la différence de potentiel entre la phase 3 et le fil neutre N.

L'écriture temporelle des tensions simples est donnée comme suit:

$$\begin{cases} V_1(t) = \sqrt{2} \cdot V \sin(\omega t) \\ V_2(t) = \sqrt{2} \cdot V \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ V_3(t) = \sqrt{2} \cdot V \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

L'écriture complexe est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = V|0^\circ \\ \underline{V}_2 = V|120^\circ \\ \underline{V}_3 = V|-120^\circ = V|240^\circ \end{cases}$$

D'où l'écriture vectorielle est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = V|0^\circ \\ \vec{V}_2 = V|120^\circ \\ \vec{V}_3 = V|-120^\circ = V|240^\circ \end{cases}$$

Tensions composées

Les tensions U_{12} , U_{23} et U_{31} sont des tensions composées, avec :

U_{12} : est la différence de potentiel entre la phase 1 et la phase 2.

U_{23} : est la différence de potentiel entre la phase 2 et la phase 3.

U_{31} : est la différence de potentiel entre la phase 3 et la phase 1.

L'écriture vectorielle des tensions composées est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\ \vec{U}_{31} = \vec{V}_3 - \vec{V}_1 \end{cases}$$

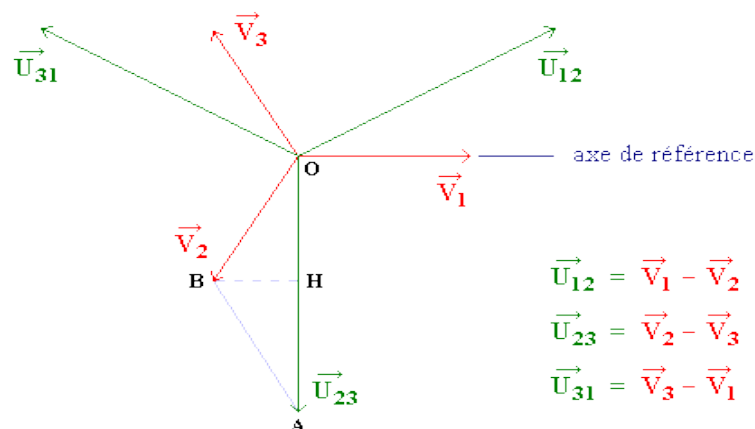


Figure 3.5 : La représentation de Fresnel des tensions simples et tensions composées d'un système triphasé équilibré.

La relation entre les tensions simples et les tensions composées

Supposons :

$$U_{12} = H$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\frac{H}{2}}{V} \Rightarrow \frac{H}{2} = V \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\Rightarrow H = 2V \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow U_{12} = V\sqrt{3}\end{aligned}$$

Alors :

$$U = V\sqrt{3}$$

Ecriture temporelle :

$$\begin{cases} U_{12}(t) = \sqrt{2} \cdot U \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} V \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ U_{23}(t) = \sqrt{2} \cdot U \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} V \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ U_{31}(t) = \sqrt{2} \cdot U \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} V \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) \\ \quad = \sqrt{2} \cdot U \sin\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} V \sin\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Ecriture en complexe :

$$\begin{cases} \underline{U}_{12} = [\sqrt{3} V, 30^\circ] \\ \underline{U}_{23} = [\sqrt{3} V, -90^\circ] \\ \underline{U}_{31} = [\sqrt{3} V, +150^\circ] \end{cases}$$

3.5.1. Les puissances en triphasé équilibré

Un récepteur triphasé équilibré est équivalent à l'association de trois récepteurs monophasés identiques (théorème de Boucherot). Le réseau et le récepteur peuvent se relier de deux façons différentes : en étoile (Y) ou en triangle (Δ).

Caractéristiques du couplage en étoile

Au lieu d'amener les six fils de la source à la charge, on peut relier ensemble 1', 2' et 3' formant un point commun N , en réduisant le nombre de fils de six à quatre. On nomme fil de ligne chacun des trois fils reliés aux points 1, 2 ou 3. tandis que le fil neutre est le fil relié au point N .

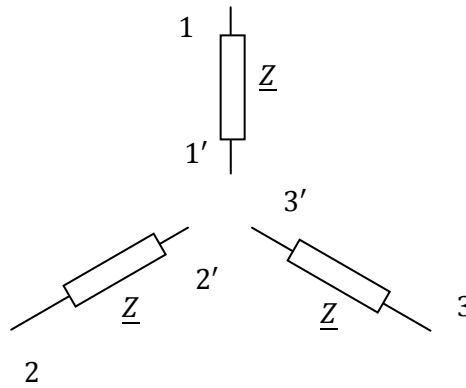


Figure : Trois charges (sources) électriques indépendantes.

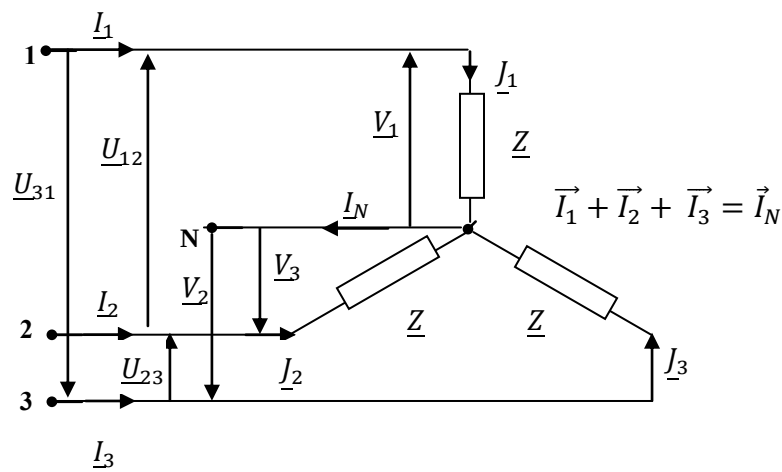


Figure 3.5 : Trois charges (sources) reliées en étoile.

$$Z_1 = Z_{1N}$$

$$Z_2 = Z_{2N}$$

$$Z_3 = Z_{3N}$$

Pour une source :

$$I_1 = I_{N1}$$

$$I_2 = I_{N2}$$

$$I_3 = I_{N3}$$

Pour une charge :

$$I_1 = I_{1N}$$

$$I_2 = I_{2N}$$

$$I_3 = I_{3N}$$

1. Le courant dans chaque élément est J égal au courant I dans la ligne.
2. La tension aux bornes de chaque élément est égale à la tension de ligne à ligne divisé par $\sqrt{3}$ ($V = \frac{U}{\sqrt{3}}$).
3. Les trois tensions aux bornes des éléments sont déphasées de 120° .
4. Les trois courants dans les éléments sont déphasés de 120° .
5. Comme il s'agit d'un système équilibré :

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0}$$

$$\underline{V}_2 = V_1 \angle -120^\circ$$

$$\underline{V}_3 = V_1 \angle +120^\circ$$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} V_1 \angle +30^\circ$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{23} &= \sqrt{3} V_2 \angle +30^\circ \\ &= \sqrt{3} V_1 \angle -90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{31} &= \sqrt{3} V_3 \angle +30^\circ \\ &= \sqrt{3} V_1 \angle +150^\circ \end{aligned}$$

Caractéristiques du couplage en triangle

Au lieu de relier les points $1'$, $2'$ et $3'$ ensemble comme dans le cas de la connexion en étoile, on relie 1 avec $3'$, 3 avec $2'$ et 2 avec $1'$.

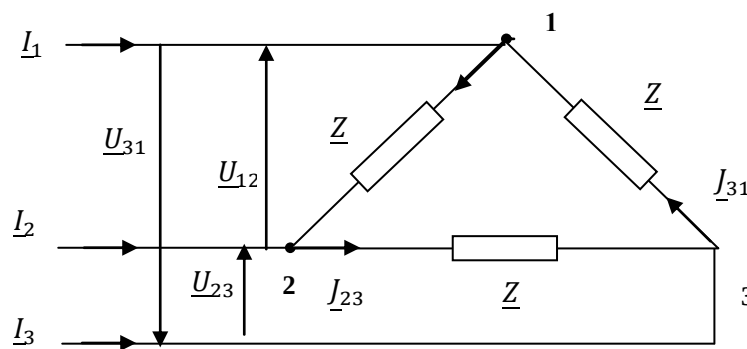


Figure 3.6 : Couplage triangle.

1. Le courant dans chaque élément J est égal au courant I dans la ligne divisé par $\sqrt{3}$.

2. La tension aux bornes de chaque élément est égale à la tension U ligne à ligne.
3. Les trois tensions aux bornes des éléments sont déphasées de 120° .
4. Les trois courants dans les éléments sont déphasés de 120° .

$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \vec{J}_{12} - \vec{J}_{31} \\ \vec{I}_2 = \vec{J}_{23} - \vec{J}_{12} \\ \vec{I}_3 = \vec{J}_{31} - \vec{J}_{23} \end{cases}$$

Système équilibré, c à d valeurs efficaces égaux :

$$J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$$

5. Comme il s'agit d'un système équilibré :

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 &= \vec{0} \\ \vec{J}_{12} + \vec{J}_{23} + \vec{J}_{31} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Pour une source :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{3}J_{21}|-30^\circ \\ I_2 &= \sqrt{3}J_{32}|-30^\circ \\ I_3 &= \sqrt{3}J_{13}|-30^\circ \end{aligned}$$

Pour une charge :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{3}J_{12}|-30^\circ \\ I_2 &= \sqrt{3}J_{23}|-30^\circ \\ I_3 &= \sqrt{3}J_{31}|-30^\circ \end{aligned}$$

Relation entre les deux couplages étoile et triangle

Pour le circuit en étoile :

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_1 + Z_2 \\ Z_{23} &= Z_2 + Z_3 \\ Z_{31} &= Z_3 + Z_1 \end{aligned}$$

Pour le circuit triangle :

$$Z_{12} = z_{12} // (z_{23} + z_{31}) = \frac{Z_{12}Z_{23} + Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_{23} = z_{23} // (z_{31} + z_{12}) = \frac{Z_{23}Z_{31} + Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_{31} = z_{31} // (z_{12} + z_{23}) = \frac{Z_{31}Z_{12} + Z_{31}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

Transformation Triangle-Etoile (Théorème de Kennely)

Pour le circuit en étoile :

$$2Z_1 = Z_{12} - Z_{23} + Z_{31}$$

On remplace Z_{12} , Z_{23} et Z_{31} par leurs valeurs en triangle:

$$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{Z_{12} \cdot Z_{23} + Z_{12} \cdot Z_{31} - Z_{12} \cdot Z_{23} - Z_{23} \cdot Z_{31} + Z_{12} \cdot Z_{31} + Z_{23} \cdot Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

De la même façon :

$$Z_2 = \frac{Z_{23} \cdot Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{31} \cdot Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

En peut résumer, dans le cas équilibré :

$$Z_Y = \frac{\text{Produit des } Z \text{ adjasants du } \Delta}{\text{somme des } Z \text{ du } \Delta}$$

Transformation étoile-triangle

Dans le cas des admittances :

$$Y_{12} = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Y_{23} = \frac{Y_2 \cdot Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Y_{31} = \frac{Y_3 \cdot Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Puisque :

$$Y_{12} = \frac{1}{z_{12}}$$

$$Z_{12} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_3}$$

$$Z_{23} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_1}$$

$$Z_{31} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_2}$$

$$Z_{\Delta} = \frac{\text{somme des combinaisons des trois impédances en Y}}{\text{impédance de la lettre manquante}}$$

En résumé, dans le cas du système équilibré :

$$Z_{\Delta} = 3 \cdot Z_Y$$

D'où, les expressions des puissances en triphasé équilibré sont données comme suit :

En étoile

$$V = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Puissance active :

$$P = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Puissance réactive :

$$Q = 3 \cdot V \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Puissance apparente :

$$S = 3 \cdot V \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

On peut écrire :

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

En triangle

$$J = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Puissance active :

$$P = 3 \cdot U \cdot J \cdot \cos \varphi$$

Puissance réactive :

$$Q = 3 \cdot U \cdot J \cdot \sin \varphi$$

Puissance apparente :

$$S = 3 \cdot U \cdot J = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Quel que soit le couplage

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

3.5.2. Système triphasé déséquilibré et puissances électriques

On dit d'un système triphasé qu'il est déséquilibré si toutes les grandeurs électriques analogues ne sont pas égales d'une phase sur l'autre.

Dans le cas d'un système déséquilibré, on ne peut pas appliquer les relations évoquées à l'équilibre. On se restreindra donc aux relations générales propres aux montages rencontrés.

Récepteur triphasé déséquilibré

Un récepteur est non équilibré s'il est constitué de trois impédances différentes.

Pour un couplage étoile avec neutre :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_N$$

Pour un couplage triangle, la relation $I = \sqrt{3}J$ n'est plus valable car le système est déséquilibré.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{J}_{12} - \underline{J}_{31} \\ \underline{I}_2 = \underline{J}_{23} - \underline{J}_{12} \\ \underline{I}_3 = \underline{J}_{31} - \underline{J}_{23} \end{cases}$$

Les puissances en triphasé déséquilibré

La puissance active absorbée par le récepteur est la somme des puissances véhiculées par chaque phase :

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

La puissance active est :

$$P = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3$$

Et la puissance réactive s'écrit alors :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3$$

Alors, la puissance apparente est :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

3.6. Mesure de puissance en triphasé

Ligne à 4 fils

a) Circuit équilibré

Il suffit de mesurer la puissance consommée par une phase et de multiplier par trois. Un seul Wattmètre est nécessaire :

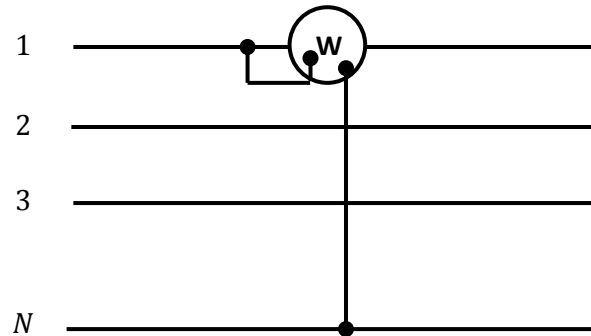


Figure 3.6 : Méthode d'un seul wattmètre
(Ligne à 4 fils - système équilibré).

$$P = 3P_{1N}$$

b) Circuit déséquilibré

Il faut mesurer les puissances consommées par les trois phases et additionner. Trois wattmètres sont nécessaires.

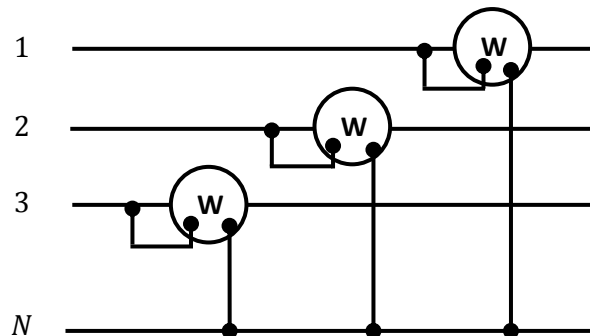


Figure 3.7: Méthode de trois wattmètres (Ligne à 4 fils - système déséquilibré).

$$P = P_{1N} + P_{2N} + P_{3N}$$

Ligne à 3 fils

Méthode des deux Wattmètres

Le montage des deux wattmètres que le système soit équilibré ou non (La seule condition est qu'il n'y ait pas de fil neutre).

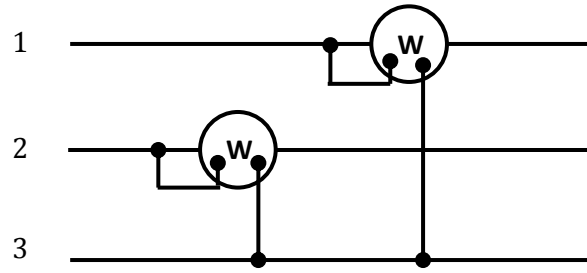


Figure 3.8 : Méthode des deux Wattmètres (Ligne à 3 fils).

Cas particulier

Les indications des wattmètres donnent :

$$P_{13} = U_{13}I_1 \cos(\vec{I}_1, \vec{U}_{13}) = UI \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

$$P_{23} = U_{23}I_2 \cos(\vec{I}_2, \vec{U}_{23}) = UI \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

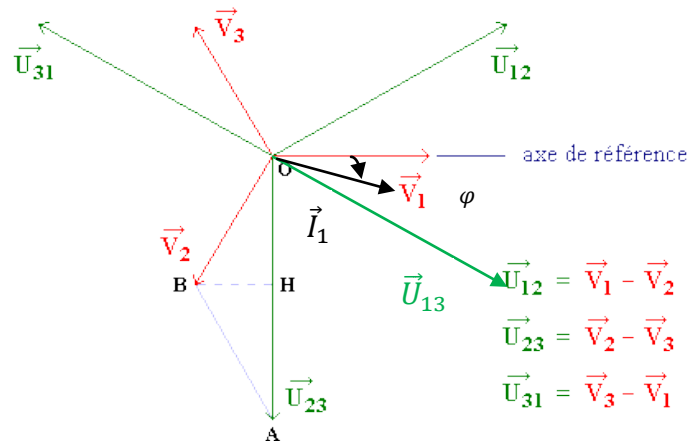


Figure 3.10 : Représentation de Fresnel des tensions et des courants.

Dans ce cas particulier on peut vérifier directement que :

$$\begin{aligned} P_{13} + P_{23} &= UI \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right] \\ &= UI \left[2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{6} \right] \\ &= \sqrt{3} UI \cos \varphi \\ P_{13} + P_{23} &= P \\ P_{13} - P_{23} &= UI \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right] \\ &= UI \left[2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] \end{aligned}$$

$$= UI \sin \varphi$$

$$P_{13} - P_{23} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Donc :

$$Q = \sqrt{3}(P_{13} - P_{23})$$

En régime équilibré, la méthode des deux wattmètres fournit donc des renseignements précis sur le système étudié :

$$P = P_{13} + P_{23}$$

$$Q = \sqrt{3}(P_{13} - P_{23})$$

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P}$$

P_{13} et P_{23} considérées séparément n'ont toujours aucun rapport avec la puissance dissipée dans une phase, mais on peut tout de même tirer quelques renseignements dans certains cas particulier :

- Charge resistive :

$$\varphi = 0 \rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow P_{13} = P_{23}$$

- Charge inductive :

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \cos \varphi < 1 \Rightarrow P_{13} > P_{23}$$

- Charge capacitive :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0 \rightarrow 0 \leq \cos \varphi < 1 \Rightarrow P_{23} > P_{13}$$

3.7. Amélioration du facteur de puissance " $\cos \varphi$ "

L'amélioration du facteur de puissance est une technique utilisée dans les systèmes électriques pour améliorer l'efficacité énergétique des installations.

Elle consiste à réduire la puissance réactive initialement absorbée par les équipements inductifs tels que les moteurs, transformateurs ou luminaires à ballast. Cette correction se fait généralement par l'installation de condensateurs qui produisent une puissance réactive opposée, annulant partiellement ou totalement celle consommée par les charges.

L'objectif est d'augmenter le facteur de puissance, afin de diminuer les pertes d'énergie, éviter les surtensions et éviter les pénalités imposées par les fournisseurs de l'électricité.

En Algérie, dans le cas d'installations industrielles, la SONEGAS pénalise les clients lorsque le facteur de puissance est inférieur à 0.8.

On désigne l'ajoute de condensateur par l'expression « Compensation de l'énergie réactive ».

Calcul de la capacité des condensateurs de compensation

a) Couplage des condensateurs en triangle

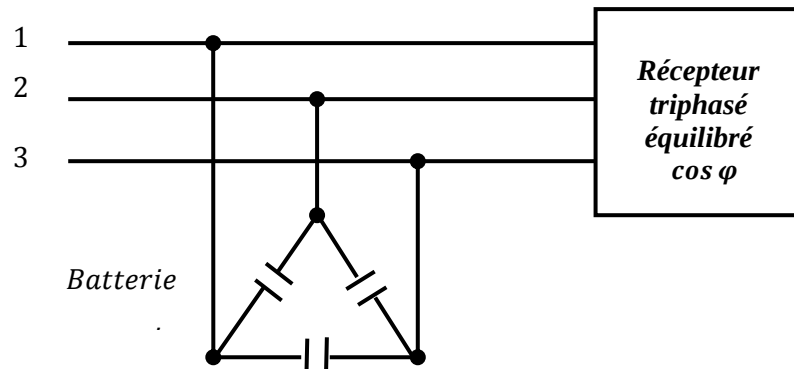


Figure 3.9 : Branchement de la batterie de condensateurs.

Puissance réactive absorbée par un condensateur :

$$Q_{C1} = -C\omega U^2$$

Signe (–) signifie que le condensateur fournit de la puissance réactive)

La puissance réactive absorbée par les trois condensateurs :

$$Q_C = 3Q_{C1} = -3C\omega U^2$$

Tension aux bornes d'un condensateur : U

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Charge seule	P	$Q = P. \tan \varphi$	On a $\cos \varphi$
Batterie condensateurs	0	$Q_C = -3C\omega U^2$	0
Charge+condensateurs	P	$Q' = Q + Q_C = P. \tan \varphi'$	On veut $\cos \varphi'$

Tableau 3.1 : Détermination de la capacité du condensateur.

On en déduit la capacité du condensateur de la manière suivante :

$$Q_c = -3C\omega U^2 = Q' - Q$$

$$-3C\omega U^2 = P \cdot \tan \varphi' - P \cdot \tan \varphi$$

$$C_\Delta = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega U^2}$$

b) Couplage en étoile des condensateurs

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que la capacité du condensateur est donnée par la relation :

$$C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega V^2} = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega U^2} = 3C_\Delta$$

Le couplage en étoile est donc moins intéressant puisque la capacité des condensateurs nécessaires est trois fois plus grande que pour le couplage en triangle. Plus la capacité est grande, plus le condensateur est volumineux et onéreux.

3.8. Définition du théorème de Fortescue

En électrotechnique, la transformation de Fortescue est utilisée afin de simplifier l'analyse des systèmes électriques triphasés (que ce soit des courants ou des tensions) déséquilibrés.

Il s'agit mathématiquement d'un changement de base. L'idée de base est que tout système triphasé déséquilibré peut être représenté comme la somme de trois systèmes triphasés symétriques

- un système équilibré direct ;
- un système équilibré inverse ;
- un système équilibré homopolaire.

3.9. Composantes symétriques

Composante directe (ou positive)

Les trois tensions ou courants sont de même amplitude, déphasés de 120° dans l'ordre normal ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$). Elle représente le comportement normal du système.

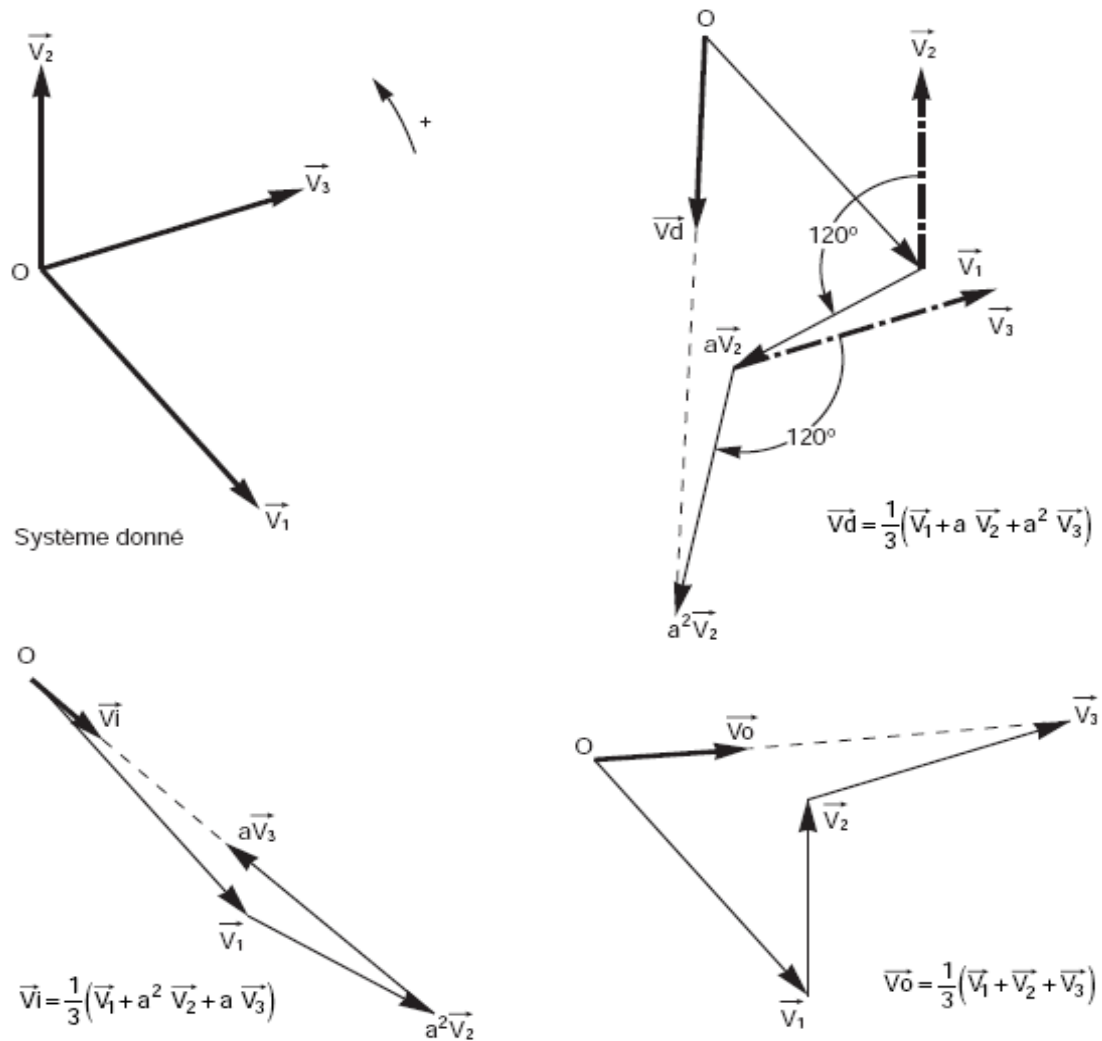


Figure 3.10 : Les composantes symétriques des tensions.

Composante inverse (ou négative)

Les trois tensions ou courants sont de même amplitude, mais déphasés de 120° dans l'ordre inverse ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$). Elle représente les déséquilibres causés par des défauts ou perturbations.

Composante homopolaire (zéro)

Les trois tensions ou courants ont la même amplitude et le même angle. Se manifeste principalement en cas de défauts à la terre ou de charges non équilibrées avec retour par neutre.

Composantes symétriques appliquées aux tensions

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_{2d} + \vec{V}_{2i} + \vec{V}_{20} \\ \vec{V}_3 &= \vec{V}_{3d} + \vec{V}_{3i} + \vec{V}_{30}\end{aligned}$$

Pour rendre les écritures plus simple, nous remplaçons la notation $[120^\circ$ par un opérateur plus simple a , avec :

$$\begin{aligned}a &= 1[120^\circ \\a^3 &= 1 \\1 + a + a^2 &= 0 \\a &= e^{j\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_2 &= a^2\vec{V}_{1d} + a\vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_3 &= a\vec{V}_{1d} + a^2\vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10}\end{aligned}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_{10} \\ \vec{V}_{1d} \\ \vec{V}_{1i} \end{bmatrix}$$

Qui s'appelle matrice de Fortescue.

Si on fait la somme vectorielle de ces trois équations, on obtient :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (1 + a^2 + a)\vec{V}_{1d} + (1 + a + a^2)\vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10}$$

On aura :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 3\vec{V}_{10}$$

Donc :

$$\vec{V}_{10} = \frac{1}{3}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

Au lieu de faire directement la somme des trois équations, on peut avancer la phase 2 de 120° en multipliant tous les termes de la deuxième équation par l'opérateur a et retarder la phase 3 de 120° en multipliant tous les termes de la troisième équation par a^2 . On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10} \\ a\vec{V}_2 &= \vec{V}_{1d} + a^2\vec{V}_{1i} + a\vec{V}_{10} \\ a^2\vec{V}_3 &= \vec{V}_{1d} + a\vec{V}_{1i} + a^2\vec{V}_{10}\end{aligned}$$

On fait la somme, on aura :

$$\vec{V}_{1d} = \frac{1}{3}(\vec{V}_1 + a\vec{V}_2 + a^2\vec{V}_3)$$

Cette fois si on fait retarder la phase 2 de 120° et qu'on avance la phase 3 de 120° , on obtient :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + \vec{V}_{10}$$

$$a^2 \vec{V}_2 = a \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + a^2 \vec{V}_{10}$$

$$a \vec{V}_3 = a^2 \vec{V}_{1d} + \vec{V}_{1i} + a \vec{V}_{10}$$

Lorsque on fait la somme ; on obtient :

$$\vec{V}_{1i} = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + a^2 \vec{V}_2 + a \vec{V}_3)$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_{1d} \\ \vec{V}_{1i} \\ \vec{V}_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

C'est la matrice inverse de Fortescue.

Cette équation démontre que tout système déséquilibré, peut être remplacé par trois systèmes équilibrés.

Exemple :

Considérons le système déséquilibré suivant :

$$\vec{V}_1 = 117 \angle 0^\circ V$$

$$\vec{V}_2 = 115 \angle -119^\circ V$$

$$\vec{V}_3 = 119 \angle 121^\circ V$$

Les composantes symétriques directe, inverse et homopolaire sont :

$$\vec{V}_{1d} = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2 + a^2 \vec{V}_3)$$

$$\vec{V}_{1d} = \frac{1}{3} (117 \angle 0^\circ + 115 \angle (-119^\circ + 120^\circ) + 119 \angle (121^\circ - 120^\circ))$$

$$\vec{V}_{1d} = 117 + j 1.4 = 117 \angle 0.7^\circ V$$

Et

$$\vec{V}_{1i} = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + a^2 \vec{V}_2 + a \vec{V}_3)$$

$$\vec{V}_{1i} = \frac{1}{3} (117 \angle 0^\circ + 115 \angle (-119^\circ - 120^\circ) + 119 \angle (121^\circ + 120^\circ))$$

$$\vec{V}_{1i} = 0 - j 1.8 = 1.8 \angle -89.2^\circ V$$

Et pour la composante homopolaire :

$$\vec{V}_{10} = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

$$\vec{V}_{10} = \frac{1}{3} (117 \angle 0^\circ + 115 \angle -119^\circ + 119 \angle 121^\circ)$$

$$\vec{V}_{10} = 0 + j 0.5 = 0.5 \angle 91.7^\circ V$$

Composantes symétriques appliquées aux courants

Si les courants I_1 , I_2 et I_3 sont les courants des trois phases 1,2 et 3, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \vec{I}_{1d} + \vec{I}_{1i} + \vec{I}_{10} \\ \vec{I}_2 &= \vec{I}_{2d} + \vec{I}_{2i} + \vec{I}_{20} \\ \vec{I}_3 &= \vec{I}_{3d} + \vec{I}_{3i} + \vec{I}_{30}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \vec{I}_{1d} + \vec{I}_{1i} + \vec{I}_{10} \\ \vec{I}_2 &= a^2 \vec{I}_{1d} + a \vec{I}_{1i} + \vec{I}_{10} \\ \vec{I}_3 &= a \vec{I}_{1d} + a^2 \vec{I}_{1i} + \vec{I}_{10}\end{aligned}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_{10} \\ \vec{I}_{1d} \\ \vec{I}_{1i} \end{bmatrix}$$

On aura donc :

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_{1d} \\ \vec{I}_{1i} \\ \vec{I}_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un système équilibré de vecteurs courant parfaitement équilibré de séquence 1,2 et 3, les systèmes inverse et homopolaire sont nuls comme c'est le cas pour un système de tensions équilibrées.

Il ne peut pas y avoir non plus de composante homopolaire dans le cas des vecteurs de courants de ligne d'un circuit triphasé en triangle ou en étoile sans fil neutre. La présence de courant homopolaire supposerait une résultante au point neutre, ce qui est physiquement impossible en l'absence de fil neutre. Par contre, dans un circuit à quatre fils, il n'y a que la composante homopolaire qui circule dans le fil neutre. Dans ce cas le courant dans le fil neutre est égal à trois fois le courant homopolaire.

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{10} + \vec{I}_{20} + \vec{I}_{30} = 3\vec{I}_{10}$$

Composantes symétriques appliquées aux impédances

Si les impédances Z_1 , Z_2 et Z_3 sont les impédances des trois phases 1,2 et 3, on peut écrire :

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_{1d} + \vec{Z}_{1i} + \vec{Z}_{10}$$

$$\begin{aligned}\vec{Z}_2 &= \vec{Z}_{2d} + \vec{Z}_{2i} + \vec{Z}_{20} \\ \vec{Z}_3 &= \vec{Z}_{3d} + \vec{Z}_{3i} + \vec{Z}_{30}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_{1d} \\ \vec{Z}_{1i} \\ \vec{Z}_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une charge équilibrée c à d : $Z_1 = Z_2 = Z_3$, on obtient :

$$\begin{aligned}Z_{10} &= Z_1 \\ Z_{1d} &= 0 \\ Z_{i0} &= 0\end{aligned}$$

3.10. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 03

Exercice 3.1

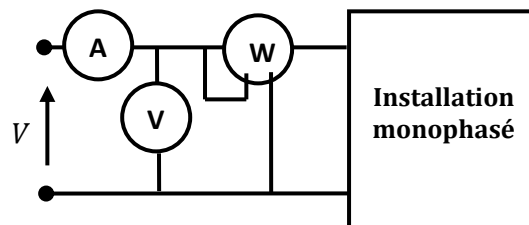
On alimente une installation monophasée avec une tension alternative sinusoïdale de fréquence

50HZ et on a mesuré : $V = 51\text{ V}$, $I = 1,7\text{ A}$ et $P = 65\text{ W}$.

1. Déterminer les puissances apparente et réactive. En déduire le facteur de puissance ?

Pourquoi ? Que faudrait-il faire pour améliorer la situation ?

2. Calculer alors l'impédance, la résistance et la réactance de l'installation.
3. Calculer la valeur du condensateur à installer pour ramener le facteur de puissance à 0,93.
4. Préciser ce que deviennent la puissance absorbée, la puissance apparente et l'intensité en ligne.



Solution de l'exercice 3.1

1. La puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance :

$$S = VI = 51 \cdot 1,7 = 86,7\text{ VA}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \Rightarrow Q = \sqrt{(86,7)^2 - (65)^2} = \sqrt{3292} = 57,4\text{ Var}$$

Le facteur de puissance :

$$F = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{65}{86,7} = 0,75$$

Le facteur de puissance est dégradé, parce que Q est élevée. Pour améliorer ce facteur il faut fournir de la puissance réactive. Pour cela, il convient de rajouter une batterie de condensateurs aux bornes de l'installation.

2. L'impédance :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{51}{1,7} = 30\ \Omega$$

La résistance :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow R = Z \cdot \cos \varphi = 30 \cdot 0,75 = 22,5\ \Omega$$

La réactance :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \Rightarrow X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(30)^2 - (22,5)^2} = 19,8 \Omega$$

Ou :

$$S = ZI^2 \Rightarrow Z = \frac{S}{I^2} = \frac{86,7}{(1,7)^2} = 30 \Omega$$

$$P = RI^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{6,5}{(1,7)^2} = 22,5 \Omega$$

$$Q = XI^2 \Rightarrow X = \frac{Q}{I^2} = \frac{57,4}{(1,7)^2} = 19,8 \Omega$$

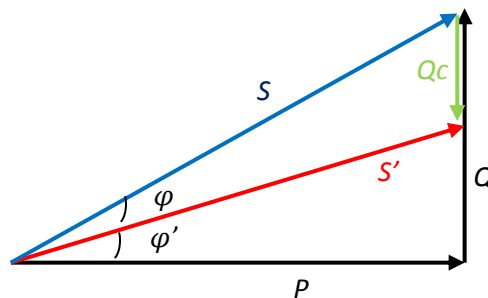
3. La valeur du condensateur à installer pour ramener le facteur de puissance à 0,93 :

$$\cos \varphi' = 0,93 \Rightarrow \varphi' = 21,56^\circ \Rightarrow \tan \varphi' = 0,395 = \frac{Q - Q_C}{P}$$

$$Q_C = Q - P \cdot \tan \varphi' = 57,4 - (65 \cdot 0,395) = 31,725 \text{ Var}$$

$$Q_C = -V^2 C \omega = -V^2 C 2\pi f$$

$$C = \frac{|-Q_C|}{V^2 \omega} = \frac{31,725}{51^2 \cdot 2\pi \cdot 50} = 38,8 \mu F$$



4. La puissance absorbée P est inchangée

$$P = 65 \text{ W}$$

Avant la compensation :

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Après la compensation :

$$P = V \cdot I' \cdot \cos \varphi'$$

La puissance apparente devienne :

$$S' = \sqrt{P^2 + (Q - Q_C)^2} = \sqrt{65^2 + (57,4 - 31,7)^2} = 69,9 \text{ VA}$$

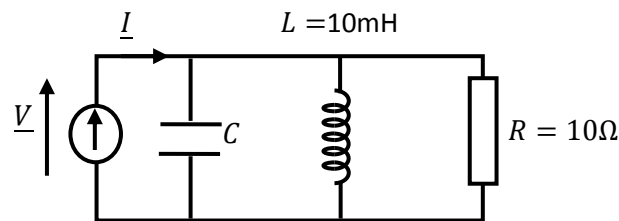
L'intensité :

$$I' = \frac{S'}{V} = \frac{69,9}{51} = 1,37 \text{ A}$$

Exercice 3.2

On considère la charge monophasée sous 127 V, représentée sur la figure au - dessous :

1. Calculer l'expression littérale de la puissance apparente complexe $\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^*$ en fonction de V, R, L et C .
2. En déduire l'expression littérale de la puissance active P et de la puissance réactive Q consommées par cette charge.
3. Calculer la valeur de la capacité C permettant d'annuler la valeur de Q .
4. Calculer, en utilisant la valeur de C obtenue, la valeur efficace du courant absorbé par l'ensemble de ce circuit.
5. À quoi est alors équivalent ce circuit pour cette valeur particulière de la capacité ?

**Solution de l'exercice 3.2**

1. La puissance apparente complexe $\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^*$ en fonction de V, R, L et C

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{V}{\underline{I}} \Rightarrow \underline{I} = \frac{V}{\underline{Z}_{eq}} \Rightarrow \underline{I}^* = \left(\frac{V}{\underline{Z}_{eq}} \right)^* = \frac{V^*}{\underline{Z}_{eq}^*}$$

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \frac{V^*}{\underline{Z}_{eq}^*} = \frac{V^2}{\underline{Z}_{eq}^*}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_C // \underline{Z}_L // \underline{Z}_R = \left(\frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \right) // \underline{Z}_R = \frac{\left(\frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \right) \cdot \underline{Z}_R}{\left(\frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \right) + \underline{Z}_R}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{RL}{L + jRC \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

Alors :

$$\underline{S} = \frac{V^2}{\underline{Z}_{eq}^*} = \frac{V^2}{RL} \cdot \left(L - jRC \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right)$$

2. La puissance active :

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

La puissance réactive :

$$Q = -\frac{V^2}{RL} \cdot RC \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = \frac{V^2 C}{L} \left(\frac{1}{C\omega} + L\omega \right)$$

3. Calcul de la capacité permettant d'annuler Q :

$$Q = 0 \Rightarrow \frac{V^2 C}{L} \left(\frac{1}{C\omega} + L\omega \right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2}$$

4. Le courant absorbé :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{RL}{L + j \frac{R}{L\omega^2} \left(L\omega - \frac{1}{\frac{1}{L\omega^2} \cdot \omega} \right)} = \frac{RL}{L + j \frac{R}{L\omega^2} (L\omega - L\omega)} = R$$

D'où :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{127}{10} = 12,7 \text{ A}$$

5. Dans ce cas le dipôle est équivalent à un dipôle résistif pur.

Exercice 3.3

Un atelier monophasé est constitué de trois ensembles de machines, constituant les charges (1), (2) et (3), mises en parallèle sur la même tension sinusoïdale à 50HZ de valeur efficace $U = 230 \text{ V}$.

On récapitule dans le tableau ci-dessous les mesures faites sur chacune de ces charges.

Charge 1	Charge 2	Charge 3
$P_1 = 20 \text{ kW}$	$S_2 = 45 \text{ kVA}$	$S_3 = 10 \text{ kVA}$
$Q_1 = 15 \text{ kVar}$	$\cos\varphi_2 = 0,6$	$Q_3 = -5 \text{ kVar}$

1. Calculer pour chaque charge l'ensemble des grandeurs électriques la caractérisant : courant absorbé, puissances actives, réactives, apparentes, et facteur de puissance. On notera ces grandeurs $I_1, I_2, I_3, P_2, P_3, Q_2$, etc.
2. En déduire la valeur de la puissance active totale P et de la puissance réactive totale Q consommées par la charge totale. Calculer également la puissance apparente totale S , le facteur de puissance global $\cos\varphi$ ainsi que le courant total absorbé I_{eff} .

Solution de l'exercice 3.3

1. Calcul de I_1, I_2, I_3, P_2, P_3 et Q_2 :

Charge 01 :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 20 \text{ kW} \\
 Q_1 &= 15 \text{ kVar} \\
 S_1 &= \sqrt{(20)^2 + (15)^2} = 25 \text{ kVA} \\
 I_1 &= \frac{S_1}{U_{eff}} = 108,7 \text{ A} \\
 \cos \varphi_1 &= \frac{P_1}{S_1} = 0,8
 \end{aligned}$$

Charge 02 :

$$\begin{aligned}
 S_2 &= 45 \text{ kVA} \\
 \cos \varphi_2 &= 0,6 \\
 P_2 &= S_2 \cdot \cos \varphi_2 = 27 \text{ kW} \\
 Q_2 &= S_2 \cdot \sin \varphi_2 = 36 \text{ kVar} \\
 I_2 &= \frac{S_2}{U_{eff}} = 195,7 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Charge 03 :

$$\begin{aligned}
 S_3 &= 10 \text{ kVA} \\
 Q_3 &= -5 \text{ kVar} \\
 P_3 &= \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = 8,66 \text{ kW} \\
 I_3 &= \frac{S_3}{U_{eff}} = 43,5 \text{ A} \\
 \cos \varphi_3 &= \frac{P_3}{S_3} = 0,86
 \end{aligned}$$

2. En déduire P , Q , S , $\cos \varphi$ et I_{eff} :

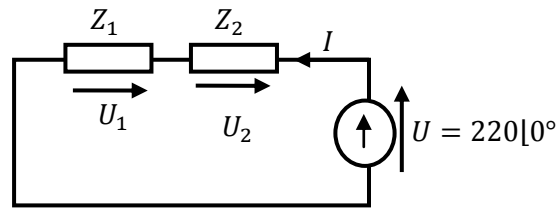
$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 + P_3 = 20 + 27 + 8,66 = 55,66 \text{ kW} \\
 Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 15 + 36 - 5 = 46 \text{ kVar} \\
 S &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(55,66)^2 + (46)^2} = 72,2 \text{ kVA} \\
 \cos \varphi &= \frac{P}{S} = \frac{55,66}{72,2} = 0,77 \\
 I_{eff} &= \frac{S}{U_{eff}} = \frac{72,2 \cdot 10^3}{230} = 314 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Exercice 3.4

Le circuit de la figure au-dessous est alimenté sous une tension alternative $U = 220 \angle 0^\circ$ consomme une puissance de 2200 VA .

Le circuit est constitué de deux impédances $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ et $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$

Avec : $X_1 = 3\Omega$ et $R_2 = 2\Omega$. L'impédance Z_1 dissipe une puissance de 300 W et l'impédance Z_2 consomme une puissance de 400 Var .



1. Calculer les éléments R_1 et X_2 .
2. Calculer les valeurs efficaces des tension U_1 et U_2 .

Solution de l'exercice 3.4

1. Calcul de R_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= R_1 + jX_1 \\ \underline{Z}_2 &= R_2 + jX_2 \\ S &= UI \Rightarrow I = \frac{S}{U} = \frac{2200}{220} = 10\text{ A} \\ P_1 &= R_1 I^2 \Rightarrow R_1 = \frac{P_1}{I^2} = \frac{300}{10^2} = 3\ \Omega \\ Q_2 &= X_2 I^2 \Rightarrow X_2 = \frac{Q_2}{I^2} = \frac{400}{10^2} = 4\ \Omega\end{aligned}$$

2. Les tensions en valeurs efficaces :

$$\begin{aligned}Z_1 &= \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = 4,24\ \Omega \\ Z_2 &= \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 4,47\ \Omega \\ Z &= \frac{U}{I} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = Z_1 \cdot I = 4,24 \cdot 10 = 42,4\text{ V} \\ U_2 = Z_2 \cdot I = 4,47 \cdot 10 = 44,72\text{ V} \end{cases}\end{aligned}$$

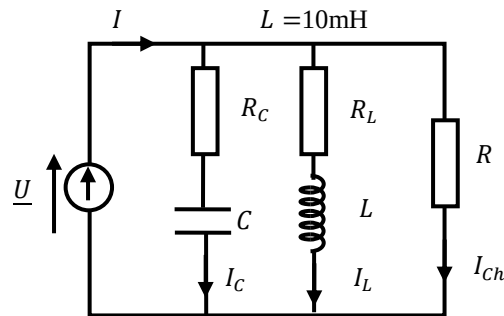
Exercice 3.5

Une installation électrique est composée de 04 ensembles de charges en parallèle sur une tension alternative monophasée de 220 V , 50 Hz , comme suit (voir la figure au-dessous) :

- 05 radiateurs de 200 W (résistif) ;
- 06 lampes à incandescence 60 W chacune ;
- 02 moteurs absorbant un courant de 3 A avec un $\cos\varphi = 0.65$;
- Une charge capacitive = $0,5\text{ kVA}$, $\cos\varphi = 0,6$.

1. Quelle est la puissance active P et réactive Q consommée par l'installation.

2. Quel est le courant total absorbé ainsi que le facteur de puissance de l'installation.



Solution de l'exercice 3.5

Charge 1 :

$$P_1 = 200 \text{ W}$$

Charge 2 :

$$P_2 = 6.60 = 360 \text{ W}$$

Charge 3 :

$$S_3 = UI = 220.3 = 660 \text{ VA}$$

$$P_3 = S_3 \cdot \cos \varphi_3 = 660.0,65 = 429 \text{ W}$$

$$Q_3 = S_3 \cdot \sin \varphi_3 = 660 \cdot \sin(\arccos(0,65)) = 501,56 \text{ Var}$$

Charge 4 :

$$S_4 = 0,5 \text{ kVA}$$

$$P_4 = S_4 \cdot \cos \varphi_4 = 0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6 = 300 \text{ W}$$

$$Q_4 = S_4 \cdot \sin \varphi_4 = 0,5 \cdot 10^3 \cdot \sin(\arccos(0,6)) = 400 \text{ Var}$$

Alors :

$$P_{Totale} = \sum P_i = 200 + 360 + 429 + 300 = 1\,289 \text{ W}$$

$$Q_{Totale} = \sum Q_i = 0 + 0 + 501,56 + 400 = 901,56 \text{ Var}$$

$$S_{Totale} = \sqrt{P_{Totale}^2 + Q_{Totale}^2} = 1\,573 \text{ VA}$$

$$S_{Totale} = UI_{Totale} \Rightarrow I_{Totale} = \frac{S_{Totale}}{U} = \frac{1\,573}{220} = 7,15 \text{ A}$$

D'où :

$$F = \cos \varphi = \frac{P_{Totale}}{S_{Totale}} = 0,82$$

Exercice 3.6

Un sèche-cheveux est raccordé sur le réseau 230 V, 50 Hz. Le corps de chauffe a une puissance de 1 kW, un courant de 350 mA circule dans le moteur et un condensateur est raccordé en parallèle sur l'ensemble pour corriger le déphasage provoqué par l'inductance du moteur.

Le courant mesuré sur le condensateur vaut 300 mA.

Les angles de déphasages sont les suivants : $\varphi_C = 66^\circ$ et $\varphi_L = 75^\circ$

- Calculer la valeur de la résistance du corps de chauffe, les valeurs de l'inductance et du condensateur.

Solution de l'exercice 3.6

Calcul de la résistance du corps de chauffe, de l'inductance et du condensateur :

Pour la branche RC :

$$\underline{Z}_{RC} = R_C + jX_C = R_C - j\frac{1}{C\omega} = |\underline{Z}_{RC}|(\cos \varphi_C + j \sin \varphi_C)$$

$$Z_{RC} = \frac{U}{I_C} = \frac{230}{0,3} = 766,7 \, \Omega$$

$$R_C = Z_{RC} \cdot \cos \varphi_C = 766,7 \cdot \cos(66^\circ) = 311,84 \, \Omega$$

$$X_C = Z_{RC} \cdot \sin \varphi_C = 766,7 \cdot \sin(66^\circ) = 700,4 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{700,4 \cdot 2\pi \cdot 50} = 4,544 \, \mu F$$

Pour la branche RL :

$$Z_{RL} = \frac{U}{I_L} = \frac{230}{0,35} = 657,12 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{RL} = R_L + jX_L = R_L + jL\omega = |\underline{Z}_{RL}|(\cos \varphi_L + j \sin \varphi_L)$$

$$R_L = Z_{RL} \cdot \cos \varphi_L = 657,12 \cdot \cos(75^\circ) = 170,075 \, \Omega$$

$$X_L = Z_{RL} \cdot \sin \varphi_L = 657,12 \cdot \sin(75^\circ) = 634,73 \, \Omega$$

$$X_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{634,73}{2\pi \cdot 50} = 2,02 \, H$$

$$P = RI^2 = R \cdot \frac{U^2}{R^2} = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = \frac{(230)^2}{10^3} = 52,9 \, \Omega$$

Exercice 3.7

Un moteur monophasé, de puissance mécanique utile 3 CV, de rendement 0,8, consomme un courant de 35 A sous la tension sinusoïdale de valeur efficace 127 V et de fréquence 50 Hz.

1. Calculer les puissances, active, apparente et réactive ainsi que son facteur de puissance ;
2. Calculer le condensateur nécessaire à placer en parallèle avec le moteur pour relever le facteur de puissance à 0,9;
3. Calculer la nouvelle intensité du courant absorbé en ligne.

Solution de l'exercice 3.7

$$P_{mecanique} = 3CV(Cheval - Vapeur)$$

$$1CV = 735,49 W$$

1. La puissance active :

$$\rho = \frac{P_{mecanique}}{P} \Rightarrow P = \frac{P_{mecanique}}{\rho} = \frac{3.735,49}{0,8} = 2\,758,08 W$$

La puissance apparente :

$$S = VI = 35.127 = 4\,445 VA$$

La puissance réactive :

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 3\,485,83 Var$$

Le facteur de puissance :

$$F = \frac{P}{S} = \frac{2\,758,08}{4\,445} = 0,62$$

2. Calcul de C pour que $\cos\varphi' = 0,9$:

$$Q_C = -C\omega V^2 = Q - Q'$$

$$Q = P \cdot \tan\varphi$$

$$Q' = P \cdot \tan\varphi'$$

$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2} = 424,5 \mu F$$

3. Calcul de la nouvelle intensité :

$$P = P' = VI' \cos\varphi' \Rightarrow I' = \frac{P}{V \cos\varphi'} = 24,13 A$$

Exercice 3.8

- a) Trois condensateurs de capacité $C = 50\mu F$ sont couplés en triangle. Ils sont alimentés par un réseau triphasé $U = 380 V$, $f = 50HZ$. calculer :

1. L'intensité efficace J circulant dans chaque condensateur.
2. l'intensité efficace I du courant en ligne.
3. La puissance réactive du récepteur.
4. La tension maximale aux bornes d'un condensateur.

- b) On remplace le récepteur précédent par trois autres condensateurs de capacité C' couplés en étoile. Calculer :

1. la tension maximale aux bornes d'un condensateur.
2. La capacité C' pour que la puissance réactive du second récepteur soit la même que celle du premier.

Solution de l'exercice 3.8

En couplage triangle :

Système équilibré :

$$C = 50\mu F$$

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$$

$$J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

$$U = V$$

$$I_L = \sqrt{3}.J$$

1. L'intensité efficace J circulant dans chaque condensateur :

$$\underline{V} = \underline{Z}_C . J$$

$$\underline{V} = -j \frac{1}{C\omega} . J$$

$$Z_C = \frac{1}{C2\pi f} = \frac{1}{50.10^{-6}.2\pi.50} = 63,7\Omega$$

Alors :

$$J = \frac{V}{Z_C} = \frac{380}{63,7} = 5,97 A$$

2. L'intensité efficace I du courant en ligne :

$$I = \sqrt{3}.J = 10,34 A$$

3. La puissance réactive du récepteur :

$$Q = 3Q_C = 3(J.U.\sin\varphi) = 3.5,97.380.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -6\,805,8 Var$$

4. La tension maximale aux bornes d'un condensateur :

$$U_{max} = \sqrt{2}.U = \sqrt{2}.380 = 537,40 V$$

a) En couplage étoile :

1. La tension maximale aux bornes d'un condensateur :

$$U = \sqrt{3}.V$$

$$V_{max} = \sqrt{2}.\frac{U}{\sqrt{3}} = 310,27 V$$

2. $C' = ?$

$$Q'_C = Q_C = -6\,805,8 Var$$

Chaque condensateur est traversé par un courant $J(I = J = 10,34 A)$ et la tension aux bornes d'un condensateur est : $V = 219,39 V$

D'où :

$$Z_{C'} = \frac{V}{I} = \frac{1}{C'\omega} \Rightarrow C' = \frac{I}{V \cdot \omega} = \frac{10,34}{219,39 \cdot 2\pi \cdot 50} = 150,097 \mu F$$

$$Z_Y = 3Z_{\Delta}$$

Exercice 3.9

Une installation triphasée équilibrée est alimentée par un réseau 220 V, 380 V, 50HZ. Chaque fil de phase est assimilable à un circuit inductif série de résistance $r = 0,6 \Omega$ et d'inductance $L = 1,2 mH$. L'installation comporte 30 lampes à incandescence marquées 100 W – 200 V, également réparties sur les trois phases et deux moteurs triphasés M_1 et M_2 dont les caractéristiques nominales sont :

Moteur M_1 : $U = 380 V$; $f = 50HZ$; $P_{M_1} = 4 kW$; $\cos\varphi_1 = 0,6$ et rendement $\eta_1 = 80 \%$.

Moteur M_2 : $U = 380 V$; $f = 50HZ$; $P_{M_2} = 3 kW$; $\cos\varphi_2 = 0,7$ et rendement $\eta_2 = 85 \%$.

a) Lorsque tous les appareils fonctionnent ensemble, calculer :

1. La puissance active totale.
2. La puissance réactive totale.
3. La puissance apparente totale.
4. Le facteur de puissance de l'installation.
5. L'intensité efficace du courant dans chaque fil de ligne.
6. La valeur efficace U_1 de la tension au départ de la ligne.
7. Les pertes totales par effet joule dans les fils de ligne (les exprimer en pourcentage de la puissance P_1 au départ de la ligne).

b) Afin de relever le facteur de puissance de l'installation, trois condensateurs couplés en triangle sont branchés en parallèles aux bornes de l'installation. La capacité de chaque condensateur est $C = 35 \mu F$. Calculer :

1. La puissance réactive de l'ensemble installation-condensateurs.
2. Le facteur de puissance $\cos\varphi_2$.
3. L'intensité efficace I_2 du courant dans chaque fil de ligne.
4. La valeur efficace U_2 de la tension au départ de la ligne.
5. Les pertes totales par effet joule dans les fils de ligne (les exprimer en pourcentage de la puissance P_1 au départ de la ligne).
6. Quelles sont les améliorations apportées par le relèvement du facteur de puissance.

Solution de l'exercice 3.9

a.

1. La puissance active totale :

$$P_1 = 30.100 = 300 \text{ W}$$

On a :

$$\eta = \frac{\text{Puissance utile}(P_m)}{\text{Puissance recue}(P_e)}$$

$$P_e = P_2 = \frac{P_{M1}}{\eta_1} = \frac{4.10^3}{0,8} = 5000 \text{ W}$$

$$P_3 = \frac{P_{M2}}{\eta_2} = \frac{3.10^3}{0,85} = 3529,411 \text{ W}$$

$$P_{\text{Totale}} = P = P_1 + P_2 + P_3 = 11529,411 \text{ W}$$

2. Puissance réactive totale :

$$\text{Lampes} \equiv \text{Résistances} \Rightarrow Q_1 = 0$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \tan \varphi_1$$

$$\varphi_1 = \arccos(0,6) = 53,13^\circ$$

$$Q_2 = 5000 \cdot \tan(53,13^\circ) = 6666,64 \text{ Var}$$

$$Q_3 = P_2 \cdot \tan \varphi_2$$

$$\varphi_2 = \arccos(0,7) = 45,57^\circ$$

$$Q_3 = 3529,411 \cdot \tan(45,57^\circ) = 3600 \text{ Var}$$

$$Q_{\text{Totale}} = Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10267 \text{ Var}$$

3. Le facteur de puissance de l'installation :

$$S_{\text{Totale}} = S = \sqrt{(11529,411)^2 + (10267)^2} = 15440 \text{ VA}$$

$$F = \frac{P}{S} = \frac{11529,411}{15440} = 0,746$$

4. L'intensité efficace du courant dans chaque fil de ligne :

$$S = \sqrt{3}UI \Rightarrow I = \frac{S}{\sqrt{3}U} = \frac{15440}{\sqrt{3} \cdot 380} = 23,46 \text{ A}$$

5. La valeur efficace de U_1 au départ de ligne:

$$Z' = r + jX = r + jL\omega$$

$$|Z'| = \sqrt{(0,6)^2 + (1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50)^2} \approx 0,71 \Omega$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{380}{\sqrt{3} \cdot 23,46} = 9,35 \Omega$$

$$Z_{eq} = Z + Z' = 9,35 + 0,71 = 10,06 \Omega = \frac{V_1}{I} \Rightarrow V_1 = 236 \text{ V}$$

$$U_1 = \sqrt{3} \cdot V_1 = 408,8 \text{ V}$$

6. Pertes par effet Joule dans un fil :

$$P_{J_1} = r \cdot I^2 = 0,6 \cdot (23,46)^2 = 330 \text{ W}$$

Dans les trois fils :

$$P_J = 3P_{J_1} = 3 \cdot 330 = 990 \text{ W}$$

La puissance au début de la ligne :

$$P_1 = 990 + 11\,529,411 = 12\,519,411 \text{ W}$$

Alors les pertes par effet Joule représente :

$$\begin{aligned} 12\,519,411 \text{ W} &\rightarrow 100 \% \\ 990 \text{ W} &\rightarrow x \% \\ x \% &= 990 \cdot \frac{100}{12\,519,411} \approx 8 \% \end{aligned}$$

b.

1. La puissance réactive de l'ensemble installation plus condensateur :

La puissance réactive d'un condensateur est :

$$Q_C = -C\omega U^2$$

Alors, la puissance réactive des trois condensateurs est :

$$Q_{3C} = -3C\omega U^2 = -3 \cdot 35 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot (380)^2 = -4\,760,87 \text{ Var}$$

D'où :

$$Q_{Totale} = Q + Q_{3C} = 10\,267 - 4\,760,87 = 5\,506,13 \text{ Var}$$

2. Le facteur de puissance $\cos \varphi_2$:

$$S_2 = \sqrt{(11\,529,411)^2 + (5\,506,13)^2} = 12\,777,65 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{P}{S_2} = \frac{11\,529,411}{12\,777,65} = 0,9$$

3. L'intensité efficace I_2 du courant dans chaque fil de ligne :

$$I_2 = \frac{S_2}{V_2} = \frac{12\,777,65}{\sqrt{3} \cdot 380} = 19,4 \text{ A}$$

4. La valeur efficace de la tension U_2 au départ de la ligne :

$$V = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,4 \text{ V}$$

$$Z = \frac{V}{I_2} = \frac{219,4}{19,4} = 11,3 \Omega$$

$$Z + Z' = \frac{V_1}{I_2} \Rightarrow V_1 = (0,71 + 11,3) \cdot 19,4 = 233 \text{ V}$$

Alors :

$$U_1 = \sqrt{3} \cdot V_1 = 403,56 \text{ V}$$

5. Les pertes totales par effet Joule :

$$rI^2 = 0,6 \cdot 19,4 = 225,81 \text{ W}$$

Dans les trois fils :

$$P_{Joule} = 3.225,81 = 677,43 \text{ W}$$

La puissance au début de la ligne :

$$P_2 = 11\,529,411 + 677,43 = 12\,206,43 \text{ W}$$

Les pertes par effet Joule représentent :

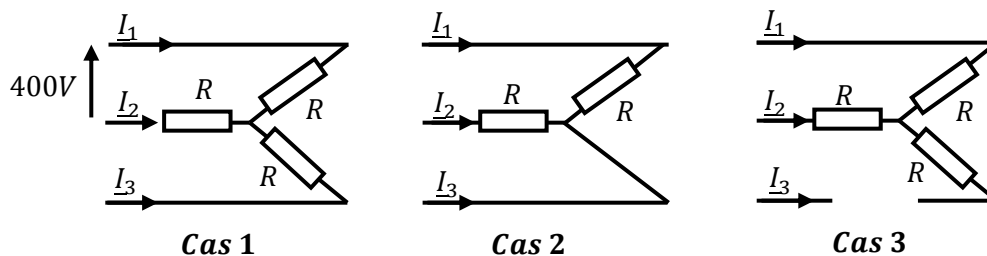
$$677,43 \cdot \frac{100}{12\,206,43} = 5,55 \%$$

6. Les améliorations appropriées par le relèvement du facteur de puissance :

- ✓ Diminution des pertes par effet Joule ;
- ✓ Diminution de la puissance apparente à fournir au départ de la ligne.

Exercice 3.10

- a) Un réseau triphasé ($U = 400$ entre phases, 50 Hz) alimente un récepteur résistif (couplage étoile sans neutre) : $R = 50 \text{ W}$.
 1. Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1 , I_2 , et I_3 .
 2. Calculer la puissance active P consommée par les trois résistances.
- b) Un court-circuit a lieu sur la phase 3 :
 1. Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1 et I_2 .
- c) La phase 3 est coupée :
 2. Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1 , I_2 , et I_3 .



Solution de l'exercice 3.10

1. Calcul des valeurs efficaces des courants en lignes cas(a) :

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{230}{50} = 4,62 \text{ A}$$

Système équilibré :

$$I_1 = I_2 = I_3$$

La puissance active consommée par les trois résistances :

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 4,62 \cdot 1 = 3,2 \text{ kW}$$

2. Calcul des valeurs efficaces des courants en lignes cas(b) :

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{400}{50} = 8 \text{ A} = I_2$$

3. Calcul des valeurs efficaces des courants en lignes cas(c) :

$$I_1 = \frac{U}{2R} = \frac{400}{2.50} = 4 \text{ A}$$

$$I_2 = 4 \text{ A}$$

$$I_3 = 0 \text{ A}$$

Exercice 3.11

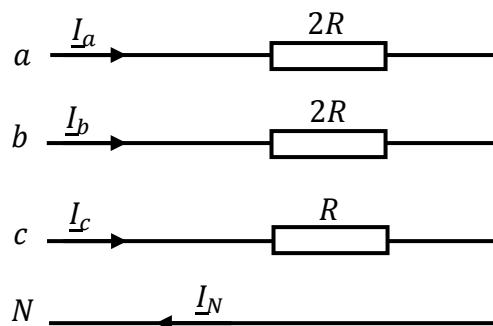
On considère le montage étoile suivant :

Le système d'alimentation est triphasé déséquilibré.

La résistance R est fixe, la phase « c » a été branchée par erreur en opposition de phase si bien que l'on écrit en notation complexe :

$$\underline{V}_a = V ; \underline{V}_b = a^2 V ; \underline{V}_c = -aV$$

On rappelle que : $1 + a + a^2 = 0$.



1. Déterminer les composantes de Fortescue du système des tensions.
2. Exprimer les courants $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c, \underline{I}_N$ en notation complexe en fonction de $\frac{V}{R}$.
En déduire les composantes de Fortescue du système des courants en fonction de $\frac{V}{R}$.

Solution de l'exercice 3.11

1. Détermination des composantes de Fortescue du système tensions :

On a :

$$\begin{cases} \underline{V}_a = V \\ \underline{V}_b = a^2 V \\ \underline{V}_c = -aV \end{cases}$$

Et :

$$1 + a + a^2 = 0 \Rightarrow 1 + a^2 = -a \Rightarrow 1 + a = -a^2$$

$$a^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{V}_o \\ \underline{V}_d \\ \underline{V}_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{V}_b \\ \underline{V}_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_o = \frac{1}{3}(\underline{V}_a + \underline{V}_b + \underline{V}_c) \\ \underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_a + a\underline{V}_b + a^2\underline{V}_c) \rightarrow (*) \\ \underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_a + a^2\underline{V}_b + a\underline{V}_c) \end{cases} \\ (*) \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_o = \frac{1}{3}(V + a^2V - aV) \\ \underline{V}_d = \frac{1}{3}(V + a(a^2V) + a^2(-aV)) \\ \underline{V}_i = \frac{1}{3}(V + a^2(a^2V) + a(-aV)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_o = \frac{1}{3}(V + a^2V - aV) \\ \underline{V}_d = \frac{1}{3}(V + a^3V - a^3V) \\ \underline{V}_i = \frac{1}{3}(V + a^4V - a^2V) \end{cases} \\ (*) \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_o = \frac{V}{3}(1 + a^2 - a) \\ \underline{V}_d = \frac{V}{3}(1 + a^3 - a^3) \\ \underline{V}_i = \frac{V}{3}(1 + a^4 - a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_o = -\frac{2}{3}aV \\ \underline{V}_d = \frac{V}{3} \\ \underline{V}_i = -\frac{2}{3}a^2V \end{cases} \end{aligned}$$

2. L'expression des courants en notation complexe :

On a :

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{\underline{V}_a}{\underline{I}_a} \Rightarrow \underline{I}_a = \frac{\underline{V}_a}{2R} = \frac{V}{2R} \\ 2R &= \frac{\underline{V}_b}{\underline{I}_b} \Rightarrow \underline{I}_b = \frac{\underline{V}_b}{2R} = \frac{a^2V}{2R} \\ R &= \frac{\underline{V}_c}{\underline{I}_c} \Rightarrow \underline{I}_c = \frac{\underline{V}_c}{R} = \frac{-aV}{R} \end{aligned}$$

Alors :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \frac{V}{2R} + \frac{a^2V}{2R} - \frac{aV}{R} = \frac{V}{2R}(1 + a^2 - 2a) = \frac{-3aV}{2R}$$

3. Les composantes de Fortescue du système courants en fonction de $\frac{V}{R}$:

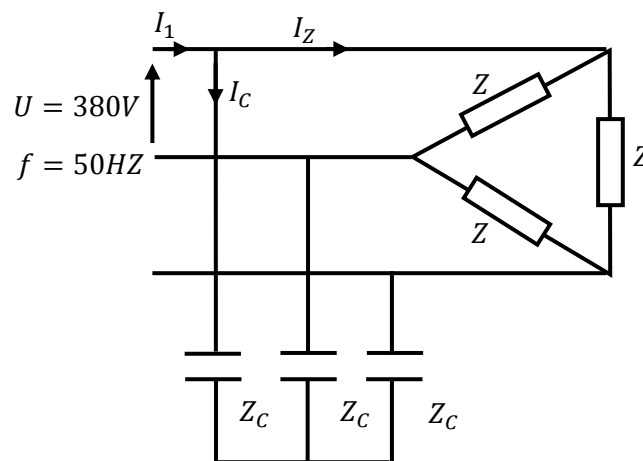
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_o \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_o = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) \\ \underline{I}_d = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + a\underline{I}_b + a^2\underline{I}_c) \rightarrow (**) \\ \underline{I}_i = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + a^2\underline{I}_b + a\underline{I}_c) \end{cases}$$

$$(**) \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{1}{3} \left(\frac{V}{2R} + a^2 \frac{V}{2R} - a \frac{V}{R} \right) \\ I_d = \frac{1}{3} \left(\frac{V}{2R} + a \left(a^2 \frac{V}{2R} \right) - a^2 \left(a \frac{V}{R} \right) \right) \\ I_i = \frac{1}{3} \left(\frac{V}{2R} + a^2 \left(a^2 \frac{V}{2R} \right) - a \left(a \frac{V}{R} \right) \right) \end{cases}$$

$$(**) \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{V}{3.2R} (1 + a^2 - 2a) \\ I_d = \frac{V}{3.2R} (1 + a^3 - 2a^3) \\ I_i = \frac{V}{3.2R} (1 + a^4 - 2a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_o = -\frac{aV}{2R} \\ I_d = 0 \\ I_i = -\frac{a^2V}{2R} \end{cases}$$

Exercice 3.12

Soit le circuit représenté par la figure ci-dessous:



Avec : $Z = 10\Omega$; $\cos\varphi 0.8(\text{inductif})$; $U = 380\text{ V}$; $f = 50\text{Hz}$.

Pour un facteur de puissance égal à 1 ($\cos\varphi = 1$), déterminées :

1. L'impédance Z_c des condensateurs;
2. Courant de ligne I_1 ;
3. Puissance active totale P

Solution de l'exercice 3.12

1. L'impédance Z_c :

$$3. U. I_z. \sin\varphi = -\sqrt{3}. U. I_c. \sin\varphi_c$$

$$\varphi_c = -90^\circ \Rightarrow \sin\varphi_c = -1$$

$$\sin\varphi = \sin(\arccos(0.8)) = 0.6$$

$$I_c = \frac{V}{Z_c} = \frac{U}{\sqrt{3} \cdot Z_c}$$

$$J_z = \frac{U}{Z}$$

Alors :

$$Z_c = 5,5 \Omega$$

2. La puissance active totale :

$$P_{Totale} = P_Z = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_1 \cdot \cos\varphi = 3UJ_z \cos\varphi = 3 \cdot U \cdot \frac{U}{Z} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1$$

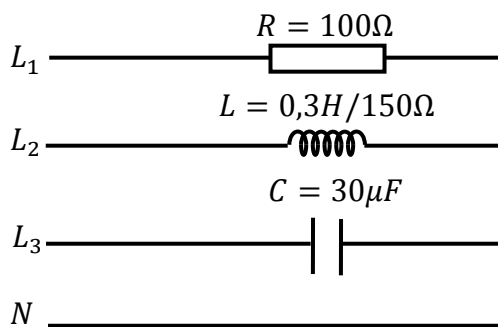
$$P_{Totale} = 3 \cdot \frac{380^2}{10} \cdot 0,8 = 34\,656 \text{ W}$$

3. Le courant en ligne I_1 :

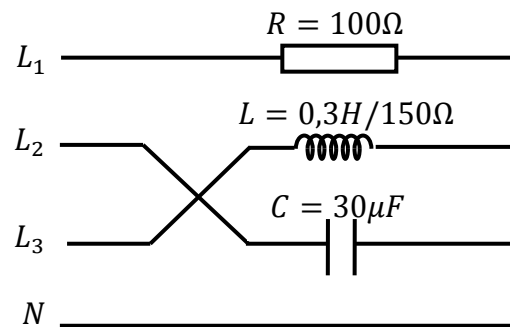
$$I_1 = \frac{P_{Totale}}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos\varphi} = \frac{34\,656}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 1} = 52,65 \text{ A}$$

Exercice 3.13

Trois récepteurs sont branchés en étoile sous $3 \times 400\text{V}/50 \text{ Hz}$.



Situation 1



Situation 2

Déterminer:

1. Le courant dans chaque élément.
2. Le courant de neutre pour la situation 1.
3. Le courant de neutre pour la situation 2 (L_2 et L_3 permutés).

Solution de l'exercice 3.13

1. Situation 1 :

Le courant dans chaque élément :

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{400|0^\circ}{\sqrt{3} \cdot R} = \frac{400|0^\circ}{\sqrt{3} \cdot 100} = 2,3 \text{ A}|0^\circ$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_L}$$

$$\underline{Z}_L = 150 + j0,3.2\pi.50 = 150 + j94,25 \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_L| = 177,15 \Omega \\ \varphi_L = 32,14^\circ \end{cases}$$

D'où :

$$\underline{I}_L = \frac{400[-120^\circ]}{\sqrt{3} \cdot \underline{Z}_L[\varphi_L]} = \frac{400[-120^\circ]}{\sqrt{3} \cdot 177,15[32,14^\circ]} = 1,30 A[-152,14^\circ]$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_C} = \frac{400[+120^\circ]}{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50}[-90^\circ]} = 2,17 A[210^\circ]$$

Ou :

$$\underline{I}_C = 2,17 A[-150^\circ]$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= 2,3(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) + 1,3(\cos(-152,14^\circ) + j\sin(-152,14^\circ)) \\ &\quad + 2,17(\cos(-150^\circ) + j\sin(-150^\circ)) \\ \underline{I}_N &= -0,7371 - j1,696 = 1,85 A[66,51^\circ] \end{aligned}$$

2. Situation 2 :

$$\underline{I}_R = 2,3 A[0^\circ]$$

$$\underline{I}_C = \frac{400[-120^\circ]}{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50}[-90^\circ]} = 2,17 A[-30^\circ]$$

$$\underline{I}_L = \frac{400[-240^\circ]}{\sqrt{3} \cdot 177,15[32,14^\circ]} = 1,31 A[-272,14^\circ]$$

Ou :

$$\underline{I}_L = 1,31 A[87,9^\circ]$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= 2,3(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) + 2,17(\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)) \\ &\quad + 1,31(\cos(87,9^\circ) + j\sin(87,9^\circ)) \\ \underline{I}_N &= 4,23637 + j0,2119 = 4,24 A[2,86^\circ] \end{aligned}$$

Ou :

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= 2,3(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) + 2,17(\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)) \\ &\quad + 1,31(\cos(-272,14^\circ) + j\sin(-272,14^\circ)) = 4,24 A[2,86^\circ] \end{aligned}$$

Exercice 3.14

Un moteur de rendement 0,8 et de facteur de puissance 0,9 est branché en triangle sous 400 V/50HZ. Le courant dans un enroulement est 12 A.

1. Calculer la puissance inscrite sur la plaque signalétique.
2. Calculer la puissance réactive.
3. Calculer la puissance apparente.

Solution de l'exercice 3.14

1. La puissance indiquée sur la plaque signalétique :

Le rendement est :

$$\eta = \frac{P_S}{P_E}$$

$$P_E = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{3} \cdot 12 \cdot 0,9 = 12\,960 \text{ W}$$

$$P_S = \eta \cdot P_E = 12\,960 \cdot 0,8 = 10\,368 \text{ W}$$

2. La puissance réactive :

$$Q = \sqrt{3} U I \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{3} \cdot 12 \cdot \sin(\arccos(0,9)) = 6\,276,81 \text{ Var}$$

3. La puissance apparente :

$$S = \sqrt{P_E^2 + Q^2} = 14\,400 \text{ VA}$$

Exercice 3.15

Sur un réseau (220V/380V, 50 HZ), on branche en étoile trois récepteurs identiques de résistance $R = 50\Omega$ en série avec une bobine $L = 500 \text{ mH}$ et une capacité $= 10\mu\text{F}$.

1. Déterminer l'impédance complexe de chaque récepteur. Calculer son module et son argument.
2. Déterminer la valeur efficace des courants en ligne, ainsi que leur déphasage par rapport aux tensions simples.
3. Calculer les puissances active et réactive consommées par le récepteur triphasé, ainsi que la puissance apparente.
4. Calculer la valeur des capacités C , câblées en étoile, permettant de relever le facteur de puissance à la valeur 1.

Solution de l'exercice 3.15

1. Les impédances :

Système équilibré : $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$

$$\underline{Z} = Z = R - j \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = Z = \sqrt{20^2 + \frac{1}{(20 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50)^2}} = 160,41 \Omega \\ \varphi = -82,84^\circ \end{cases}$$

2. La valeur efficace des courants en lignes :

Système équilibré : $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Couplage en étoile : $\Rightarrow \begin{cases} I = J \\ U = \sqrt{3}V \end{cases}$

$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{230}{160,41} = 1,434 \text{ A}$$

3. Les puissances :

Active :

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 1,434 \cdot \cos(-82,84^\circ) = 123,83 \text{ W}$$

Ou :

$$P = 3RI^2$$

Réactive :

$$Q = \sqrt{3}UI\sin\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 1,434 \cdot \sin(-82,84^\circ) = -985,75 \text{ Var}$$

Ou :

$$Q = -C\omega V^2$$

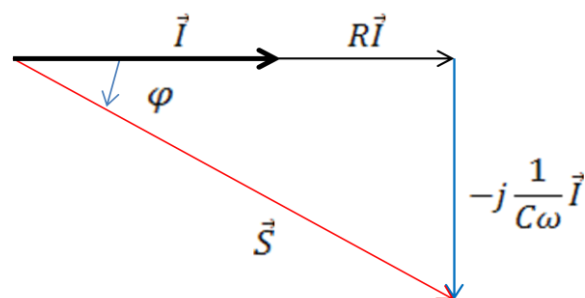
Apparente :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 993,5 \text{ VA}$$

Facteur de puissance :

$$F = \frac{P}{S} = \cos\varphi = 0,124$$

4. Le diagramme vectoriel d'un récepteur :



CHAPITRE 04:

CIRCUITS MAGNETIQUES.

4.1. Introduction

Sans ferromagnétisme il n'y aurait pas d'électricité industrielle (alternateurs, transformateurs, moteurs).

Ce chapitre présente les notions fondamentales du circuit magnétique et traite également des principes d'applications des circuits magnétiques dans les machines et appareils électriques tels que les transformateurs, les moteurs et les générateurs.

4.2. Matériau magnétique

Un matériau est dit magnétique lorsque, sous l'action d'un champ magnétique H , il engendre une induction magnétique B à l'origine d'un flux magnétique.

4.3. Circuit magnétique

Est le volume où se referment toutes les lignes de force d'un champ magnétique. Ce circuit est constitué par des matériaux dits ferromagnétiques et en particulier par du fer.

On obtient un champ magnétique grâce à des aimants permanents ou bien des circuits électriques parcourus par des courants.

On obtient un circuit magnétique par un empilement de tôles magnétiques minces isolées entre elles par une couche de vernis.

Exemple

La bobine à noyau de fer, le noyau de fer ne sert qu'à canaliser le flux magnétique.

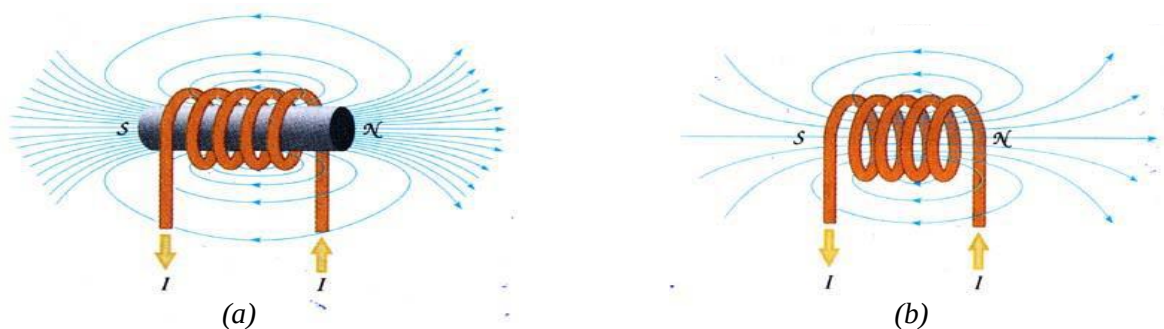


Figure 4.1 : (a) Bobine à noyau de fer et (b) Bobine sans noyau.

4.4. Constitution et fabrication

Il est constitué d'un assemblage de pièce en matériaux ferromagnétiques. Il peut comprendre un entrefer : petit espace d'air dans le circuit.

Cet entrefer peut être :

- ✓ **Structural** : c'est le cas dans les machines tournantes où le rotor est scindé du stator par un entrefer qu'on souhaite le plus petit envisageable ;

- ✓ **Intentionnel** : permet d'éviter la saturation du circuit magnétique et confère une plus grande linéarité à l'inductance ainsi créée.

4.5. Circuit magnétique soumis à un champ magnétique indépendant du temps

Si le champ magnétique est constant au cours du temps, les pertes magnétiques : pertes par courant de Foucault et pertes par hystérésis sont inexistantes. Le circuit magnétique est par conséquent fréquemment constitué de fer doux massif ou d'acier coulé : matériaux et modes de fabrication les plus économiques.

Circuit magnétique soumis à un champ magnétique périodique de fréquence faible :

Il est indispensable dans ce cas de limiter les pertes magnétiques :

- Les pertes par hystérésis sont limitées par l'utilisation de matériaux à cycle étroit.
- Les pertes par courant de Foucault sont limitées par un feuilletage du circuit magnétique : A la place d'une pièce massive, on procède à un empilage de tôles isolées les unes des autres. L'isolation a pour but d'empêcher la circulation de courant d'une plaque à l'autre.

4.6. Circuit magnétique soumis à un champ magnétique périodique haute fréquence

Les pertes par courant de Foucault augmentent selon le carré de la fréquence. Les circuits magnétiques utilisés en haute fréquence doivent être réalisés avec matériaux ferromagnétiques isolants :

- Les ferrites sont des oxydes mixtes de Fer III et d'autres métaux M divalents. (M peut être aussi le Fer. Dans ce cas la ferrite obtenue se nomme la magnétite). Les plus utilisés pour la construction de circuits magnétiques sont les ferrites à base de zinc(Zn) et /ou de manganèse (Mn).
- Les matériaux nanocristallins sont des agglomérats de cristaux dont la taille est de l'ordre de la dizaine de nanomètres, noyés dans une phase amorphe. Ils sont constitués de Fer, d'autre métaux (cuivre, niobium) et de métalloïdes (carbone, silicium, bore). Leurs excitations coercitives étant particulièrement faibles, de l'ordre de l'A/m, ils présentent un cycle d'hystérésis particulièrement étroit.

4.7. Réluctance d'un circuit magnétique

Réluctance d'un circuit magnétique homogène

Pour un circuit magnétique homogène, c'est-à-dire constitué d'un seul matériau et de section homogène, il existe une relation servant à calculer sa réluctance selon le matériau qui le forme et de ses dimensions :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

$\mathcal{R}$: La réluctance en $[H^{-1}]$;

μ : La perméabilité magnétique en $[kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}]$ [H/m];

l : La longueur en $[m]$;

S : La section en $[m^2]$.

Réluctance équivalente d'un entrefer

La réluctance d'un entrefer de faible épaisseur est donnée par :

$$\mathcal{R} = \frac{e}{\mu_0 \cdot S}$$

e : Épaisseur de l'entrefer ;

μ_0 : Perméabilité du vide ;

S : Section de l'entrefer.

Si l'épaisseur de l'entrefer est grande, il n'est plus envisageable de considérer que les lignes de champ magnétique restent perpendiculaires à l'entrefer. On doit alors tenir compte de l'épanouissement du champ magnétique c'est-à-dire considérer que la section S est plus grande que celle des pièces métalliques de pat et d'autre de l'entrefer.

Réluctance d'un circuit hétérogène

Les lois d'association des réluctances permettent de calculer celle d'un circuit magnétique de forme complexe ou composé de matériaux aux caractéristiques magnétiques différentes. On décompose ce circuit en tronçon homogène, c'est-à-dire de même section et constitué du même matériau.

Association des réluctances

En série

Quand deux tronçons homogènes ayant respectivement pour réluctance $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ se succèdent, la réluctance de la totalité est :

$$\mathcal{R}_{eq.série} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$$

En parallèle

Quand deux tronçons homogènes ayant respectivement pour réluctance $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont positionnées cote à cote, la réluctance de la totalité est $\mathcal{R}_{eq.//}$ telle que :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq.//}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}$$

Soit :

$$\mathcal{R}_{eq.//} = \frac{\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}$$

Avec ces lois on peut calculer la réluctance du circuit magnétique complexe dans son intégralité.

4.8. L'inductance de la bobine

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

N : est le nombre de spires dans la bobine ;

4.9. Modèle électrique de la bobine à noyau

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$\vec{B}$: Induction magnétique en [Tesla] ;

$\vec{H}$: Champ magnétique en [A/m] ;

μ : Perméabilité.

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

Avec :

μ_r : Perméabilité relative.

μ_0 : Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ [henry par mètre].

- La relation $B(H)$ du vide est donnée par : $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$, la caractéristique $B(H)$ est linéaire (courbe (a) de la figure) .
- Pour la plupart des matériaux, la perméabilité n'est pas constante, et la relation $B(H)$ est non-linéaire. Cela donne une courbe du type hystérésis (l'effet d'hystérésis) (courbe (b) de la figure).

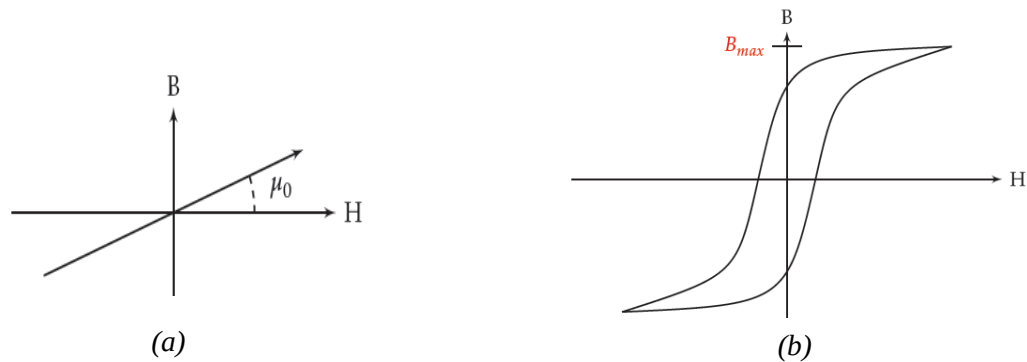


Figure 4.2 : Courbes d'hystérésis de la bobine sans et avec noyau de fer (Ou noyau ferromagnétique).

Cycle d'hystérésis

Le cycle d'hystérésis est la courbe de réponse des matériaux magnétiques, à travers laquelle, ils gardent la mémoire de tous états d'aimantation.

Partant d'un champ nul, l'induction apparaît avec un certain retard, elle augmente ensuite rapidement, puis de moins en moins vite. Si l'on augmente encore l'intensité du champ, on constate que l'induction conserve une valeur stable à partir d'un certain état : c'est le phénomène de saturation. On obtient la courbe de la première aimantation (OA).

Diminuons progressivement le champ H jusqu'à 0 où il devient nul. L'induction diminue en même temps, mais elle ne reprend pas les mêmes valeurs qu'elle avait pendant sa période croissante: on constate qu'elle n'est plus nulle. L'induction possède encore la valeur B_r , qui représente l'aimantation rémanente conservée depuis la première aimantation.

En inversant le sens du champ magnétique (c.-à-d le courant). On obtient la branche $BC'A'$. Au point C' l'induction est nulle.

En faisant décroître de nouveau le champ jusqu'à 0, l'aimantation diminue jusqu'à une valeur OB' qui est l'aimantation rémanente. Le courant change alors de sens $B'C$, l'aimantation rémanente est détruite. Puis le courant augmente, l'aimantation croît jusqu'à A suivant la courbe, nous ramenant ainsi au point de départ. On aura la courbe d'hystérésis de la figure 4.3.

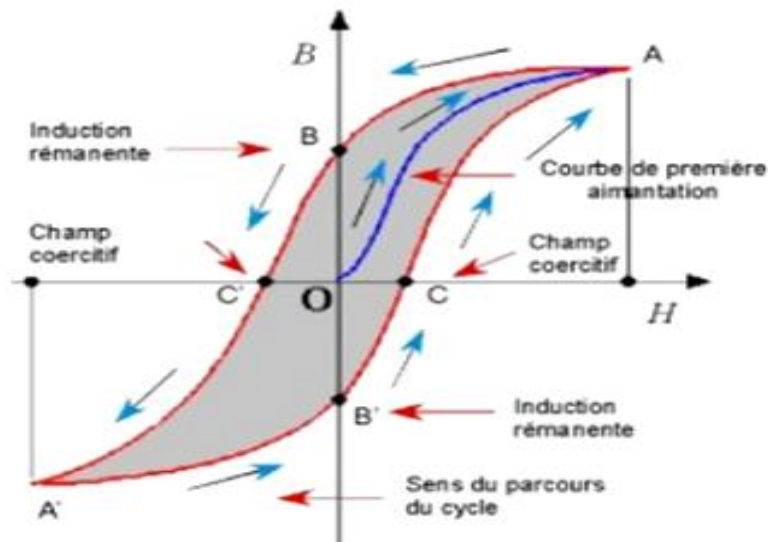


Figure 4.3 : Courbe d'hystérésis.

Perte par hystérésis

Pour chaque cycle complet, l'énergie perdue par unité de volume est égale à la surface sous la courbe d'hystérésis (figure 4.3).

La puissance perdue dans le circuit est donc fonction du volume et du nombre de fois que le cycle d'hystérésis est parcouru par unité de temps. Elle est aussi fonction du matériau utilisé et la densité maximale de flux.

On peut écrire :

$$P_h = k_h V f B^n$$

Avec :

n : Exposant de Steinmetz (environ 1.8) ;

V : Volume [m^3] ;

f : Fréquence [HZ]

k_h : Constante, fonction du matériau et du système d'unités.

B : Densité du flux.

Pertes par courants induit

Une variation de courant produit une variation de flux et, de ce fait, induit une tension :

- Dans le cuivre c'est la force contre-électromotrice ;
- Dans l'acier, cette variation de flux produit des courants de circulation proportionnels à la tension induite et limités par la résistance du chemin parcouru, selon la loi d'Ohm. On désigne communément ces courants

induits par l'expression courant de Foucault. Ces pertes traduisent par un échauffement du noyau.

L'équation des pertes s'écrit par :

$$P_f = k_f V \varepsilon f^2 B^2$$

Avec :

V : Volume [m^3];

f : Fréquence [HZ]

B : Densité du flux.

ε : Épaisseur des tôles ;

k_f : Constante dépendant du matériau et du système d'unités.

4.10. L'Induction électromagnétique

Description des expériences

Introduisons un aimant dans une bobine connectée à un galvanomètre :

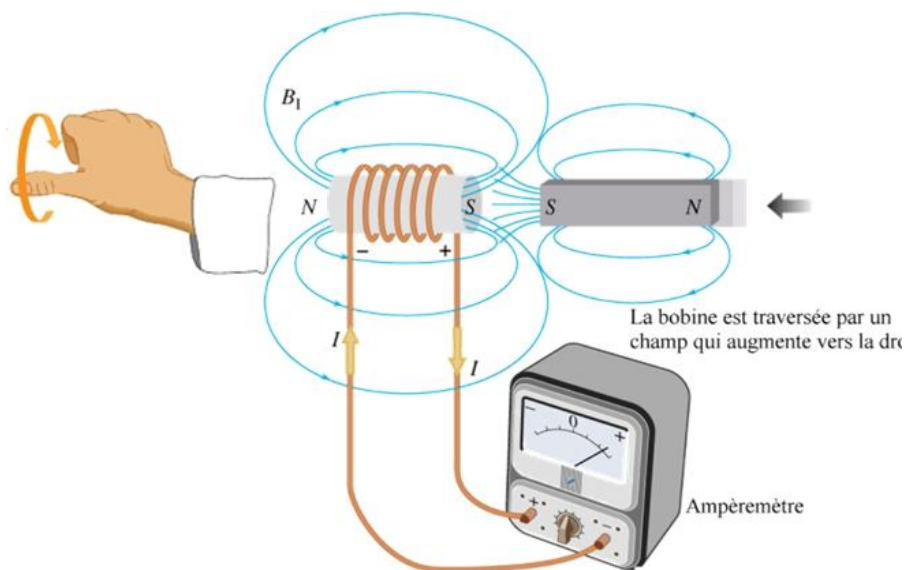


Figure 4.4 : l'expérience de l'induction magnétique

- Lorsqu'on approche l'aimant de l'intérieur de la bobine, avec une certaine vitesse, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant qui disparaît avec l'arrêt du mouvement de l'aimant.
- Lorsqu'on retire l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant dans le sens contraire.
- Mêmes remarques si l'aimant est fixe et que la bobine en mouvement. Le courant enregistré s'appelle le courant induit, l'aimant est l'inducteur et la bobine est le circuit induit.

On peut obtenir un courant induit, en faisant tourner la bobine devant l'aimant fixe :

- Un courant induit circule dans la bobine dans un sens puis dans l'autre et ainsi de suite.
- La bobine est parcourue par un courant alternatif de fréquence égale à celle du mouvement de rotation.
- Même observation si l'aimant est fixe et que la bobine tourne à vitesse angulaire constante.

Interprétations

- La cause de l'apparition de courant induit est la variation du flux magnétique à travers la surface de la bobine.
- Le courant induit ne dure que le temps de la variation du flux.
- L'apparition de ce courant induit prouve la présence d'une force électromotrice dont le siège est la bobine cette force électromotrice dépend de la vitesse de variation du flux magnétique $\frac{d\Phi}{dt}$.

On appelle « inducteur » la source de champ magnétique qui provoque le phénomène d'induction, et « l'induit » le circuit dans lequel apparaît le courant d'induction.

4.11. La force électromotrice

Loi de Faraday-Lenz (ou loi de Lenz)

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit provoque l'apparition d'une force électromotrice induite (e). Le circuit est alors équivalent à une source de tension de f.e.m (e) donnée par :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

e : la force électromotrice en Volts [V] $\equiv \left[\frac{\text{Wb}}{\text{s}} \right]$.

Φ : Le flux magnétique en Weber [Wb].

Le signe moins de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définie la fém algébrique et, physiquement, de l'effet modérateur du courant induit.

La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

Enoncé de la loi de Lenz

« Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur ».

Ou encore :

« La fém induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance ».

Remarque

La loi de Lenz-Faraday ne précise pas quelle surface S choisir dans le calcul du flux magnétique ; il suffit d'en choisir une qui s'appuie sur le circuit C . Par conséquent, la loi de Lenz-Faraday suppose implicitement la conservation du flux magnétique.

4.12. Le flux magnétique

On appelle flux magnétique Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface élémentaire $\vec{S}$, la grandeur :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$$

Avec :

$d\vec{S}$: Le vecteur de la surface élémentaire ;

$\vec{B}$: Champ magnétique ;

$\vec{n}$: Le vecteur unitaire de la normale à la surface ;

N : Nombre d'enroulements d'un conducteur ;

S : est l'air.

$$\omega t = \theta$$

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$$

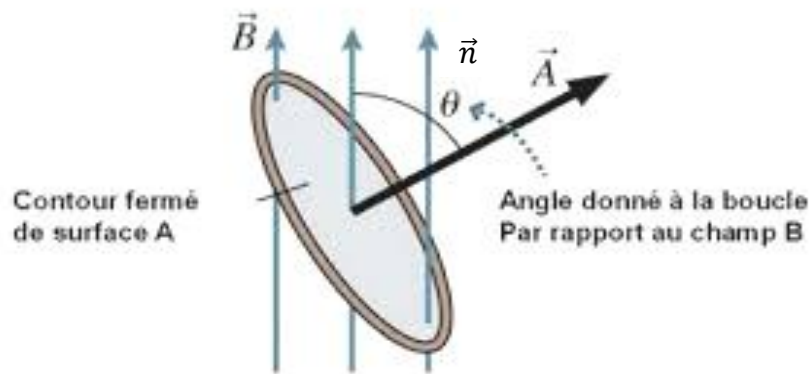


Figure 4.5 : Le flux magnétique et la représentation du champ et de la normale.

4.13. Force magnétomotrice (fmm)

La force magnétomotrice F dans un inducteur ou électro-aimant constitué par une bobine de fil est donnée par :

$$F = NI$$

Où :

N : est le nombre de spires dans la bobine ;

I : est le courant dans le fil.

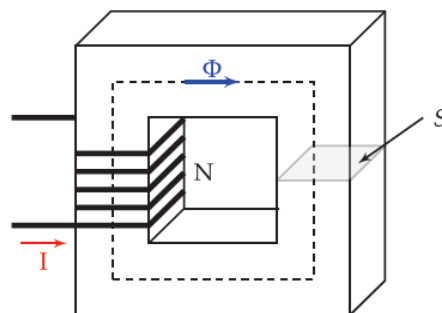


Figure 4.6 : Circuit magnétique à bobine unique.

L'équation du flux magnétique dans un circuit magnétique, qu'on appelle également loi d'Hopkinson, est décrite par :

$$F = \Phi \cdot \mathcal{R}$$

Où :

Φ : est le flux magnétique et la réluctance du circuit magnétique.

On peut remarquer que la force magnétomotrice joue un rôle similaire à la tension U dans la loi d'Ohm:

$$U = R \cdot I$$

4.14. Analogie entre un circuit électrique et un circuit magnétique

Circuit électrique	Circuit magnétique
Intensité du courant électrique I	Flux du champ magnétique dans le circuit Φ
Résistance R	Réductance $\mathcal{R}$
Conductivité σ	Perméabilité magnétique μ
Force électromotrice E	Force magnétomotrice F
Loi d'Ohm $E = R.I$	Loi d'Hopkinson $F = \Phi.\mathcal{R}$

Tableau 4.1 : Analogie entre circuit électrique et circuit magnétique.

4.15. Force de magnétique (Force de Laplace)

Lorsque un courant I traverse un conducteur de longueur l plongé dans un champ magnétique de densité B faisant un angle α est par rapport à l , on obtient une force de déplacement donnée par la relation:

$$F = B.l.I.\sin\alpha$$

B : Densité du champ magnétique en [Tesla]

l : Longueur du conducteur en [m] ;

I : Courant en [A] .

Alors l'unité de F est le Newton [N].

Une façon simple de déterminer la direction de la force par rapport à la direction du flux et du courant est d'utiliser la règle de la main droite, selon laquelle :

- Les doigts représentent la direction du flux ;
- Le pouce représente la direction du courant ;
- La paume représente la direction de la force.

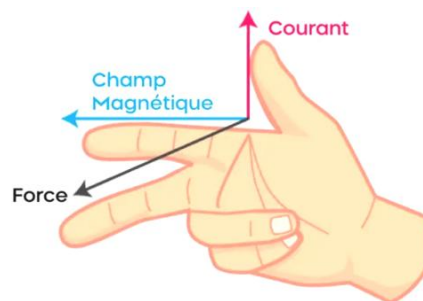


Figure 4.7 : Règle de la main droite.

4.16. Inductance propre et inductance mutuelle

Inductance propre

Un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité I crée un champ magnétique $\vec{B}$ que l'on qualifie de propre, par opposition au champ extérieur dont il n'est pas responsable mais dans lequel il peut-être plongé. Le flux Φ de ce champ propre à travers le circuit qui l'a créé est appelé le flux propre.

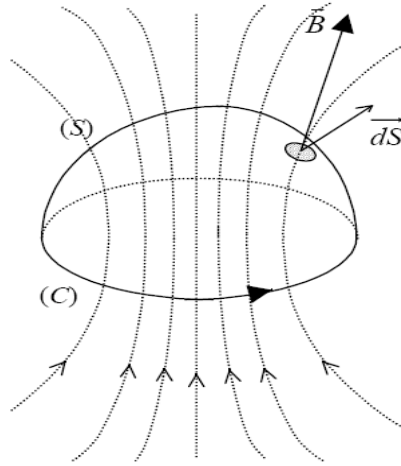


Figure 4.8 : Représentation des lignes du flux traversant un circuit.

Comme $\vec{B}$ et donc Φ sont proportionnels à I (loi de Biot Savart), le rapport Φ/I ne dépend plus du courant qui parcourt le circuit et constitue donc une caractéristique intrinsèque de celui-ci ; on l'appelle l'inductance propre :

$$L = \frac{\Phi_{\text{propre}}}{I} = \frac{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I}$$

D'où le schéma équivalent au dessous et la formule suivante :

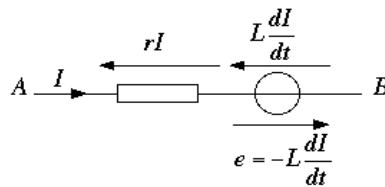


Figure 4.7 : Auto-inductance.

$$u = rI - e = rI + L \frac{dI}{dt}$$

Remarques

1. L'inductance propre L est une grandeur toujours positive.
2. L'inductance propre L dépend de la géométrie du circuit et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel il est plongé.

3. Il n'est pas nécessaire qu'un circuit soit parcouru réellement par un courant pour calculer son inductance propre, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant I quelconque et calculer le flux propre correspondant.

Inductance mutuelle

Le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2) :

$$\Phi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1$$

Le flux du champ magnétique $\vec{B}_2$ à travers le circuit (1) :

$$\Phi_{21} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

$$\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_2$$

Nous admettons que les deux coefficients M_{12} et M_{21} sont égaux et désignerons par inductance mutuelle M leur valeur commune :

$$M = M_{12} = M_{21}$$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Remarque

1. Comme l'inductance propre L , l'inductance mutuelle M dépend de la géométrie des deux circuits et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel ils sont plongés.
2. Contrairement à l'inductance propre L toujours positive, l'inductance mutuelle M est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation des deux circuits. Si l'on inverse l'orientation d'un des deux circuits l'inductance mutuelle M est changée en son opposé.
3. Nul besoin que les circuits soient parcourus réellement par des courants pour calculer leur inductance mutuelle, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant I quelconque (I_1 ou I_2) et calculer le flux de mutuelle correspondant.
4. En général l'inductance mutuelle de deux circuits n'a de valeur notable que lorsqu'il s'agit de parties bobinées voisines.

4.17. Couplage de deux circuits magnétique

Loi d'Ohm aux bornes d'une portion de circuit

Si deux circuits sont en inductance mutuelle et en supposant qu'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique, les flux totaux à travers chacune des deux bobines s'écrivent :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I_2 + M I_1$$

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

On en déduit les différences de potentiel aux bornes de chacun des deux circuits:

$$u_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 I_2 - e_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

Les équations électriques de chacune des deux branches sont couplées par inductance mutuelle. En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω ces équations deviennent :

$$\underline{u}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$$

$$\underline{u}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

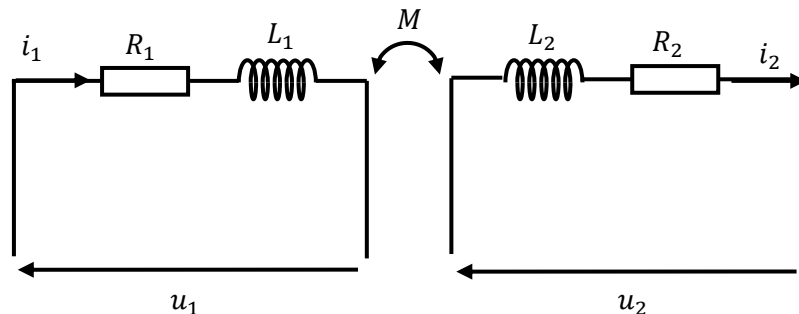


Figure 4.9 : Couplage de deux circuits.

L'énergie magnétique de deux circuits

$$\begin{aligned}
 P &= u_1 I_1 + u_2 I_2 \\
 P &= (R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}) I_1 + (R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}) I_2 \\
 P &= R_1 I_1^2 + L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + M I_1 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2^2 + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \\
 P &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} L_1 I_1^2) + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} L_2 I_2^2) + M \frac{d}{dt} (I_1 I_2) \\
 P &= (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2) \\
 dw &= P \cdot dt
 \end{aligned}$$

D'où :

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2 \\
 \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I_2 + M I_1
 \end{aligned}$$

Alors :

$$w = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)$$

Coefficient de couplage entre deux circuits

On définit le coefficient de couplage (magnétique) de deux circuits par la quantité k sans dimension :

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

En factorisant I_2^2 dans l'expression de l'énergie et en posant $x = \frac{I_1}{I_2}$:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2} I_2^2 [L_1 x^2 + 2Mx + L_2] \\
 \forall x \quad w &> 0 \Rightarrow \forall x : L_1 x^2 + 2Mx + L_2 > 0 \\
 \Rightarrow \Delta &= \{\text{discriminant de : } L_1 x^2 + 2Mx + L_2\} < 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta' = M^2 - L_1 L_2 < 0$$

Soit :

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

Sachant que :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$0 \leq k \leq 1$$

Lorsque chaque circuit enlace la totalité des lignes de champ de l'autre (exemple des deux solénoïdes emboîtés l'un dans l'autre lorsqu'ils ont le même rayon), la mutuelle inductance de deux circuits donnés prend alors sa valeur maximale qui est :

$$|M_{max}| = \sqrt{L_1 L_2}$$

Quand une partie des lignes de champ correspondant à un circuit n'est pas enlacée par l'autre, alors :

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

4.18. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 04

Exercice 4.1

Déterminer l'expression de l'inductance L d'un solénoïde. Le solénoïde est traversé par un courant de $0,5 [A]$; $N = 1000 \text{ spires}$; $l = 80 \text{ cm}$; $S = 36 \text{ cm}^2$. Quelle est l'énergie emmagasinée par le solénoïde ?

Solution de l'exercice 4.1

Flux magnétique à travers le solénoïde :

$$\Phi = NBS$$

Dans un solénoïde :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

D'où :

$$\Phi = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI$$

Par définition :

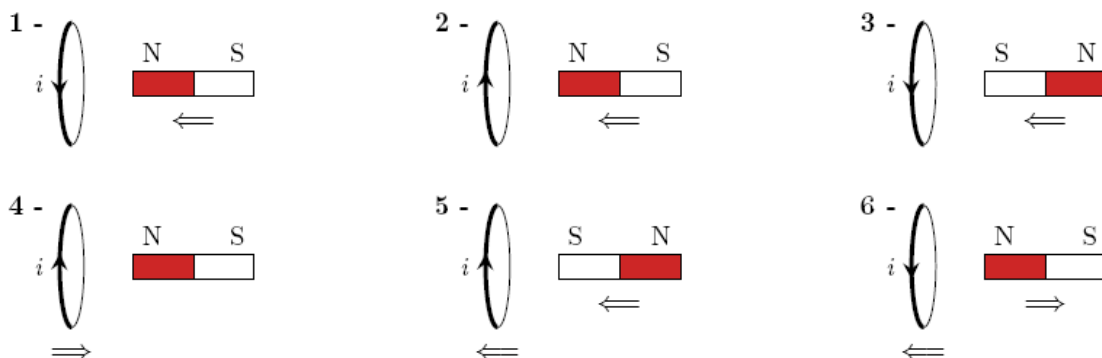
$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = 5,65 \text{ mH}$$

L'énergie emmagasinée par le solénoïde est :

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = 0,7 \text{ mJ}$$

Exercice 4.2

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement.



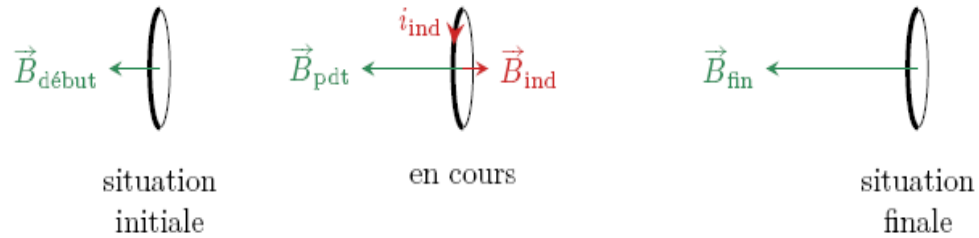
Solution de l'exercice 4.2

Rappelons que pour un aimant droit, le champ sort par le Nord : les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud.

La première étape consiste à déterminer le sens de variation du champ magnétique vu par la spire au cours du déplacement. On déduit alors de la loi de

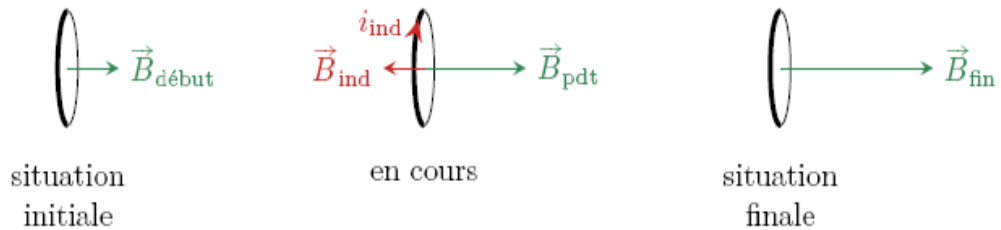
Lenz le sens du champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$, qui tend à atténuer les variations de $\vec{B}$. On détermine ensuite par la règle de la main droite le sens réel du courant dans la spire. Enfin, par comparaison entre le sens réel du courant et le sens $i > 0$ indiqué sur la figure on en déduit le signe de i .

cas 1 $\Rightarrow$ Le sens réel du courant indiqué sur le schéma central est celui de la flèche indiquant le sens positif, donc $i_{ind} > 0$.



cas 2 $\Rightarrow$ La physique est identique à la situation précédente, seul change la convention sur le sens positif du courant. On déduit immédiatement $i < 0$.

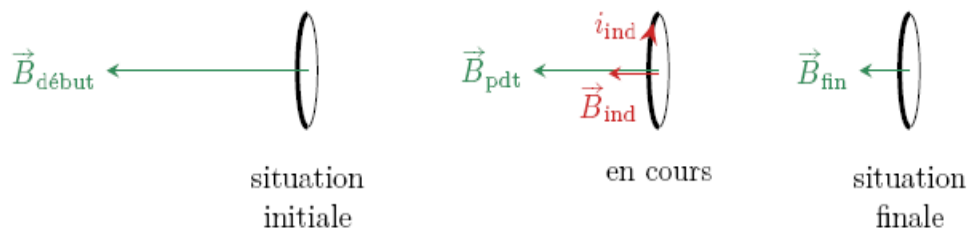
cas 3 $\Rightarrow$ Le sens réel du courant est opposé au sens positif, donc $i_{ind} < 0$.



cas 4 $\Rightarrow$ Les variations de champ vues par la spire sont les mêmes qu'à la question 1, le sens réel du courant induit est donc le même, mais comme le sens choisi positif du courant est opposé, alors $i_{ind} < 0$.

cas 5 $\Rightarrow$ Comme la spire et l'aimant se déplacent de la même façon, le flux magnétique au travers de la spire ne varie pas pendant l'expérience. Il n'y a donc aucun courant induit $i_{ind} = 0$.

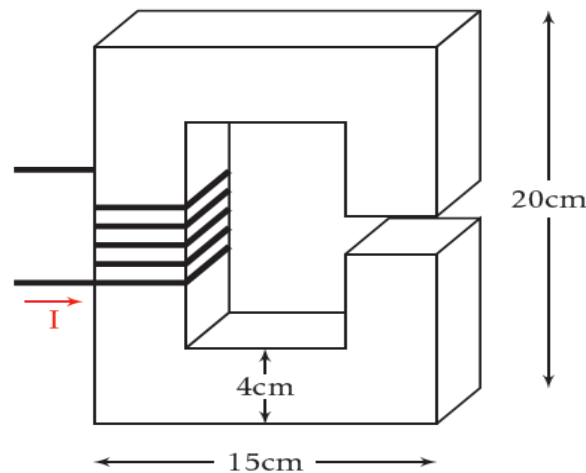
cas 6 $\Rightarrow$ Le déplacement de la spire renforce l'effet du déplacement de l'aimant. Cette fois, le champ vu par la spire diminue au cours du mouvement, le champ induit a donc tendance à le renforcer. On a donc $i_{ind} < 0$.



Exercice 4.3

Soit le circuit magnétique suivant. Le courant I est 2 A , la perméabilité relative du matériau est $\mu_r = 2500$, le nombre de tours N est 250 et une profondeur de 4 cm . L'entrefer a une épaisseur de $0,5\text{ cm}$ (l'entrefer est la section où il manque une petite partie du circuit).

- Calculer la densité de flux magnétique dans le circuit.

**Solution de l'exercice 4.3**

Le flux magnétique :

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{NI}{\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_e} = \frac{250 \cdot 2}{107\,430 + 248\,680} = 1,404 \cdot 10^{-3} [\text{wb}]$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,404 \cdot 10^{-3}}{0,0016} = 0,878 [\text{T}]$$

Exercice 4.4

La longueur de la fibre moyenne du circuit magnétique ci-dessous est $l = 1\text{ [m]}$ et l'épaisseur de son entrefer $e = 1\text{ [mm]}$ (« entrefer » $\equiv$ une lame d'air entre deux éléments ferromagnétiques).

Il est constitué d'un alliage fer nickel pour lequel le champ d'exécution magnétique est de $6,4\text{ [A/m]}$ lorsque l'induction magnétique est de $0,8\text{ [T]}$.

Le bobinage est supposé sans fuites c'est-à-dire que tout le flux créé par celui-ci passe dans le tore.

Les lignes d'induction dans l'entrefer sont supposées normales aux faces de fer. Elles décrivent des cercles concentriques.

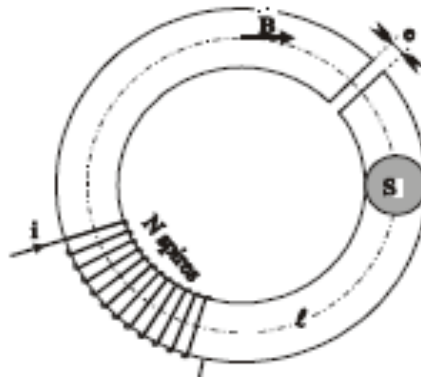
Le circuit magnétique est constitué de deux morceaux :

- Le matériau ferromagnétique (dont on connaît un point du cycle d'hystérésis) ;

- L'entrefer (pour lequel $B = \mu_0 H$).

Pour simplifier, on fera l'hypothèse d'une induction uniforme dans la section droite S de l'entrefer.

- Calculer la fmm qui produit une induction de $0,8 [T]$ dans l'entrefer du tore ci-dessous :



Solution de l'exercice 4.4

Le tube d'induction constitué par le circuit magnétique torique et l'entrefer a une section constante (car on néglige l'épanouissement des lignes d'induction dans l'entrefer).

Le flux est conservatif dans un tube d'induction.

Donc le module du champ d'induction (supposé uniforme dans une section droite du tube de champ) a une valeur $B = \frac{\Phi}{S}$ constante dans tout le tube de champ (le fer comme l'entrefer).

$$N \cdot I = H \cdot (l - e) + H_0 \cdot e = \frac{B}{\mu} (l - e) + \frac{B}{\mu_0} \cdot e = 643 A$$

Exercice 4.5

Une bobine de 200 spires est raccordée à une source de $230 V$, $50 Hz$. Sachant que le courant magnétisant est de $4 A$, calculer :

1. La valeur crête de la fmm développée par la bobine.
2. La réactance inductive de la bobine.
3. L'inductance de la bobine.

Solution de l'exercice 4.5

1. La valeur crête de la fmm est :

$$fmm = n \cdot I_{max} = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 1\,131,38 A \cdot tr$$

Notons que le flux atteint sa valeur crête Φ_{max} à l'instant où la fmm est de $1\,131 A \cdot tr$.

2. La réactance inductive de la bobine est :

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot V}{L \cdot \omega} \cdot \cos(\omega t)$$

$$X_L = L\omega = \frac{V}{I} = \frac{230}{4} = 57,5 \, \Omega$$

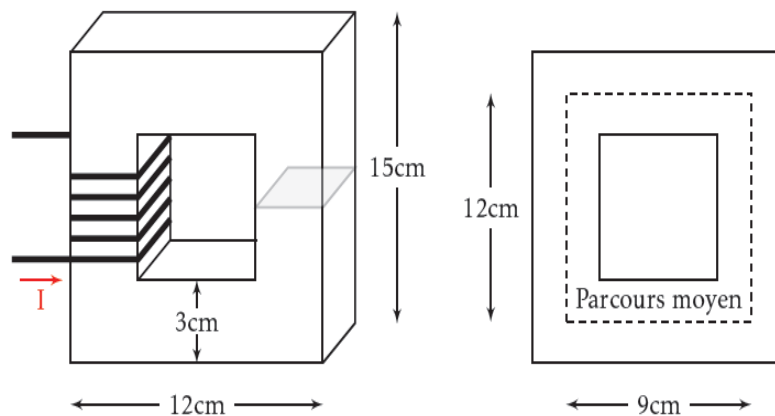
3. L'inductance de la bobine est :

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{57,5}{314,16} = 0,18 \, H$$

Exercice 4.6

Soit le circuit magnétique suivant. Le courant I est 1.2A, la perméabilité relative du matériau est $\mu_r = 3000$, le nombre de tours N est 100 et le noyau a une profondeur de 4cm.

- Calculer de flux magnétique et le champ magnétique dans le circuit.



Solution de l'exercice 4.6

1. Le flux magnétique :

$$\Phi = \frac{F}{\mathfrak{R}}$$

$$F = NI = 100 \cdot 1,2 = 120 \, [A/t]$$

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}$$

$$l = (12 + 9) \cdot 2 = 0,42 \, [m]$$

$$S = (3 \cdot 4) \cdot 10^{-4} = 0,0012 \, [m^2]$$

Alors :

$$\mathfrak{R} = \frac{0,42}{3000 \cdot 0,0012 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 92 \, 840 \, [At/wb]$$

D'où :

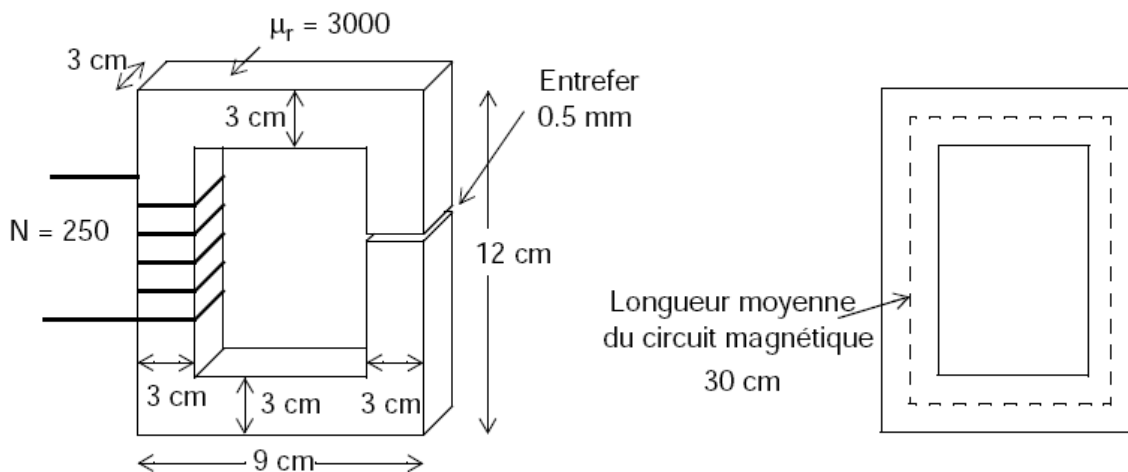
$$\Phi = \frac{120}{92\,840} = 1,29 \cdot 10^{-3} [\text{wb}]$$

2. Le champ magnétique :

$$B = \mu \frac{F}{L} = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,29 \cdot 10^{-3}}{0,0012} = 1,075 [\text{T}]$$

Exercice 4.7

1. Calculer la réluctance du circuit magnétique au dessous ;
2. Flux magnétique dans le noyau.



Solution de l'exercice 4.7

1. Reluctance :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_{air} = \frac{l}{\mu S} + \frac{e}{\mu S} \\ &= \frac{0,3}{3000(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (9 \cdot 10^{-4})} + \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{(4\pi \cdot 10^{-7})(9 \cdot 10^{-4})} \\ &= 8,842 \cdot 10^4 + 4,42 \cdot 10^5 = 5,305 \cdot 10^5 [\text{At/wb}] \end{aligned}$$

L'inductance de la bobine :

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = \frac{(250)^2}{5,305 \cdot 10^5} = 0,1178 [\text{H}]$$

2. Flux magnétique :

$$\Phi = B \cdot S = 1,29 \cdot 10^{-4} = 1,08 \cdot 10^{-3} [\text{wb}]$$

On a :

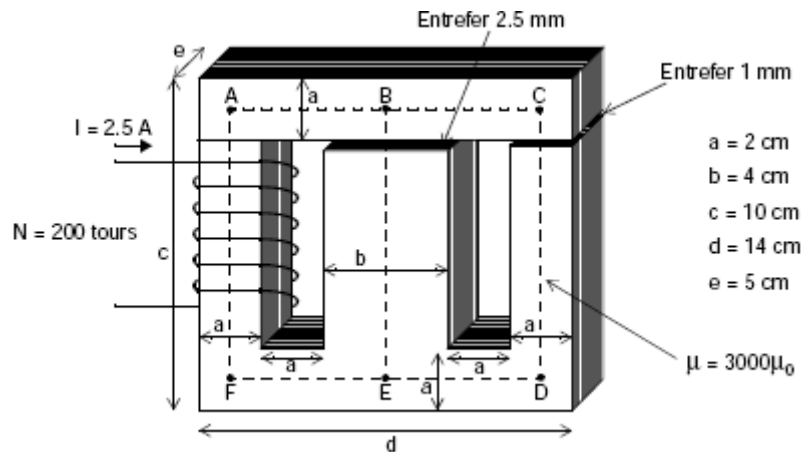
$$\Phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}}$$

Alors :

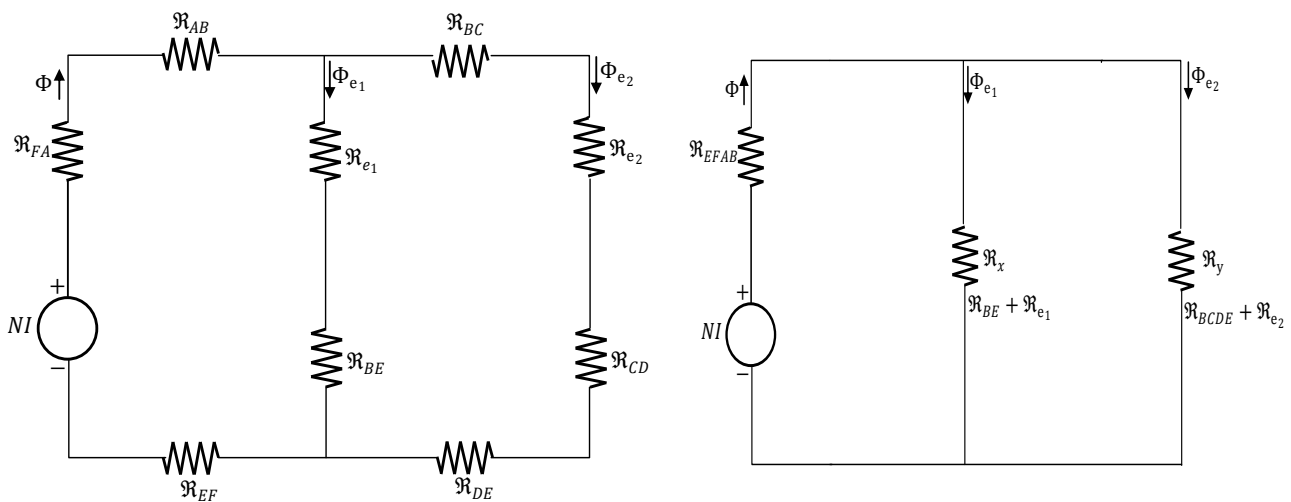
$$I = \frac{\mathfrak{R} \cdot \Phi}{N} = \frac{5,305 \cdot 10^5 \cdot 1,08 \cdot 10^{-3}}{250} = 2,29 [\text{A}]$$

Exercice 4.8

1. Donner le circuit équivalent du système électromagnétique.
2. Calculer les valeurs des réluctances.
3. Calculer l'inductance de la bobine.
4. Calculer les flux magnétiques circulant dans le circuit magnétique.
5. Calculer les flux magnétiques dans les entrefers.
6. Calculer les densités de flux dans les entrefers.

**Solution de l'exercice 4.8**

1. Le circuit équivalent du circuit magnétique :



$$\mathcal{R}_{e_1} = \frac{e_1}{\mu_0 S} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{(4\pi \cdot 10^{-7})(2 \cdot 10^{-3})} = 0,9947 \cdot 10^6 [\text{At/wb}]$$

$$\mathcal{R}_{e_2} = \frac{e_2}{\mu_0 S} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{(4\pi \cdot 10^{-7})(1 \cdot 10^{-3})} = 7,9577 \cdot 10^5 [\text{At/wb}]$$

$$\mathcal{R}_{EFAB} = \frac{l_{EFAB}}{\mu S} = \frac{0,2}{3000 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7})(1 \cdot 10^{-3})} = 5,3052 \cdot 10^4 [At/wb]$$

$$\mathcal{R}_{BCDE} = \mathcal{R}_{EFAB} = 5,3052 \cdot 10^4 [At/wb]$$

$$\mathcal{R}_{BE} = \frac{l_{BE}}{\mu S} = \frac{0,08}{3000 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7})(2 \cdot 10^{-3})} = 1,061 \cdot 10^4 [At/wb]$$

$$\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_{BE} + \mathcal{R}_{e_1} = 1,061 \cdot 10^4 + 0,9947 \cdot 10^6 = 1,005 \cdot 10^6 [At/wb]$$

$$\mathcal{R}_y = \mathcal{R}_{BCDE} + \mathcal{R}_{e_2} = 5,3052 \cdot 10^4 + 7,9577 \cdot 10^5 = 0,8488 \cdot 10^6 [At/wb]$$

2. L'inductance de la bobine :

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{eq} &= \mathcal{R}_{EFAB} + (\mathcal{R}_x // \mathcal{R}_y) = 5,3052 \cdot 10^4 + (1,005 \cdot 10^6 // 0,8488 \cdot 10^6) \\ &= 5,1321 \cdot 10^5 [A \cdot t/wb] \end{aligned}$$

Donc :

$$L = \frac{200^2}{5,1321 \cdot 10^5} = 77,9 [mH]$$

1. Le flux magnétique :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{NI}{\mathcal{R}_{EFAB} + (\mathcal{R}_x // \mathcal{R}_y)} = \frac{200 \cdot 2,5}{5,3052 \cdot 10^4 + (1,005 \cdot 10^6 // 0,8488 \cdot 10^6)} \\ &= 9,7426 \cdot 10^{-4} [wb] \end{aligned}$$

Les flux magnétiques dans les entrefers sont calculés à l'aide de la loi du diviseur de courant :

$$\begin{aligned} \Phi_{e_1} &= \frac{\mathcal{R}_y}{\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_y} \cdot \Phi = \frac{0,8488 \cdot 10^6}{1,005 \cdot 10^6 + 0,8488 \cdot 10^6} \cdot 9,7426 \cdot 10^{-4} \\ &= 4,4608 \cdot 10^{-4} [wb] \end{aligned}$$

$$\Phi_{e_2} = \Phi - \Phi_{e_1} = 9,7426 \cdot 10^{-4} - 4,4608 \cdot 10^{-4} = 5,2818 \cdot 10^{-4} [wb]$$

Les densités de flux dans les entrefers sont :

$$\begin{aligned} B_{e_1} &= \frac{\Phi_{e_1}}{S_1} = \frac{4,4608 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,223 T \\ B_{e_2} &= \frac{\Phi_{e_2}}{S_2} = \frac{5,2818 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-3}} = 0,528 T \end{aligned}$$

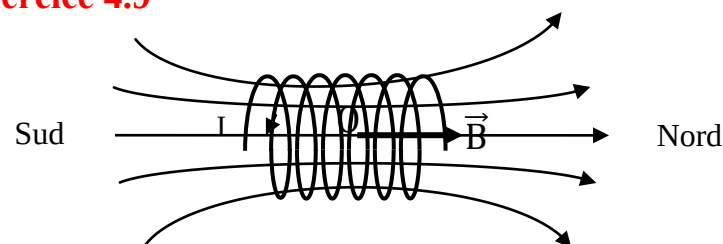
Exercice 4.9

Soit Un solénoïde comportant $N = 1000$ spires a pour longueur $l = 80$ cm
Il est parcouru par un courant d'intensité I .

1. Faire un schéma et représenter:
 - Le spectre magnétique du solénoïde ;
 - Les faces Nord et Sud ;
 - Le vecteur champ magnétique au centre du solénoïde.
2. On suppose le solénoïde suffisamment long pour être assimilable à un solénoïde de longueur infinie. Quelle est l'expression de l'intensité du champ magnétique au centre du solénoïde ? Calculer B si $I = 20$ [mA].
3. L'axe du solénoïde est placé perpendiculairement au plan du méridien magnétique. Au centre du solénoïde on place une petite boussole mobile autour d'un axe vertical. Quelle est l'orientation de la boussole pour $I = 0$?
4. Quand le courant d'intensité $I = 20$ [mA] parcourt le solénoïde, la boussole tourne d'un angle $\alpha = 57,5^\circ$. En déduire l'intensité B_h de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

Solution de l'exercice 4.9

1.



Le spectre magnétique d'un solénoïde est semblable à celui d'un aimant droit.

On oriente les lignes de champ avec la règle de la main droite (il faut au préalable définir le sens du courant). On en déduit les faces nord et sud du solénoïde.

Le champ magnétique au centre du solénoïde est tangent à la ligne de champ passant par o et de sens donné par l'orientation de la ligne de champ.

2. On suppose qu'à l'intérieur du solénoïde le champ est uniforme et qu'à l'extérieur il est nul.

La circulation du champ magnétique le long du conducteur (C) est :

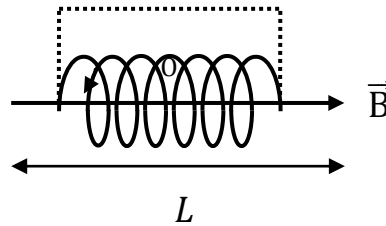
$$C = B \cdot L$$

L'application du théorème d'Ampère donne :

$$C = N \cdot \mu_0 I$$

D'où :

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I = 3,1 \cdot 10^{-5} [T]$$

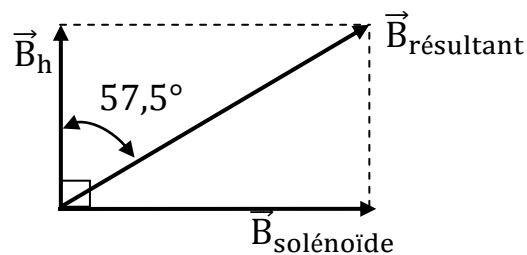


3. L'aiguille s'oriente vers le nord magnétique (champ magnétique terrestre).

$$\vec{B}_{\text{résultant}} = \vec{B}_h + \vec{B}_{\text{solénoïde}}$$

$$\tan(57,5^\circ) = \frac{\vec{B}_h}{\vec{B}_{\text{solénoïde}}}$$

$$\vec{B}_h = 2 \cdot 10^{-5} [T]$$

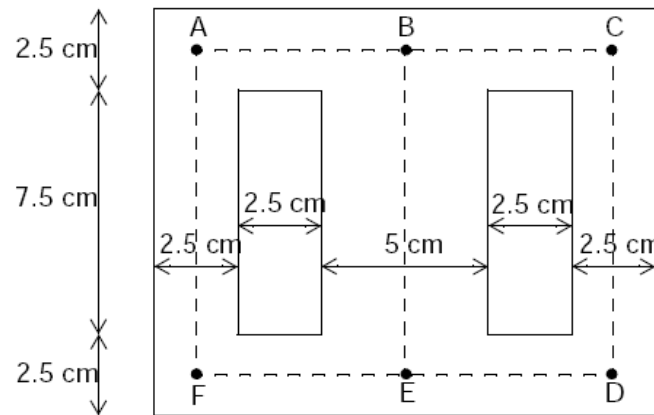


Exercice 4.10

1. Donner le circuit équivalent du système électromagnétique.
2. Calculer la réluctance des parcours magnétiques.
3. Donner le circuit équivalent du système.
4. Une source de tension sinusoïdale 120V/60HZ est connectée à la bobine no. 1, calculer les courants I_1 et I_2 .
5. Les bornes de la bobine no. 2 sont court-circuitées, calculer les courants I_{1cc} et I_{2cc} .

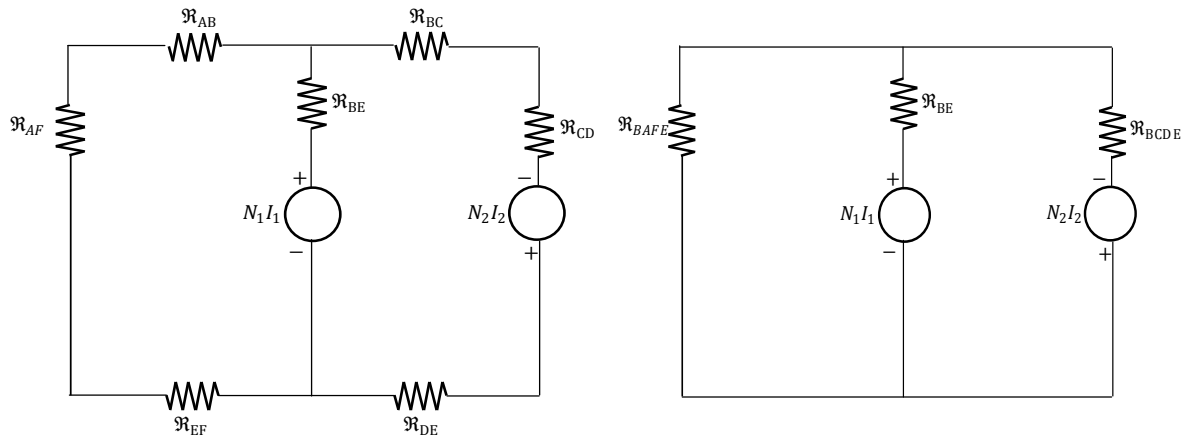
$$AB = BC = BE = EF = 6,25 \text{ cm}$$

$$AF = BE = CD = 10 \text{ cm}$$



Solution de l'exercice 4.10

1. Le circuit équivalent du système électromagnétique :



On calcule la réluctance des parcours magnétiques :

$$\mathfrak{R}_{BAFE} = \mathfrak{R}_{BCDE} = \frac{l_{BAFE}}{\mu S} = \frac{0,225}{2500 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2})}$$

$$= 7,162 \cdot 10^4 [At/wb]$$

$$\mathfrak{R}_{BE} = \frac{l_{BE}}{\mu S_1} = \frac{0,1}{2500 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2})} = 1,5915 \cdot 10^4 [At/wb]$$

L'inductance propre de la bobine 1 est :

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{eq1}}$$

Avec : $\mathfrak{R}_{eq1}$ la réluctance équivalente vue par la bobine 1.

On a :

$$\mathfrak{R}_{eq1} = \mathfrak{R}_{BE} + \frac{(\mathfrak{R}_{BAFE})(\mathfrak{R}_{BCDE})}{(\mathfrak{R}_{BAFE}) + (\mathfrak{R}_{BCDE})} = 5,1725 \cdot 10^4 [At/wb]$$

Alors :

$$L_1 = \frac{180.180}{5,1725.10^4} = 0,626 H$$

L'inductance propre de la bobine 2 est :

$$L_1 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq2}}$$

Avec : $\mathfrak{R}_{eq2}$ la réluctance équivalente vue par la bobine 2.

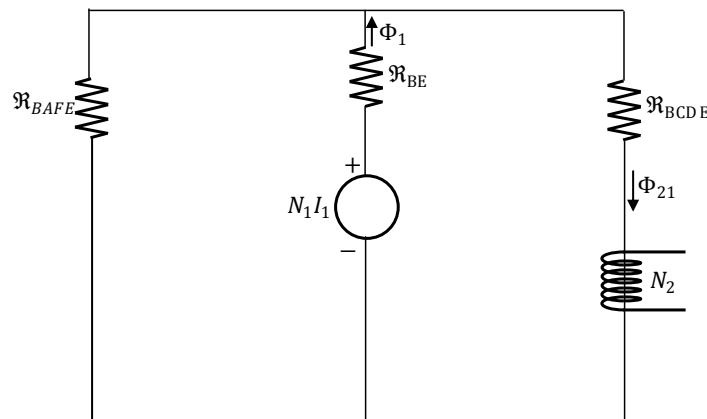
On a :

$$\mathfrak{R}_{eq2} = \mathfrak{R}_{BCDE} + \frac{(\mathfrak{R}_{BAFE})(\mathfrak{R}_{BE})}{(\mathfrak{R}_{BAFE}) + (\mathfrak{R}_{BE})} = 8,464.10^4 [At/wb]$$

Alors :

$$L_2 = \frac{150.150}{8,464.10^4} = 0,266 H$$

On calcule l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 en calculant le flux total couplé à la bobine 2 par la bobine 1 (avec : $I_1 \neq 0$ et $I_2 = 0$).



$$\Phi_{21} = \frac{\Phi_1}{2} \quad \text{car : } \mathfrak{R}_{BCDE} = \mathfrak{R}_{BAFE}$$

Le flux créé par la bobine 1 est :

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathfrak{R}_{eq1}}$$

Avec : $\mathfrak{R}_{eq1}$ est la réluctance équivalente vue par la bobine 1.

Le flux injecté dans la bobine 2 est calculé à l'aide de la loi du diviseur de courant :

$$\Phi_{21} = \frac{\mathfrak{R}_{BAFE}}{\mathfrak{R}_{BCDE} + \mathfrak{R}_{BAFE}} \cdot \Phi_1 = 0,5 \cdot \Phi_1$$

Alors :

$$\Phi_{21} = 0,5 \cdot \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}} = \frac{90}{5,1725 \cdot 10^4} \cdot I_1 = 0,0017 \cdot I_1$$

L'inductance mutuelle est :

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{150 \cdot 0,0017 \cdot I_1}{I_1} = 0,261 \text{ H}$$

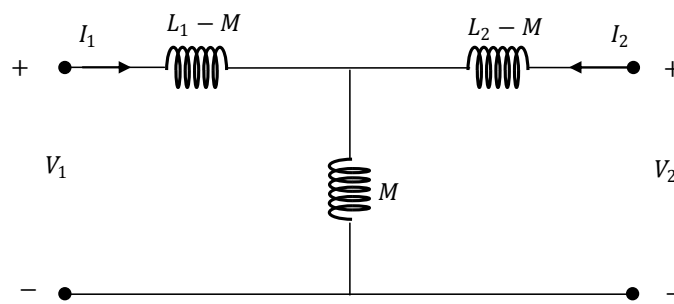
On a aussi :

$$M_{12} = M_{21}$$

Le coefficient de couplage est égal à :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{0,261}{\sqrt{0,626 \cdot 0,266}} = 0,64$$

2. Le circuit équivalent du système :

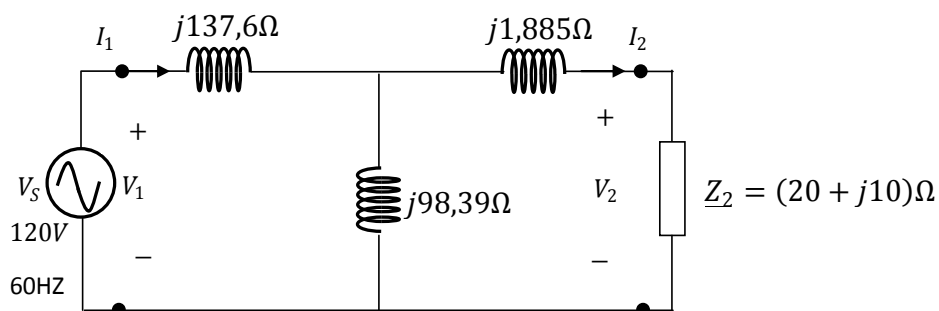


$$L_1 - M = 0,365 \text{ [H]}$$

$$L_2 - M = 0,005 \text{ [H]}$$

$$M = 0,261 \text{ [H]}$$

3. Une source de tension sinusoïdale 120V/60HZ est connectée à la bobine no. 1 :



Le courant I_1 est égale à :

$$\underline{I}_1 = \frac{V_s}{j137,6 + \frac{(j98,39)(j1,885 + 20 + j10)}{j98,39 + j1,885 + 20 + j10}} = \frac{120|0^\circ}{151,78|81,2^\circ}$$

$$= 0,79 [-81,2^\circ][A]$$

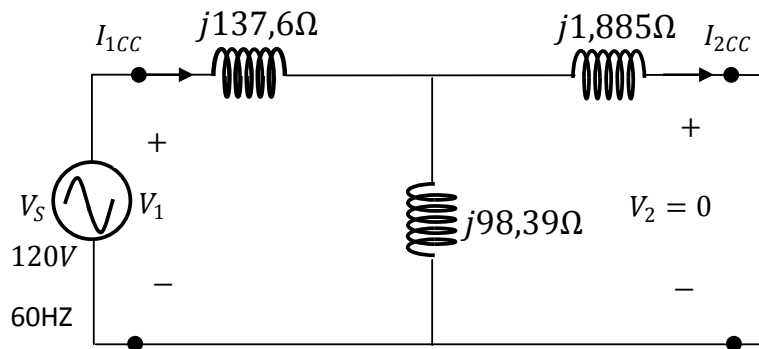
Le courant $\underline{I}_2$ est calculé par la loi du diviseur de courant :

$$\underline{I}_2 = \frac{j98,39}{j98,39 + j1,885 + 20 + j10} \cdot \underline{I}_1 = 0,69[-73,9^\circ][A]$$

La tension $\underline{V}_2$ est égale à :

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = (20 + j10)(0,69[-73,9^\circ]) = 15,52[-47,3^\circ][V]$$

4. Les bornes de la bobine no. 2 sont court-circuitées :



Le courant $\underline{I}_{1cc}$ est égale à :

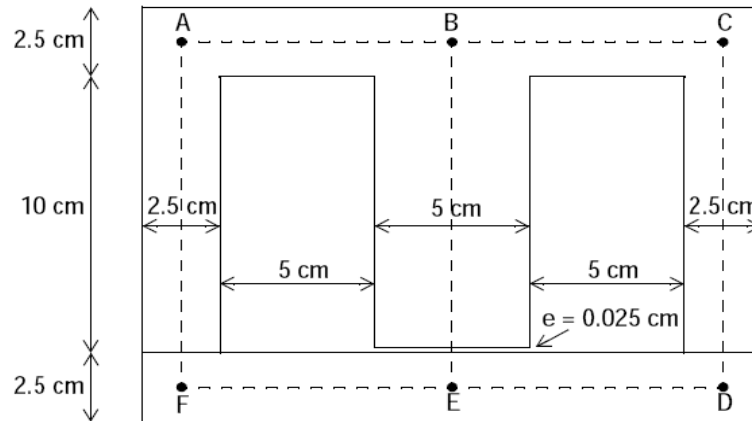
$$\underline{I}_{1cc} = \frac{120|0^\circ}{j137,6 + \frac{(j98,39)(j1,885)}{j98,39 + j1,885}} = \frac{120|0^\circ}{j139,45} = 0,86 [-90^\circ][A]$$

Le courant $\underline{I}_{2cc}$ est égale à :

$$\underline{I}_{2cc} = \frac{j98,39}{j98,39 + j1,885} \cdot \underline{I}_{1cc} = 0,844[-90^\circ][A]$$

Exercice 4.11

1. Donner le circuit équivalent du système électromagnétique.
2. Calculer les inductances mutuelles.
3. Calculer la densité de flux dans l'entrefer.

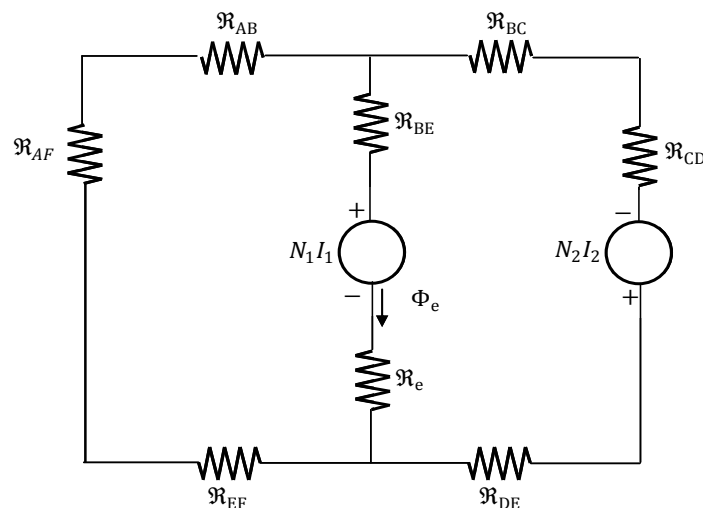


$$AB = BC = BE = EF = 8,75 \text{ cm}$$

$$AF = BE = CD = 12,5 \text{ cm}$$

Solution de l'exercice 4.11

1. le circuit équivalent du système électromagnétique.



L'épaisseur réelle du noyau magnétique :

$$d = 120.0,5.0,95 = 57 \text{ [mm]}$$

On calcule la réluctance des parcours magnétiques :

$$\mathfrak{R}_{AB} = \mathfrak{R}_{BC} = \mathfrak{R}_{DE} = \mathfrak{R}_{EF} = \frac{l_{AB}}{\mu S} = \frac{8,75 \cdot 10^{-2}}{2000 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 5,7 \cdot 10^{-2})}$$

$$= 2,4432 \cdot 10^4 [\text{At/wb}]$$

$$\mathfrak{R}_{AF} = \mathfrak{R}_{CD} = \frac{l_{AF}}{\mu S} = \frac{12,5 \cdot 10^{-2}}{2000 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 5,7 \cdot 10^{-2})}$$

$$= 3,49 \cdot 10^4 [\text{At/wb}]$$

$$\mathfrak{R}_{BE} = \frac{l_{BE}}{\mu S_1} = \frac{12,5 \cdot 10^{-2}}{2000 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-2} \cdot 5,7 \cdot 10^{-2})} = 1,745 \cdot 10^4 [\text{At/wb}]$$

La réluctance de l'entrefer :

$$\mathfrak{R}_e = \frac{e}{\mu_0 S} = \frac{0,025 \cdot 10^{-2}}{(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-2} \cdot 5,7 \cdot 10^{-2})} = 6,9805 \cdot 10^4 [At/wb]$$

2. les inductances mutuelles :

Les inductances propres de la bobine N°1 est :

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{eq1}}$$

Avec : $\mathfrak{R}_{eq1}$ est la réluctance équivalente vue par la bobine N°1.

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{eq1} &= \mathfrak{R}_{BE} + \mathfrak{R}_e + \frac{(\mathfrak{R}_{BC} + \mathfrak{R}_{CD} + \mathfrak{R}_{DE})(\mathfrak{R}_{AB} + \mathfrak{R}_{AF} + \mathfrak{R}_{EF})}{(\mathfrak{R}_{BC} + \mathfrak{R}_{CD} + \mathfrak{R}_{DE}) + (\mathfrak{R}_{AB} + \mathfrak{R}_{AF} + \mathfrak{R}_{EF})} \\ &= 1,2914 \cdot 10^5 [At/wb] \end{aligned}$$

Alors :

$$L_1 = \frac{100 \cdot 100}{1,2914 \cdot 10^5} = 0,0774 H = 77,4 mH$$

Les inductances propres de la bobine N°2 est :

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq2}}$$

Avec : $\mathfrak{R}_{eq2}$ est la réluctance équivalente vue par la bobine N°2.

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{eq2} &= \mathfrak{R}_{BC} + \mathfrak{R}_{CD} + \mathfrak{R}_{DE} + \frac{(\mathfrak{R}_{BE} + \mathfrak{R}_e)(\mathfrak{R}_{AB} + \mathfrak{R}_{AF} + \mathfrak{R}_{EF})}{(\mathfrak{R}_{BE} + \mathfrak{R}_e) + (\mathfrak{R}_{AB} + \mathfrak{R}_{AF} + \mathfrak{R}_{EF})} \\ &= 1,265 \cdot 10^5 [At/wb] \end{aligned}$$

Alors :

$$L_2 = \frac{125 \cdot 125}{1,265 \cdot 10^5} = 0,1235 H = 123,5 mH$$

On calcule l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 en calculant le flux injecté dans la bobine 2 par la bobine 1 (avec $l_1 \neq 0$ et $l_2 = 0$).

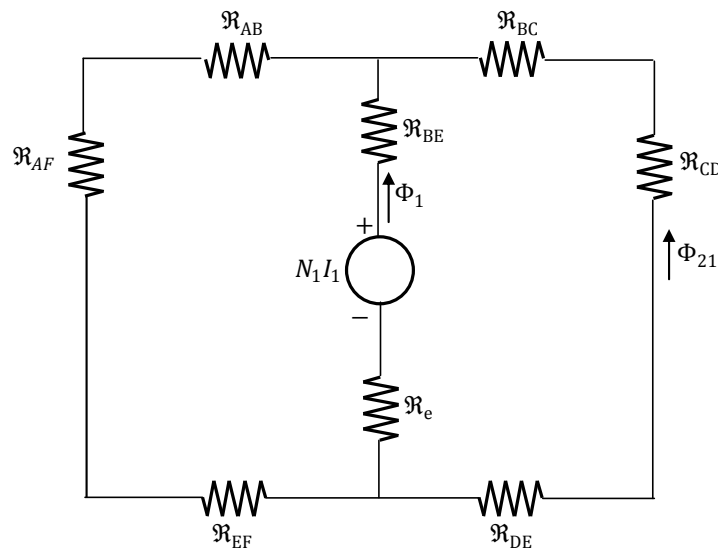
Le flux créé par la bobine 1 est :

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathfrak{R}_{eq1}}$$

Avec $\mathfrak{R}_{eq1}$ est la réluctance équivalente vue par la bobine 1.

Le flux injecté dans la bobine 2 est calculé à l'aide de la loi de diviseur de courant.

$$\Phi_{21} = \frac{(\mathcal{R}_{AB} + \mathcal{R}_{AF} + \mathcal{R}_{EF})}{(\mathcal{R}_{AB} + \mathcal{R}_{AF} + \mathcal{R}_{EF}) + (\mathcal{R}_{BC} + \mathcal{R}_{CD} + \mathcal{R}_{DE})} \cdot \Phi_1 = 0,5 \cdot \Phi_1$$



Alors :

$$\Phi_{21} = 0,5 \cdot \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}} = \frac{50}{1,2914 \cdot 10^5} \cdot I_1 = 3,8718 \cdot 10^{-4} \cdot I_1$$

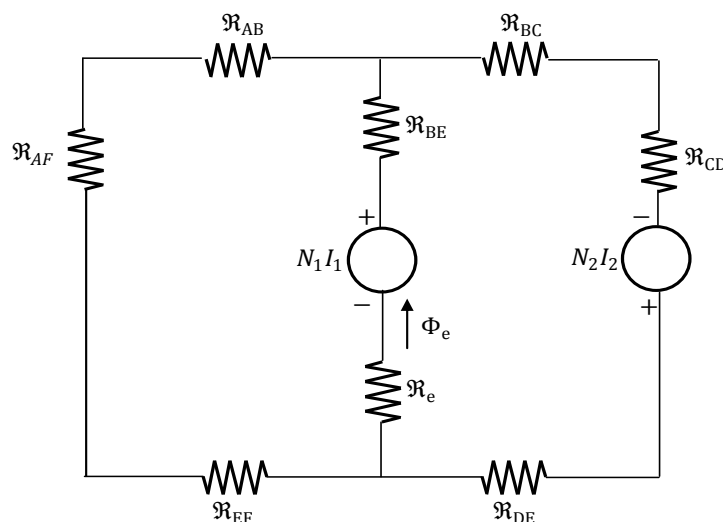
L'inductance mutuelle est :

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{125 \cdot 3,8718 \cdot 10^{-4} \cdot I_1}{I_1} = 0,0484 \text{ H} = 48,4 \text{ mH}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

3. Calculer la densité de flux dans l'entrefer :

On fait calculer des courants continus dans les bobines : $I_1 = 0,5 \text{ A}$ et $I_2 = 1 \text{ A}$



On calcule le flux dans l'entrefer en appliquant le principe de superposition.

Le flux d'entrefer créé par la bobine 1 seule est :

$$\Phi_{e_1} = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_{eq1}}$$

Avec : $\mathcal{R}_{eq1}$ la réluctance équivalente vue par la bobine 1.

$$\Phi_{e_1} = \frac{50}{1,2914 \cdot 10^5} = 3,8718 \cdot 10^{-4} [wb]$$

Le flux d'entrefer créé par la bobine 2 seule est :

$$\Phi_{e_2} = \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq2}} \cdot \frac{(\mathcal{R}_{AB} + \mathcal{R}_{AF} + \mathcal{R}_{EF})}{(\mathcal{R}_{AB} + \mathcal{R}_{AF} + \mathcal{R}_{EF}) + (\mathcal{R}_{BE} + \mathcal{R}_e)}$$

Avec : $\mathcal{R}_{eq2}$ est la réluctance équivalente vue par la bobine 2.

$$\Phi_{e_2} = \frac{125}{1,265 \cdot 10^5} \cdot \frac{8,3766 \cdot 10^4}{8,3766 \cdot 10^4 + 8,7256 \cdot 10^4} = 4,8398 \cdot 10^{-4} [wb]$$

Le flux d'entrefer total (créé par la bobine 1 et bobine 2) est égal à :

$$\Phi_e = \Phi_{e_1} + \Phi_{e_2} = 3,8718 \cdot 10^{-4} + 4,8398 \cdot 10^{-4} = 8,7116 \cdot 10^{-4} [wb]$$

La densité du flux dans l'entrefer est :

$$B_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{8,7116 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 5,7 \cdot 10^{-2}} = 0,306 [T]$$

CHAPITRE 05 :

LES TRANSFORMATEURS.

5.1. Introduction

Dans les réseaux électriques, il est nécessaire d'adapter les niveaux de tension selon l'utilisation. Le transformateur est la machine qui assure cette adaptation. Ce chapitre est consacré à l'étude des transformateurs : leur constitution, leur principe de fonctionnement et leurs principales caractéristiques.

5.2. Définition

Le transformateur électrique est un convertisseur statique qui permet de modifier les valeurs de la tension et de l'intensité du courant délivrées par une source d'énergie électrique alternative en un système de tension et de courant de valeurs différentes mais de même fréquence et de même forme.

5.3. Utilisation

Le transformateur est utilisé :

- En électronique :
 - Alimentation à basse tension.
 - Adaptation d'impédance.
- En électrotechnique :
 - Transformation des niveaux de tensions pour le transport et la distribution.
 - Alimentation à basse tension.
- En mesure :
 - Transformateurs d'intensité ou de courant.
 - Transformateurs de potentiel.

Et d'autre, comme:

- Transformateurs d'impulsion.
- et les transformateurs d'essais.

5.4. Construction

Dans un transformateur, l'énergie est transférée du primaire au secondaire par l'intermédiaire du circuit magnétique que constitue la carcasse du transformateur. Ces deux circuits sont alors magnétiquement couplés. Ceci permet de réaliser un isolement galvanique entre les deux circuits.

Alors, un transformateur est constitué de deux parties essentielles, le circuit magnétique et les enroulements.

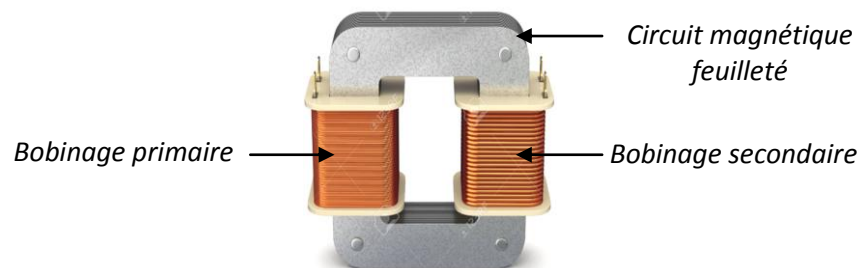


Figure 5.1 : Transformateur monophasé.

On utilise principalement deux types de construction, le type cuirassé et le type à colonnes :

- **le type cuirassé** : si le noyau magnétique possède un montant central est deux montants latéraux, les enroulements sont placés sur le montant central ;
- **le type à colonnes** : si le noyau magnétique comporte deux montants, on répartit pour moitié chacun des enroulements sur chaque montant.

Lorsqu'il s'agit de transformateurs de moyenne ou de forte puissance, le noyau et les enroulements généralement sont placés dans une cuve remplie d'huile pour assurer un bon refroidissement.

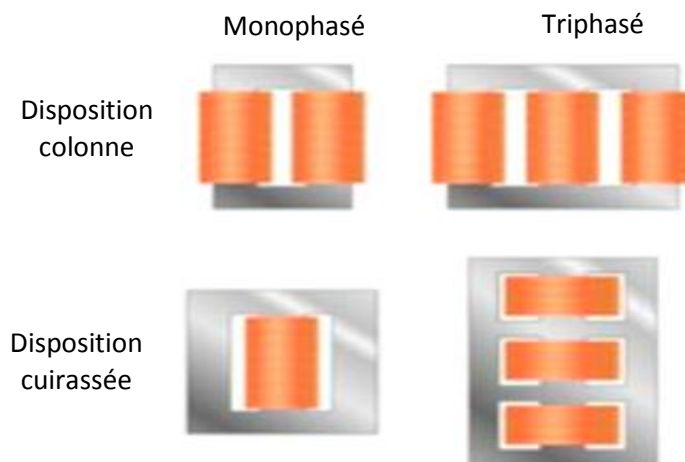


Figure 5.2 : Les deux types de construction des transformateurs.

Le circuit magnétique

Le circuit magnétique d'un transformateur est soumis à un champ magnétique variable au cours du temps. Pour les transformateurs reliés au secteur de distribution, cette fréquence est de 50 ou 60 Hertz. Le circuit magnétique est généralement feuilleté pour réduire les pertes par courants de Foucault, qui dépendent de l'amplitude du signal et de sa fréquence. Pour les

transformateurs les plus courants, les tôles empilées ont la forme de E et de I , permettant ainsi de glisser une bobine à l'intérieur des fenêtres du circuit magnétique ainsi constitué.

Les circuits magnétiques des transformateurs " haut de gamme " ont la forme d'un tore. Le bobinage des tores étant plus délicat, le prix des transformateurs toriques est nettement plus élevé.

Enroulements(Bobinage)

Un enroulement de transformateur est l'« ensemble des spires formant un circuit associé à l'une des tensions pour lesquelles le transformateur a été établi ».

En d'autre terme, il s'agit d'une bobine électrique placée autour du noyau magnétique d'un transformateur , de manière à limiter les fuites magnétiques.

En résumé, un transformateur est constitué :

- ✓ D'un circuit magnétique fermé ;
- ✓ De deux circuits électriques sans liaison entre-deux, enroulés autour du circuit magnétique :
 - ❖ Circuit électrique lié au générateur (Primaire);
 - ❖ Circuit électrique lié au récepteur (secondaire).

Appelons V_1 la valeur efficace de v_1 au primaire et V_2 la valeur efficace de v_2 au secondaire :

Si : $V_1 < V_2$, le transformateur est dit élévateur de tension.

Si : $V_1 > V_2$, le transformateur est dit abaisseur de tension.

Si : $V_1 = V_2$, le transformateur est un transformateur d'isolement.

5.5. Symbole du transformateur

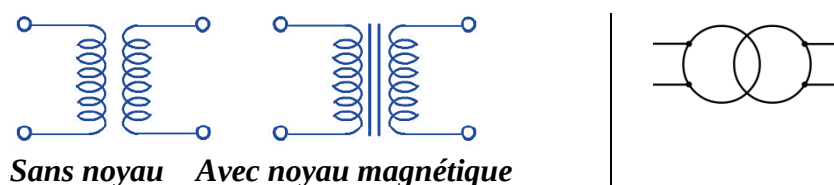


Figure 5.3 : Symbole du transformateur monophasé.

5.6. Principe de fonctionnement

Entre le primaire et le secondaire, il n'existe aucune connexion électrique. Tout le couplage entre les deux enroulements est magnétique.

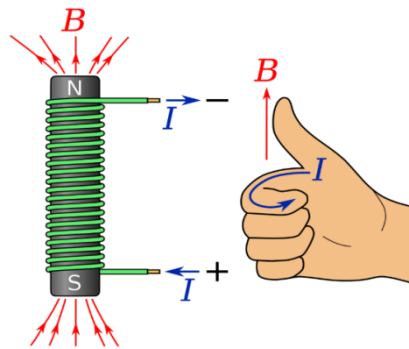


Figure 5.4 : Détermination du sens du champ magnétique par la 2^{ème} règle de la main droite.

Lorsqu'on applique une tension alternative u_1 au bobinage primaire N_1 , un courant alternatif i y circule. ce courant crée un flux magnétique alternatif dans le noyau magnétique. Selon la loi de Lenz-Faraday, ce flux traverse le bobinage secondaire et y induit une force électromotrice (f.e.m) u_2 dans le bobinage secondaire N_2 . La force électromotrice induite est proportionnelle au nombre de tours dans la bobine et au taux de variation du flux magnétique. Selon le rapport du nombre de tours entre le primaire N_1 et le secondaire N_2 , le secondaire alimente la charge avec une tension u_2 différente de celle de la source u_1 .

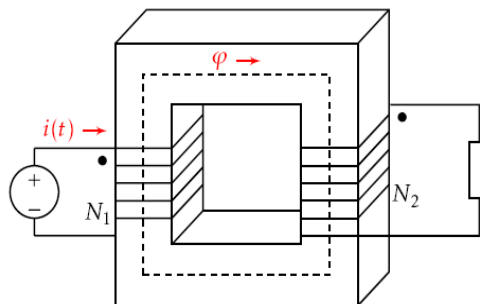


Figure 5.5 : Un transformateur monophasé.

5.7. Equations générales de fonctionnement

Dans les représentations de principe, les enroulements primaire et secondaire apparaissent comme s'ils étaient bobinés séparément sur deux colonnes.

$$\Phi_{f1} = \Phi_1 + \Phi$$

$$\Phi_{f2} = \Phi - \Phi_2$$

Avec :

Φ : Le flux commun circulant dans l'ensemble du circuit magnétique ;

Φ_1 et Φ_2 : Le flux par spire des enroulements primaire et secondaire ;

Φ_{f1} et Φ_{f2} : Les flux de fuites (par spire) au primaire et au secondaire.

Les flux totaux de fuites sont proportionnels aux courants qui les produisent :

$$N_1 \Phi_{f1} = l_1 i_1$$

$$N_2 \Phi_{f2} = l_2 i_2$$

l_1 et l_2 sont appelés inductances de fuites partielles du primaire et du secondaire.

Mise en équations

D'après la loi d'Hopkinson appliqué au circuit magnétique :

$$N_1 \cdot i_1(t) - N_2 \cdot i_2(t) = \mathfrak{R} \cdot \Phi(t)$$

Où $\mathfrak{R}$ est la réluctance totale du circuit magnétique.

D'après la loi de Lenz-Faraday, on a :

$$\begin{cases} e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} - N_1 \frac{d\Phi_{f1}}{dt} \\ e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_{f2}}{dt} \end{cases}$$

D'après la loi d'Ohm généralisée, il vient :

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ u_2 = -R_2 i_2 - e_2 = -R_2 i_2 - l_2 \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{cases}$$

5.8. Modèle du transformateur monophasé idéal (Parfait)

C'est un transformateur virtuel sans aucune perte. Il est utilisé pour modéliser les transformateurs réels. Ces derniers sont considérés comme une association d'un transformateur parfait et de diverses impédances.

Nous prenons comme hypothèses :

1. Résistances des bobinages négligeables.
2. Fuites magnétiques négligeables ($\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$).
3. Circuit magnétique non saturé avec $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow \mathfrak{R} \rightarrow 0$

Le flux est donc totalement contenu à l'intérieur du noyau. Le couplage magnétique entre le primaire et le secondaire est parfait ; tout le flux du primaire se rend au secondaire.

Relation entre les tensions

Le flux à travers une section du circuit magnétique est noté $\Phi(t)$.

Exprimer le flux total $\Phi_1(t)$ pour l'enroulement primaire :

$$\Phi_1(t) = N_1 \cdot \Phi(t)$$

Exprimer le flux total $\Phi_2(t)$ pour l'enroulement secondaire :

$$\Phi_2(t) = N_2 \cdot \Phi(t)$$

Nous pouvons appliquer la loi de Lenz-Faraday aux deux bobinages :

Au primaire :

$$u_1(t) = -e_1(t)$$

$$e_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Au secondaire :

$$u_2(t) = -e_2(t)$$

$$e_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

e_1 : La f.e.m induite au primaire en [V] ;

Φ_1 : Le flux magnétique au primaire en [wb] ;

e_2 : La f.e.m induite au secondaire en [V] ;

Φ_2 : Le flux magnétique au secondaire en [wb] ;

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{e_1(t)}{N_1} = -\frac{e_2(t)}{N_2} \Rightarrow \frac{e_2(t)}{e_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{e_2(t)}{e_1(t)} = \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

Cette relation indique que les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont en opposition de phase.

La relation entre les valeurs efficaces U_1 et U_2 ne tient pas compte du déphasage:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

m : Rapport de transformation sans unité.

Relation entre les courants

Puisque le transformateur est parfait $\mathfrak{R} = 0$, la relation d'Hopkinson devient (loi de compensation des ampères tours :

$$N_1 \cdot i_1(t) - N_2 \cdot i_2(t) = \mathfrak{R} \cdot \Phi(t) = 0$$

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

La relation entre les valeurs efficaces:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

I_1 : La valeur efficace de l'intensité $i_1(t)$ en [A] ;

I_2 : La valeur efficace de l'intensité $i_2(t)$ en [A] ;

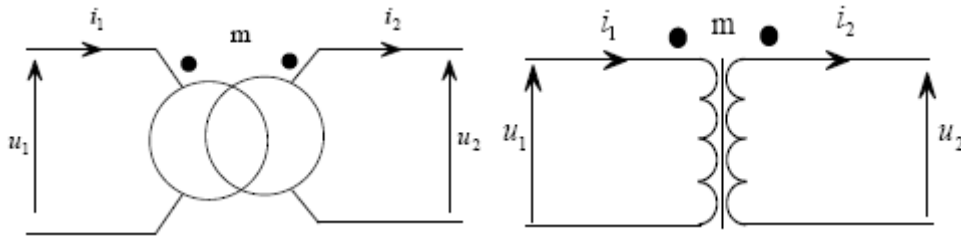


Figure 5.6 : Circuit équivalent du transformateur monophasé idéal.

Utilisation en régime sinusoïdal

Si toutes les grandeurs varient sinusoïdalement en fonction du temps et à la même fréquence. On peut alors utiliser les notations complexes et représenter les tensions et les courants sur un diagramme de Fresnel.

L'enroulement primaire est alimenté par une tension sinusoïdale :

$$u_1(t) = U_1\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

Notion en valeurs instantanées :

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

$$\Phi(t) = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1\omega} \sin(\omega t) = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Notion en valeurs complexes :

$$\underline{U}_1 = jN_1\omega\underline{\Phi} \Rightarrow \underline{\Phi} = \frac{\underline{U}_1}{jN_1\omega} = \frac{\underline{U}_1}{N_1\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Déphasage par rapport à $u_1(t)$ (quadrature arrière).

Ainsi, pour une tension primaire de valeur efficace U_1 constante, le flux maximal Φ_{max} est constant quelle que soit la charge :

$$\Phi_{max} = \frac{U_1\sqrt{2}}{N_1 2\pi f} \Rightarrow U_1 = 4,44 f N_1 \Phi_{max}$$

On reconnaît la formule de Boucherot qui sera utile pour la détermination du nombre de spires des enroulements du transformateur, lorsque U_1 et U_2 seront connus. Le transformateur est donc une machine à flux forcé : la tension d'alimentation primaire impose l'état magnétique du noyau.

Dans un transformateur parfait, toutes les puissances (active, réactive et apparente) se conservent (évident car : $p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) = u_2(t) \cdot i_2(t) = p_2(t)$).

$$P_1 = P_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$S_1 = S_2$$

Le rendement ($\eta = \frac{P_2}{P_1}$) d'un transformateur parfait est donc égal à 1.

Diagramme de Fresnel

D'après les équations ci-dessus les grandeurs V_1 et V_2 sont alignées, et il en va de même pour les grandeurs I_1 et I_2 . Par conséquent, les déphasages φ_1 et φ_2 sont les mêmes.

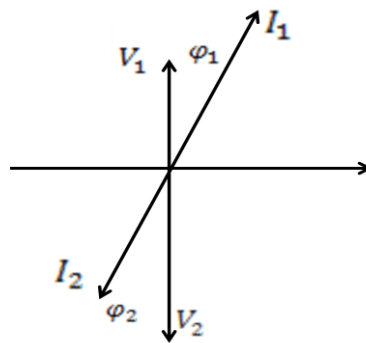


Figure 5.7 : Représentation de Fresnel d'un transformateur idéal.

D'après ce qu'il précède, le transformateur idéal conserve les puissances : active, réactive et apparente ainsi que le déphasage.

Transposition d'une impédance

On souhaite définir une règle préalable établissant une équivalence entre une impédance placée au primaire et une impédance placée au secondaire d'un transformateur parfait.

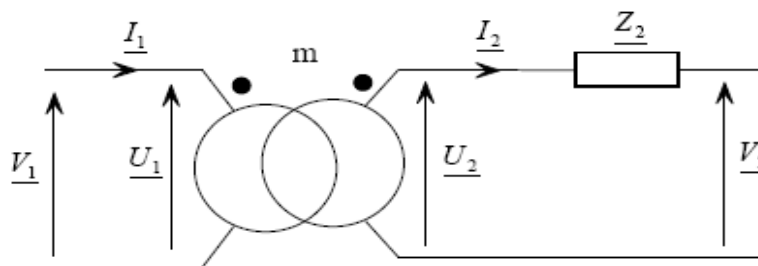


Figure 5.8 : Schéma équivalent du transformateur monophasé (Paramètres ramenés au secondaire).

On a :

$$\underline{V_1} = \underline{U_1} - \underline{Z_2} \cdot \underline{I_2} = m \underline{V_1} - \underline{Z_2} \cdot \underline{I_2}$$

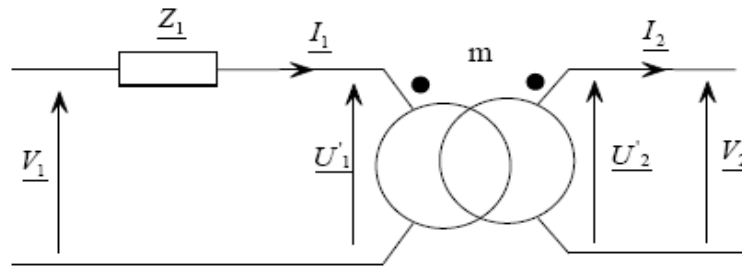


Figure 5.9 : Schéma équivalent du transformateur monophasé
(Paramètres ramenés au primaire).

$$\underline{V}_2 = m \underline{U}'_1 = m \underline{V}_1 - m \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1$$

Les deux équations sont équivalentes si :

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = m \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1$$

Puisque $\underline{I}_1 = m \underline{I}_2$, il en résulte que :

$$\underline{Z}_2 = m^2 \underline{Z}_1 \quad \text{et} \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{m^2}$$

On transfère une impédance du secondaire au primaire d'un transformateur parfait en la divisant par m^2 . Inversement, on peut transférer une impédance du primaire au secondaire d'un transformateur parfait en la multipliant par m^2 .

5.9. Le transformateur réel

Les pertes dans un transformateur réel

Dans un transformateur réel, on ne néglige plus les pertes :

- Pertes Joules : dans les enroulements ;
- Pertes fer : phénomène hystérésis au niveau du noyau et pertes par courant de Foucault car réluctance non-nulle.
- Fuite de flux magnétique au niveau du noyau.

Influence de la réluctance du circuit magnétique

Si on ne néglige plus la réluctance du circuit magnétique du transformateur on aura :

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \Re \Phi$$

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Dans ces conditions, le flux Φ est forcé par la tension d'alimentation primaire u_1 et est sinusoïdal.

A vide ($i_2 = 0$), le courant primaire vaut i_{10} et assure la production d'un flux commun Φ c'est le courant magnétisant. En charge, le secondaire appelle un courant i_2 .

Pour maintenir le même flux Φ qu'à vide, la force magnétomotrice doit rester la même, c'est-à-dire :

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = N_1 i_{10} = \mathcal{R}\Phi$$

Le primaire appelle un courant i_1 tel que :

$$i_1 = i_{10} + i_{1t}$$

Avec :

$$i_{1t} = \frac{N_2}{N_1} i_2 = m i_2$$

On appelle i_{1t} le courant de travail ou le courant utile, car c'est lui qui assure le transfert d'énergie du primaire vers le secondaire.

On rend compte du courant i_{10} par l'inductance magnétisante L_m dans le schéma équivalent.

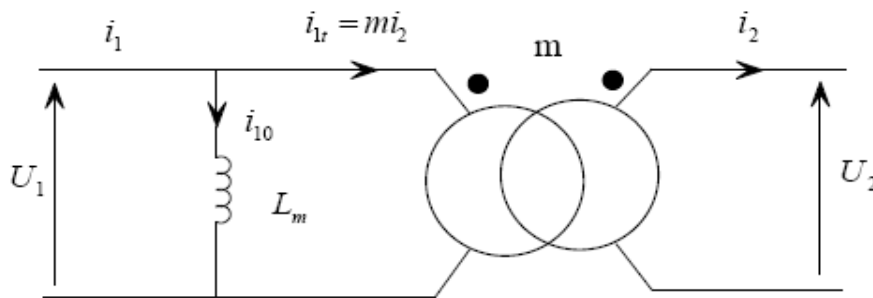


Figure 5.10 : Schéma équivalent du transformateur monophasé avec l'inductance de magnétisation.

La figure ci-dessous est une représentation vectorielle des courants :

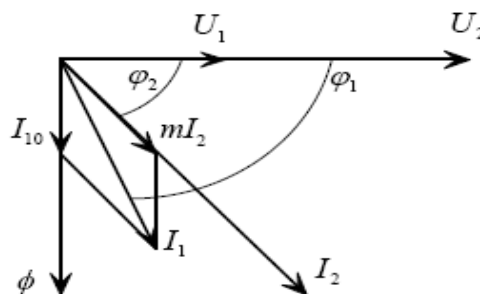


Figure 5.11 : Diagramme vectorielle des tensions et des courants du transformateur avec présence de l'inductance de magnétisation.

Introduction des pertes fer

Le flux alternatif engendre, par hystérésis et courants de Foucault, un échauffement du circuit magnétique : les pertes (fer). Cela correspond à une absorption supplémentaire de puissance active approximativement proportionnelle au carré du champ magnétique B et à la fréquence f .

$$P_F = K_f V B_m^2 f^2$$

$$P_H = K_H V B_m f^2$$

P_F et P_H : sont des pertes par courant de Foucault et d'hystérésis ;

K_f : Coefficient du à la qualité du matériau du circuit magnétique ;

K_H : Coefficient du à la qualité du matériau du circuit magnétique ;

V : Volume du circuit magnétique ;

B_m : Le champ magnétique maximal dans le circuit magnétique ;

f : La fréquence de la tension d'alimentation.

Il est commode de compléter le schéma équivalent en représentant les pertes fer par une résistance fictive R_F , absorbant sous la tension U_1 le courant I_{10a} .

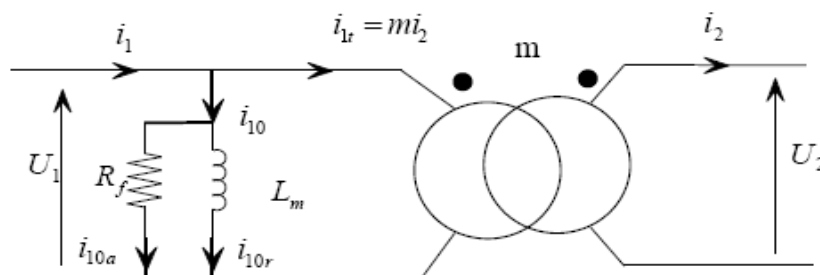


Figure 5.12 : Schéma équivalent du transformateur monophasé avec la résistance fictive des pertes fer.

La figure ci-dessous présente le diagramme vectorielle des courants (Fresnel) :

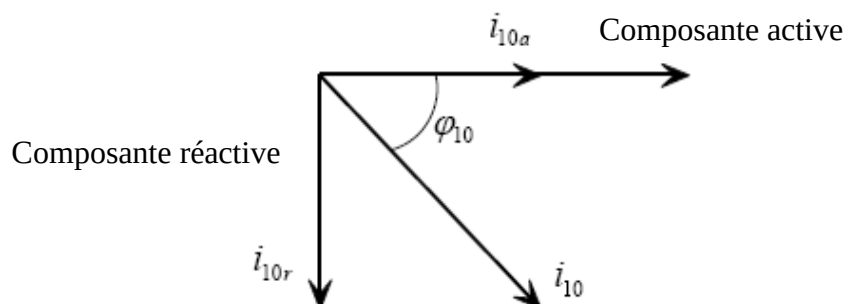


Figure 5.13 : Diagramme vectorielle des composantes active et réactive du courant magnétisant.

Schéma réel équivalent

Les enroulements primaire et secondaire du transformateur présentent une résistance électrique non négligeable (c.-à-d Conductivité électrique non nulle). Une partie du flux généré par les bobinages passe en dehors du circuit magnétique.

En tenant compte des pertes fer, des pertes joules et des fuites des enroulements primaire et secondaire causées par les phénomènes cités ci-dessus, on aboutit au schéma réel équivalent suivant :

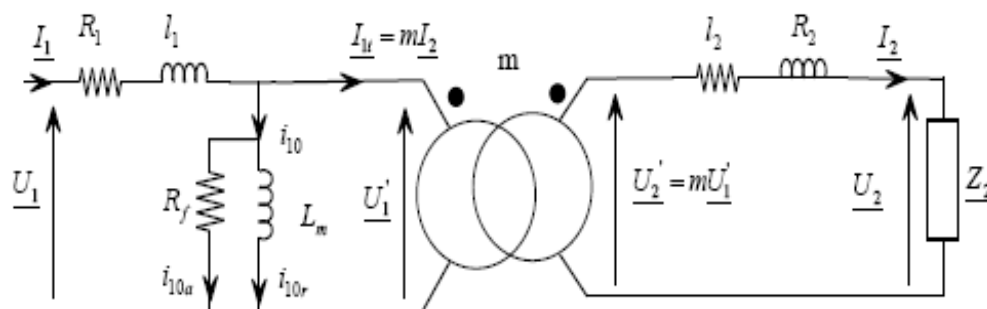


Figure 5.14 : Schéma réel du transformateur monophasé.

Ce schéma décrit bien le fonctionnement d'un transformateur réel en charge, mais son usage est difficile et surtout, ses paramètres sont de mesure délicate, en particulier les inductances de fuites.

On fait appel à la simplification selon l'hypothèse de Kapp, pour avoir un schéma simplifié plus commode d'emploi.

Schéma équivalent dans l'hypothèse de Kapp

Elle consiste à négliger en charge le courant i_{10} devant le courant primaire i_1 .

En pratique, la chute de tension dans R_1 et l_1 est faible devant la tension U_1 et pour le calcul du courant i_{10} , lui-même faible, il est inutile d'en tenir compte.

On obtient alors un schéma plus simple et suffisamment précis.

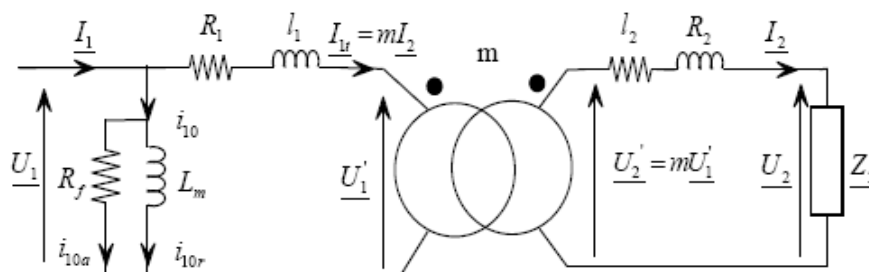


Figure 5.15 : Schéma équivalent du transformateur en négligeant le courant de magnétisation.

En utilisant le théorème du transfert d'impédance pour ramener la résistance et d'inductance du primaire au secondaire, on aura le schéma équivalent (dit de Kapp) ramené au secondaire.

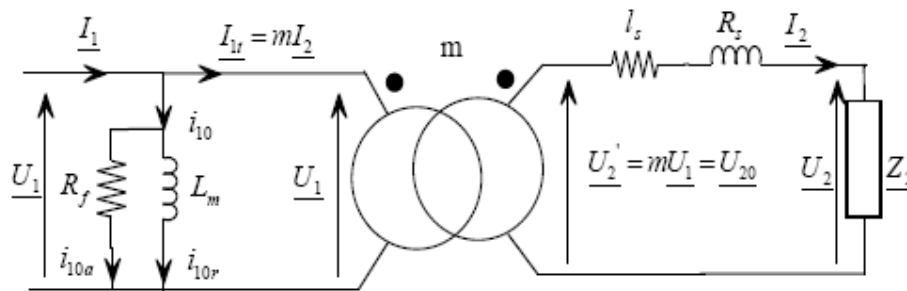


Figure 5.16 : Schéma équivalent de Kapp.

Avec :

La résistance interne totale ramenée au secondaire :

$$R_S = R_2 + m^2 R_1$$

L'inductance de fuites totales ramenée au secondaire :

$$l_s = l_2 + m^2 l_1$$

Le rapport de transformation à vide :

$$m = \frac{N_2}{N_1}$$

$m > 1$: Transformateur élévateur.

$m < 1$: Transformateur abaisseur.

$m = 1$: Transformateur d'isolement.

Procédé expérimental de détermination du schéma de Kapp

Les paramètres du schéma équivalent de Kapp doivent être déterminés par des essais expérimentaux.

On peut effectuer des mesures directement sous tension et courant nominaux (Essai à vide).

Il est préférable de séparer les essais, ce qui, en outre, permet de travailler à puissance réduite (Essai en court-circuit).

a) Essai à vide sous tension nominale

Le secondaire du transformateur étant à vide ($I_2 = 0$).

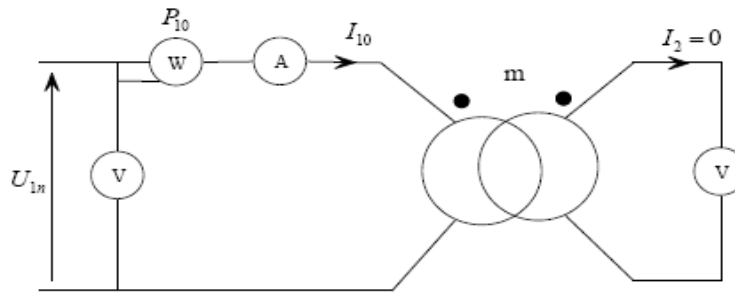


Figure 5.17 : Essai à vide du transformateur monophasé.

Le primaire est alimenté par une tension nominale :

$$u_{1n}(t) = U_{1n}\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

On mesure : U_{1n} , I_{10} , P_{10} et U_{20} .

Les courants primaires et secondaires étant respectivement très faibles et nuls, on néglige les pertes « cuivre », c'est-à-dire les pertes joules. La puissance mesurée P_{10} représente les pertes fer du transformateur d'où :

$$R_f = \frac{U_{1n}^2}{P_{10}}$$

On peut déterminer la puissance réactive Q_{10} à partir des mesures faites :

$$Q_{10} = \sqrt{(U_{1n}I_{10})^2 - P_{10}^2}$$

Celle-ci est consommée par la réactance de magnétisation X_m d'où :

$$X_m = L_m\omega = \frac{U_{1n}^2}{Q_{10}}$$

On peut aussi déterminer le rapport de transformation :

$$m = \frac{U_{20}}{U_{1n}} = \frac{N_2}{N_1}$$

b) Essai en court circuit ($V_2 = 0$)

Le secondaire est mis en court-circuit par un ampèremètre comme le montre la figure ci-dessus. Le primaire doit être alimenté sous une tension réduite U_{1cc} , pour se placer au régime nominal de courant I_{2n} au secondaire.

On mesure : U_{1cc} , I_{1cc} , P_{1cc} et $I_{2cc} = I_{2n}$.

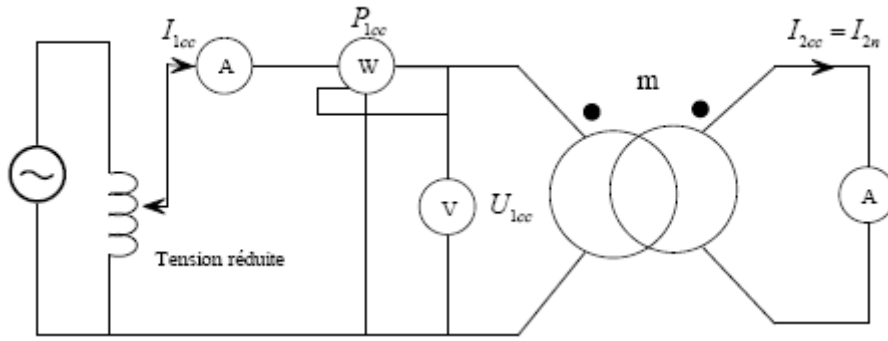


Figure 5.18 : Essai en court-circuit (tension réduite) du transformateur monophasé.

Avec la tension réduite au primaire, le champ magnétique dans le fer est très faible (formule de Boucherot) ainsi que les pertes ($P_{fer} = KB_m^2$).

Le courant dans la branche de magnétisation (R_f et L_m) est alors négligeable. Le schéma de Kapp du transformateur se réduit à :

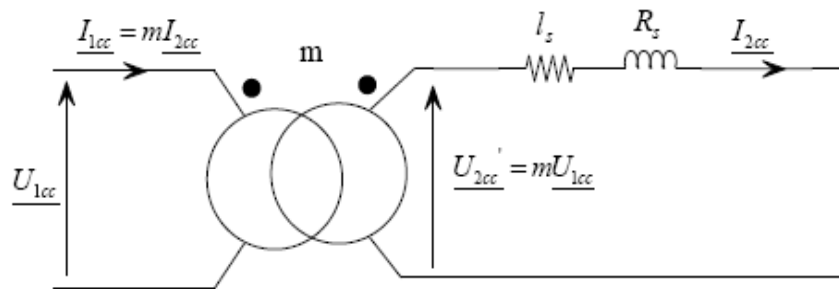


Figure 5.19 : Schéma équivalent de Kapp ramenée au secondaire.

P_{1cc} : représente les pertes joules du transformateur d'où :

$$R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} = \frac{P_{1cc}}{I_{2n}^2}$$

$$P_{1cc} = R_S I_{2n}^2 = R_2 I_{2n}^2 + R_1 I_{1n}^2$$

La puissance réactive se détermine par la formule suivante :

$$Q_{1cc} = \sqrt{(U_{1cc} I_{1cc})^2 - P_{1cc}^2}$$

On en déduit la réactance de fuites X_S ramenée au secondaire :

$$X_S = l_S \omega = \frac{Q_{1cc}}{I_{2cc}^2}$$

c) Chute de tension

Prédétermination de la chute de tension en charge

Diagramme de Kapp

Le schéma équivalent du transformateur en charge, ramené au secondaire, est le suivant :

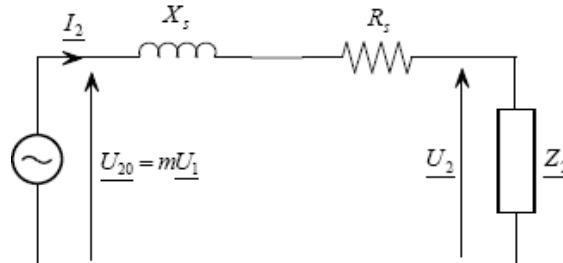


Figure 5.20 : Schéma équivalent simplifié de Kapp ramené au secondaire.

Le primaire est alimenté par une tension nominale :

$$U_1 = U_{1n}$$

En appliquant la loi des mailles, on aboutit à l'équation de Kapp en charge :

$$\underline{U}_{20} - \underline{U}_2 = (R_s + jX_s)\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{20} = m\underline{U}_1 = (R_s + jX_s)\underline{I}_2 + \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

$$\varphi_2 = \text{Arg} \underline{Z}_2$$

Le diagramme de Kapp ci-dessous permet de déterminer graphiquement cette chute de tension.

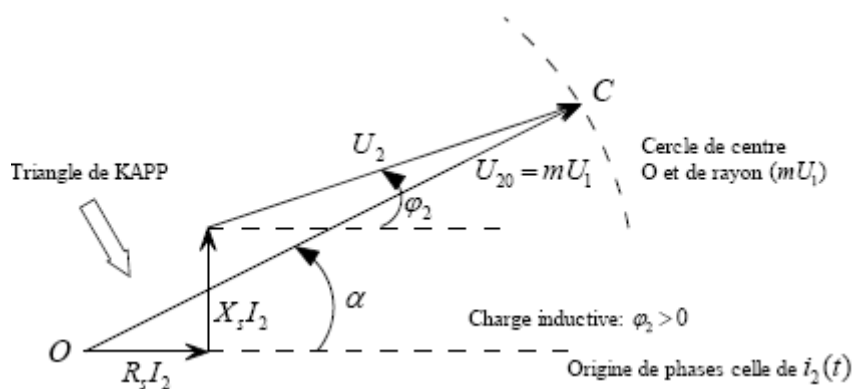


Figure 5.21 : Diagramme vectoriel.

Expression approchée de la chute de tension en charge ΔU_2

La chute de tension est la différence entre les valeurs efficaces de la tension secondaire à vide U_{20} et de la tension en charge U_2 :

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2$$

L'exploitation du diagramme de Kapp permet de la déterminer. Le triangle de Kapp représente les défauts du transformateur. Ses dimensions sont, en pratique, faibles par rapport à U_2 .

Dans ces conditions, on peut admettre que les angles α et φ_2 sont égaux :

$$\Delta U_2 = OC - BC \cong OH = Oh + hH$$

Soit, tous calculs faits :

$$\Delta U_2 \cong R_S I_2 \cos \varphi_2 + X_S I_2 \sin \varphi_2$$

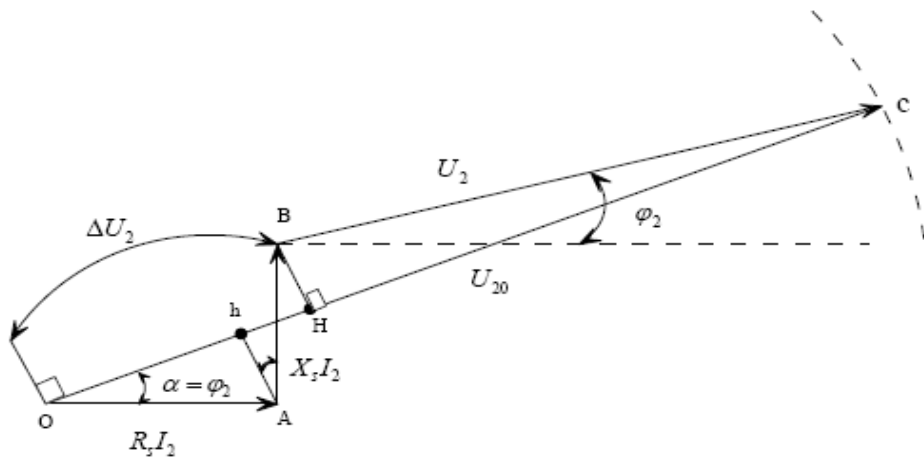


Figure 5.22 : Diagramme vectoriel.

On a l'équation en complexes :

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 = Z I_2 = R_2 I_2 + j X_2 I_2$$

A laquelle correspond à une équation vectorielle formellement identique que l'on peut représenter par le schéma ci-dessous :

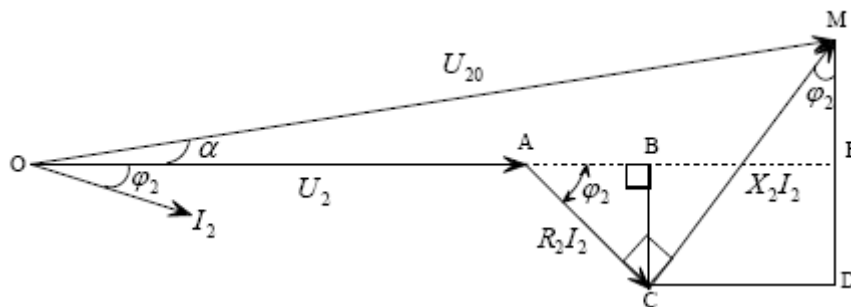


Figure 5.23 : Diagramme de Fresnel du transformateur.

L'angle $\alpha \cong 0$, $U_2 // U_{20}$

$$AB + CD \sim |\Delta U_2|$$

$$\Delta U_2 \sim AE$$

$$AB = R_2 I_2 \cos \varphi_2$$

$$CD = X_2 I_2 \sin \varphi_2$$

$$\Delta U_2 \sim R_2 I_2 \cos \varphi_2 + X_2 I_2 \sin \varphi_2$$

Pour que α soit petit, il faut que $|\Delta U_2| \ll |U_{20}|$

La tangente de l'angle α peut être approximée par :

$$\tan \alpha = \frac{ME}{OE} \sim \frac{ME}{OM} = \frac{ME}{U_{20}}$$

$$ME = MD + DE = R_S I_2 \cos \varphi_2 + X_S I_2 \sin \varphi_2$$

La chute de tension que l'on observe en charge, peut être déterminée par la connaissance de la charge φ_2 , du courant I_2 et des éléments R_S et X_S , déterminés lors de l'essai en court-circuit à courant nominal secondaire $I_{2CC} = I_{2n}$.

Contexte industriel

Dans un contexte industriel, les grandeurs sont données relativement à la tension à vide :

$$\Delta U\% = 100 \frac{U_{20} - U_2}{U_{20}}$$

$$R\% = 100 \frac{R_S I_{2n}}{U_{20}}$$

$$X\% = 100 \frac{X_S I_{2n}}{U_{20}}$$

Dans ces conditions, la relation précédente peut s'écrire :

$$\Delta U\% \cong \frac{I_2}{I_{2n}} (R\% \cos \varphi_2 + X\% \sin \varphi_2)$$

Variation de la chute de tension avec le facteur de puissance secondaire

Soit Z_2 le module de l'impédance interne du transformateur et ψ l'argument de cette impédance :

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$$

Et :

$$\psi = \text{Arctan} \frac{X_2}{R_2}$$

Alors :

$$\Delta U_2 = Z_2 I_2 [\cos \psi \cos \varphi_2 + \sin \psi \sin \varphi_2]$$

$$\Delta U_2 = Z_2 I_2 \cos (\varphi - \psi)$$

D'où les variations de ΔU_2 avec φ :

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} + \psi$	0	ψ	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{d(\Delta U_2)}{d\varphi}$	+	+	+	0	-
ΔU_2	$\Delta U_2 < 0$	$\Delta U_2 = 0$	$\Delta U_2 > 0$	$\Delta U_2 \max$	$\Delta U_2 > 0$
	Charge capacitive		Charge inductive		

Tableau 5.1 : Récapitulant les variation de ΔU_2 avec φ .

La chute de tension est maximale pour $\varphi = \psi$, elle s'annule pour $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \psi$ ce qui correspond à un fonctionnement sur charge capacitive.

Les caractéristiques U_2 fonction de I_2 ont l'allure suivante :

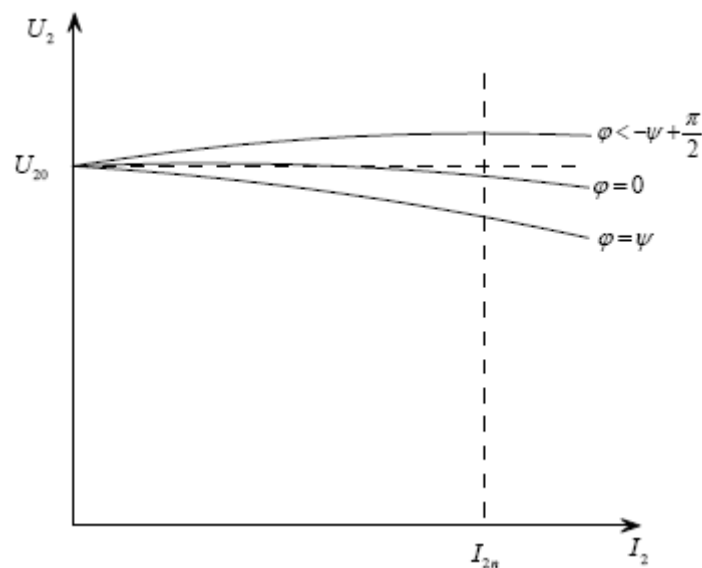


Figure 5.24 : Chute de tension en fonction du facteur de puissance.

En cas de court-circuit, le courant secondaire s'établit à une valeur très supérieure à I_{2n} .

$$I_{2CC} = \frac{mU_1}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} I_{2n}$$

Prédétermination du rendement

a) Pertes du transformateur en charge

Le transformateur est un élément essentiel de la chaîne de distribution de l'énergie électrique pour des réseaux de très grande puissance.

En vue d'une optimisation des coûts, il est nécessaire de connaître son rendement. L'arbre des puissances du transformateur est présenté ci-dessous :

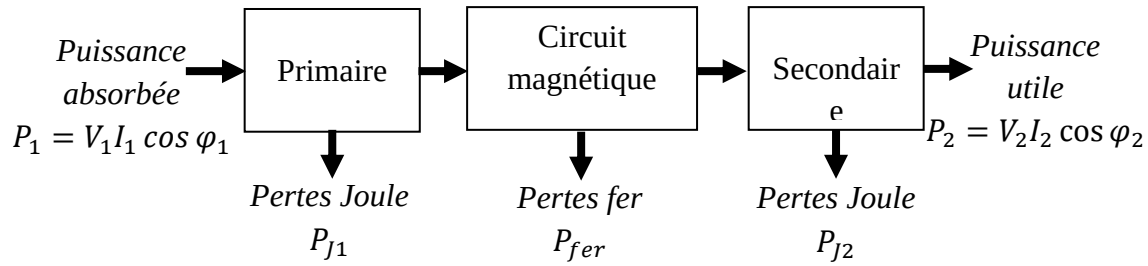


Figure 5.25 : Chaîne des pertes (bilan de puissance) du transformateur.

Les pertes constantes qui sont les pertes ferromagnétiques P_{fer} (pertes par hystérésis et par courants de Foucault) qu'un essai à vide permet de mesurer, les pertes fer dépendent de la fréquence et du champ magnétique maximal B_m . La fréquence et le champ magnétique sont imposés par l'alimentation (tension d'alimentation) c'est pour cette raison qu'ils sont indépendants de la charge.

Les pertes en charge, variables en fonction des courant I_1 et I_2 , sont les pertes joules (ou cuivre) $R_1 I_1^2$ et $R_2 I_2^2$ ou encore $R_S I_2^2$ qu'un essai en court-circuit permet de mesurer ($I_{2CC} = I_{2n}$).

b) Le rendement du transformateur

C'est le rapport de la puissance de sortie au secondaire sur la puissance d'entrée au primaire :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_J + P_{fer}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_2 I_2^2 + P_{fer}}$$

Ou :

$$P_{fer} = P_{10}$$

$$R_S I_2^2 = R_S I_{2n}^2 = P_{1CC}$$

On peut écrire le rendement sous la forme :

$$\eta = \frac{U_2 \cos \varphi_2}{U_2 \cos \varphi_2 + R_2 I_2 + \frac{P_{fer}}{I_2}}$$

La tension U_2 varie peu avec I_2 pour un $\cos \varphi_2$ donné. Le produit $U_2 \cos \varphi_2$ est donc pratiquement constant.

Le rendement est maximal pour la valeur I_{2m} et I_2 qui rend minimale la somme $R_2 I_2 + \frac{P_{fer}}{I_2}$.

Or le produit de ces deux termes $R_S P_{fer}$ est constant ; leur somme est donc minimale lorsqu'ils sont égaux :

$$R_S I_{2m} = \frac{P_{fer}}{I_{2m}}$$

Soit :

$$P_{fer} = R_S I_{2m} = P_J$$

Pour $\cos\varphi_2 \approx 1$, le rendement maximum d'un transformateur de puissance est de l'ordre 95 à 99%. Il se maintient à une valeur très élevée sur une large plage d'utilisation. Il diminue avec $\cos\varphi_2$.

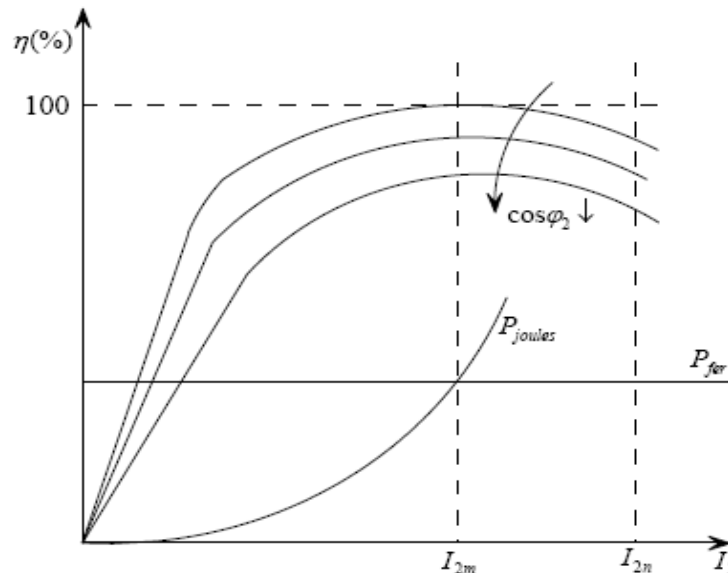


Figure 5.26 : Rendement du transformateur en fonction du courant de charge.

5.10. Mise en parallèle

Raisons de la mise en parallèle

Lorsque la puissance demandée par la charge augmente et devient supérieure à la capacité du transformateur en marche. Deux solutions sont envisageables soit d'enlever l'ancien transformateur et le remplacer par un autre plus puissant que lui et qui répond à la puissance de la charge, soit de mettre un autre transformateur en parallèle avec l'ancien (c'est une solution technico-économique).

Parfois la puissance à transporter (transférée) ne peut être assurée par un seul transformateur, la mise en parallèle de deux ou plusieurs transformateurs est devenue une nécessité.

Dans les sous stations du réseau, des transformateurs de rechange sont nécessaires pour assurer la continuité de l'alimentation en cas de panne. La taille du transformateur de rechange dépend de la taille des transformateurs placés à la sous station du réseau.

Conditions de la mise en parallèle

- Les deux transformateurs doivent avoir le même rapport de transformation et les mêmes tensions du primaire et du secondaire. Si les deux transformateurs ont une légère différence entre leurs rapports de transformation ou de leurs tensions, malgré que la marche en parallèle soit possible, les forces électromotrices induites aux secondaires ne sont pas égales. Cela est dû à l'inégalité des champs électromagnétiques créés dans chaque bobine. À vide, il y aura un courant de circulation d'une bobine secondaire (ayant une force électromotrice induite plus élevée) vers l'autre bobine secondaire (ayant une faible force électromotrice induite). L'impédance des transformateurs est faible, une petite différence de tension entre les deux peut provoquer la circulation d'un courant considérable et ce dernier provoque des pertes joules RI^2 supplémentaire. Quand une charge est appliquée sur le côté secondaire de ces deux transformateurs, des conditions de charge inégale (déséquilibrée) apparaissent en raison du courant de circulation. Il est impossible de les faire fonctionner sous condition nominale (puissance nominale KVA) sans l'échauffement de l'un des transformateurs. Pour un fonctionnement en parallèle acceptable, le courant de circulation ne doit pas dépasser 10% du courant nominal secondaire.
- Les deux transformateurs doivent avoir le même pourcentage d'impédance. Même que le fonctionnement en parallèle est possible, quand les facteurs de puissances auxquels les transformateurs fonctionnent diffèrent du facteur de puissance de la charge. Dans ce cas, les transformateurs ne partagent pas la charge proportionnellement à leurs valeurs nominales en KVA.
- Les deux transformateurs doivent être connectés correctement en respectant leurs polarités. Dans le cas contraire, ils vont produire un effet équivalent à court-circuit mort.

5.11. Classification des transformateurs

Ces distinctions sont souvent liées aux très nombreuses applications possibles des transformateurs.

Il existe de nombreux types de transformateurs. Nous discuterons de certains des types de transformateurs et de leur fonctionnement. La liste des transformateurs dont nous discuterons est la suivante :

- Autotransformateur ;
- Transformateur variable - variac – alternostat ;

- Transformateur d'isolement ;
- Transformateur d'impédance ;
- Transformateur de puissance ;
- Transformateur de mesure (Transformateurs d'instruments) ;
- Transformateur haute fréquence ;
- Transformateur d'impulsions.

Paramètres de classification

Il existe différents types de paramètres de classification de transformateur sur la base desquels nous pouvons classer le transformateur. Certains d'entre eux sont :

a) Classe de tension

Le transformateur peut être classé en fonction de la tension utilisée par eux. De quelques volts à une quantité de méga-volts de tension peuvent être utilisés par les transformateurs.

b) Puissance nominale

Les transformateurs ont des cotes allant de quelques volts-ampères à méga volts-ampères.

c) Le nombre de tours dans les enroulements primaire et secondaire

Transformateur abaisseur, transformateur élévateur.

d) Construction du noyau

Selon la construction du noyau du transformateur, ils peuvent être classés en deux types. Ce sont des types de shell et des types de noyau.

e) Type de refroidissement

Les transformateurs peuvent être classés selon les types de refroidissement. Il existe plusieurs types de transformateurs - auto-refroidis, refroidis à l'huile, refroidis par force, etc.

f) Type d'application

Sur la base des diverses applications du transformateur telles que le transfert d'énergie, la distribution d'énergie, le stabilisateur tension-courant, l'isolation, etc., ils peuvent être classés en énormes types :

1. Autotransformateur

L'autotransformateur est un type particulier de transformateur. Il se compose d'un seul enroulement à prises intermédiaires. Par rapport au transformateur commun, ayant un seul enroulement simplifie considérablement la construction, réduit considérablement les pertes ohmiques en raison de la résistance des conducteurs et élimine les problèmes d'isolement entre les enroulements, mais

d'autre part, à la différence du transformateur normal, le primaire et secondaire ne sont pas séparés galvaniquement.

a) Symbole d'un autotransformateur

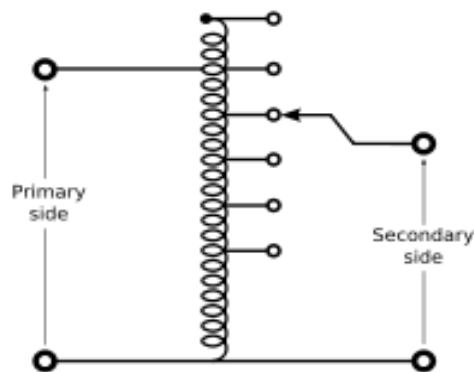


Figure 5.27 : Schéma d'un autotransformateur.

Le courant circulant dans le secondaire (enroulement commun) est alors la différence entre les deux courants I_1 et I_2 . Cette conception se traduit par une dimension réduite et un meilleur couplage que pour un transformateur équivalent.

La tension de court-circuit est donc plus faible et le courant de court-circuit plus élevé que pour un transformateur équivalent.

Avantages

En comparaison d'un transformateur à deux enroulements de même puissance l'autotransformateur a les avantages suivants dus à l'économie d'un enroulement, il est :

- a. Plus petit;
- b. Moins cher;
- c. Plus efficace, son rendement est plus élevé.

L'avantage de base est que l'entrée / sortie ne sont pas séparés les uns des autres. Etant donné que ceci est en fait le même circuit (enroulement), lorsqu'il est utilisé avec des tensions supérieures à 50 volts, assure l'intervention des protections (disjoncteur) situé en amont, car en cas de contact direct, le courant éventuel défaut à la terre est en mesure de retourner au centre étoile transformateur triphasé MT / BT la fourniture par encliquetage de la cabine.

L'utilisation d'un transformateur avec des blocs d'entrée / sortie, il ne serait pas possible à moins que le circuit de neutre (secondaire) ne soit pas placé sur le sol, comme une vraie cabine. Dans ce cas, la protection différentielle doit être

ajoutée également à la sortie de la protection des transformateurs des charges alimentées.

Inconvénients

Cependant, comme déjà mentionné, l'autotransformateur:

- Il ne fournit pas une isolation galvanique entre les enroulements, avec des risques pour la sécurité et le fonctionnement des appareils qui y sont connectés, et vous devez prendre des précautions particulières si vous voulez à la terre du secondaire.
- le courant de court-circuit d'un autotransformateur est significativement plus élevé que celui d'un transformateur classique.

Utilisations

- Une utilisation de autotransformateur classique est dans la conversion entre les tensions de réseau en cours d'utilisation dans divers pays du monde (220 V, 240 V, 110 V).
- Ils sont également utilisés dans les moteurs thermiques à allumage commandé, afin de générer l'étincelle électrique et de prendre le nom de bobine d'allumage.
- L'autotransformateur n'est intéressant que lorsque les tensions d'entrée et de sortie sont du même ordre de grandeur : par exemple, 230 V/115 V ; plus le rapport de la tension d'entrée sur la tension de sortie se rapproche de 1, plus l'autotransformateur sera de faible importance en termes de masse et encombrement.
- Ils sont surtout utilisés pour raccorder des réseaux de très haute tension(en France, ils sont utilisés pour le raccordement entre le réseau 225 kV et 400 kV, en Grande-Bretagne ils sont utilisés pour raccorder le réseau 400 kV au réseau 132 kV et parfois entre le 275 kV et le 132 kV et dans le réseau belge, ils sont utilisées pour le raccordement 380kV et 220kV).
- Ce type de transformateur est également utilisé dans le domaine ferroviaire pour l'alimentation 2×25 kV.
- Un type particulier d'autotransformateur triphasé est utilisé pour le démarrage des moteurs asynchrones en permettant de limiter la pointe d'intensité et le couple au démarrage.

- Le fait qu'un autotransformateur soit relié à la terre, permet d'envisager une isolation non-uniforme. Cela implique également que son couplage doit se faire en étoile en triphasé.

2. Transformateur variable - variac – alternostat

Il s'agit d'une variété d'autotransformateur, puisqu'il ne comporte qu'un seul bobinage. La dérivation de sortie du secondaire peut se déplacer grâce à un contact glissant sur les spires du primaire.

3. Transformateur d'isolement

Le transformateur d'isolement est uniquement destiné à créer un isolement électrique entre plusieurs circuits pour des raisons bien souvent de sécurité ou de résolution de problèmes techniques. Tous les transformateurs à enroulement primaire isolé du (des) secondaire (s) devraient être considérés comme des transformateurs d'isolement ; toutefois, en pratique, ce nom désigne des transformateurs dont la tension de sortie à la même valeur efficace que celle de l'entrée. Le transformateur d'isolement comporte deux enroulements presque identiques au primaire et au secondaire :

- Le nombre de spires du secondaire est souvent très légèrement supérieur au nombre de spires du primaire afin de compenser la faible chute de tension en fonctionnement,
- Les sections de fil au primaire et au secondaire sont identiques car l'intensité des courants est la même.

Ils sont, par exemple, largement utilisés dans les blocs opératoires : chaque salle du bloc est équipée de son propre transformateur d'isolement, pour éviter qu'un défaut qui y apparaîtrait n'engendre des dysfonctionnements dans une autre salle.

Un autre intérêt est de pouvoir changer de régime de neutre (cas d'utilisation de matériel informatique et/ou d'équipements électriques sensibles dans une installation).

4. Transformateur d'impédance

Le transformateur est toujours un transformateur d'impédance, mais les électroniciens donnent ce nom aux transformateurs qui ne sont pas utilisés dans des circuits d'alimentation.

Le transformateur d'impédance est principalement destiné à adapter l'impédance de sortie d'un amplificateur à sa charge.

Ce genre de transformateur était en particulier employé dans la restitution sonore, pour adapter la sortie d'un amplificateur audio à lampes (haute impédance), avec les haut-parleurs destinés à la restitution du son et caractérisés par une impédance basse.

En électronique audio professionnelle, on utilise toujours des transformateurs pour les entrées et sorties d'appareils haut de gamme, ou bien dans la fabrication de « Di-box » ou boîte de direct. Le transformateur est alors utilisé, non seulement pour adapter l'impédance et le niveau de sortie des appareils (synthétiseurs, basse électrique, etc) aux entrées micro de la console de mixage mais en outre pour symétriser la sortie des appareils connectés.

En technique des hautes fréquences, on utilise également des transformateurs dont le circuit magnétique est en ferrite ou sans circuit magnétique (aussi appelé transformateurs sans noyau) pour adapter les impédances de sortie d'un amplificateur, d'une ligne de transmission et d'une antenne. En effet, pour un transfert optimal de puissance de l'amplificateur vers l'antenne, il faut que le taux d'ondes stationnaires(TOS) soit égal à 1.

De tels montages présentent en outre l'avantage de rendre les appareils connectés beaucoup plus résistants aux perturbations électromagnétiques par une augmentation significative du CMRR (Common Mode Rejection Ratio) ou taux de réjection du mode commun.

5. Transformateurs de puissance

Le transformateur de puissance est celui particularisé pour la distribution de puissance. Ce sont des transformateurs de très haute qualité et conçus pour une efficacité de 100%. Ils sont étendus et utiles pour fournir la puissance nécessaire et limitée aux consommateurs.

6. Transformateur de mesure (Transformateurs d'instruments)

Le transformateur d'instrument est un type spécial de transformateur utilisé pour la transformation ou l'isolation du courant et de la tension. C'est un appareil de haute précision. L'utilisation principale d'un transformateur d'instrument est d'isoler les enroulements primaires connectés à haute tension du compteur connecté aux enroulements secondaires.

Il existe deux types. Le type connecté en série est connu sous le nom de transformateur de courant, tandis que le transformateur connecté en parallèle est appelé transformateur de potentiel ou de tension. Le transformateur de courant abaisse le courant tandis que les transformateurs de tension font de même pour la tension d'une puissance fournie.

Certains avantages de l'utilisation d'un transformateur d'instrument sont que : le courant et la tension importants du courant alternatif peuvent être mesurés en utilisant un transformateur d'instrument de faible puissance, de nombreux instruments de mesure peuvent être connectés à l'aide d'un seul transformateur d'instrument au système d'alimentation, les instruments de mesure peuvent également être normalisés.

7. Transformateur haute fréquence

Circuit magnétique des transformateurs HF

Les pertes par courant de Foucault au sein du circuit magnétique sont directement proportionnelles au carré de la fréquence mais inversement proportionnelles à la résistivité du matériau qui le constitue. Afin de limiter ces pertes, le circuit magnétique des transformateurs HF est réalisé à l'aide de matériaux ferromagnétiques isolants :

- Les ferrites douces : oxydes mixtes de fer et de cuivre ou de zinc ;
- Les matériaux nanocristallins.

8. Transformateur d'impulsions

Un autre type spécial de transformateur est le transformateur d'impulsions. Il est utilisé pour transmettre des impulsions électriques rectangulaires. Il transmet des impulsions de tensions entre la charge et les enroulements. Il a une inductance de circuit ouvert élevée, une capacité distribuée et une faible induction de fuite. Selon les types, il a plusieurs applications. Les petites versions sont utilisées dans les circuits logiques numériques. Les versions moyennes sont utilisées dans les systèmes de contrôle de puissance. En revanche, des versions plus grandes sont utilisées dans le système de distribution d'énergie. Divers transformateurs d'impulsions ont une large gamme d'applications telles que les radars, les semi-conducteurs de puissance et les applications de puissance à haute énergie.

Certains paramètres mesurent les performances d'un transformateur d'impulsions. Certains d'entre eux sont: taux de répétition, largeur d'impulsion, rapport cyclique, courant, fréquence, tensions d'entrée-sortie, etc.

Les principaux avantages des transformateurs d'impulsions sont qu'ils sont de petite taille, moins coûteux, fournissent une tension d'isolement élevée et fonctionnent à haute fréquence. L'inconvénient comprend: le courant de saturation du noyau peut être réduit en raison du courant continu traversant les enroulements primaires.

5.12. Transformateur triphasé

Définition

Le transformateur triphasé est un transformateur qui fonctionne avec un système électrique triphasé. Fondamentalement, ce transformateur est utilisé pour augmenter ou réduire les hautes tensions à différentes étapes du système de transmission d'énergie. Ce transformateur a été inventé car l'électricité triphasée est largement utilisée pour la distribution d'énergie en raison de sa capacité à fournir une charge équilibrée.

Le principe de fonctionnement des transformateurs triphasés est le même que celui du monophasé, la loi d'induction de Faraday. Les transformateurs monophasés et triphasés ne diffèrent que par les configurations de câblage. Pour mieux expliquer cela, il est préférable de jeter un œil aux systèmes électriques triphasés.

Un transformateur triphasé est un générateur de puissance et un distributeur d'électricité. Il s'agit d'une méthode conventionnelle d'énergie électrique à courant alternatif (AC) qui génère, transmet et distribue de l'énergie à grande échelle pour répondre aux besoins énergétiques des grandes industries et des établissements. Il peut également être utilisé pour augmenter ou diminuer la tension dans un système triphasé selon les besoins.

Le transformateur triphasé utilise un système polyphasé, qui distribue de l'énergie électrique en courant alternatif (CA) tandis qu'un transfert d'énergie régulier est présent pendant un cycle électrique. C'est pourquoi il est généralement utilisé par les réseaux électriques du monde entier. Il est très capable de faire fonctionner de gros moteurs et d'autres charges lourdes.

Principe de fonctionnement d'un transformateur triphasé

Le système de fonctionnement fondamental d'un transformateur triphasé est comparable à un monophasé, comme sur l'induction. L'alimentation alternative est fournie aux enroulements principaux et génère un f.e.m (champ magnétique électrique) dans l'enroulement secondaire. La quantité de champ électrique-magnétique générée dépendra du nombre de spires secondaires, qu'il s'agisse d'un transformateur élévateur ou abaisseur.

Construction d'un transformateur triphasé

Les transformateurs triphasés sont construits en enroulant trois transformateurs monophasés sur un seul noyau. Ils sont placés dans une enceinte remplie d'huile

diélectrique, qui exécute diverses fonctions. L'huile, d'une part va garantir l'isolation des enroulements et d'autre part garantir le refroidissement et la prévention de la formation d'humidité qui peut réduire l'isolation des enroulements.

Ce type de transformateur fonctionne avec six enroulements, trois pour le primaire et trois autres pour le secondaire. Chaque enroulement peut être relié en configuration étoile ou triangle. Trois transformateurs monophasés permettent d'obtenir un système de tension triphasé mais cette solution à l'inconvénient d'occuper un volume trop important pour être réalisée dans un environnement industriel.

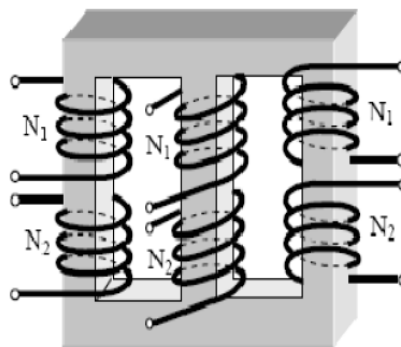


Figure 5.28 : le transformateur triphasé.

Les trois types de transformateur triphasé

Le transformateur triphasé a trois types : le type scellé, le type ouvert et le type sec.

a) Type scellé

Le type scellé est capable de se refroidir en élargissant sa lame. Les lames se dilatent automatiquement lorsqu'elles détectent la température élevée en VH. Lorsque cela se produit, l'air souffle vers les pales, refroidissant la machine.

b) Type ouvert

Le système de refroidissement du transformateur de type ouvert se trouve dans le réservoir supplémentaire et la pale du ventilateur. La seule contrariété entre les deux est le réservoir d'huile auxiliaire du type ouvert.

c) Type sec

Ce type de transformateur a des bobines enveloppées dans de la résine époxy. Ses enroulements et noyaux magnétiques sont pressurisés par l'air, contrairement au transformateur ordinaire. Ce type peut compenser les lacunes des transformateurs à huile. Il est utilisé en particulier dans des circonstances où il y a une pollution dense, une humidité de l'air plus élevée, une température ambiante très froide.

5.13. Comparaison entre le transformateur monophasé et triphasé

En ce qui concerne les transformateurs, un triphasé présente plusieurs avantages par rapport au monophasé en fonction des caractéristiques suivantes :

Objet de la comparaison	Transformateur monophasé	Transformateur triphasé
Principe de fonctionnement	Un conducteur fournit l'alimentation.	Trois conducteurs fournissent de l'énergie.
Tension transportée	Volts 230	Volts 415
Phase	Phase de séparation	Pas de nom spécial
Obligatoire non. de fil	Nécessite deux fils pour faire le circuit.	Nécessite quatre fils pour faire le circuit.
Circuits	Réseau simple	Réseau complexe
Panne de courant	Peut se produire	Ne se produit pas
Perte de puissance	La perte de puissance maximale se produit ici	Une quantité minimale de perte de puissance se produit ici.
Efficacité	Transformateur inférieur à triphasé.	Plus haut que les transformateurs monophasés.
Économique	Moins économique	Plus économique
Applications	Spécialement pour les appareils ménagers.	À des fins industrielles.

Tableau 5.2 : Comparaison entre un transformateur monophasé et triphasé.

5.14. Inconvénients des transformateurs triphasés

L'un des inconvénients d'un transformateur triphasé est que l'ensemble de l'unité s'arrête lorsqu'une phase est en défaut. Cela est dû au noyau commun aux trois unités. En d'autres termes, si une unité est cassée, le noyau de l'unité défectueuse se tremperait instantanément en raison de l'absence d'un champ magnétique opposé.

Sans le champ magnétique opposé, il y aura une immense fuite de flux magnétique vers les enceintes du noyau métallique. Cela peut augmenter la chaleur des pièces métalliques qui peuvent provoquer des incendies dans certains cas. Ainsi, il est essentiel de se rappeler d'arrêter le transformateur triphasé si vous constatez qu'une des phases est défectueuse.

Les autres inconvénients de ce transformateur sont les suivants :

- La réparation d'un transformateur triphasé est beaucoup plus onéreuse par rapport à un monophasé.
- L'unité de rechange triphasée coûte plus cher qu'une unité de rechange à transformateur unique.
- Auto-refroidi. Cela signifie que la capacité du transformateur est réduite.

5.15. Couplage des enroulements

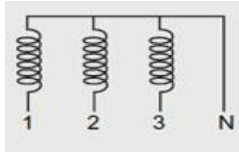
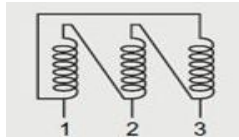
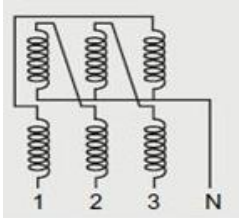
Le couplage des enroulements du transformateur est réalisé suivant le principe utilisé pour coupler les enroulements statoriques du moteur asynchrone triphasé.

- Les enroulements primaires se couplent au choix en Y ou en Δ :

En respectant la tension maximale supportée par un enroulement. En fonction de la tension du réseau de distribution disponible.

- Les enroulements secondaires se couplent en Y, Δ ou en zigzag :

En fonction de la valeur de la tension au secondaire que l'on veut obtenir.

1 ^{er} lettre : couplage HT	2 ^{ème} lettre : couplage BT	Commentaires	Couplage
Y : étoile	y : étoile	Simple, robuste et adapté aux très hautes tensions.	
D : triangle	d : triangle	Plus adapté aux courants importants.	
	z : zigzag	Utilisé côté secondaire des transformateurs de distribution.	

- NB :**
- Le couplage zigzag permet de réduire le déséquilibre des phases sur le réseau HT.
 - Si le point neutre des enroulements en étoile ou en zigzag est accessible pour être raccordé. Les désignations deviennent YN ou ZN et yn ou zn.

Tableau 5.3 : Couplage d'un transformateur triphasé.

Couplages usuels des transformateurs triphasés

Dd0	Dy1	Dy5	Dd6	Dy11
Yy0	Yd1	Yd5	Yy6	Yd11
Dz0	Yz1	Yz5	Dz6	Yz11

Figure 5.4 : Différents couplage usuels des transformateurs.

5.16. Mise en parallèle de transformateurs

La mise en marche en parallèle de transformateurs peut être nécessaire afin de répondre à l'augmentation de la demande de la puissance à fournir.

Pour que deux transformateurs triphasés puissent fonctionner en parallèle, il faut que ceux-ci aient :

- Un rapport de leur puissance < 2 ;
- Des caractéristiques de tension égales (rapport de transformation) ;
- Tension de court circuit égale (ou à 10 % près) ;
- Des branchements étoile, triangle compatibles (des connexions de même longueur et de même caractéristique) ;
- Des indices horaires identiques ou appartenant au même groupe de couplage.

Indice horaire

L'indice horaire indique la valeur du déphasage entre tensions primaires et secondaires homologues.

Il n'est pas important de connaître la valeur de l'indice horaire si l'on utilise un transformateur triphasé isolé, en revanche il est impossible de coupler en parallèle deux transformateurs qui n'appartiennent pas au même groupe. Ainsi il existe 4 groupes:

- Groupe 1: indice horaire 0 – 4 – 8.
- Groupe 2: indice horaire 1 – 5 – 9 (ou 1 – 5).
- Groupe 3: indice horaire 2 – 6 – 10.
- Groupe 4: indice horaire 3 – 7 – 11 (ou 7 – 11).

Lecture du couplage d'un transformateur :

Exemple : Couplage Dyn11

D : Indique le type de couplage au primaire du transformateur soit Triangle

y : Indique le type de couplage au secondaire du transformateur soit étoile

n : Neutre secondaire ressorti

11 : indice horaire de 11h soit $11 \times 30^\circ$ de déphasage entre la tension primaire et secondaire.

Détermination de l'indice horaire :

Pour déterminer l'indice horaire, on utilise la méthode graphique. Cette méthode consiste à tracer le diagramme vectoriel (Représentation de Fresnel) des tensions primaires et secondaires homologues d'un transformateur triphasé. L'indice est

le déphasage, en multiples de 30° entre la tension primaire et la tension secondaire correspondante.

Etape de détermination de l'indice horaire:

Dans une démarche méthodique, nous procédons comme suit, sur un papier transparent :

- Tracer l'étoile des tensions simple primaires (V_A, V_B, V_C) ou le triangle des tension composées primaires (U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}) en plaçant V_A à midi sur le cadran d'une montre à grand échelle.
- Tracer l'étoile des tensions simples secondaires (v_a, v_b, v_c) ou le triangle des tensions composées secondaires (u_{ab}, u_{bc}, u_{ca}) en plaçant v_a à midi sur le cadran d'une montre à petit échelle.
- En précisant V_1 sur le cercle des primaires et on le fixe (V_A à midi) ;
- en précisant V_2 sur le cercle des secondaires.
- Placer les deux cercles concentriques,
- Tourner le cercle des secondaires de telle sorte que V_1 et V_2 deviennent en phase (les deux vecteurs soit superposés ou en parallèle et se dirigent dans le même sens).
- Dans le sens horaire, on mesure l'angle θ entre la tension simple primaire V_A et la tension simple secondaire v_a (1 heure = 30°).

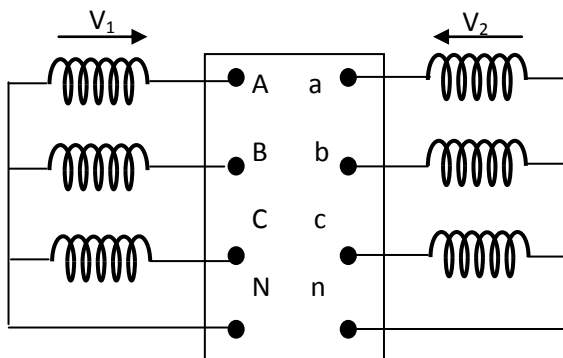
L'indice horaire est calculé par la relation:

$$I_h = \frac{\theta}{30^\circ}$$

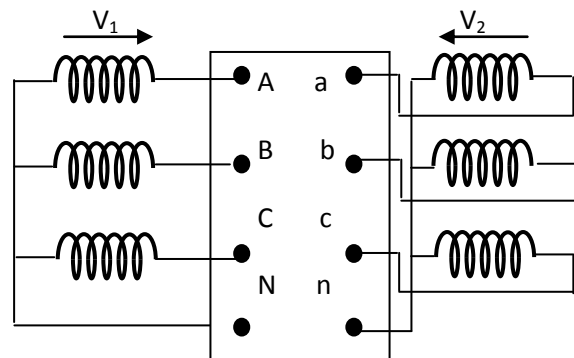
Ou directement, en comptant le nombre de divisions entre ces deux tensions.

Exemple1 :

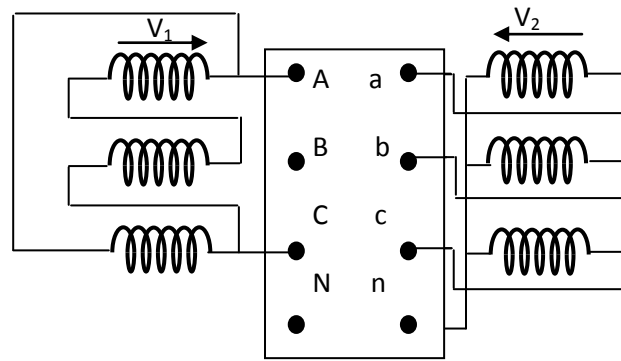
Etant donné le raccordement des enroulements primaire et secondaire des figures au dessous :



Cas (a)



Cas (b)



Cas (a)

- Déterminer l'indice horaire.

Réponse :

1- Pour la figure (A) :

On constate que :

- les enroulements primaires sont raccordés en étoile.
- les enroulements secondaires sont raccordés en étoile.
- $\vec{V}_1 = \vec{V}_{AN} = \vec{V}_A$ et $\vec{V}_2 = \vec{v}_{an} = \vec{v}_a$ alors les tensions homologues sont les tensions $\vec{V}_A$ et $\vec{v}_a$
- On superpose les deux cercles de telle sorte que les tensions homologues soient en phase.

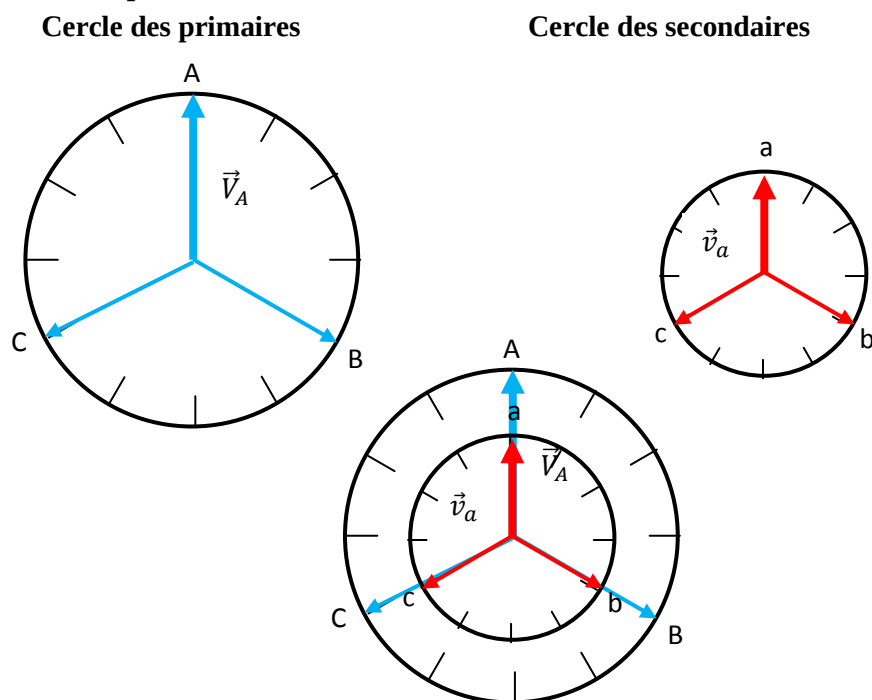


Figure 5.29 : Indice horaire à partir du diagramme de Fresnel d'un couplage Yy0

- L'angle θ entre la tension primaire de référence $\vec{V}_A$ et la tension secondaire correspondante $\vec{v}_a$ dans le sens horaire est égale à zéro.

$$\theta = 0$$

D'où, l'indice horaire est :

$$I_h = 0$$

Alors, le transformateur triphasé de la figure (a) est couplé : étoile/étoile avec un indice horaire 0, et on le désigne par : **Yy0**

2- Pour la figure (B) :

Les tensions homologues sont $\vec{V}_1 = \vec{V}_A$ et $\vec{V}_2 = -\vec{v}_a$

En suivant les mêmes étapes :

$$I_h = 6$$

Dans ce cas le couplage est : Yy6.

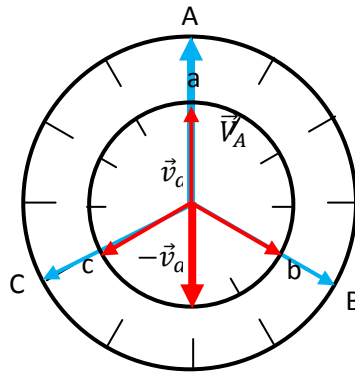


Figure 5.30 : Indice horaire à partir du diagramme de Fresnel d'un couplage Yy6

2- Pour la figure (C) :

Les tensions homologues sont : $\vec{V}_1 = \vec{U}_{AB}$ et $\vec{V}_2 = \vec{v}_{na} = -\vec{v}_a$

En suivant les mêmes étapes :

$$I_h = 5$$

Dans ce cas le couplage est : Dy5.

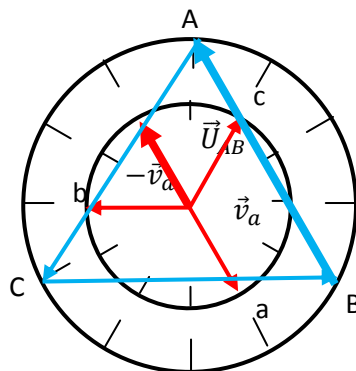


Figure 5.31 : Indice horaire à partir du diagramme de Fresnel d'un couplage Dy5.

5.17. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 05

Exercice 5.1

La puissance apparente d'un transformateur monophasé parfait en charge est $S = 3kVA$.

1. Quelle est la puissance fournie par le secondaire, si la charge est :
 - a. Purement résistive.
 - b. Inductive $\cos \varphi = 0,8$.
2. Les mesures de l'intensité fournie par le secondaire et de la tension aux bornes de l'enroulement primaire ont donné : $I_2 = 27,3 A$ et $U_1 = 220 V$ avec la charge purement résistive ($S = 3kVA$).
 - a. Quel est le rapport de transformation du transformateur ?
 - b. Quelle serait l'intensité du courant débité par le secondaire si la charge était inductive ($\cos \varphi = 0,8$), la tension au primaire étant $U_1 = 210 V$ et $P_2 = 2,4 kW$.

Solution de l'exercice 5.1

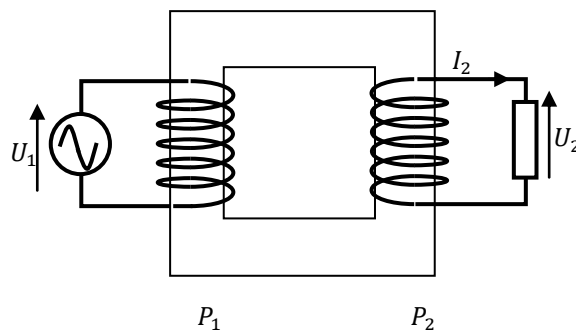
Transformateur parfait :

$$\sum \text{pertes} = 0$$

$$P_1 = P_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$S_1 = S_2 = S$$



1. Calcul de la puissance fournie par le secondaire si la charge :
 - a. Purement résistive :

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = S \cdot \cos \varphi_2 = 3 \cdot 10^3 W$$

- b. Inductive : $\cos \varphi_2 = 0,8$

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 3 \cdot 10^3 \cdot 0,8 = 2400 W$$

2. Calcul du rapport de transformation :

$$m = \frac{U_2}{U_1}$$

$$U_2 = \frac{S_2}{I_2} = \frac{S}{I_2} = \frac{3 \cdot 10^3}{27,3} = 110 V$$

$$m = \frac{110}{220} = 0,5$$

3. Calcul du courant I_2 :

Si la charge est inductive :

$$U_1 = 210 \text{ V} \text{ et } P_2 = 2400 \text{ W} = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2$$

$$U_2 = m \cdot U_1$$

$$P_2 = m \cdot U_1 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2$$

$$I_2 = \frac{P_2}{m \cdot U_1 \cdot \cos\varphi_2} = \frac{2400}{0,5 \cdot 210 \cdot 0,8} = 28,5 \text{ A}$$

Exercice 5.2

Un transformateur monophasé a les caractéristiques suivantes :

Tension primaire nominale : $V_{N1} = 5375 \text{ V}/50 \text{ HZ}$?

Rapport du nombre de spires: $\frac{N_2}{N_1} = 0,044$.

Résistance de l'enroulement primaire : $R_1 = 12 \Omega$.

Résistance de l'enroulement secondaire : $R_2 = 25 \text{ m}\Omega$.

Inductance de fuite du primaire : $L_1 = 50 \text{ mH}$.

Inductance de fuite du secondaire : $L_2 = 100 \mu\text{H}$.

1. Calculer la tension à vide au secondaire.
2. Calculer la résistance des enroulements ramenée au secondaire R_S .
3. Calculer l'inductance de fuite ramenée au secondaire L_S . En déduire la réactance de fuite X_S .

Le transformateur débite dans une charge résistive $R = 1 \Omega$.

4- Calculer la tension aux bornes du secondaire V_2 et le courant qui circule dans la charge I_2 .

Solution de l'exercice 5.2

1. Calcule de la tension à vide au secondaire :

$$V_{20} = 5375 \cdot 0,044 = 236,5 \text{ V}$$

2. La résistance R_S : $R_S = R_2 + R_1 m^2 = 0,025 + 12 \cdot 0,044^2 = 48,2 \text{ m}\Omega$

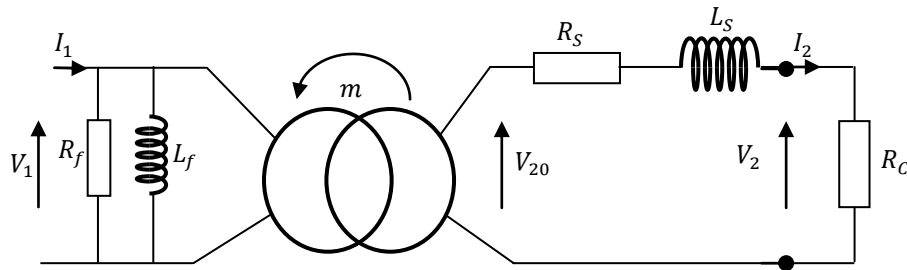
3. Calcul de l'inductance L_S et la réactance X_S :

$$L_S = L_2 + L_1 m^2 = 100 \cdot 10^{-6} + 50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,044^2 = 197 \mu\text{H}$$

$$X_S = L_S \omega = 197 \cdot 10^{-6} 2\pi \cdot 50 = 61,8 \text{ m}\Omega$$

4. Calcul de la tension aux bornes du secondaire V_2 et le courant qui circule dans la charge I_2 :

Le schéma électrique équivalent : $f = 50 \text{ HZ}$.



L'impédance complexe totale :

$$\underline{Z} = (R_S + R_C) + jX_S$$

L'impédance totale :

$$Z = \sqrt{(R_S + R_C)^2 + X_S^2}$$

Le courant au secondaire :

$$I_2 = \frac{V_{20}}{Z} = \frac{V_{20}}{\sqrt{(R_S + R_C)^2 + X_S^2}} = 225,2 \text{ A}$$

$$V_2 = R \cdot I_2 = 225,2 \text{ V}$$

Autre méthode :

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 \approx (R_S \cos \varphi_2 + X_S \sin \varphi_2) I_2$$

La charge est résistive :

$$\cos \varphi_2 = 1$$

D'où :

$$\Delta V_2 = R_S \cdot I_2$$

D'autre part :

$$V_2 = R \cdot I_2$$

Alors :

$$I_2 = \frac{V_{20}}{(R_S + R)} \approx 225,6 \text{ A}$$

$$V_2 = 225,6 \text{ V}$$

Exercice 5.3

Pour étudier un transformateur monophasé 220/24 V, 50HZ, 200 VA, on réalise les essais suivants :

Essai a courant continu: Le primaire est alimenté sous la tension continue $U_{DC} = 2,4 \text{ V}$ alors que le secondaire est en circuit ouvert. On mesure l'intensité $I_{DC} = 0,95 \text{ A}$.

Essai a vide : sous la tension primaire $U_1 = 220 \text{ V}$ à $f = 50 \text{ HZ}$, on relève :

Puissance fournie au primaire : $P_{10} = 4 \text{ W}$.

Intensité du courant primaire : $I_{10} = 0,08 \text{ A}$.

Tension secondaire : $U_{20} = 24,5 \text{ V}$.

Essai en court-circuit : Il est réalisé sous la tension primaire réduite. La valeur efficace du courant secondaire est $I_{2cc} = I_{2N}$. On relève :

Puissance fournie au primaire $P_{1cc} = 5,1$.

Intensité du courant primaire $I_{1cc} = 0,91 \text{ A}$ et tension primaire $U_{1cc} = 8,6 \text{ V}$.

1. Calculer la résistance R_1 de l'enroulement primaire.
2. Déduire de l'essai à vide :
 - a. Le rapport de transformation m .
 - b. Les pertes Joule à vide et les pertes fer.
3. Déduire de l'essai en court-circuit la résistance totale ramenée au secondaire R_S et la réactance X_S .
4. Le transformateur est alimenté au primaire sous la tension nominale débite au secondaire un courant d'intensité $I_2 = 8 \text{ A}$ dans une charge de facteur de puissance $0,8 \text{ AR}$.
5. Calculer la valeur efficace de la tension secondaire U_2 en charge ainsi que le rendement du transformateur.

Solution de l'exercice 5.3

1. La résistance de l'enroulement primaire est :

$$R_1 = \frac{U_{DC}}{I_{DC}} = 2,5 \Omega$$

2. Essai à vide

Le rapport de transformation :

$$m = \frac{V_{20}}{V_{10}} = 0,11$$

Les pertes joule à vide :

$$P_J = R_1 \cdot I_{20}^2 = 0,0007 \text{ W}$$

Les pertes fer :

$$P_{fer} \approx 4 \text{ W}$$

3. Essai en court circuit

La résistance :

$$R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2cc}^2} = 0,073 \Omega$$

L'impédance :

$$Z_S = m \cdot \frac{V_{1cc}}{I_{2cc}} = 0,113 \Omega$$

La réactance :

$$X_S = Q \cdot Z_S - R_{S2} = 0,086 \, \Omega$$

4. Essai en charge :

La tension aux bornes de la charge :

$$V_2 = V_{20} - I_2 \cdot (R_S \cdot \cos\varphi) + X_S \cdot \sin\varphi = 23,62 \, \text{V}$$

Le rendement est :

$$\eta = \frac{23,62 \cdot 8 \cdot 0,8}{(23,62 \cdot 8 \cdot 0,8 + 0,073 \cdot 64 + 4)} = 0,94$$

Exercice 5.4

Un transformateur monophasé, a subi les essais suivants:

A vide : $U_{10} = U_{1N} = 220 \, \text{V}$; $U_{20} = 44 \, \text{V}$; $P_0 = 80 \, \text{W}$; $I_0 = 1 \, \text{A}$.

En court-circuit : $U_{1CC} = 40 \, \text{V}$; $P_{CC} = 250 \, \text{W}$; $I_{2CC} = 100 \, \text{A}$.

1. Calculer le rapport de transformation m , déduire le nombre de spires N_2 si $N_1 = 520 \, \text{spires}$.
2. Déterminer le facteur de puissance à vide, la résistance R_m et la réactance X_m .
3. Déterminer la résistance ramenée au secondaire R_S et la réactance X_S .
4. Pour quel courant du secondaire, le rendement du transformateur est maximal.
5. Le transformateur alimente une charge constituée par une résistance R en série avec une inductance L ayant un facteur de puissance 0,8.
 - a. Calculer la tension aux bornes de la charge (on suppose que le rendement est maximal).
 - b. Déduire ce rendement maximal.
 - c. Déterminer les valeurs de R et L .

Solution de l'exercice 5.4

1. Le rapport de transformation :

$$m = \frac{V_{20}}{V_{10}} = 0,2$$

$$N_2 = m \cdot N_1 = 104 \, \text{spires}$$

2. Le facteur de puissance à vide est :

$$\cos\varphi_0 = \frac{P_0}{U_{10} \cdot I_{10}} = 0,36$$

La résistance :

$$R_m = \frac{U_{10}}{P_{10}} = 605 \, \Omega$$

La réactance :

$$X_m = \frac{U_{10}}{Q_{10}} = 233 \, \Omega$$

3. La résistance ramenée au secondaire :

$$R_S = \frac{P_{CC}}{I_{2CC}^2} = 0,025 \, \Omega$$

La réactance :

$$X_S = Q \left(m \frac{U_{1CC}}{I_{2CC}} \right) - R_{S2} = 0,076 \, \Omega$$

4. Le rendement est maximal si et seulement si :

$$I_2 = Q \frac{P_0}{R_S} = 56,56 \, A$$

5. Détermination des paramètres suivants :

a. La tension aux bornes de la charge est :

$$V_2 = V_{20} - \Delta V = 40,3 \, V$$

b. Le rendement maximal est : $\eta_{max} = 0,92$

c. La résistance et l'inductance :

$$R = \frac{V_2 \cdot \cos \varphi}{I_2} = 0,57 \, \Omega$$

$$L = \frac{V_2 \cdot \sin \varphi}{I_2 \cdot \omega} = 1,36 \, mH$$

Exercice 5.5

Les essais d'un transformateur monophasé ont donné les résultats suivants :

Essai à vide sous tension primaire nominale :

Valeur efficace de l'intensité du courant mesuré au primaire :

Essai à vide sous tension primaire nominale : $U_{1N} = 2,2 \, kV$, $f = 50 \, Hz$,

valeur efficace de l'intensité du courant mesuré au primaire :

$I_{10} = 1,5 \, A$, $U_{20} = 230 \, V$ et puissance active mesurée au primaire : $P_{10} = 700 \, W$.

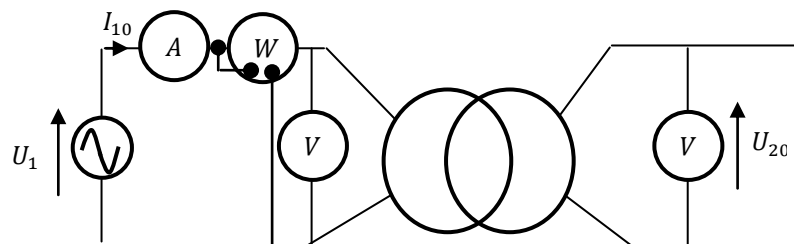
Essai en court-circuit sous tension primaire réduite : $U_{1CC} = 130 \, V$, $I_{2CC} = 200 \, A$ et $P_{1CC} = 1,5 \, kW$

1. Donner le schéma du montage de l'essai à vide avec tous les appareils nécessaires pour mesurer I_{10} , U_{20} et P_{10} et U_{10} .
2. Calculer le rapport de transformation m .
3. Calculer le facteur de puissance du transformateur lors de l'essai à vide.
4. On appelle R_S la résistance des enroulements ramenée au secondaire et X_S la réactance ramenée au secondaire.

- a. Donner le schéma du montage de l'essai en court-circuit avec tous les appareils permettant de mesurer U_{1CC} , I_{1CC} , I_{2CC} et P_{1CC} .
- b. Pourquoi l'essai en court-circuit est-il réalisé sous tension primaire réduite ?
- c. Donner le schéma électrique équivalent du transformateur ramené au secondaire pour l'essai en court-circuit.
- d. Que représente la puissance active P_{1CC} lors de l'essai en court circuit ?
- e. Calculer R_S .
5. Calculer le module de l'impédance Z_S ramenée au secondaire. Calculer X_S .
6. Le secondaire alimente maintenant une charge inductive de facteur de puissance 0,8 avec $U_{1N} = 2,2 \text{ kV}$. On relève $I_{2N} = 200 \text{ A}$.
 - a. Faire un schéma électrique équivalent du montage, le transformateur étant représenté par son modèle ramené au secondaire.
 - b. Calculer une valeur approchée de U_2 .
 - c. En déduire la puissance active P_2 fournie à la charge.
 - d. Quelle est la valeur des pertes dans le fer et des pertes Joule.
 - e. Calculer la puissance active P_1 absorbée par le primaire.
 - f. Calculer le rendement η du transformateur.

Solution d'exercice 5.5

1. Le schéma de montage de l'essai à vide avec tous les appareils nécessaires est le suivant:



2. Calcul du rapport de transformation :

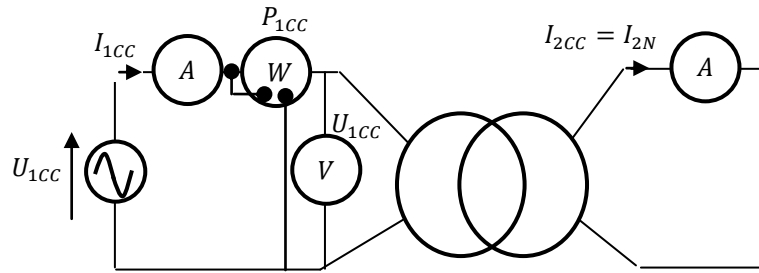
$$m = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{230}{2200} = \frac{230}{2200} = 0,10$$

3. Calcul du facteur de puissance du transformateur lors de l'essai à vide :

$$P_{10} = U_{1N} \cdot I_{10} \cdot \cos\varphi_{10} \Rightarrow \cos\varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_{1N} \cdot I_{10}} = \frac{700}{2200 \cdot 1,5} = 0,21$$

4. On a R_S et X_S :

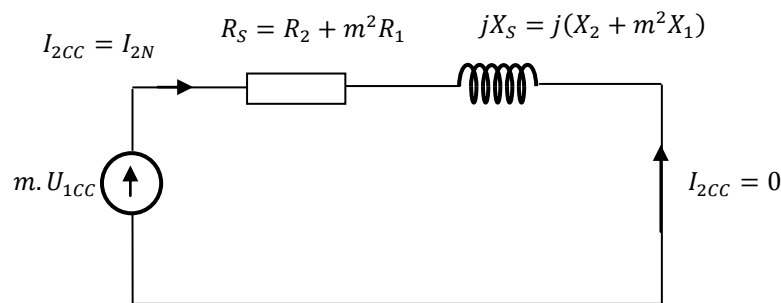
- a. Le schéma du montage de l'essai en court circuit avec tous les appareils de mesures :



- b. Puisque le secondaire est en court circuit le secondaire ne possède que sa résistance faible pour réduire le courant. Alors ; si :

$U_{1cc} \nearrow \Rightarrow I_{2cc} \nearrow \Rightarrow I_{2cc}^2 \Rightarrow \text{pertes Joule} \nearrow \Rightarrow \text{Destruction du transformateur.}$

- c. Le schéma équivalent du transformateur en court circuit ramené au secondaire :



- d. Calcul de P_{1cc} :

$$\begin{aligned} P_{1cc} &= P_{Jcc} + P_{fcc} \\ P_{fcc} &= 0 \\ P_{1cc} &= P_{Jcc} = 1,5 \text{ kW} \end{aligned}$$

- e. Calcul de R_S :

$$R_S = \frac{P_{1cc}}{I_{2N}^2} = \frac{1500}{40000} = 0,037 \Omega$$

5. Calcul de Z_S :

$$\begin{aligned} |m \cdot U_{1cc}| &= |Z_S| |I_{2cc}| \\ Z_S &= \frac{m \cdot U_{1cc}}{I_{2cc}} = \frac{0,1130}{200} = 0,065 \Omega \end{aligned}$$

Calcul de X_S :

$$X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2} = \sqrt{(0,065)^2 - (0,037)^2} = 0,053 \Omega$$

6. $\cos \varphi_2 = 0,8$, $U_{1N} = 2,2 \text{ kW}$, $U_{2N} = 200 \text{ A}$

- a. Schéma électrique équivalent du transformateur ramené au secondaire en charge :
- b. Calcul d'une valeur approchée de U_2 :

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= U_{20} - U_2 \\ m \cdot U_{1N} &= U_2 + R_S I_{2N} + jX_S I_{2N} \\ m &= \frac{U_{20}}{U_{1N}} \Rightarrow U_{20} = m \cdot U_{1N} \\ U_{20} - U_2 &= R_S I_{2N} + jX_S I_{2N}\end{aligned}$$

Calcul de $\Delta U_2 = AB + BC$:

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= R_S \cdot I_{2N} \cdot \cos \varphi_2 + X_S I_{2N} \sin \varphi_2 \\ \Delta U_2 &= 0,037 \cdot 200 \cdot 0,8 + 0,053 \cdot 200 \cdot 0,6 = 12,28 \text{ V} \\ U_2 &= 230 - 12,28 = 217,72 \text{ V}\end{aligned}$$

- c. Calcul de P_2 :

$$P_2 = U_2 I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 217,72 \cdot 200 \cdot 0,8 = 34832,2 \text{ W}$$

Calcul de I_{2CC} :

$$\begin{aligned}P_J &= R_S \cdot I_{2CC}^2 \\ P_{fer} &= P_{10} \Rightarrow U_{1N} = U_{10} \\ P_J &= P_{1CC} \Rightarrow I_{2CC} = 200 \text{ A} = I_{2N}\end{aligned}$$

- d. Calcul de P_1 :

$$\begin{aligned}P_1 &= P_2 + P_{fer} + P_J = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + P_{JCC} + P_{10} = 34832 + 1500 + 700 \\ &= 37032 \text{ W}\end{aligned}$$

- e. Calcul du rendement :

$$\eta \% = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100 \% = \frac{34832}{37032} \cdot 100 \% = 94,05 \%$$

Exercice 5.6

On dispose d'un transformateur monophasé de distribution de puissance apparente 40 kVA et de tension primaire/ secondaire 10 kV/380 V pour une fréquence de 50 Hz.

Dans un essai à vide sous la tension nominale, on a relevé : $U_{20} = 400 \text{ V}$, $I_{10} = 0,224 \text{ A}$ et $P_{10} = 1000 \text{ W}$.

Dans un essai en court circuit, sous tension réduite a donné : $U_{1cc} = 520 \text{ V}$, $I_{2cc} = 100 \text{ A}$ et $P_{1cc} = 2000 \text{ W}$.

1. Sachant que la section nette est $S = 100 \text{ cm}^2$ et que l'induction maximale $B_{max} = 1 \text{ T}$.
 - a. Déduire le nombre de spires au primaire et au secondaire.

- b. Déterminer le facteur de puissance à vide.
- c. Déterminer la puissance magnétisante Q_0 .
2. Donner le schéma équivalent ramené au secondaire et calculer les valeurs numériques de paramètres R_m et X_m .
3. Calculer pour le courant nominal I_{2N} , la tension aux bornes d'un récepteur de facteur de puissance successivement égal à 0,8 A et 0,8 AV.
4. Pour une charge (R, L) qui absorbe un courant secondaire nominal, calculer la chute de tension maximale.
5. Déterminer dans ce cas le rendement.
6. Pour quel courant secondaire le rendement est maximal, le calculer pour une charge purement résistive.

Solution de l'exercice 5.6

1. Fonctionnement à vide :
 - a. Le nombre de spires au primaire est :

$$N_1 = \frac{U_1}{4,44 \cdot B_{max} \cdot S \cdot f} = 4505 \text{ spires}$$

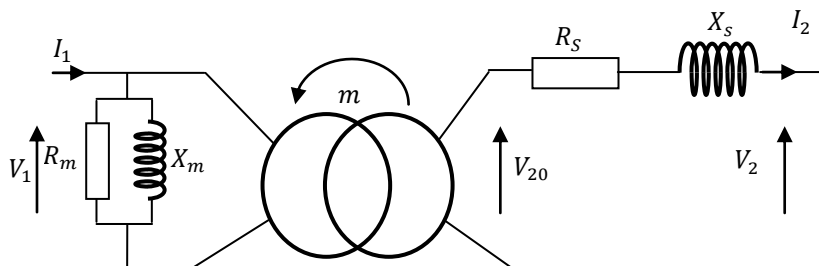
- b. Le facteur de puissance à vide est :

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_{10} \cdot I_0} = 0,446$$

- c. La puissance magnétique :

$$Q_0 = U_{10} \cdot I_0 \cdot \sin \varphi_0 = 2004 \text{ Var}$$

2. Le schéma équivalent ramené au secondaire est le suivant :



Le rapport de transformation :

$$m = \frac{V_{20}}{V_{10}} = 0,04$$

La résistance ramenée au secondaire :

$$R_S = \frac{P_{CC}}{I_{2CC}^2} = 0,2 \Omega$$

La réactance totale ramenée au secondaire :

$$X_S = \sqrt{\left(\frac{m \cdot U_{1CC}}{I_{2CC}}\right)^2 - R_S^2} = 0,05 \Omega$$

La résistance :

$$R_m = \frac{U_{10}^2}{P_0} = 100 \text{ k}\Omega$$

La réactance :

$$X_m = \frac{U_{10}^2}{Q_0} = 49900 \Omega$$

3. La tension aux bornes de la charge est :

$$U_2 = U_{20} - I_2 \cdot (R_S \cdot \cos \varphi + X_S \sin \varphi)$$

Si : $\cos \varphi = 0,8 \text{ AR}$, $U_2 = 380 \text{ V}$

Si : $\cos \varphi = 0,8 \text{ AV}$, $U_2 = 386 \text{ V}$

4. La chute de tension est maximale :

$$\frac{d\Delta U}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{X_S}{R_S}\right)$$

Donc :

$$\Delta U = I_{2N} \cdot (R_S \cdot \cos \varphi + X_S \sin \varphi) = 21,64 \text{ V}$$

5. Le rendement est :

$$\eta = 0,923$$

6. Le rendement est maximal si le courant :

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_0}{R_S}} = 70,7 \text{ A}$$

Donc :

$$\eta_{max} = 0,931$$

Exercice 5.7

Le circuit magnétique d'un transformateur de 30 cm de longueur, de section de fer $S = 4 \text{ cm}^2$ comporte 1000 spires au primaire. Il est alimenté par le réseau 220 V/50HZ.

Le circuit magnétique est tel que $B = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ H}$.

1. Que peut-on dire du circuit magnétique et de sa perméabilité relative (μ_r)
Déterminer μ_r .

2. Déterminer E_1 , B_{max} , B , Φ (flux dans le circuit magnétique) et Φ_t dans la bobine, H (excitation magnétique).

3. Ecrire le théorème d'Ampère et en déduire I . Calculer l'inductance de la bobine de 2 façons.

Solution de l'exercice 5.7

1. Le circuit magnétique est non saturé car B est proportionnel à H :

$$B = \mu_0 \mu_r H = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\mu_r = 995$$

$$2. \quad e_1(t) = -u_1(t) \Rightarrow E_1 = U_1 = 220 \text{ V}$$

$$U_1 = 4,44 \cdot N \cdot B_{max} \cdot S \cdot f \Rightarrow B_{max} = 2,47 \text{ T} \Rightarrow B = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} = 1,75 \text{ T}$$

$$\Phi = B \cdot S = 0,7 \text{ mwb}$$

$$\Phi_t = N \cdot \Phi = N \cdot B \cdot S = 0,7 \text{ wb}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = 1400 \text{ A/m}$$

3.

$$H_1 = N \cdot I \Rightarrow I = \frac{H_1}{N} = 0,42 \text{ A}$$

Par définition :

$$L = \frac{\Phi_t}{I} = 1,67 \text{ H}$$

En alternatif sinusoïdal :

$$U = L\omega I \Rightarrow L = \frac{U}{\omega I} = 1,67 \text{ H}$$

Exercice 5.8

Un transformateur de distribution possède les caractéristiques nominales suivantes : $S_2 = 25 \text{ kVA}$, $P_{Joule} = 700 \text{ W}$ et $P_{fer} = 115 \text{ W}$

1. Calculer le rendement nominal pour :
 - une charge résistive ;
 - une charge inductive de facteur de puissance 0,8.
2. Calculer le rendement pour une charge résistive qui consomme la moitié du courant nominal.

Solution de l'exercice 5.8

1. Une charge résistive :

$$P_2 = S_2 \cos \varphi_2, \cos \varphi_2 = 1, P_{2N} = 25000 \cdot 1 = 25 \text{ kW}$$

$$P_1 = P_2 + \text{pertes Joule} + \text{pertes fer} = 25000 + 700 + 115 = 25,815 \text{ kW}$$

Rendement nominal :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 96,8 \%$$

Une charge inductive de facteur de puissance 0,8 :

$$\eta = \frac{(25000 \cdot 0,8)}{(25000 \cdot 0,8 + 700 + 115)} = 96,1 \%$$

2. Une charge résistive qui consomme la moitié du courant nominal :

$$P_2 = S_2 \cdot \cos \varphi_2$$

$$I_2 = \frac{I_{2N}}{2}$$

Donc :

$$P_2 \approx \frac{P_{2N}}{2} \approx 12,5 \text{ kW}$$

Les pertes Joule sont proportionnelles au carré des courants (Loi de Joule) :

$$P_J = 700 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 175 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{(12500)}{(12500 + 175 + 115)} = 97,7 \%$$

Exercice 5.9

Un transformateur triphasé couple en étoile - étoile de 500 kVA/ 50 HZ, a été soumis a 2 essais :

Essai à vide : Tension composée primaire 15 kV; Tension composée secondaire 213 V ; Puissance absorbée au primaire : 2250 W.

Essai en court-circuit : Tension composée primaire $U_{1CC} = 430 \text{ V}$; Courant secondaire $I_{2CC} = 1390 \text{ A}$, Puissance absorbée au primaire : 5410 W.

1. Déterminer les éléments du schéma équivalent ramené au secondaire : R_S et X_S .
2. Calculer la tension secondaire composée U_2 quand le transformateur débite une intensité de $I_2 = 1620 \text{ A}$ dans trois résistances identiques montées en étoile.

Le primaire étant alimente sous 15 kV.

3. Calculer le rendement nominal pour un facteur de puissance de 0,75 AR.
4. Calculer le rendement maximal et l'intensité secondaire débitée pour obtenir celui-ci, avec le même facteur de puissance.

Solution de l'exercice 5.9

1. Les éléments du schéma équivalent ramené au secondaire sont :

$$R_S = 0,933 \text{ m}\Omega$$

$$X_S = 7,56 \text{ m}\Omega$$

2. La tension composée aux bornes de la charge est :

$$U_2 = 210 \text{ V}$$

3. Le rendement est : $\eta = 0,96$
4. Le rendement est maximal si et seulement si :

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_0}{3R_S}} = 897 \text{ A}$$

Le rendement maximal est : $\eta = 0,98$

Exercice 5.10

Une station de métro est alimentée en énergie électrique par un transformateur triphasé (éclairage, signalisation, ventilation, pompage des eaux) :

Puissance apparente $S = 160 \text{ kVA}$.

Primaire $U_1 = 20 \text{ kV}$ couplage triangle.

Secondaire : $220 \text{ V}/380 \text{ V}$, en charge nominale , couplage étoile.

1. Bilan des puissances
 - a. L'intensité nominale au secondaire vaut 230 A . Calculer la puissance active nominale, avec un facteur de puissance $0,8$.
 - b. Dans ces conditions, le rendement est maximal, et vaut $0,96$. Calculer les pertes cuivre et les pertes fer (que l'on suppose égales).
2. On s'intéresse maintenant à une colonne du transformateur. Elle se comporte comme un transformateur monophasé, composé de :

Un enroulement primaire sous 20 kV .

Un enroulement secondaire, débitant un courant de 200 A , dans un circuit inductif de facteur de puissance $0,8$.

- a. En charge nominale, la chute de tension vaut 5% de la tension à vide au secondaire, calculer la tension à vide et le rapport de transformation.
- b. Déterminer la résistance équivalente R_S ramenée au secondaire.
- c. Déterminer la réactance de fuite ramenée au secondaire.

Solution de l'exercice 5.10

1. Bilan de puissance :
 - a. La puissance active nominale est :

$$P_1 = 120962 \text{ W}$$

- b. On a :

$$\sum \text{pertes} = P_a - P = 5039 \text{ W}$$

Donc :

$$P_{fer} = P_{joule} = 2519 \text{ W}$$

2. Essai en charge :
 - a. La tension à vide au secondaire est :

$$U_{20} = 399 \text{ V}$$

Le rapport de transformation est :

$$m = 0,0115$$

b. La résistance ramenée au secondaire est :

$$R_S = 0,0158 \Omega$$

c. La réactance de fuite est :

$$X_S = 0,07 \Omega$$

Exercice 5.11

Les essais d'un transformateur monophasé T dont la plaque signalétique porte les indications suivantes : 220 V/3000 V ; 50 HZ ; 4000 VA, ont donné :

Essai à vide : $V_1 = 220 \text{ V}$ $V_{20} = 3140 \text{ V}$; $I_0 = 1 \text{ A}$ et $P_0 = 50 \text{ W}$.

En court circuit: $V_{1CC} = 12 \text{ V}$ $I_{2CC} = 1,33 \text{ A}$; et $P_{CC} = 190 \text{ W}$

1. Déterminer les éléments de schéma équivalent ramené au secondaire.
2. Un essai volt-ampérométrique en courant continu a permis de déterminer la résistance de l'enroulement primaire. Cette résistance vaut $R_1 = 0,17 \Omega$. Déterminer alors la résistance de l'enroulement secondaire.
3. En supposant que les inductances de fuites ramenées au côté primaire sont égales, donner alors les valeurs de L_2 et L_1 .
4. Dans l'hypothèse de Kapp, déterminer les valeurs de V_2 et du rendement pour le courant secondaire nominal si la charge a un facteur de puissance 0,8 AR.
5. On dispose de deux autres transformateurs identiques au transformateur précédent. Avec ces trois transformateurs, on voudrait construire un transformateur triphasé.
 - a. Quelles sont alors les indications qu'on doit inscrire sur la plaque signalétique de ce transformateur.
 - b. Calculer pour les couplages suivants les rapports de transformation :
 - Couplage Y_{y6} .
 - Couplage D_{d0} .
 - Couplage Y_{d11} .
 - Couplage D_{y5} .

Solution de l'exercice 5.11

1. Les éléments du schéma équivalent ramené au secondaire sont :

La résistance : $R_S = 107 \Omega$.

La réactance : $X_S = 72 \Omega$.

2. La résistance de l'enroulement secondaire est :

$$R_2 = R_s - m^2 \cdot R_1 = 72 \Omega$$

3. Les inductances de deux enroulements sont : $L_1 = 0,114 H$ et $L_2 = 56 mH$

4. La tension aux bornes de la charge est : $V_2 = 2969 V$.

Le rendement est égal à : $\eta = 0.93$

5. Couplage en parallèle :

a. Les indications qu'on doit trouver sur la plaque signalétique sont: 380/ 5190 ; 50 HZ ; 12 k VA .

b. Le rapport de transformation et l'indice horaire :

- Couplage Y_{y6} : Le rapport de transformation est $m = 14,27$ et l'indice horaire est 6 .
- Couplage D_{d0} : $m = 14,17$ et l'indice horaire est 0.
- Couplage Y_{d11} : $m = 24,7$ et l'indice horaire est 11.
- Couplage D_{y5} : $m = 8,23$ et l'indice horaire est 5.

Exercice 5.12

Un transformateur triphasé porte sur sa plaque signalétique les indications nominales suites : $S = 250 kVA$, $20000 V/400 V$, $50 HZ$, D_{yn11} ,

Le circuit magnétique du transformateur est formé de trois noyaux ayant une section de $260 cm^2$ et l'induction maximale B_{max} vaut $1,7 T$. Les essais effectués sur le transformateur ont donné les résultats suivants :

Essai à vide : $U_1 = 20 kV$, $U_{20} = 410 V$, $P_0 = 600 W$, $Q_0 = 5210 VAR$

Où :

U_1, U_{20}, P_0 et Q_0 désignent respectivement les tensions au primaire et au secondaire les puissances active et réactive absorbées.

1. Calculer la valeur I_0 du courant en ligne à vide en précisant les hypothèses à adopter.
2. Calculer le facteur de puissance à vide $\cos \varphi_0$.
3. Calculer le nombre de spires N_1 au primaire et N_2 au secondaire.
4. Déterminer le rapport de transformation du transformateur :

A partir des valeurs de U_1 et U_{20} .

A partir des valeurs de N_1 et N_2 .

5. Que signifie l'indication D_{yn11} ?
6. Calculer la valeur efficace du courant nominal en ligne au primaire.
7. Calculer la chute de tension pour le transformateur lorsqu'il débite le courant nominal sur un récepteur inductif dont le facteur de puissance est $\cos \varphi_2 = 0,8$.

On adoptera les valeurs suivantes pour les éléments du modèle équivalent :

$$R_S = 8,75 \text{ m}\Omega, X_S = 25,4 \text{ m}\Omega.$$

Solution de l'exercice 5.12

1. Calcul I_0 :

$$S_0 = \sqrt{3} \cdot U_{1N} \cdot I_0^2 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2}$$

$$I_0 = \frac{S_0}{\sqrt{3} U_{1N}} = \frac{\sqrt{P_0^2 + Q_0^2}}{\sqrt{3} \cdot U_{1N}} = \frac{\sqrt{(600)^2 + (5210)^2}}{\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3} = 0,15 \text{ A}$$

1^{ère} hypothèse :

On suppose que I_0 est sinusoïdale car en réalité il est distordu (non sinusoïdal).

2^{ième} hypothèse :

On suppose que les 3 phases du transformateur sont équilibrées (bobines identique).

2. Calcul de φ_0 :

$$P_0 = S_0 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{P_0^2 + Q_0^2}} = \frac{600}{\sqrt{(600)^2 + (5210)^2}} = 0,11$$

3. Calcul de N_1 et N_2 :

La loi de Boucherot (à vide, transformateur parfait) :

$$U_{1N} = 4,44 \cdot N_1 \cdot f \cdot B_{max} \cdot S$$

Couplage triangle :

$$U_{1N} = V_N$$

$$N_1 = \frac{U_{1N}}{4,44 \cdot f \cdot B_{max} \cdot S} = \frac{20 \cdot 10^3}{4,44 \cdot 50 \cdot 1,7 \cdot 260 \cdot 10^{-4}} = 2038 \text{ spires}$$

Calcul de N_2 :

A vide :

$$V_{20} = E_{20} = N_2 \cdot 4,44 \cdot f \cdot B_{max} \cdot S$$

Couplage étoile :

$$V_{20} = \frac{U_{20}}{\sqrt{3}}$$

$$N_2 = \frac{U_{20}}{\sqrt{3} \cdot 4,44 \cdot f \cdot B_{max} \cdot S} = \frac{410}{\sqrt{3} \cdot 4,44 \cdot 50 \cdot 1,7 \cdot 260 \cdot 10^{-4}} = 24 \text{ spires}$$

4. Calcul du rapport de transformation :

Pour le transformateur triphasé :

$$m = \frac{U_{20}}{U_{1N}}$$

U_{20} et U_{1N} : doivent être prise entre phase.

$$m = \frac{U_{20}}{U_{1N}} = \frac{410}{20000} = 0,0205 \text{ (global)}$$

$$m_C = \frac{N_2}{N_1} = \frac{24}{2038} = 0,0117 \text{ (par colonne)}$$

5. Comparaison entre m et m_C :

$$m = \frac{U_{20}}{U_{1N}} = \frac{\sqrt{3}V_{20}}{U_{1N}} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \sqrt{3}$$

$$m = \sqrt{3} \cdot m_C$$

D : L'enroulement primaire couplé en triangle.

y : L'enroulement secondaire couplé en étoile.

n : Le neutre sort de l'enroulement secondaire.

$I = 11$ Indice horaire (de couplage), il indique le déphasage entre la tension secondaire par rapport à la tension primaire qui est prise comme référencer, il faut :

$$I = \frac{\theta}{30^\circ}$$

6. Calcul de la valeur efficace du courant nominal I_{1N} :

$$S = \sqrt{3} \cdot U_{1N} \cdot I_{1N} \Rightarrow I_{1N} = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U_{1N}} = \frac{250 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3} = 7,2 \text{ A}$$

Calcul de la chute de tension pour une phase (monophasé) :

$$\Delta U_2 = R_S \cdot I_{2N} \cdot \cos \varphi_2 + X_S \cdot I_{2N} \cdot \sin \varphi_2$$

$$I_{2N} = \frac{S}{\sqrt{3} U_2} = \frac{250 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 400} = 360,8 \text{ A}$$

$$\Delta U_2 = 8,75 \cdot 10^{-3} \cdot 360,8 + 0,825 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 360,8 \cdot 0,6 = 8,02 \text{ V}$$

Couplage de secondaire est en étoile :

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \cdot \Delta V_2 = \sqrt{3} \cdot 8,02 = 13,89 \text{ V}$$

Si le secondaire est en triangle : $\Delta U_2 = \Delta V_2$

CHAPITRE 06 :

MACHINES A COURANT CONTINU.

6.1. Introduction

Les machines à courant continu (MCC) ont été les premières machines électriques utilisées. Elles jouent un rôle essentiel dans le développement de l'électrotechnique. Malgré l'évolution des technologies et l'apparition des machines à courants alternatif, les MCC restent toujours très utilisées dans certaines applications, grâce à leur facilité de réglage de la vitesse, leur couple de démarrage élevé, et leur souplesse de fonctionnement.

Ce chapitre présente la MCC, ses avantages et inconvénients, sa constitution, son rôle et ses applications, explique son fonctionnement, les modes moteur et génératrice, les équations de base et les types de MCC.

6.2. Définition

La machine à courant continu est un dispositif électromécanique qui convertit l'énergie mécanique en énergie électrique en fonctionnement génératrice, et convertit l'énergie électrique en énergie mécanique en fonctionnement moteur.

La MCC est basée dans son fonctionnement sur le phénomène de l'induction électromagnétique.

6.3. Avantages et inconvénients

L'avantage principal des machines à courant continu réside dans leur adaptation simple aux moyens servant à régler ou de faire fluctuer leur vitesse, leur couple et leur sens de rotation : les variateurs de vitesse, ou alors leur raccordement direct à la source d'énergie : batteries d'accumulateur, piles, etc.

Le principal problème de ces machines vient de la liaison entre les balais, ou «charbons» et le collecteur rotatif. Mais aussi le collecteur lui même comme indiqué plus haut et la complexité de sa réalisation. De plus il faut signaler que :

- Plus la vitesse de rotation est élevée, plus la pression des balais doit augmenter pour rester en contact avec le collecteur par conséquent plus le frottement est important ;
- Aux vitesses élevées les balais doivent par conséquent être remplacés particulièrement régulièrement ;
- Le collecteur imposant des ruptures de contact provoque des arcs, qui usent rapidement le commutateur et génèrent des parasites dans le circuit d'alimentation, mais aussi par rayonnement électromagnétique.

Un autre problème limite les vitesses d'utilisation élevées de ces moteurs quand le rotor est bobiné, c'est le phénomène de «dé-fretage», la force centrifuge

finissant par casser les liens assurant la tenue de l'ensemble de spires (le frettage).

6.4. Symbole



Figure 6.1 : Symbole de la machine à courant continu.

6.5. Constitution de la machine à courant continu MCC

La machine à courant continu comporte les parties principales suivantes :

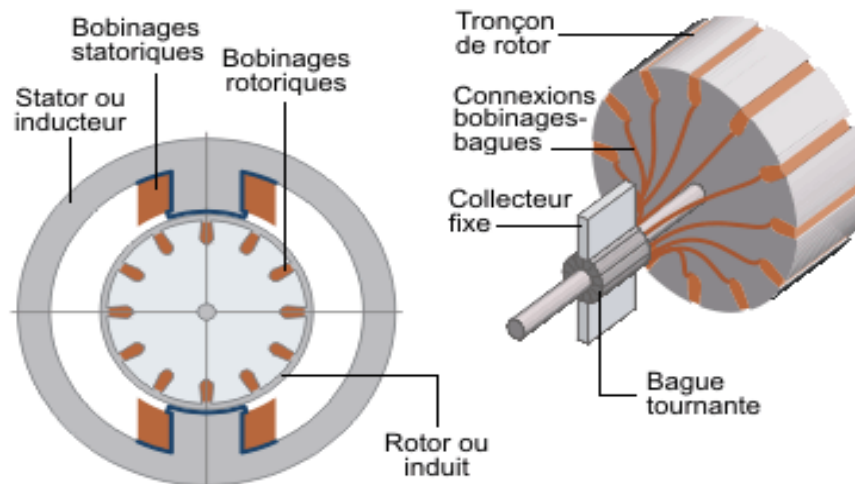


Figure 6.2 : Constitution de la machine à courant continu.

- Une partie fixe appelée « Stator » qui aura le rôle d'inducteur.
- Une partie mobile appelée « Rotor » qui aura le rôle d'induit.
- Une liaison rotor - éléments extérieurs à la machine appelée « Collecteur ».

a) L'inducteur

Il est formé soit d'aimants permanents en ferrite soit de bobines placées autour des noyaux polaires. Lorsque les bobines sont parcourues par un courant continu, elles créent un champ magnétique dans le circuit magnétique de la machine notamment dans l'entrefer, espace séparant la partie fixe et la partie mobile, où se situent les conducteurs.

b) L'induit

Le noyau d'induit est en fer pour canaliser les lignes de champ, les conducteurs sont logés dans des encoches sur le rotor, deux conducteurs forment une spire.

c) Collecteur et balais

Le collecteur est un ensemble de lames de cuivre isolées, disposées sur l'extrémité du rotor, les balais portés par le stator frottent sur le collecteur.

6.6. Principe de fonctionnement**Mode génératrice**

La MCC reçoit à son entrée une énergie mécanique et génère à sa sortie une énergie électrique de grandeurs courant/tension de nature continue.

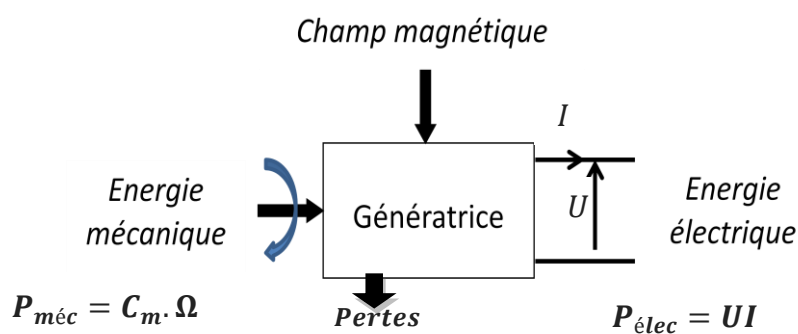


Figure 6.3 : Fonctionnement en génératrice.

En mode génératrice, le rotor tourne dans un champ magnétique sans qu'aucun courant n'y soit injecté. De fait de sa rotation, le rotor est exposé à un champ magnétique variable et est par conséquent le siège d'une force électromotrice dont la tension variable avec la vitesse de rotation du rotor et l'intensité de champ magnétique.

Le phénomène de l'induction électromagnétique créé par la rotation du rotor donne naissance d'un couple électromagnétique qui s'oppose à cette rotation. La vitesse de rotation du rotor est atteinte lorsque les couples mécanique et électrique se compensent.

Mode moteur

La MCC reçoit à son entrée une énergie électrique de grandeurs courant/tension de nature continue et produit à sa sortie une énergie mécanique.

En mode moteur le rotor est plongé dans un champ magnétique et un courant est injecté. D'après la loi de Laplace (tout conducteur parcouru par un courant et

placé dans un champ magnétique est soumis à une force), les forces magnétiques apparaissent et mettent le rotor en mouvement de rotation en lui appliquant un couple électromagnétique. Le rotor accélère alors.

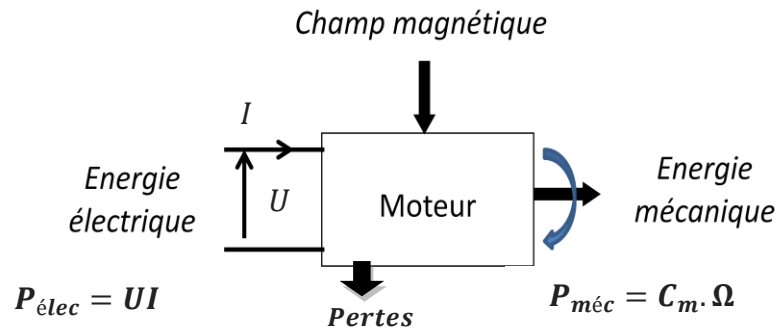


Figure 6.4 : Fonctionnement en moteur.

Avec :

P_{elec} : La puissance électrique [W];

P_{mec} : La puissance mécanique [W] ;

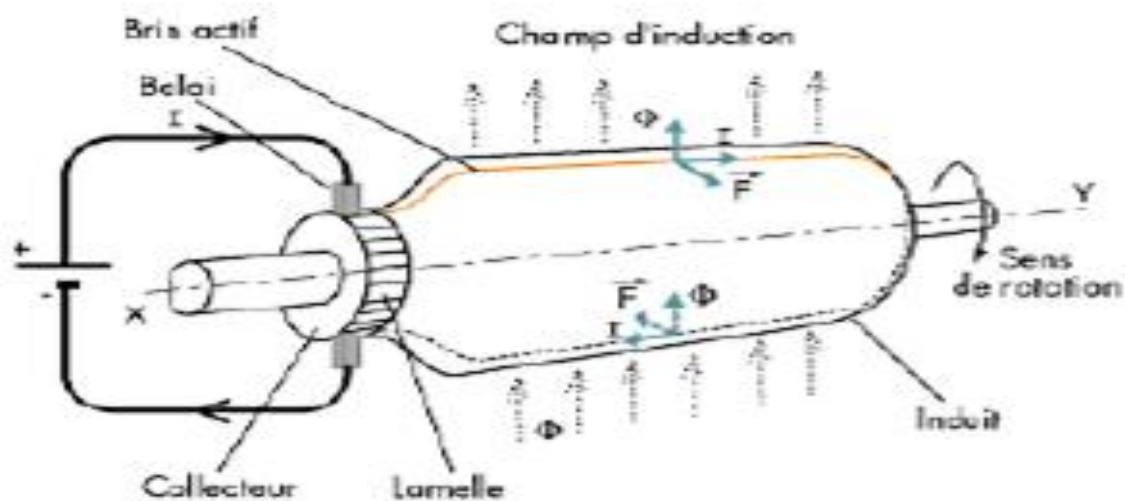
C_m : Le couple de moment [Nm] ;

Ω : La vitesse angulaire [rad/s] ;

U : La tension en [V] ;

I : Le courant en [A].

Ces deux modes peuvent être décrits par le schéma suivant :



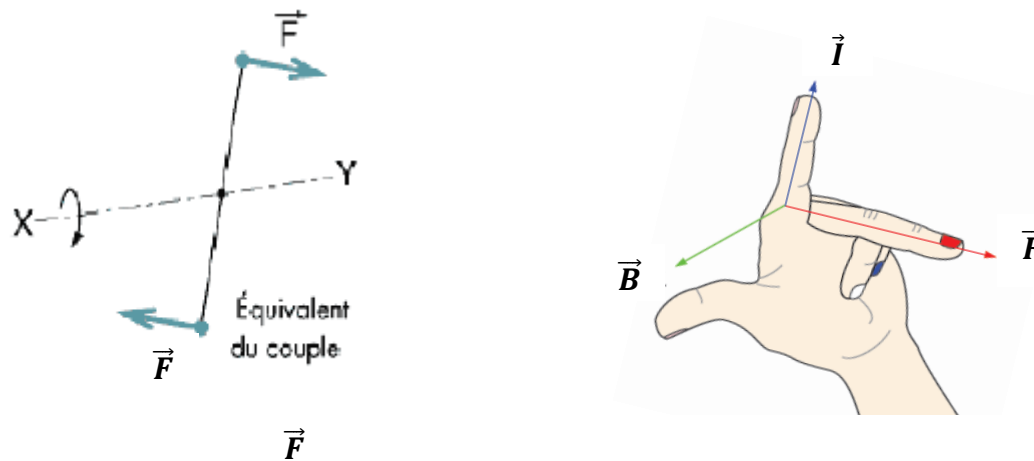


Figure 6.5 : Principe de fonctionnement de la MCC.

6.7. Fonctionnement dans les quatre cadrans

La MCC peut fonctionner soit en moteur dans les deux sens de rotation; soit en génératrice dans les deux sens de rotation.

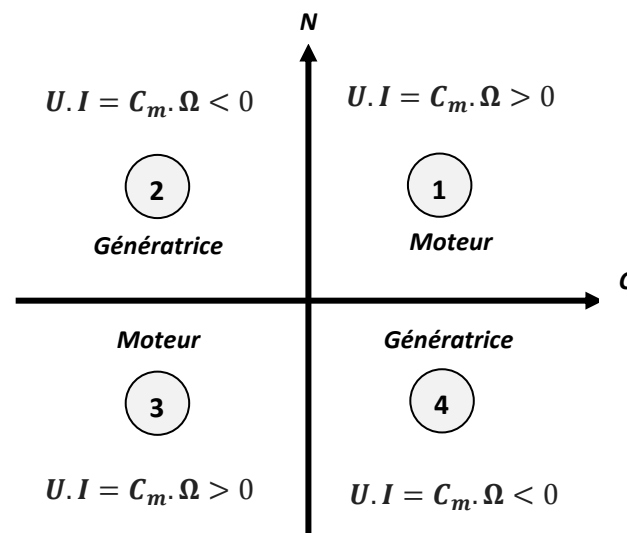


Figure 6.6 : Fonctionnement de la MCC dans les quatre cadrans.

6.8. L'expression de la fém induite

Loi de Faraday :

$$E = k \cdot \Phi \cdot \Omega$$

Avec :

E : La force électromotrice (fém induite) en $[V]$;

Φ : Le flux magnétique crée sous un pôle par l'inducteur en $[wb]$;

Ω : La vitesse angulaire en $[rad/s]$;

k : Constante de construction (dépend de la machine considérée) en $[V.s/rad.wb]$.

Avec :

$$k = \frac{p}{2\pi \cdot a} \cdot N$$

p : Le nombre de paire de pôles ;

a : Le nombre de paires de voies d'enroulement ;

N : Le nombre de conducteurs(ou de brins-deux par spires).

$$E = k \cdot \Phi \cdot \Omega = K \cdot \Omega$$

$$K = k \cdot \Phi$$

Cette expression de la fém. est valable pour tout type d'excitation en moteur ou en générateur.

6.9. L'expression du couple électromagnétique

Loi de Laplace :

$$T_{em} = k \cdot \Phi \cdot I$$

$$T_{em} = K \cdot I$$

T_{em} : Couple électromagnétique en $[N.m]$;

I : Courant d'induit en $[A]$;

6.10. Puissance électromagnétique

La puissance électromagnétique mise en jeu a deux formes :

La puissance électrique

$$P_{ele} = E \cdot I$$

La puissance mécanique

$$P_{mec} = T_{em} \cdot \Omega$$

Remarques

- Comme dans toutes les machines électromagnétique, le couple est proportionnel au flux crée par l'inducteur et au courant dans l'induit.
- Si : $I < 0$ et $T < 0$; la puissance fournie est alors négative, c'est qu'il reçoit de la puissance mécanique donc fonctionne en génératrice.

6.11. Schéma électrique équivalent de l'induit

On utilise un modèle de Thévenin :

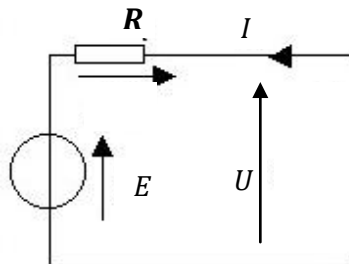


Figure 6.7 : Schéma électrique équivalent de l'induit.

Loi des branches (En convention récepteur):

$$U = E + R.I$$

En fonctionnement moteur : $I > 0$; $P_{elec} = UI > 0$; $U > E$

En fonctionnement génératrice : $I < 0$; $P_{elec} = UI < 0$; $E > U$

6.12. Couple et courant de démarrage

Le moteur à courant continu peut démarrer en charge. Il suffit d'injecter le courant induit nécessaire.

Au démarrage, le moteur ne tourne pas. Or, la force contre-électromotrice E est proportionnelle à la vitesse de rotation : elle est donc nulle. Si on pose $E = 0$, on remarque que toute la tension appliquée au démarrage est appliquée à des bobinages de faible résistance. Il résulte alors un fort appel de courant atteignant plusieurs fois le régime normal qui peut mener à la détérioration des bobinages.

6.13. Les différents types d'excitation de la machine à courant continu

Le type d'excitation influence le comportement du moteur ainsi on peut classer les moteurs selon leur mode d'excitation. On peut distinguer [1] :

Machine à excitation indépendante

C'est le cas le plus fréquent : B est constant car il est créé par des aimants permanents ou bien toujours parce que I_e est constant (excitation séparée alimentée en courant continu).

Les équations deviennent :

$$U = E + R_i.I_i$$

$$E = K.\Omega$$

$$T_{em} = K.I_i$$

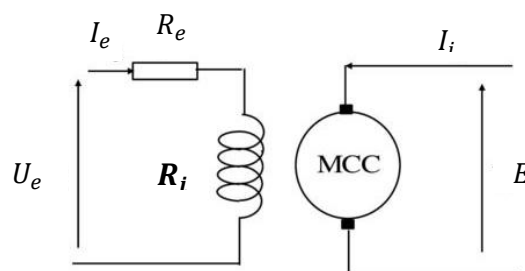


Figure 6.8: Schéma électrique équivalent de la MCC à excitation indépendante.

Machine à aimant permanent

Dans le cas d'une machine MCC à aimant permanent, la partie excitation n'existe pas.

Machine à excitation en série

L'excitation série étant actuellement réservée à des moteurs, il n'est pas habituel d'utiliser le terme de machine à excitation série (exception faite dans les systèmes ferroviaires).

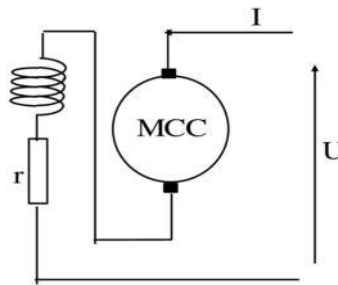


Figure 6.9 : Schéma électrique équivalent de la MCC à excitation série.

Ce type de moteur est caractérisé par le fait que le stator (inducteur) est raccordé en série avec le rotor (induit). Donc :

$$\begin{aligned} I_e &= I_i = I \\ U &= U_e + U_i \\ B &= k_e \cdot I \end{aligned}$$

En admettant que le flux $= K' \cdot I$

Les équations de la machine deviennent :

$$\begin{aligned} U &= E + R_i \cdot I + R_e \cdot I = E + (R_i + R_e) \cdot I \\ E &= K \cdot k_e \cdot I \cdot \Omega = k \cdot I \cdot \Omega \\ T_{em} &= K \cdot I \cdot k_e \cdot I = k \cdot I^2 \end{aligned}$$

Les moteurs à excitation série peuvent développer un très fort couple surtout à basse vitesse, ce dernier étant proportionnel au carré du courant. La vitesse de rotation d'un moteur à excitation série dépend de la charge, il s'emballe à vide et perd beaucoup de vitesse en charge.

Leurs principales applications sont :

- les démarreurs d'automobiles ;
- les moteurs universels (perceuses, outillage à main, etc.) :

Le couple $T_{em} = k \cdot I^2$ reste de même sens quel que soit le signe de I .

Une des conditions pratiques pour qu'un moteur série soit un moteur universel est que son stator soit feuilleté, car dans ce cas le flux inducteur peut être alternatif.

On utilise un moteur série lorsque l'on nécessite un fort couple au démarrage et une puissance utile stable.

Pour les applications intervenant nombreux démarrages comme : les locomotives, les motrices TGV, les engins de levage (les grues), le moteur série est idéal.

Machine à excitation shunt (excitation en dérivation)

Dans le moteur shunt, le stator est câblé en parallèle avec le rotor.

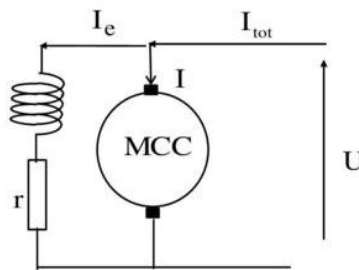


Figure 6.10 : Schéma électrique équivalent de la MCC à excitation shunt.

La tension aux bornes du rotor est la même que celle aux bornes du stator, donc :

$$U = U_e = U_i$$

$$B = k_e \cdot I_e = K \cdot U$$

Les équations de la machine deviennent :

$$U = E + R_i \cdot I_i$$

$$E = K \cdot U \cdot \Omega$$

$$T_{em} = K \cdot U \cdot I_i$$

La vitesse de rotation d'un moteur à excitation séparée ou shunt dépend relativement peu de la charge mécanique.

Le moteur à excitation shunt est utilisé en outillage électroportatif, du fait de son couple limité protégeant l'utilisateur et de l'absence d'emballement à vide.

Machine à excitation composée ou compound

Dans le moteur compound une partie du stator est raccordé en série avec le rotor et une autre est de type parallèle ou shunt. Ce moteur réunit les avantages des

deux types de moteur : le fort couple à basse vitesse du moteur série et l'absence d'emballlement (survitesse) du moteur shunt.

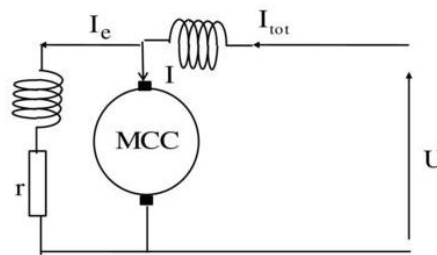


Figure 6.11 : Schéma électrique équivalent de la MCC à excitation composée.

Type de la MCC	Particularités	Emploi
Machine à excitation indépendante	• Moteur autorégulateur de vitesse ; • La vitesse est relativement constante quel que soit la charge.	Entrainement de machines-outils (remplacé par le moteur asynchrone triphasé)
Machine à excitation en série	• Moteur de très grand couple de démarrage mais risque l'emballlement à vide. • La vitesse décroît quand la charge augmente	Le moteur qui convient le mieux en traction électrique.
Machine à excitation shunt	• Ne s'emballe pas ; • Couple de démarrage meilleur qu'en excitation dérivation.	Appareils de levage et de manutention utilisée aussi en excitation indépendante.
Machine à excitation composée	Risque d'emballlement du fait de l'annulation du flux résultant des enroulements.	Pratiquement ce moteur n'est plus utilisé.

Tableau 6.1 : Comparaison entre différents types d'excitation de la MCC.

6.14. Essai à vide

A vide, la machine ne débite aucun courant. On relève la tension pour plusieurs valeurs du courant d'excitation injecté dans l'inducteur.

On peut tracer la courbe caractéristique à vide. L'indice «o» caractérise cet essai. (Ou caractéristique interne) : $E_0 = f(I_e)$ cette courbe se trace en maintenant la vitesse n constante. Sur cette courbe, on trouve:

- De O à A, la caractéristique est linéaire, $E = k'\Phi$ (avec $k' = k\Omega$).
- De A à B le matériau ferromagnétique dont est constitué le moteur commence à saturer. (μ_r n'est plus constant).
- Après B, le matériau est saturé, la fém. n'augmente plus.
- La zone utile de fonctionnement de la machine se situe au voisinage du point A.
- Sous le point A, la machine est sous utilisée, et après le point B les possibilités de la machine n'augmentent plus (mais les pertes augmentent puisque I_e augmente).
- Dans la réalité, du fait du matériau ferromagnétique, on relève une caractéristique avec une faible hystérésis.

Pour un I_e fixé, une augmentation de la vitesse de rotation entraînera une augmentation de E_0 . On a donc : $E_0 = k\Phi(I_e)\Omega$

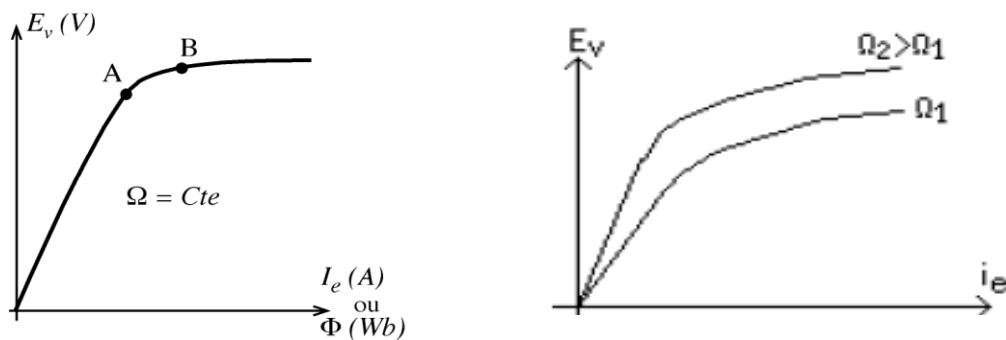


Figure 6.12 : Caractéristique à vide de la MCC.

Caractéristique $E_0 = f(\Omega)$ à Φ constant

$$E = k'\Phi$$

Remarque : la caractéristique est linéaire tant que la saturation n'est pas atteinte.

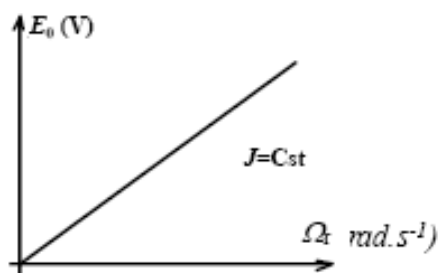


Figure 6.13 : La caractéristique $E_0 = f(\Omega)$.

6.15. Essai en charge

En charge, en cas de fonctionnement en génératrice, la machine débite dans la charge. En cas de fonctionnement en moteur, le moteur est chargé, c'est-à-dire que l'arbre de ce dernier entraîne une charge résistante qui s'oppose au mouvement du rotor.

On relève à nouveau la tension U à ses bornes en fonction de I . On trouve la courbe au-dessous.

Deux phénomènes permettent d'expliquer cette différence :

- Tout d'abord, le bobinage est formé de conducteurs que l'on peut représenter par une résistance R qui provoque une légère chute de tension ohmique dans l'induit : $\Delta U = R \cdot I$.
- Ensuite, le courant d'induit, qui résulte du déplacement du rotor sous le flux créé par l'inducteur va, lui aussi, créer un flux qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. Il va donc s'opposer au flux inducteur. Cela se traduit par une chute de tension supplémentaire : c'est la réaction magnétique d'induit (RMI).

En charge, le système va donc fonctionner sous un flux inférieur à celui créé par l'inducteur ($\Phi_{ch}(I_e, I) < \Phi_0(I_e)$), d'où une tension plus faible que celle attendue. La tension de sortie de la machine s'écrit alors :

$$U = k' \Phi(I_e, I) \Omega - RI = E_{ch} - RI$$

$$E_{ch} < E_0 (E_0 - E_{ch} = \varepsilon : \text{Chute de tension due à la RMI})$$

$$\text{La chute de tension totale est alors notée } u(I) = \varepsilon + RI = E_0 - U$$

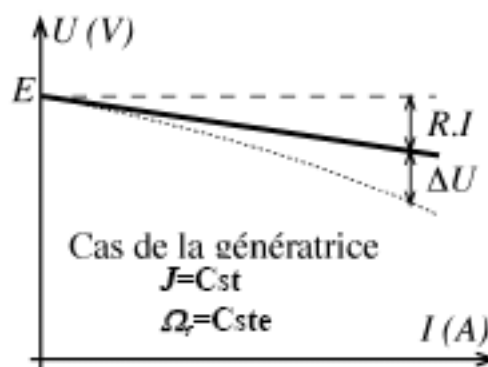


Figure 6.14 : Caractéristique en charge de la MCC.

Remarques

- La saturation de l'induit augmente l'effet de réaction magnétique d'induit.

- Pour annuler la réaction magnétique d'induit, la machine possède sur le stator des enroulements de compensation parcourus par le courant d'induit, on dit que la machine est compensée.

6.16. Point de fonctionnement

Une charge oppose au moteur un couple résistant C_r . Pour que le moteur puisse entraîner cette charge, le moteur doit fournir un couple utile C_u de telle sorte que:

$$C_u = C_r$$

Cette équation détermine le point de fonctionnement du moteur.

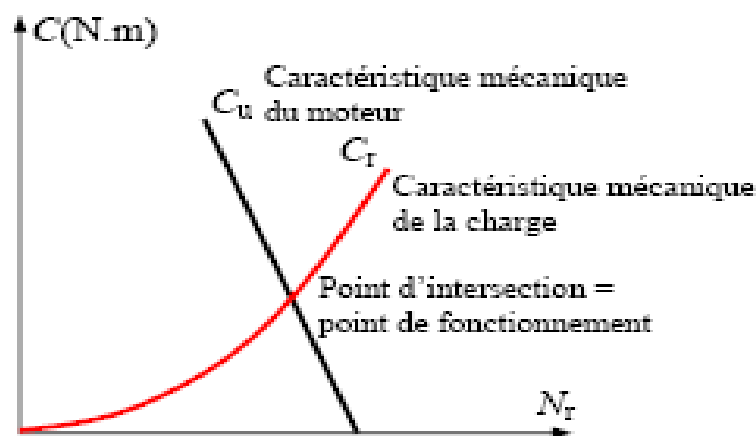


Figure 6.15 : Point de fonctionnement de la MCC.

Le fonctionnement est stable si tout écart accidentel de vitesse crée une différence de couple qui l'annule.

Le point de fonctionnement se trouve sur l'intersection de la caractéristique mécanique du moteur et de la courbe qui caractérise le moment du couple résistant de la charge.

6.17. Bilan des puissances

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_u}{P_u + \text{pertes}} = \frac{P_a - \text{pertes}}{P_a} = 1 - \frac{\text{pertes}}{P_a}$$

Les pertes sont de trois types :

Pertes électriques par effet Joule : Pertes Joule (induit et inducteur) :

Ce sont les pertes par échauffement dans les circuits de l'induit et de l'inducteur. Elles sont dissipées par les résistances équivalentes des circuits, et sont mesurables avec un multimètre.

$$P_J = RI^2 + R_e I_e^2$$

Pertes magnétiques dans le fer (pertes d'hystérésis plus pertes par courant de Foucault)

Pertes par hystérésis

$$P_h = k_h f B^2$$

k_h : Coefficient qui dépend de la nature des tôles ;

f : Fréquence ;

B : Induction.

Pertes par courant de Foucault

$$P_{fouc} = k_{fouc} \cdot (e \cdot f \cdot B)^2$$

k_{fouc} : Coefficient qui dépend des tôles ;

e : Épaisseur de la tôle ;

La somme des deux pertes est appelée fer :

$$P_{fer} = P_h + P_{fouc}$$

Pertes mécaniques dues au mouvement P_m

Les pertes mécaniques dues aux frottements se situent au niveau des paliers.

La somme des pertes fer et mécaniques sont appelées les pertes constantes :

$$P_c = P_{fer} + P_m$$

Remarque

Pratiquement :

- Les pertes collectives (pertes fer plus pertes mécaniques) sont déterminées en mesurant la puissance par un essai à vide.
- Les pertes par effet Joule (pertes de cuivre) sont déterminées en mesurant la résistance des enroulements à chaud ainsi que le courant d'induit par un essai en charge.

6.18. Plaque signalétique du moteur à courant continu

La plaque signalétique d'un moteur donne de précieux renseignements, ils concernent le fonctionnement le mieux approprié, c'est-à-dire celui qui permet un très bon rendement, pas forcément le plus élevé, mais qui assure une très

bonne longévité de la machine. Les valeurs mentionnées pour l'induit, sont appelées les valeurs nominales, elles ne doivent pas être dépassées de plus de 1,25 fois, elles se décomposent ainsi :

IEC 34.1.1990		LEROY SOMER		MADE IN FRANCE	
MOTEUR A COURANT CONTINU DIRECT CURRENT MOTOR					
TYPE: LSK 1604 S 02		N° 700000/10		9/1992 M 249 kg	
Classe / Ins class H		IM 1001		IP 23 IC 06	
M _{nom} / Rated torque 301 N.m		Altit. 1000 m		Temp. 40 °C	
	kW	min ⁻¹	V	A	V A
Nom./Rat.	36,3	1150	440	95,5	360 3
	3,63	115	44	9,55	360 3
	36,3	1720	440	95,5	240
T système peinture: I		Induit / Arm.		Excit. / Field	
○ Service / Duty S1		DE 6312 2RS C3		NDE 6312 2RS C3 ○	

Figure 6.16 : Plaque signalétique du moteur à courant continu.

LSK : série ;

160 : hauteur d'axe ;

4 : polarité ;

S : symbole de stator ;

02 : indice constructeur ;

T : indice d'imprégnation ;

I : système de peinture ;

Altit : altitude maximale de fonctionnement en mètres ;

Temp. : Température d'ambiance maximale ;

Nom : caractéristiques nominales ;

kW : puissance ;

min⁻¹ : Nombre de tours par minute ;

V, A induit : tension et intensité d'induit ;

V, A : tension et intensité d'excitation ;

N° moteur

N° : numéro série moteur ;

10 : n° d'ordre dans la série ;

9 : mois de production ;

92 : année de production ;

M...kg : masse ;

I cl .H : classe d'isolation H.

IM 1001 : position de fonctionnement ;

IP 235: indice de protection ;

IC 06: indice de refroidissement ;

M_{nom} : moment du couple nominal.

Roulements

DE : roulement coté entraînement ;

NDE : roulement coté opposé à l'enroulement ;

6.19. Le risque d'emballlement du moteur

Il y a emballement du moteur si l'on coupe l'excitation de la machine alors que l'induit est sous tension. Il faut bien retenir la règle suivante: ne jamais couper l'alimentation de l'inducteur du moteur à courant continu à excitation indépendante tant que l'induit est sous tension.

6.20. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 06

Exercice 6.1

Le moteur d'une grue, à excitation indépendante constante, tourne à la vitesse de rotation 1500 tr/min lorsqu'il exerce une force de 30 kN pour soulever une charge à la vitesse (linéaire) $V_1 = 15 \text{ m/min}$; la résistance de l'induit est $R_a = 0,4 \Omega$. Ce moteur est associé à un réducteur de vitesse dont les pertes, ajoutés aux pertes mécaniques et magnétiques du moteur font que la puissance utile de l'ensemble est égale à 83 % de la puissance électromagnétique transformée dans la machine. Le moment du couple électromagnétique du moteur est proportionnel à l'intensité I du courant qui traverse l'induit : $C_{em} = 1,35 I$.

- Calculer la puissance utile et le moment du couple électromagnétique.
 - Calculer l'intensité du courant, la force électromotrice et la tension U appliquée à l'induit.
 - Sachant que la puissance consommée par l'excitation est de $P_e = 235 \text{ W}$? calculer la puissance totale absorbée et le rendement du système.
1. En descente la charge, inchangée, entraîne le rotor et la machine à courant continu fonctionne alors en génératrice. L'excitation, le rapport du réducteur de vitesse et le rendement mécanique (moteur + réducteur) sont inchangés. On veut limiter la vitesse de descente de la charge à $V_2 = 12 \text{ m/min}$; calculer :
- La vitesse angulaire de rotation du rotor.
 - La puissance électromagnétique fournie à la génératrice.
 - Le moment du couple résistant de cette génératrice et l'intensité du courant débité dans la résistance additionnelle.
 - La résistance R .

Solution de l'exercice 6.1

- 1.
- La puissance utile est :

$$P_u = F \cdot V = 7,5 \text{ kW}$$

Le moment de couple électromagnétique est :

$$C_{em} = \frac{P_u}{\eta \cdot \Omega} = 57 \text{ N.m}$$

- Le courant absorbé est :

$$I = \frac{C_{em}}{1,35} = 42 \text{ A}$$

La force électromotrice :

$$E = \frac{P_{em}}{I} = 212 \text{ V}$$

La tension d'alimentation :

$$U = E + R_a \cdot I = 229 \text{ V}$$

c. La puissance totale absorbée est :

$$P_{total} = +P_{jinduit} + P_{jinducteur} = 9976 \text{ W}$$

2.

a. La vitesse angulaire du moteur est :

$$n = 12 \cdot \frac{1500}{15} = 1200 \text{ tr/min}$$

b. La puissance absorbée par la génératrice est :

$$P_{aG} = \eta \cdot F \cdot V = 4980 \text{ W}$$

c. Le moment de couple résistant :

$$C_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Et le courant :

$$I = \frac{C_{em}}{1,35} = 30 \text{ A}$$

d. La résistance :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{(E - R_a \cdot I)}{I} = 5,7 \Omega$$

Exercice 6.2

Une machine d'extraction est entraînée par un moteur à courant continu à excitation indépendante. L'inducteur est alimenté par une tension $U = 600 \text{ V}$ et parcouru par un courant d'excitation d'intensité constante : $J = 30 \text{ A}$. L'induit de résistance $R = 0,012 \Omega$ est alimenté par une source fournissant une tension U réglable de 0 V à sa valeur nominale : $U_N = 600 \text{ V}$. L'intensité I du courant dans l'induit a une valeur nominale : $I_N = 1,50 \text{ kA}$. La vitesse de rotation nominale est : $n_N = 30 \text{ tr/min}$.

1. Démarrage :

a. Ecrire la relation entre U , E et I , en déduire la tension U_d à appliquer au démarrage pour que $I_d = 1,2 \cdot I_N$.

2. Fonctionnement nominal au cours d'une remontée en charge :

a. Exprimer la puissance absorbée par l'induit du moteur et calculer sa valeur numérique.

- b. Exprimer la puissance totale absorbée par le moteur et calculer sa valeur numérique.
 - c. Exprimer la puissance totale perdue par effet Joule et calculer sa valeur numérique.
 - d. Sachant que les autres pertes valent 27 kW , exprimer et calculer la puissance utile et le rendement du moteur.
 - e. Exprimer et calculer le moment du couple utile T_u et le moment du couple électromagnétique T_{em} .
3. Fonctionnement au cours d'une remontée à vide :
- a. Montrer que le moment du couple électromagnétique T_{em} de ce moteur est proportionnel à l'intensité I du courant dans l'induit : $T_{em} = K.I$. On admet que dans le fonctionnement au cours d'une remontée à vide, le moment du couple électromagnétique a une valeur T_{em}' égale à 10 % de sa valeur nominale et garde cette valeur pendant toute la remontée.
 - b. Calculer l'intensité I' du courant dans l'induit pendant la remontée.
 - c. La tension U restant égale à U_N , exprimer puis calculer la fem E' du moteur.
 - d. Exprimer, en fonction de E' , I' et T_{em}' , la nouvelle vitesse de rotation n' . Calculer sa valeur numérique.

Solution de l'exercice 6.2

1. Démarrage :
1. La tension appliquée aux bornes de l'induit est :

$$U = E - R_a.I$$

Au démarrage : $U_d = R_a.I_d = 21,6 \text{ V}$

2. Fonctionnement nominal :
- a. La puissance absorbée par l'induit est : $P_{al} = U.I = 900 \text{ kW}$
- b. La puissance totale absorbée par le moteur est : $P_t = 918 \text{ kW}$
- c. Les pertes joule totale sont $P_{Jt} = 45 \text{ kW}$
- d. La puissance utile est $P_u = 846 \text{ kW}$ et le rendement est $\eta = 0,92$
- e. Le couple utile est :

$$T_{em} = \frac{P_u}{\Omega} = 269,3 \text{ kN.m}$$

Et le couple électromagnétique est :

$$T_{em} = 277 \text{ kN.m}$$

3. Fonctionnement au cours d'une remontée à vide :
- a. Le couple électromagnétique est :

$$T_{em} = \frac{k_e \cdot \Phi \cdot n \cdot I}{\Omega} = \frac{(k_e \cdot \Phi) \cdot I}{2\pi} = K \cdot I$$

- b. L'intensité du courant de l'induit : $I' = 0,1 \cdot I = 150 \text{ A}$
- c. La nouvelle force électromotrice est : $E' = U - R_a \cdot I' = 598,2 \text{ V}$
- d. Le couple électromagnétique :

$$T_{em} = \frac{E' \cdot I' \cdot 30}{\pi \cdot n'} \Rightarrow n' = \frac{E' \cdot I' \cdot 30}{\pi \cdot T_{em}} = 30,83 \text{ tr/min}$$

Exercice 6.3

Un moteur shunt est alimenté sous une tension constante de 200 V . Il absorbe un courant $I = 22 \text{ A}$. La résistance de l'inducteur est $R = 100 \Omega$, celle de l'induit $R_a = 0,5 \Omega$. Les pertes constantes sont de 200 W .

Calculer :

- a. Les courants d'excitation et d'induit.
- b. La force contre électromotrice.
- c. Les pertes par effet Joule dans l'inducteur et dans l'induit.
- d. la puissance absorbée, la puissance utile et le rendement global.
- e. On veut limiter à 30 A l'intensité dans l'induit au démarrage. Quel doit être la valeur de la résistance du rhéostat de démarrage.
- f. On équipe le moteur d'un rhéostat de champ. Indiquer son rôle. Dans quelle position doit se trouver le rhéostat de champ au démarrage ? Justifier votre réponse.

Solution de l'exercice 6.3

- a. Le courant d'excitation est : $I_e = 2 \text{ A}$, celui de l'induit est : $I_a = 20 \text{ A}$.
- b. La force électromotrice est : $E = U - R_a \cdot I_a = 190 \text{ V}$.
- c. Les pertes par effet joule dans l'induit sont : $P_{JInduit} = 200 \text{ W}$, celles de l'inducteur sont $P_{JInducteur} = 400 \text{ W}$.
- d. La puissance absorbée est : $P_a = U \cdot I = 4000 \text{ W}$. La puissance utile est $P_u = P_a - \sum(\text{pertes}) = 3100 \text{ W}$. Le rendement global est : $\eta = 0,775$
- e. Le rhéostat de démarrage est : $R_{h_d} = 4,83 \Omega$.
- f. Le rôle de rhéostat est la variation de vitesse, au démarrage, la valeur du rhéostat est nulle (Pour que le courant d'excitation soit maximal (éviter l'emballement)).

Exercice 6.4

Un moteur à excitation série possède une résistance interne totale $R_t = 0,1 \Omega$. On suppose que son circuit magnétique n'est pas saturé. Le moteur est utilisé à sa puissance maximale.

Alimenté sous une tension $U = 750 V$, il est traversé par un courant d'intensité $I = 200 A$, la vitesse de rotation de l'arbre vaut alors $n = 10 \text{ tr/min}$.

1. Déterminer la force électromotrice du moteur.
2. Calculer le moment de son couple électromagnétique. Le couple utile sur l'arbre n'est alors que de $2100 N.m$.
3. Calculer le rendement du moteur.
4. Le moteur est maintenant alimenté sous tension variable. Il entraîne une charge qui impose au moteur un couple électromagnétique dont le moment est lié à la vitesse de rotation par la relation :

$$T_{em} = 18.n^2 + 520, \text{ avec } T_{em} \text{ en } N.m \text{ et } n \text{ en } \text{tr/s}.$$

- a. Vérifier que le moteur est bien capable d'entraîner cette charge, sur toute la gamme de vitesse possible : de 0 à 10 tr/s .
- b. Calculer l'intensité du courant, puis la tension à appliquer pour obtenir une vitesse de rotation $n_0 = 5 \text{ tr/s}$.

Solution de l'exercice 6.4

1. La force électromotrice est : $E = U - R_t.I = 730 V$.
2. Le couple électromagnétique est :

$$T_{em} = \frac{E.I}{\Omega} = 2323 N.m$$

3. Le rendement du moteur est égal à 0,88.
4. Alimentation sous une tension variable :
 - a. Si : $0 < n < 10 \text{ tr/s}$ alors $520 < T_{em} < 2323 N.m$
 - b. Le courant absorbé par l'induit est : $I = 129 A$. La tension d'alimentation est : $U = 249 V$

Exercice 6.5

Une machine à courant continu, pour la quelle on néglige les pertes fer et mécaniques, une résistance d'induit $R_a = 0,26 \Omega$. Les variations de f.e.m à vide E_0 à vide de la machine en fonction de courant inducteur J la vitesse de rotation $n_0 = 1000 \text{ tr/min}$ sont décrites par le tableau suivant :

$J(A)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	0,5	2
$E_0(V)$	3	12	28	53	85	107	125	134	140	150	155

La réaction magnétique de l'induit est négligeable.

Le courant inducteur étant réglé à $J = 1,5 \text{ A}$, la machine fonctionne en moteur en fournissant le couple $C_1 = 90 \text{ N.m}$ à une vitesse $n_1 = 1500 \text{ tr/min}$.

1. Calculer la tension d'alimentation de l'induit U et le courant I .
2. Un mauvais fonctionnement de l'alimentation de l'inducteur ramène le courant J à $0,3 \text{ A}$. En supposant que le couple demandé par la charge mécanique ne varie pas, calculer la nouvelle vitesse de rotation du moteur.
3. Le courant inducteur est maintenant réglé à la valeur $J = 0,7 \text{ A}$. Montrer que le couple développé par le moteur peut se mettre sous la forme $= a.U - b.n$.
4. La machine entraîne une charge possédant un couple résistant $C_r = 5.10^{-2}.n$, calculer les valeurs de I , C et n .

Solution de l'exercice 6.5

1. Le courant absorbé par l'induit est :

$$I = \frac{C_1 \cdot \Omega}{E} = 94 \text{ A}$$

La tension appliquée aux bornes de l'induit est : $U = E + R_a \cdot I = 175 \text{ V}$

2. La nouvelle vitesse de rotation est $n = 7500 \text{ tr/min}$
3. Les pertes collectives sont négligeables :

$$\Rightarrow C_u = C_{em} = \left(\frac{K}{(2\pi \cdot R_a)} \right) \cdot U - \frac{K^2}{(2\pi \cdot R_a) \cdot n}$$

Avec :

$$a = \frac{K}{(2\pi \cdot R_a)} = 3,06$$

$$b = \frac{K^2}{(2\pi \cdot R_a)} = 15,3$$

4. En régime permanent, le couple utile est égale au couple résistant $0,025n = 3,06 U - 15.3 n$.

Exercice 6.6

La plaque signalétique d'un moteur série indique:

$$240 \text{ V} ; 15 \text{ A} ; 1500 \text{ tr/min} ; 3 \text{ kW} .$$

La résistance totale du moteur est : $R_t = 2 \Omega$.

1. Le moteur est alimenté sous une tension $U = 240 \text{ V}$ maintenue constante, calculer pour le fonctionnement nominal :

- a. La force contre électromotrice.
 - b. Le moment du couple électromagnétique.
 - c. La puissance absorbée et le rendement.
 - d. Les pertes dues à l'effet joule ; en déduire la valeur des pertes collectives
2. On alimente maintenant le moteur sous une tension variable :
- a. Le circuit magnétique n'est pas saturé, montrer que le f.é.m s'écrit sous la forme $E = k.n.I$, calculer la valeur numérique de k , si n est exprimé en tr/s .
 - b. Le moteur entraine une charge imposant un couple résistant constant, montrer que si on néglige le couple de pertes, le moteur absorbe un courant constant.
 - c. Etablir l'équation des variations de n (en tr/s) en fonction de U lorsque le courant $I = 15 A$.

Solution de l'exercice 6.6

1. Alimentation sous une tension constante : $U = 240 V$.
 - a. La force contre électromotrice est : $E = 210 V$.
 - b. Le moment du couple électromagnétique est : $C_{em} = 20 N.m$.
 - c. La puissance absorbée est : $P_a = U.I = 3600 W$ et le rendement est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,83$$

- d. Les pertes par effet Joule sont : $P_J = 450 W$. Les pertes collectives sont : $P_{collectifs} = P_a - P_u - P_J = 150 W$.
2. Alimentation sous une tension variable :
- a. Le circuit magnétique n'est pas saturé : $\Rightarrow \Phi = \alpha.I$ donc : $E = k.n.I$

$$k = \frac{E}{n.I} = 0,56$$

- b. Le couple électromagnétique :

$$C_{em} = \frac{E.I}{\Omega} = \frac{0,56.I^2}{2\pi} = cst \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2\pi.C_{em}}{0,56}}$$

- c. La variation de la vitesse :

$$n = \frac{E}{k} = \frac{(U - R_t.I)}{k} = 1,78 U - 53$$

Exercice 6.7

Un moteur shunt possède les caractéristiques suivantes : Résistance de l'inducteur (sans rhéostat d'excitation) $R = 110 \Omega$, Résistance de l'induit

$R_a = 0,2 \Omega$, Tension d'alimentation $U = 220 V$ et Pertes constantes $P_c = 700 W$.

1. La vitesse de rotation est de 1500 tr/min quand l'induit absorbe un courant de $75 A$, calculer :
 - a. La force électromotrice.
 - b. La puissance absorbée.
 - c. La puissance utile.
 - d. Le rendement et le couple utile.
2. Déterminer la résistance du rhéostat du démarrage pour que l'intensité au démarrage soit de $160 A$.
3. Variation de vitesse de rotation, calculer la vitesse de rotation lorsque le courant induit est $45 A$, puis lorsque le moteur est à vide (dans ce cas on néglige les pertes joule devant P_c).
4. Réglage de la vitesse : Le flux restant proportionnel à l'excitation, quelle valeur faut-il donner au rhéostat d'excitation pour obtenir une vitesse de 1650 tr/min avec le même courant I qui est égal à $75 A$.

Solution de l'exercice 6.7

1. Fonctionnement nominal :
 - a. La force électromotrice est : $E = U - R_a \cdot I = 205 V$.
 - b. La puissance absorbée est : $P_a = U \cdot (I + J) = 16940 W$.
 - c. La puissance utile est : $P_u = P_a - \sum(\text{pertes}) = 14675 W$.
 - d. Le rendement est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,866$$

et le couple utile est :

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = 93,42 \text{ N.m}$$

2. Le rhéostat de démarrage est :

$$R_{hd} = \frac{U}{I_d} - R_a = 1,175 \Omega$$

3. Variation de la vitesse de rotation :

Si $I' = 45 A$ alors, $E' = U - R_a \cdot I' = 211 V$, la vitesse de rotation est :

$$n' = n \cdot \frac{E'}{E} = 1544 \text{ tr/min}$$

Si le moteur fonctionne à vide : $P_{a0} = U \cdot (I_0 + J) = 1440 W \Rightarrow I_0 = 3,18 A$

La force électromotrice à vide est : $E_0 = 219,36 V$ et la vitesse à vide est :

$$n_0 = 1605 \text{ tr/min}$$

4. Réglage de la vitesse : le courant : $I' = I = 75 \text{ A} \Rightarrow n \cdot \Phi = n' \cdot \Phi'$
 Or : $\Phi = \alpha \cdot J$ donc : $J' = J \cdot \frac{n}{n'} = 1,81 \text{ A} \Rightarrow R_{ex} = 11 \Omega$.

Exercice 6.8

Un moteur série essayé à vide et en génératrice à excitation séparée a donné à une vitesse de rotation $n = 1200 \text{ tr/min}$:

$I_e (A)$	0	10	20	30	40	50
$E_0 (V)$	0	100	200	300	350	375

La réaction magnétique de l'induit est parfaitement compensée.

Les résistances de l'induit R_a et de l'inducteur R_s mesurées à chaud : $R_a = 0,8 \Omega$ et $R_s = 0,2 \Omega$.

La machine fonctionne en moteur série, elle est alimentée sous tension fixe 230 V .

- Pour un courant d'induit d'intensité nominale $I_n = 30 \text{ A}$. Calculer :
 - La fem.
 - La vitesse de rotation n .
 - Le couple électromagnétique.
 - Le couple utile, sachant que la somme des pertes fer et des pertes mécaniques est de 500 W à 1200 tr/min et qu'elles sont supposées proportionnelles à la vitesse de rotation. Vérifier que le couple de pertes reste constant quelque soit la vitesse de rotation.
 - Le rendement du moteur.
- Vérifier que pour $I \leq 30 \text{ A}$, le circuit magnétique n'est pas saturé et par conséquent on peut écrire : $\Phi = a \cdot I$
 - Démontrer que le couple électromagnétique peut s'écrire sous la forme suivante : $C_{em} = k_m \cdot I^2$.
 - Calculer k_m , sachant que $C_p = 4 \text{ N.m}$, calculer le courant absorbé par le moteur, si sa charge est débranchée accidentellement.
- Le moteur est alimenté encore sous 230 V , il travaille à couple résistant constant $C_r = C_u$ (calculé en d) .
 - On désire limiter le courant de démarrage à $1,5 I_N$. Calculer la résistance R_{hd} à placer en série avec l'induit.
 - Calculer le couple de démarrage.
 - si, accidentellement, R_{hd} reste en série avec l'induit, quelle sera la vitesse de rotation du moteur en régime permanent.

Solution de l'exercice 6.8

1. Fonctionnement nominal :

a. La force électromotrice est : $E = U - (R_a + R_s).I = 200 \text{ V}$.

b. La vitesse de rotation est : $n = 800 \text{ tr/min}$.

c. Le couple électromagnétique est :

$$C_{em} = \frac{E.I}{\Omega} = 71,6 \text{ N.m}$$

d. Le couple utile est : $C_u = C_{em} - C_p = 67,62 \text{ N.m}$. Le couple des pertes

$$C_p = \frac{P_c}{\Omega} = \text{cst.}$$

e. Le rendement du moteur est : $\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,82$.

2.

a. Lorsque $I \leq 30 \text{ A}$, on a :

$$E_0 = 10.I + K_e \left(\frac{1200}{60} \right) \cdot \Phi \Rightarrow \Phi = \left(\frac{1}{2K_e} \right) \cdot I = a.I$$

Le flux et le courant d'excitation sont proportionnels.

b. Le couple électromagnétique est :

$$C_{em} = \frac{E.I}{\Omega} = \frac{K_e \cdot \Phi \cdot n.I}{\Omega} = \frac{K_e \cdot a}{2\pi} = K_m \cdot I^2$$

c. La constante $K_m = \frac{C_{em}}{I^2} = 0,08$. Si la charge est débranchée :

$$C_{em} = C_p = 4 \text{ N.m} \text{ donc } I = I_0 = 7 \text{ A.}$$

3. Fonctionnement à couple constant :

a. Le rhéostat de démarrage est : $R_{hd} = 4,1 \Omega$.

b. Le couple de démarrage est : $C_d = 162 \text{ N.m}$.

c. Si le rhéostat de démarrage reste branché en série avec l'induit, la force électromotrice est : $E = 77 \text{ V}$ et la vitesse de rotation correspondante est $n = 308 \text{ tr/min}$.

Exercice 6.9

Une machine à courant continu de type série est parfaitement compensée (la réaction d'induit y est négligeable). On a relevé, à la vitesse de rotation de 1500 tr/min , la caractéristique à vide en génératrice à excitation séparée $E_0 = f(I_e)$ ou E_0 est la f.e.m et I_e l'intensité du courant d'excitation.

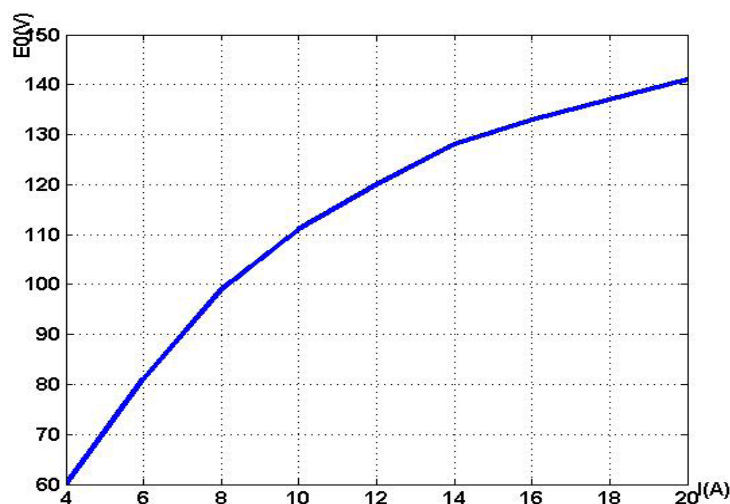
$I_e(\text{A})$	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$E_0(\text{V})$	60	81	99	111	120	128	133	137	141

Les résistances mesurées à chaud ont pour valeurs: $R_a = 0,62 \, \Omega$ et $R_s = 0,38 \, \Omega$. La machine fonctionne en moteur série alimenté sous tension constante $U = 110 \, V$.

1. Tracer la caractéristique à vide.
2. Pour un courant absorbé $I = 20 \, A$, calculer :
 - a. La force électromotrice.
 - b. La vitesse de rotation.
 - c. Le couple électromagnétique.
 - d. Le rendement du moteur, sachant que l'ensemble des pertes dans le fer et des pertes mécaniques dans ces conditions est de $120 \, W$.

Solution de l'exercice 6.9

1. La caractéristique à vide à la vitesse de rotation $1500 \, tr/min$ est le suivant :



2. Fonctionnement nominal :
 - a. La force électromotrice est : $E = U - (R_a + R_s).I = 90 \, V$
 - b. La vitesse de rotation : $n = \frac{1500 \cdot 90}{141} = 957 \, tr/min$.
 - c. Le couple électromagnétique est : $C_{em} = \frac{E.I}{\Omega} = 18 \, N.m$.
 - d. Le rendement du moteur est : $\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,76$.

Exercice 6.10

Un moteur à excitation dérivée sous une tension constante de $200 \, V$. Il absorbe un courant I de $22 \, A$. La résistance de l'inducteur est $r = 100 \, \Omega$, celle de l'induit $R = 0,5 \, \Omega$. Les pertes constantes (collectives) sont de $200 \, W$.

1. Calculer le courant d'excitation et l'induit.
2. Calculer la force contre électromotrice.
3. Calculer les pertes par effet Joule dans l'inducteur et dans l'induit.
4. Calculer la puissance absorbée, la puissance utile et le rendement global.
5. On veut limiter à 30 A l'intensité dans l'induit au démarrage. Calculer la valeur de la résistance du rhéostat de démarrage.
6. On équipe le moteur d'un rhéostat de champ. Indiquer son rôle. Dans quelle position doit se trouver le rhéostat de champ au démarrage ? justifier votre réponse.

Solution de l'exercice 6.10

1. Le courant d'excitation:

$$I_a = \frac{200}{100} = 2 \text{ A}$$

La loi des nœuds donne le courant d'induit :

$$I_a = I_{total} - I_e = 22 - 2 = 20 \text{ A}$$

2. La force contre électromotrice :

$$E = U - R_a \cdot I_a = 200 - 0,5 \cdot 20 = 190 \text{ V}$$

3. Les pertes par effet Joule dans l'inducteur et dans l'induit :

$$P_{J_{inducteur}} = R_e \cdot I_e^2 = 100 \cdot 2^2 = 400 \text{ W}$$

$$P_{J_{induit}} = R_a \cdot I_a^2 = 0,5 \cdot 20^2 = 200 \text{ W}$$

4. La puissance absorbée, la puissance utile et le rendement global :

$$P_{abs} = U \cdot I = 200 \cdot 22 = 4400 \text{ W}$$

$$P_u = P_e - P_{cte} = E \cdot I_a - P_{cte} = 190 \cdot 20 - 200 = 3600 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{3600}{4400} \approx 0,82$$

- 5.

Lors du démarrage, le rotor ne tourne pas et l'induit n'est donc le siège d'aucune force contre électromotrice. Seule sa faible résistance limite le courant. Afin de limiter le courant à 30 A, il faut donc ajouter une résistance (rhéostat de démarrage) égale à :

$$U = (R_a + R_h) \cdot I_{dém} \Rightarrow R_h = \frac{U}{I_{dém}} - R_a = \frac{200}{30} - 0,5 = 6,16 \Omega$$

Un démarrage sans rhéostat conduirait à une intensité de démarrage égale à :

$$I_{dém} = \frac{U}{R_a} = \frac{200}{0,5} = 400 \text{ A}$$

Cette intensité entrainerait des pertes Joule dans l'induit égale à :

$$P_J = R_a \cdot I_{dém}^2 = 0,5 \cdot 400^2 = 80 \text{ kW}$$

Ces pertes Joules échaufferait énormément la machine qui risquerait d'être détruite (les vernis isolant recouvrant les conducteurs ne supportent guère plus de 150 °C).

D'autre part, le couple mécanique fourni par la machine est proportionnel à l'intensité absorbée par l'induit. La très forte intensité absorbée au démarrage en l'absence de rhéostat conduirait à un couple trop important qui risquerait d'endommager voire de rompre l'accouplement mécanique entre le moteur et la charge qu'il entraîne.

6.

Le rhéostat de champ se place en série avec l'inducteur. Son rôle est de faire varier le courant inducteur afin de faire varier le champ inducteur et donc de faire varier la vitesse de la machine comme l'indique la relation :

$$N = \frac{U - R_a \cdot I_a}{k \cdot \Phi \cdot I_e}$$

Cette méthode particulièrement simple de variation de vitesse rencontre cependant des limites dans la plage de vitesse possible. En effet, selon la charge entraînée, le couple nécessaire croît comme le carré ou le cube de la vitesse de rotation. Donc le courant absorbé par l'induit va croître d'autant plus vite que le flux inducteur a été diminué pour augmenter la vitesse et atteindre d'autant plus rapidement sa limite maximale que le flux inducteur aura été fortement diminué :

$$C_e = \frac{k \cdot \Phi \cdot I_e}{2\pi} \cdot I_a \Rightarrow I_a = \frac{2\pi \cdot C_e}{k \cdot \Phi \cdot I_e}$$

Au démarrage, on souhaite un couple important et donc un flux élevé. Le rhéostat de champ est réglé de tel sort que sa rhéostat soit minimal afin que le courant inducteur et donc le flux soit élevé.

CHAPITRE 07 :

MACHINES A COURANT ALTERNATIF.

7.1. Introduction

Pour les applications de faible et moyenne puissance (jusqu'à quelques kilowatts), le réseau monophasé standard suffit. Pour des applications de forte puissance, les moteurs à courant alternatif sont généralement alimentés par une source de courants polyphasés. Le système le plus fréquemment utilisé est alors le triphasé (phases décalées de 120°) utilisé par les distributeurs d'électricité.

Ces moteurs alternatifs se déclinent en trois types :

- les moteurs universels ;
- les moteurs asynchrones ;
- les moteurs synchrones.

Ces deux dernières machines ne diffèrent que par leur rotor.

La description, la constitution, le principe de fonctionnement ainsi que le modèle électrique de ces machines seront présentés par la suite de ce chapitre.

7.2. Les moteurs universels

Un moteur universel est un moteur électrique fonctionnant sur le même principe qu'une machine à courant continu à excitation série : le rotor est connecté en série avec l'enroulement inducteur. Le couple de cette machine indépendant du sens de circulation du courant est proportionnel au carré de son intensité. Il peut donc être alimenté indifféremment en courant continu ou en courant alternatif, d'où son nom. Pour limiter les courants de Foucault qui apparaissent systématiquement dans toutes les zones métalliques massives soumises à des champs magnétiques alternatifs, son stator et son rotor sont feuilletés.

Dans la pratique, ces moteurs ont un mauvais rendement, mais un coût de fabrication très réduit. Leur couple est faible, mais leur vitesse de rotation est importante. Quand ils sont utilisés dans des dispositifs exigeant un couple important, ils sont associés à un réducteur mécanique.

Ils sont principalement utilisés dans l'électroménager, par exemple les aspirateurs, l'outillage électroportatif de faible puissance (jusqu'à environ 1200 W) et de nombreuses applications domestiques. On règle facilement leur vitesse de rotation avec des dispositifs électroniques peu coûteux tels que les gradateurs.

7.3. Les machines synchrones

La machine synchrone est souvent utilisée comme génératrice. On l'appelle alors « alternateur ». Mis à part pour la réalisation de groupe électrogène de faible puissance, cette machine est généralement triphasée. Pour la production d'électricité, les centrales électriques utilisent des alternateurs dont les puissances peuvent avoisiner les 1500 MW .

Comme le nom l'indique, la vitesse de rotation de ces machines est toujours proportionnelle à la fréquence des courants qui les traversent. Ce type de machine peut être utilisé pour relever le facteur de puissance d'une installation. On appelle celle-ci un « compensateur synchrone ».

Les machines synchrones sont également utilisées comme moteurs dans les systèmes de traction (comme la deuxième génération de TGV) ; dans ce cas, elles sont souvent associées à des onduleurs de courant, ce qui permet de contrôler le couple moteur avec un minimum de courant. On parle d'« autopilotage » (asservissement des courants statoriques par rapport à la position du rotor).

7.4. Constitution

a) Rotor (inducteur)

Il est constitué d'un enroulement parcouru par un courant d'excitation J continu créant un champ magnétique $2p$ polaire. Il possède donc p paires de pôles.

Remarques

- il faut apporter le courant à l'inducteur par l'intermédiaire de bagues et de balais.
- le rotor peut être constitué par un aimant permanent.

b) Stator (induit)

Les enroulements du stator sont le siège de courants alternatifs monophasés ou triphasés. Il possède le même nombre de paires p de pôles.

c) Champ tournant

Les courants alternatifs dans le stator créent un champ magnétique tournant à la pulsation :

$$\Omega_s = \frac{\omega}{p}$$

Ou :

$$n_s = \frac{f}{p}$$

Ou encore :

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p}$$

Avec :

Ω_s : vitesse de rotation du champ tournant en [rad/s];

ω : Pulsation des courants alternatifs en [rad/s];

n_s : vitesse de rotation du champ tournant en [rad/s] ;

f : fréquence des courants alternatifs en [Hz] ;

p : nombre de paires de pôles.

7.5. Synchronisme

Le champ tournant du stator accroche le champ inducteur solide du rotor.
Le rotor ne peut donc tourner qu'à la vitesse de synchronisme Ω_s .

Schémas

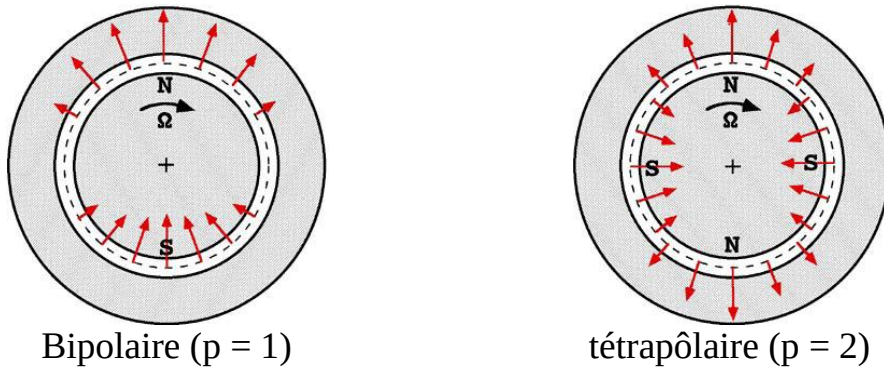


Figure 7.1 : Répartition du champ magnétique dans l'entrefer d'une machine synchrone.

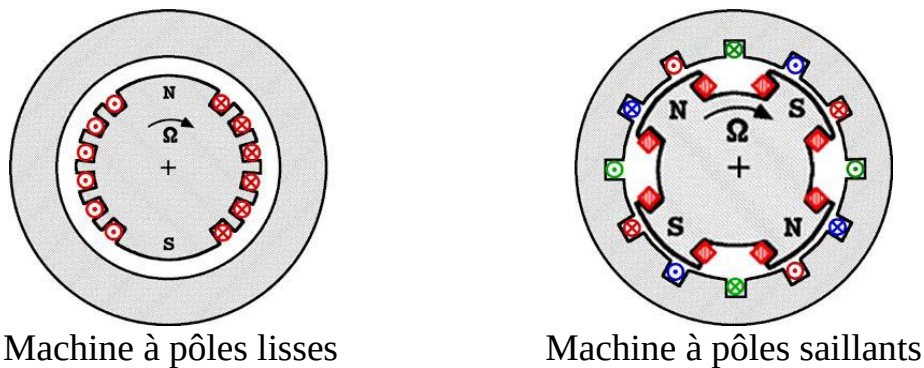


Figure 7.2 : Représentation de deux types de machine synchrones.

Symbole

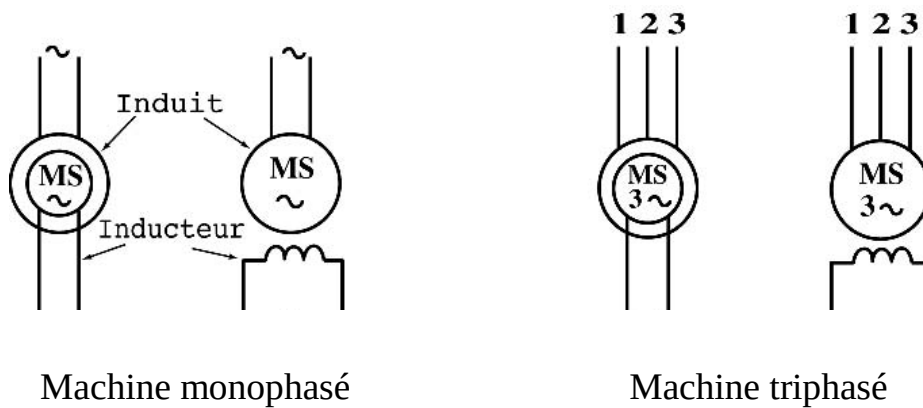


Figure 7.3 : Symbole de la machine synchrone.

7.6. La fém de l'induit

Un enroulement de l'induit (stator) soumis au champ magnétique tournant de l'entrefer est le siège d'une fém. $e(t)$ de valeur efficace E .

$$E = kN\Phi f = kN\Phi p n_s = k'\Phi n_s$$

E : fém. induit [V] ;

k : Coefficient de Kapp (caractéristique de la machine) ;

N : Nombre de conducteurs d'une phase de la machine (1 spire = 2 conducteurs) ;

Φ : Flux maximum à travers un enroulement [Wb] ;

f : Fréquence du courant statorique ;

p : Nombre de paires de pôles ;

n_s : vitesse de rotation [tr/s] ;

Remarques

- les enroulements sont disposés dans le stator de telle façon que la fém. $e(t)$ soit le plus possible de forme sinusoïdale ;
- en triphasé le stator comporte trois enroulements ou phases. On obtient trois fém. $e_1(t)$; $e_2(t)$ et $e_3(t)$ de même valeur efficace E et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$.

7.7. Modes de fonctionnement

La machine synchrone est réversible.

a) Fonctionnement en moteur

Le champ tournant du stator accroche le champ lié au rotor à la vitesse : $n_s = \frac{\omega}{p}$.

b) Fonctionnement en alternateur (génératrice)

Le rotor et son champ sont entraînés par une turbine. Les bobines de l'induit sont alors le siège de fém. alternative de pulsation $\omega = p \cdot n_s$.

7.8. Réaction magnétique de l'induit

En charge, le courant dans l'induit crée un champ magnétique qui modifie les caractéristiques de la machine. C'est ce que l'on nomme la réaction magnétique d'induit.

7.9. Modèle équivalent d'un enroulement

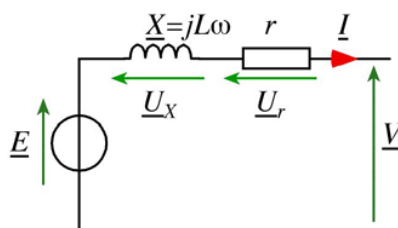


Figure 7.4 : Schéma électrique équivalent d'un enroulement « cas d'alternateur ».

E : fém. à vide [V] ;

$\underline{V}$: Tension aux bornes d'un enroulement de la machine [V];

R : résistance de l'enroulement [Ω] ;

$\underline{X}$: Réactance synchrone [Ω].

Remarques

- l'inductance L du schéma tient compte de l'inductance réelle de l'enroulement et de la réaction magnétique d'induit ;
- le courant est orienté en convention générateur ;
- l'inducteur est équivalent à une résistance (toute l'énergie absorbée à l'inducteur est perdue par effet joule).

Loi des mailles

Loi des mailles avec les grandeurs instantanées : $e(t) = v(t) + u_X(t) + u_R(t)$

$$e = V + RI + L \frac{dI}{dt}$$

On peut écrire en complexe :

$$\underline{E} = \underline{V} + R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$$

Diagrammes de Fresnel

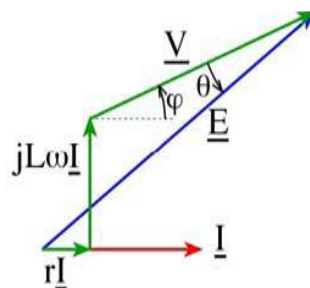


Figure 7.5 : Représentation de Fresnel d'une machine synchrone à pôles lisses et non saturée.

Remarques

- Très souvent $r \cdot I$ est négligé ;
- En traçant le diagramme à l'échelle, il est possible d'en déduire certaines grandeurs ;
- Si la charge est résistive $\varphi = 0$;

Il peut être utile de connaître deux angles :

- Le déphasage φ entre le courant $\underline{I}$ et la tension $\underline{V}$ varie en fonction de la consommation ;
- le décalage interne θ entre $\underline{V}$ et $\underline{E}$.

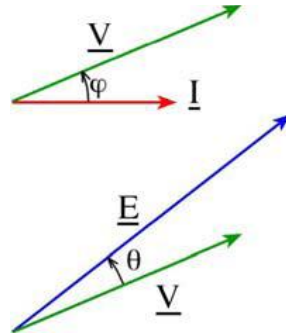


Figure 7.6 : Identification des déphasages.

7.10. Caractéristique à vide d'une machine synchrone

Le point de fonctionnement P se trouve généralement entre les points A et B. Sous le point A, la machine serait sous exploitée. Au-dessus du point B, une forte augmentation de I_e ne produit qu'une faible augmentation de E c'est la saturation de la machine.

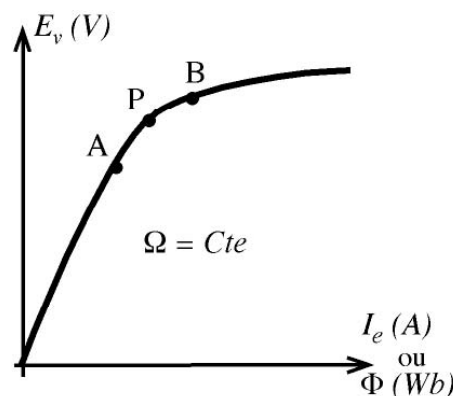


Figure 7.7 : Caractéristique à vide d'une machine synchrone.

7.11. Bilan des puissances d'un alternateur

a) Puissance absorbée

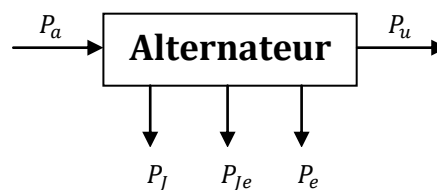


Figure 7.8 : Bilan des puissances d'un alternateur.

La turbine, ou le moteur d'entraînement entraîne l'arbre de l'alternateur donc la puissance absorbée est mécanique :

$$P_a = \Omega_s \cdot T_m = 2\pi n_s T_m$$

Ω_s : Pulsation de rotation en [rad/s] ;

n_s : vitesse en [trs/s] ;

T_m : Couple utile sur l'arbre en [N.m].

Si l'alternateur n'est pas auto-excité il faut encore tenir compte de l'énergie électrique

(En courant continu) absorbée par l'excitation (rotor) ce qui donne la puissance absorbée :

$$P_a = \Omega_s \cdot T_m + U_e \cdot I_e = 2\pi n_s T_m + U_e \cdot I_e$$

b) Puissance utile

En triphasé avec une charge équilibrée de facteur de puissance $\cos \varphi$:

$$P_u = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N \cdot \cos \varphi$$

c) Les pertes

Pertes par effet joule dans l'inducteur

$$P_{Je} = U_e \cdot I_e$$

Pertes par effet joule dans l'induit

$$P_j = 3RI^2$$

Où :

R : est la résistance d'une phase du stator de l'alternateur, ces pertes dépendent de la charge (courant I) donc variable.

Pertes constantes

Pertes mécaniques et pertes fer qui ne dépendent pas de la charge. Comme ces pertes dépendent de la fréquence et de la tension U , elles sont généralement constantes.

d) Le rendement

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{\sqrt{3} \cdot U_N I_N \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot U_N I_N \cos \varphi + \sum \text{pertes}}$$

Remarque

Dans la formule précédente la somme des pertes représente les pertes totales dans le stator et dans le rotor.

7.12. Moteur synchrone

Le schéma équivalent du moteur synchrone est le même que celui de l'alternateur sauf qu'il faut inverser les puissances c'est-à-dire le sens du courant I :

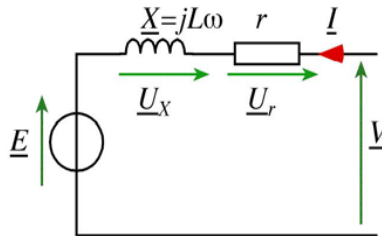


Figure 7.9 : Schéma électrique équivalent d'un enroulement « Cas du moteur ».

$$P_a = \sqrt{3} \cdot U_N I_N \cos \varphi + U_e \cdot I_e$$

$$P_u = \Omega_s \cdot T_m = 2\pi n_s T_m$$

Le moteur synchrone est surtout utilisé comme compensateur synchrone car il peut injecter de la puissance réactive au réseau.

Pour varier la vitesse d'un moteur synchrone, il faut varier la fréquence des courants statoriques :

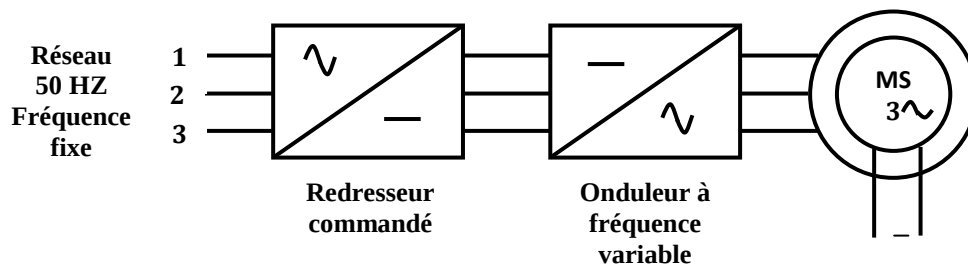


Figure 7.10 : Moteur synchrone utilisé comme compensateur synchrone.

7.13. Stabilité

Plus la puissance échangée augmente, plus le décalage interne δ augmente

$$P = 3VI \cos \varphi = T\Omega$$

En observant le diagramme de Fresnel, on constate que les projections: $XI \cos \varphi$ et $-E \sin \delta$ sont égales.

On en déduit que $P = -3V(E/X) \sin \delta$ et le domaine de fonctionnement possible correspond à $|\delta|$ inférieur à 90° .

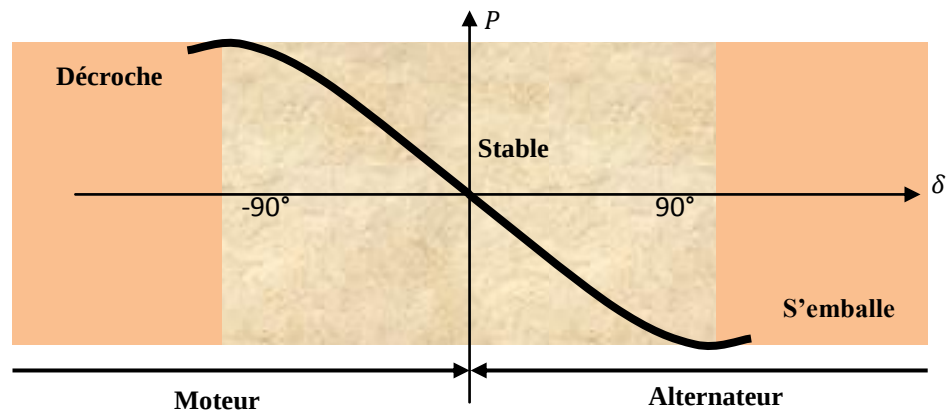


Figure 7.11 : Stabilité de la machine synchrone.

7.14. Les machines asynchrones

La machine asynchrone, connue également sous le terme d'origine anglo-saxonne de « machine à induction », est une machine à courant alternatif sans alimentation électrique du rotor. Le terme anglais provient des courants induits dans le rotor par induction électromagnétique. Le terme « asynchrone » provient du fait que la vitesse de ces machines n'est pas forcément synchronisée avec la fréquence des courants qui les traversent.

La machine asynchrone a longtemps été fortement concurrencée par la machine synchrone dans les domaines de forte puissance, jusqu'à l'avènement de l'électronique de puissance. On la retrouve aujourd'hui dans de nombreuses applications, notamment dans le transport (métro, trains, propulsion des navires), de l'industrie (machines-outils), dans l'électroménager, etc. Elles étaient à l'origine uniquement utilisées en moteur mais, toujours grâce à l'électronique de puissance, elles sont de plus en plus souvent utilisées en génératrice par exemple dans les éoliennes.

En 2018, une équipe d'inventeurs bulgares dirigée par Alexander Hristov a développé une version plus efficace des moteurs asynchrones, dans laquelle la partie extérieure du rotor avec des enroulements électriques est séparée du noyau ferromagnétique. La partie ferromagnétique intérieure du rotor est montée au moyen de roulements sur l'arbre du moteur et peut tourner séparément de la partie extérieure du rotor. Ainsi, la partie extérieure du rotor avec l'arbre tourne de manière asynchrone comme dans les moteurs asynchrones traditionnels, et la partie intérieure du rotor tourne de manière synchrone avec le champ magnétique généré par le stator, c'est-à-dire comme le rotor d'un moteur synchrone. De cette manière, réduit les pertes dues à la génération de courants de Foucault et à la magnétisation continue du noyau ferromagnétique du rotor.

Pour fonctionner en monophasé, ces machines nécessitent un système de démarrage, condensateur en série sur l'un des enroulements (P max. 6 kW) ou bague de démarrage (P max. 400 W). Les moteurs à bague de démarrage sont employés dans les hottes aspirantes, pompes de vidange de machine à laver et ventilateurs car le couple de démarrage est extrêmement faible. Pour les applications de puissance, au-delà de 6 kW, les moteurs asynchrones sont uniquement alimentés par des systèmes de courants triphasés.

Constitution et principe de fonctionnement

a) Stator (inducteur)

Il est constitué de trois enroulements (bobines) parcourus par des courants alternatifs triphasés et possède p paires de pôles.

Les courants alternatifs dans le stator créent un champ magnétique B tournant à la pulsation de :

$$n_s = \frac{f}{p}$$

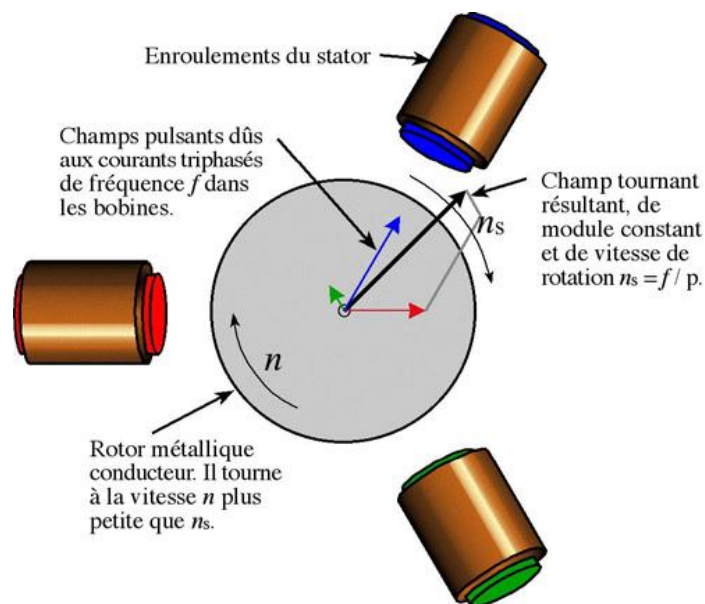


Figure 7.12 : Représentation de la machine asynchrone.

b) Rotor (induit)

Le rotor n'est relié à aucune alimentation. Il tourne à la vitesse de rotation Ω .

b.1) Rotor à cage d'écureuil

Il est constitué de barres conductrices très souvent en aluminium. Les extrémités de ces barres sont réunies par deux couronnes également conductrices. On dit que le rotor est en court-circuit. Sa résistance électrique est très faible.

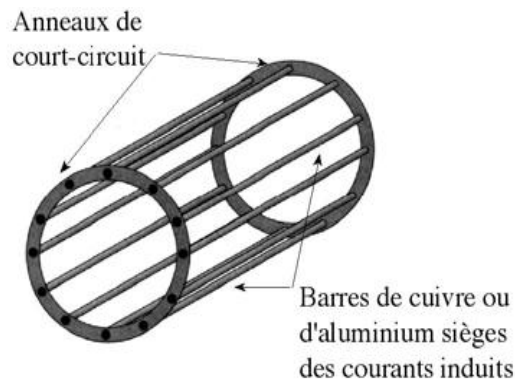


Figure 7.13 : Schéma de principe d'une cage d'écureuil.

b.2) Rotor bobiné

Les tôles de ce rotor sont munies d'encoches où sont placés des conducteurs formant des bobinages. On peut accéder à ces bobinages par l'intermédiaire de trois bagues et trois balais. Ce dispositif permet de modifier les propriétés électromécaniques du moteur.

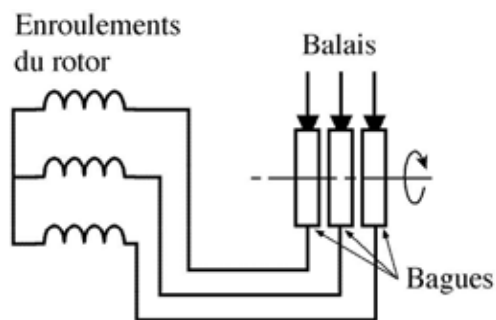


Figure 7.14 : Schéma équivalent d'un rotor bobiné.

c) Courants induits

Des courants induits circulent dans le rotor.

d) Entrefer

L'entrefer est l'espace entre le stator et le rotor.

e) Glissement

Par définition, le glissement est l'écart relatif de la vitesse de rotation par rapport à la vitesse de synchronisme du champ tournant.

Notons Ω , la vitesse angulaire de rotation et $n = \frac{\Omega}{2\pi}$, sa mesure en tours par seconde :

$$\Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$$

Est la vitesse angulaire du champ tournant, et

$$n_s = \frac{60 \cdot \Omega_s}{2\pi}$$

Cette même vitesse exprimée tours par minute.

Ce glissement g va dépendre de la charge.

$$g = \frac{n_s - n}{n_s} \cdot 100$$

Avec :

n_s : vitesse de rotation de synchronisme du champ tournant [trs/s] ;

n : vitesse de rotation du rotor [trs/s].

Remarques

- $g = 0$ pour $n = n_s$, il n'y a pas de couple ;
- $g < 0$ pour $n > n_s$, la machine fonctionne en génératrice asynchrone ;
- $g > 0$ pour $n < n_s$, la machine fonctionne en moteur ;
- $g = 1$ pour $n = 0$, le moteur est à l'arrêt, ou à l'instant du début du démarrage ;
- $g > 1$ pour $n < 0$, la vitesse de rotation est inverse de celle du champ tournant ; le moteur fonctionne en freinage.

Symboles du moteur asynchrone

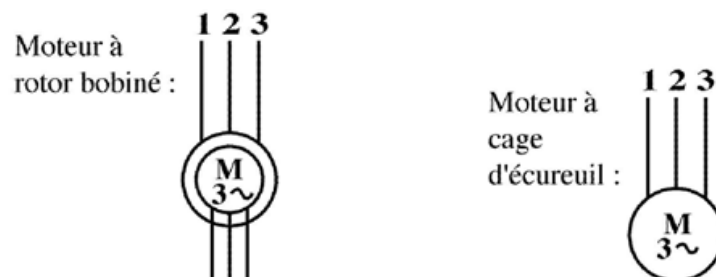


Figure 7.15 : Symbole du moteur asynchrone.

Fonctionnement du moteur asynchrone

a) Fonctionnement à vide

A vide le moteur n'entraîne pas de charge. Conséquence : le glissement est nul, le moteur tourne à la vitesse de synchronisme. A vide : $g = 0$ et donc :

$$n_0 = n_s.$$

Autres observations :

- le facteur de puissance à vide est très faible ($< 0,2$) et le courant absorbé reste fort (P est petit et Q est grand). On parle alors de courant réactif ou magnétisant (ils servent à créer le champ magnétique).

b) Fonctionnement en charge

Le moteur fournit maintenant de la puissance active, le stator appelle un courant actif.

Remarque

Le moteur asynchrone est capable de démarrer en charge.

Caractéristique mécanique $T_u = f(n)$

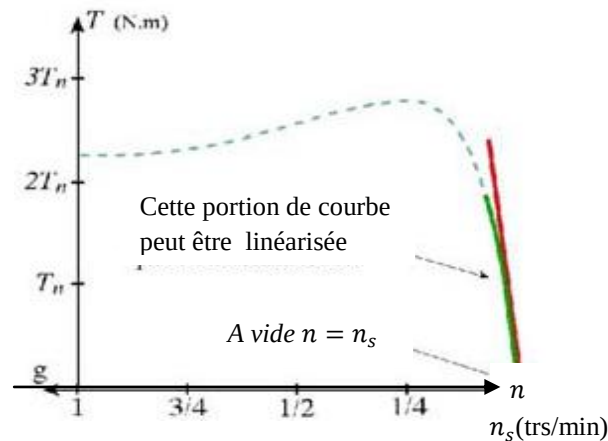


Figure 7.16 : Caractéristique mécanique $T_u = f(n)$ de la machine asynchrone.

Caractéristique mécanique en fonction du glissement

L'axe des abscisses de la caractéristique mécanique peut être représenté par le glissement.

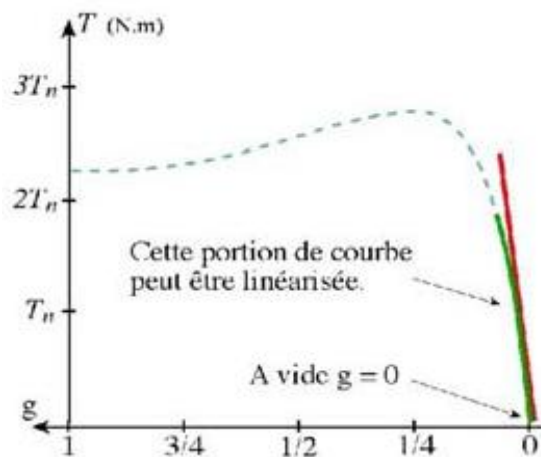


Figure 7.17: Caractéristique mécanique $T_u = f(g)$ de la machine asynchrone.

7.15. Machines auto synchrones

Ce sont des machines synchrones dont le démarrage se fait en asynchrone et lorsque la fréquence de rotation est proche du synchronisme, le rotor s'accroche au champ statorique en se synchronisant sur la vitesse du champ magnétique.

L'autopilotage (contrôle de la fréquence statorique en fonction de la vitesse rotorique) tend à faire disparaître cette technologie.

7.16. Plaque signalétique du moteur

a) Point de fonctionnement

C'est le point d'intersection des caractéristiques $T_u = f(n)$ du moteur et de la charge.

T_u : Couple utile du moteur

T_r : Couple résistant

La courbe du couple résistant dépend de la charge.

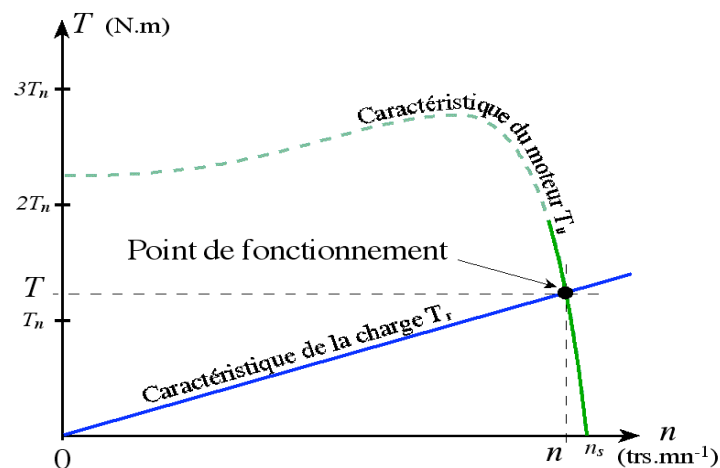


Figure 7.18 : Point de fonctionnement de la machine asynchrone.

7.17. Série d'exercices avec solutions pour le chapitre 07

Exercice 7.1

Un alternateur triphasé dont les enroulements de stator sont couplés en étoile, fournit en charge nominale, un courant $I = 200 \text{ A}$ sous une tension entre phases $U = 5 \text{ kV}$ lorsque la charge est inductive et de facteur de puissance est égal à 0,87. La résistance d'un enroulement statorique vaut $R = 0,20 \Omega$. La vitesse de rotation de la roue polaire est $n_s = 750 \text{ tr/min}$.

Les tensions produites ont pour fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. L'ensemble des pertes constantes et par effet Joule dans le rotor atteint 55 kW . Un essai à vide, à la fréquence de rotation nominale, a donné les résultats suivants pour lesquels I_e est l'intensité du courant d'excitation et E_0 la valeur efficace de la tension entre phases.

$J(\text{A})$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E_0(\text{V})$	0	1050	2100	3150	4200	5200	5950	6550	7000	7300	7500

Un essai en court circuit a donné, pour un courant d'excitation d'intensité $I_e = 40 \text{ A}$, un courant dans les enroulements du stator $I_{CC} = 2,5 \text{ kA}$.

1. Quel est le nombre de pôles du rotor.
2. Calculer la réactance synchrone X_s de l'alternateur lorsqu'il n'est pas saturé.

On supposera X constante pour la suite.

3. En déduire la f.e.m. synchrone E au point de fonctionnement nominal.
4. Calculer la puissance nominale fournie par l'alternateur et le rendement au point de fonctionnement nominal.

Solution de l'exercice 7.1

1. Le nombre de pôles du rotor est : 8.
2. La réactance synchrone : $X_s = 0,95 \Omega$.
3. Au point de fonctionnement nominal, la force électromotrice : $E = 3023 \text{ V}$.
4. La puissance fournie par l'alternateur est : $E = 1506,88 \text{ kW}$. Le rendement est : $\eta = 0,95$.

Exercice 7.2

Le rotor d'un alternateur triphasé, 50 Hz , tourne à la vitesse de 750 tr/min ; son stator comporte 120 encoches régulièrement réparties, chacune d'elles contient 4 conducteurs. Toutes les encoches sont utilisées, les 3 phases sont couplées en

étoile et leur résistance est négligée dans le problème. Le coefficient de Kapp est 2,14. On donne le flux par pôle en fonction de l'excitation :

$J(A)$	8	10	11,8	15,4	17	20	26	34
$\Phi(wb)$	0,05	0,061	0,07	0,085	0,09	0,097	0,105	0,108

1. Quel est le nombre de pôles de l'alternateur.
2. Quelle est la tension nominale à vide pour $I_e = 15,4 A$.
3. L'alternateur débite $150 A$ dans une charge purement inductif sous la tension de $962 V$ entre fils de ligne avec une excitation de $15,4 A$. Calculer la réactance synchrone.
4. L'alternateur débite $80 A$ avec un facteur de puissance de $0,8 AV$, calculer la tension simple de l'alternateur sachant que le courant d'excitation reste égale à $15,4 A$. Calculer alors la puissance fournie à la charge.
5. Refaire la même chose pour un récepteur de facteur de puissance $0,8 AR$.
6. On souhaite obtenir une tension simple de $1270 V$ en sortie de l'alternateur en débitant $80 A$ avec un facteur de puissance de $0,8 AR$, déterminer graphiquement la f.e.m à vide E_0 , déduire le courant d'excitation correspondant.

Solution de l'exercice 7.2

1. Le nombre de pôles de l'alternateur est :

$$2P = \frac{2.60.f}{n_s} = 8 \text{ poles}$$

2. La tension à vide est : $E_0 = 2,14.N.\Phi.f = 1198 V$.
3. La réactance synchrone:

$$X_s = \frac{(E_0 - V)}{I} = 4,28 \Omega$$

4. La tension $V = \sqrt{E_0^2 - (X_s.I.\cos\varphi)^2 + (X_s.I.\sin\varphi)^2} = 1386 V$
5. Lorsque $\cos\varphi = 0,8 AR$, la tension $V = 928 V$.
6. La force électromotrice/

$$E_0 = \sqrt{(V + X_s.I.\sin\varphi)^2 + (X_s.I.\cos\varphi)^2} = 1531 V.$$

Le flux par pôle est :

$$\Phi = \frac{E_0}{2,14.N.f} = 0,09 \text{ wb} \Rightarrow I_e = 17 A$$

Exercice 7.3

Une machine synchrone triphasée, à 6 pôles par phase, est prévue pour fonctionner sur un réseau: 220 V/380 V, 50 HZ.

Un essai à vide à 50 HZ de cette machine a donné les valeurs suivantes :

$J(A)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
$E_{composée}(V)$	0	136	262	349	411	465	504	534	563	588	611	650

La résistance du stator a été mesurée entre deux bornes du stator et a donné : $R_m = 1,4 \Omega$.

Un essai en débit réactif a donné: $J = 35 A$, $J = 20 A$, $U = 291 V$.

1. A quelle vitesse, doit-on entraîner cette machine pour que la fréquence soit de 50 HZ.
2. Déterminer la résistance R et la réactance synchrone X_s .
3. La machine est utilisée en alternateur débitant sur le réseau. Elle débite son courant nominal 20 A avec le meilleur facteur de puissance possible. Déterminer le courant d'excitation correspondant à ce point de fonctionnement.
4. On utilise maintenant la machine synchrone en compensatrice synchrone. Une installation absorbe une puissance $P_2 = 10 kW$ avec un $\cos \varphi = 0,7$ et on souhaite relever le facteur de puissance à 1. Déterminer alors le courant d'excitation.

Solution de l'exercice 7.3

1. On doit tourner cette machine à la vitesse de synchronisme $n_s = 1000 \text{ tr/min}$.
2. Le stator est couplé en étoile, la résistance de chaque enroulement statorique est $R = 0,7 \Omega$. L'essai en débit réactif :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow X_s = \frac{(\sqrt{E_0^2 - (RI)^2} - V)}{I} = 0,85 \Omega$$

3. Le facteur de puissance est égale à 1 :

$$E_0 = \sqrt{(V + R \cdot I)^2 + (X_s \cdot I)^2} = 235 V \Rightarrow I_e = 34 A$$

4. Pour relever le facteur de puissance à 1, il faut que le moteur synchrone fournit une puissance réactive $Q = -10202 \text{ VAR}$. Le courant est :

$$I = \frac{Q}{(-\sqrt{3} \cdot U)} = 9,3 A \Rightarrow E_0 = V + X_s \cdot I = 228 V \Rightarrow I_e = 33,5 A$$

Exercice 7.4

La caractéristique à vide $E = f(I_e)$ d'un alternateur triphasé tournant 1500 tr/min . peut être assimilée à une droite passant par l'origine et par le point de coordonnées $I_e = 2 \text{ A}$ et $E = 100 \text{ V}$. Cet alternateur est couplé en étoile et on maintient la tension entre deux bornes du stator à 400 V par action sur l'intensité I_e . La fréquence des grandeurs statoriques est 50 HZ . Le bobinage statorique comporte 1200 conducteurs au total. La résistance d'un enroulement statorique est $0,03 \Omega$ et la réactance synchrone supposée constante est égale à 5Ω . Le coefficient de Kapp de cet alternateur vaut 2,13.

1. Quel est le nombre de pôles de cet alternateur.
2. Quelle est l'intensité I_e du courant d'excitation lorsque l'alternateur est à vide.
3. Calculer le flux maximal à travers une spire du stator.
4. A vide, l'alternateur reçoit une puissance mécanique $P_0 = 200 \text{ W}$. Sachant qu'il est excité de manière indépendante, En quel type de puissance va se transformer P_0 à quel(s) type(s) de perte(s) va t-il correspondre.
5. L'alternateur débite maintenant un courant d'intensité 15 A dans une charge inductive de facteur de puissance 0,85.
 - a. Calculer quelle doit être la nouvelle valeur de E , puis celle de I_e .
 - b. Calculer le rendement sachant que la roue polaire a une résistance $R = 2,4 \Omega$.

Solution de l'exercice 7.4

1. Le nombre de pôles de l'alternateur est: 4.
2. Lorsque l'alternateur fonctionne à vide, le courant d'excitation est : $I_e = 4,6 \text{ A}$.
3. Le flux maximal à travers une spire est : $\Phi_{max} = 5,3 \text{ mwb}$.
4. La puissance P_0 sera transformée en pertes constantes.
5. L'alternateur alimente une charge de facteur de puissance 0,85.
 - a. La force électromotrice est : $E = 281$. Le courant d'excitation correspondent est : $I_e = 5,63 \text{ A}$.
 - b. Le rendement de l'alternateur est : $\eta = 0,97$.

Exercice 7.8

Un alternateur triphasé dont les enroulements du stator sont couplés en étoile, est entraîné à sa vitesse de rotation $n = 1500 \text{ tr/min}$. Sa puissance apparente nominale est : $S_N = 3,2 \text{ kVA}$.

La tension entre phases a pour valeur efficace : $U_N = 220 \text{ V}$ et pour fréquence 50 Hz .

Un essai à vide, à la vitesse de rotation nominale, a donné les résultats suivants : E_0 est la tension entre phases.

$I(A)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,52	0,72	0,9
$E_0(V)$	0	40	80	120	160	200	240	260

Pour un courant d'excitation $I_e = 0,40 \text{ A}$, un essai en court circuit a montré que le courant dans un enroulement statorique a pour intensité efficace $I_{CC} = 8 \text{ A}$. La résistance du stator est négligeable.

1. Quel est le nombre de pôles du rotor.
2. Calculer l'intensité efficace du courant nominal que peut débiter l'alternateur.
3. Déterminer la réactance synchrone.
4. L'alternateur débite un courant d'intensité efficace $I = 8,4 \text{ A}$ dans une charge inductive de facteur de puissance 0,5. Le courant d'excitation étant égal à $I_e = 0,9 \text{ A}$, Calculer la tension de l'alternateur.

Solution de l'exercice 7.8

1. Le nombre de pôles de rotor est : 4.
2. Le courant nominal qui peut débiter l'alternateur est : $I = 8,4 \text{ A}$.
3. La réactance synchrone : $X_S = 11,5 \Omega$.
4. La tension de l'alternateur est : $V = 59 \text{ V}$.

Exercice 7.9

Un moteur asynchrone triphasé est alimenté par un réseau $220 \text{ V}/380 \text{ V}$, 50 Hz .

1. La plaque signalétique du moteur indique $380 \text{ V}/660 \text{ V}$; comment devra-t-on coupler cette machine au réseau.
2. La mesure de la puissance électrique absorbée par le moteur lors de l'essai à vide a donné : puissance active $P_0 = 600 \text{ W}$, facteur de puissance $\cos \varphi_0 = 0,21$. Déterminer la valeur efficace de l'intensité des courants dans les fils de lignes.

3. Au cours d'un essai en charge, on a mesuré les puissances active et réactive absorbées. On a trouvé : $P = 3 \text{ kW}$ et $Q = 2,1 \text{ kVAR}$. Déterminer le facteur de puissance $\cos \varphi$, puis l'intensité efficace du courant circulant dans un fil de ligne.
4. Sachant que le moteur est tétrapolaire, calculer sa vitesse de synchronisme. Lors de l'essai en charge, la vitesse de rotation était de 1470 tr/min ; en déduire le glissement du moteur.
5. La mesure de la puissance mécanique utile du moteur a donné $P_u = 2,38 \text{ kW}$. Calculer le moment du couple utile et le rendement du moteur.

Solution de l'exercice 7.9

1. La tension supportée par chaque enroulement est égale à la tension composée du réseau. Donc le couplage choisi est triangle
2. Le courant de ligne à vide est:

$$I_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi_0} = 4,34 \text{ A}$$

3. Le facteur de puissance en charge est : $\cos \varphi = \cos \left(\arctg \left(\frac{Q}{P} \right) \right) = 0,82$.

Le courant de ligne est :

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi} = 5,5 \text{ A}$$

4. La vitesse de synchronisme est:

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p} = 1500 \text{ tr/min}$$

Le glissement est : $g = 0,02$.

5. Le couple utile est :

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = 15,5 \text{ N.m}$$

Le rendement est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,8$$

Exercice 7.10

Un moteur asynchrone triphasé tétrapolaire est alimenté par un réseau $380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$. La résistance du stator mesurée entre deux fils de phase est de $0,9 \Omega$. En fonctionnement à vide, le moteur absorbe un courant de $9,1 \text{ A}$ et une puissance de 420 W .

1. Déterminer les pertes fer du stator et les pertes mécaniques en les supposant égales.
2. En charge nominale, la puissance utile sur l'arbre du rotor est de 4 kW , le facteur de puissance est $0,85$ et le rendement est égal à $0,87$. Déterminer :
 - a. L'intensité de courant absorbé.
 - b. Les pertes joule au stator.
 - c. Les pertes joule au rotor.
 - d. Le glissement et la vitesse de rotation.
 - e. Le couple utile.

Solution de l'exercice 7.10

1. La puissance absorbée à vide est : $P_{a0} = P_{js0} + P_{fs} + P_{mec}$ donc :

$$P_{fs} = P_{mec} = \frac{(P_{a0} - P_{js0})}{2} = 154 \text{ W}$$

2. Fonctionnement nominal :

- a. Le courant absorbé :

$$I = \frac{P_u}{(\eta \cdot \sqrt{3} \cdot U \cdot \cos\varphi)} = 8,2 \text{ A}$$

- b. Les pertes joule statoriques :

$$P_{js} = \frac{3}{2} \cdot R_m \cdot I^2 = 90 \text{ W}$$

- c. Les pertes joule au rotor : $P_{jr} = P_a - (P_u + P_{js} + P_{fs} + P_{mec}) = 200 \text{ W}$.

- d. Le glissement:

$$g = \frac{P_{jr}}{(P_a - P_{fs} + P_{js})} = 0,046$$

La vitesse de rotation : $n = n_s(1 - g) = 1431 \text{ tr/min}$

- e. Le couple utile :

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = 26,7 \text{ N.m}$$

Exercice 7.11

Un moteur asynchrone triphasé, à rotor en court circuit, possède des enroulements statoriques tétrapolaires branchés en étoile. Sa plaque signalétique porte les indications suivantes :

- Tension d'alimentation $380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$
- Puissance utile: $3,7 \text{ kW}$
- Vitesse de rotation: 1440 tr/min
- Facteur de puissance: $0,8$

A la charge nominale, le moteur absorbe un courant en ligne d'intensité 8 A, La résistance mesurée à chaud entre deux bornes du stator est de $0,9 \Omega$. Au démarrage, le moteur développe un couple utile de 85 N.m . On considère que la caractéristique mécanique $T_u = f(n)$ est une droite dans sa partie utile et on négligera les pertes fer rotoriques ainsi que les pertes mécaniques.

Déterminer :

1. La vitesse de synchronisme et le glissement.
2. La puissance absorbée et le couple utile.
3. Les pertes fer au stator et les pertes joule au rotor.
4. Entre quelles valeurs varie le couple utile au démarrage lorsque la tension d'alimentation varie de $\pm 5 \text{ V}$.

Solution de l'exercice 7.11

1. La vitesse de synchronisme :

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{P} = 1500 \text{ tr/min}$$

Et le glissement :

$$g = 0,04.$$

2. La puissance absorbée : $P_a = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = 4212 \text{ W}$

Le couple utile :

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = 25 \text{ N.m}$$

3. Les pertes joule au stator :

$$P_{js} = 3R \cdot I^2 = 173 \text{ W}$$

Les pertes mécaniques sont négligeables :

$$P_{jr} = P_u \cdot \left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) = 154 \text{ W}$$

Les pertes fer statoriques :

$$P_{fs} = P_a - (P_u + P_{js} - P_{jr}) = 185 \text{ W}$$

4. On sait que le couple de démarrage :

$$C_d = \frac{\left(\frac{3}{\pi} \right) \cdot r_2}{(r_2^2 + (L_2 \cdot \omega)^2) \cdot V_1^2}$$

La tension $V_{1min} = 215 \text{ V} \Rightarrow C_{dmin} = 85 \cdot \left(\frac{215}{220} \right)^2 = 81 \text{ N.m}$

La tension $V_{1max} = 225 \text{ V} \Rightarrow C_{dmax} = 85 \cdot \left(\frac{225}{220} \right)^2 = 89 \text{ N.m}$

Exercice 7.12

Un moteur asynchrone tétrapolaire, stator monté en triangle, fonctionne dans les conditions suivantes : tension entre phases: $U = 380\text{ V}$, fréquence $f = 60\text{ Hz}$, puissance utile est 5 kW , vitesse de rotation $n = 1710\text{ tr/min}$, $\cos \varphi = 0,9$ et intensité en ligne $I = 10\text{ A}$. La résistance du stator mesurée entre deux fils de phase est de $0,8\ \Omega$.

On admettra pour ce fonctionnement, que les pertes dans le fer sont égales aux pertes par effet joule dans le stator. Pour ce régime de fonctionnement, calculer :

1. Le glissement.
2. Le couple utile.
3. L'intensité de courant dans chaque phase du stator.
4. Les pertes par effet joule au stator.
5. La puissance absorbée par le moteur.
6. Les pertes joule du rotor.
7. Le rendement du moteur.

Solution de l'exercice 7.12

1. Le glissement

$$g = \frac{(n_s - n)}{n_s} = 0,05$$

2. Le couple utile :

$$C_u = \frac{P_u}{\Omega} = 28\text{ N.m}$$

3. Le courant dans chaque phase du stator est :

$$J = I = 10\text{ A}$$

4. Les pertes par effet joule au stator :

$$P_{js} = \frac{3}{2} \cdot R_m \cdot I^2 = 120\text{ W}$$

5. La puissance absorbée par le moteur est :

$$P_a = \sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi = 5917\text{ W}$$

6. Les pertes joule rotorique :

$$P_{jr} = g \cdot (P_a - (P_{js} + P_{fs})) = 284\text{ W}$$

7. Le rendement du moteur est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = 0,68$$

Exercice 7.13

Sur la plaque signalétique d'un moteur asynchrone triphasé à cage, on lit les indications suivantes: $220\text{ V}/380\text{ V}$; 50 Hz ; $70/40\text{ A}$; $\cos \varphi = 0,86$ et $n = 725\text{ tr/min}$.

Sachant que la résistance d'un enroulement du stator est $R_1 = 0,15\ \Omega$, que les pertes fer du stator sont de 500 W et que la tension du réseau est de 380 V entre phases, déterminer :

1. Le mode de couplage des enroulements du stator.
2. La vitesse de synchronisme et le nombre de paires de pôles par phase.
3. Les pertes par effet joule du stator.
4. Le glissement.
5. Les pertes par effet joule dans le rotor.
6. Le rendement du moteur.

Les pertes mécaniques sont négligeables.

Solution de l'exercice 7.13

1. La tension supportée par chaque enroulement est égale à la tension simple du réseau triphasé. Les enroulements statoriques doivent être couplés en étoile.
2. La vitesse de synchronisme: $n_s = 750\text{ tr/min} \Rightarrow P = 4$
3. Les pertes par effet joule au stator : $P_{js} = 3 \cdot R_1 \cdot J_1^2 = 720\text{ W}$.
4. Le glissement :

$$g = \frac{(n_s - n)}{n_s} = 0,033$$

5. Les pertes joule rotorique : $P_{jr} = g \cdot (P_a - (P_{js} - P_{fs})) = 707\text{ W}$
6. Le rendement du moteur est : $\eta = 0,913$

Références bibliographiques

- J.-P. Caron, J.P. Hautier «Modélisation et commande de la machine asynchrone», Technip, 1995.
- A. Fouillé « Electrotechnique à l'usage des ingénieurs ; machines électriques à courant continu. Application de l'électronique aux machines », Dunod 1973.
- A. Fouillé, C. Naudet « Problèmes d'électricité générale à l'usage des ingénieurs », Dunod.
- A. Fouillé, « Problèmes d'électrotechnique à l'usage des ingénieurs : machines électriques », Dunod.
- G. Grellet, G. Clerc : «Actionneurs électriques, Principes, Modèles, Commandes», Eyrolles, 1996.
- J. Lesenne, F. Notelet, G. Séguier : « Introduction à l'électrotechnique approfondie», Technique et Documentation, 1981.
- Paul C. Krause, Oleg Wasyzcuk, Scott S, Sudhoff, «Analysis of Electric Machinery and Drive Systems», John Wiley, Second Edition, 2010.
- P S Bimbhra, «Generalized Theory of Electrical Machines», Khanna Publishers, 2008.
- A.E, Fitzgerald, Charles Kingsley, Jr, and Stephan D, Umanx, « Electric Machinery», Tata McGraw Hill, 5th Edition, 1992.
- Th. Wildi, G. Sybille « électrotechnique», 2005.
- M Retif « Commande Vectorielle des machines asynchrones et synchrone », INSA, cours Pedg. 2008.
- R. Abdessemed « Modélisation et simulation des machines électriques», ellipses, 2011.
- A. Mansour, « ELECTROTECHNIQUE», Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul, 2014.
- Chrestophe Palermo «Précis d'électrotechnique », DUNOD, Paris , 2012.
- Luc Lasne , «cours et exercices corrigés électrotechnique », DUNOD ,Paris , 2008.
- Real –Paul Bouchard et Guy Olivier, « électrotechnique, Presses internationales Polytechnique, 1999.
- R.K.RAJPUT,«ELECTRICAL ENGINEERING », LAXMI PUBLICATIONS , 2007.